МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЯ ОБРАЗОВАНИЯ «ВИТЕБСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П.М. МАШЕРОВА»

Факультет математики и информационных технологий

Кафедра геометрии и математического анализа

Допущена к защите
«3» июня 2017 г.
Заведующий кафедрой
______М.Н. Подоксенов

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

РАЗВИТИЕ МЕТОДОВ ПРИБЛИЖЕННОГО НАХОЖДЕНИЯ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ

Специальность 1-31 80 03 Математика

Чернявский Михаил Михайлович,
магистрант

Научный руководитель:
Трубников Юрий Валентинович,
доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры геометрии и математического анализа

Витебск, 2017

Реферат

Магистерская диссертация 113 с., 49 источников, 2 рис., 3 прил.

НЕЛИНЕЙНЫЕ МАТРИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ, МЕТОД НЬЮТОНА-КАНТОРОВИЧА, ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ ПОЛИНОМ, МЕТОД МАЖОРАНТНЫХ УРАВНЕНИЙ, ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ, СИСТЕМА КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

Объект исследования – нелинейные матричные уравнения.

Предметы исследования – итерационный метод Ньютона-Канторовича и метод мажорантных уравнений для решения матричных нелинейных уравнений

Цель работы – разработать алгоритмы приближенного нахождения решений нелинейных матричных уравнений.

Методы исследования: теоретический анализ литературы, методы функционального и математического анализа, численные методы решения уравнений, математическое моделирование.

Элементы новизны: разработаны новые удобные алгоритмы решения нелинейных матричных уравнений, основанные на использовании метода Ньютона-Канторовича и метода мажорантных уравнений.

Теоретическая и практическая значимость: разработанные алгоритмы решения нелинейных матричных уравнений является удобным в программировании и эффективным при исследовании матричных нелинейных уравнений.

Публикация результатов: результаты, полученные в ходе выполнения магистерской диссертации, опубликованы в виде тезисов IV и V Международных научно-практических конференций студентов и магистрантов «Молодость. Интеллект. Инициатива», Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «X Машеровские чтения», а также международной научной конференции «XII Белорусская математическая конференция».

2.4.3 Приближенное нахождение решений кубических матричных уравнений 52
2.5 Примеры решения матричных полиномиальных уравнений методом Ньютона-Канторовича 54
2.5.1 Приближенное нахождение квадратных корней из матриц 54
2.5.2 Примеры нахождения корней *n*-й степени из матриц для случая n>2 66
2.5.3 Примеры приближенного нахождения решений квадратных матричных уравнений 73
2.5.4 Примеры приближенного нахождения решений кубических матричных уравнений по методу Ньютона-Канторовича 83
Краткие выводы по главе 2 87
3 Метод мажорантных уравнений для решения нелинейных матричных уравнений 90
3.1 Краткая теория метода мажорантных уравнений Л. В. Канторовича 90
3.2 Примеры использования метода мажорантных уравнений для решения матричных нелинейных уравнений 97
Краткие выводы по главе 3 104
Заключение 105
Список использованных источников 109
Приложение А 114
Приложение Б 119
Приложение В 128

Введение

Нелинейные матричные уравнения в настоящее время возникают в различных приложениях. Квадратные матричные уравнения встречаются при исследовании дифференциальных уравнений второго порядка, возникающих в теории колебаний [7, с. 135]. В теории управления и контроля возникают различные алгебраические уравнения Риккати являющиеся также частным случаем квадратного матричного уравнения [3, с. 143]. Полиномиальные матричные уравнения возникают, например, в цепях Маркова [14, 42].

Несмотря на то, что матрицы были введены в математику более 300 лет назад, широкое исследование нелинейных матричных уравнений началось относительно недавно (около сорока лет назад) [4]. Этому способствовало развитие аппарата функционального анализа, а также быстрый рост вычислительной способности компьютерной техники, что позволило изучать различные численные методы решений таких уравнений.

Прямых методов решения матричных нелинейных уравнений в настоящее время существует достаточно мало. Попытки обобщения формул решения обычных скалярных уравнений на случай матричных уравнений в большинстве случаев оказались неудачными вследствие того, что операция умножения матриц некоммутативна, поскольку для матричных уравнений в общем случае не выполняются свойства, характерные для аналогичного скалярного уравнения. Например, решение квадратного матричного уравнения (0.1) по известной всем со школы формуле (0.2) будет верным только в случае, если матрицы B и C коммутируют и существует квадратный корень из выражения B^2-4C [30].

$$X^2 + BX + C = 0; \qquad (0.1)$$

$$X = -\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}\left(B^2 - 4C\right)^{1/2}. \qquad (0.2)$$

Существующие в настоящее время численные алгоритмы решения матричных нелинейных уравнений, как правило, применимы к ограниченным классам уравнений, являются времязатратными и неудобными в программировании.

Поэтому разработка новых более удобных методов решения матричных нелинейных уравнений и их модификаций является актуальной.

Открытым также остаётся вопрос о существовании решения произвольного нелинейного матричного уравнения. Рассмотрим простейший пример такого уравнения (0.3):

$$X^2 = A, \tag{0.3}$$

где $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. На первый взгляд кажется странным то, что уравнение (0.3) решений не имеет. Данный факт несложно доказать методом от противного, что подробно сделано в подразделе 1.1.2.

Объектом исследования в настоящей магистерской диссертации являются нелинейные матричные уравнения.

Предметы исследования – итерационный метод Ньютона-Канторовича и метод мажорантных уравнений для решения матричных нелинейных уравнений.

Методы исследования: теоретический анализ литературы, методы функционального и математического анализа, численные методы решения уравнений, математическое моделирование.

Таким образом, в данной магистерской диссертации была поставлена **цель** – разработать алгоритмы приближенного нахождения решений нелинейных матричных уравнений.

В ходе анализа цели работы первоначально возникли следующие **задачи**:

1) осуществить поиск и отбор литературных источников, касающихся темы исследования;

2) ознакомиться с существующими методами решения матричных нелинейных уравнений, выявить их преимущества и недостатки.

В процессе выполнения этих задач было установлено, что существующие алгоритмы применения метода Ньютона-Канторовича для решения матричных нелинейных уравнений [15–19, 21, 22, 24–33, 35–38, 40, 43–47] являются времязатратными и неудобными в применении, что нивелирует их универсальность. Поэтому возникли ещё следующие **задачи**:

3) получить удобный алгоритм применения итерационного метода Ньютона-Канторовича приближенного решения нелинейных операторных уравнений в банаховом пространстве для различных классов матричных уравнений;

4) осуществить адаптацию метода мажорантных уравнений Л.В. Канторовича приближенного решения операторных уравнений в банаховом пространстве к матричным полиномиальным уравнениям;

5) на конкретных числовых примерах в системе компьютерной математики *Maple* 2016 рассмотреть поведение разработанных итерационных алгоритмов для различных классов нелинейных матричных уравнений;

6) определить границы применимости исследуемых численных методов;

7) осуществить описание полученных результатов.

Структура магистерской диссертации. Магистерская диссертация состоит из оглавления, введения, трёх глав, заключения и списка используемых источников.

В первой главе дан обзор литературных источников по теме исследования, приведены различные алгоритмы решения некоторых типов матричных нелинейных уравнений, в первую очередь, квадратных и полиномиальных, поскольку они чаще всего возникают в приложениях.

В разделе 1.1 рассмотрена теория построения функции от матрицы при помощи интерполяционного полинома Лагранжа-Сильвестра и приведены соответствующие примеры нахождения квадратных корней из матриц.

Раздел 1.2 посвящен известной модификации метода Ньютона-Канторовича для нахождения корней n-й степени из матриц. В подразделе 1.2.1 кратко описана теория этого итерационного метода, а в подразделе 1.2.2 приведены соответствующие примеры использования данной модификации для приближенного нахождения квадратных корней из матриц.

В разделе 1.3 осуществлен краткий обзор существующих методов приближенного нахождения решений некоторых типов нелинейных матричных уравнений, при этом основное внимание уделено различным модификациям алгоритмов применения метода Ньютона-Канторовича, поскольку данные алгоритмы наиболее универсальны в применении.

Вторая глава диссертации состоит из пяти разделов и посвящена разработанному алгоритму применения метода Ньютона-Канторовича приближенного решения операторных уравнений в банаховом пространстве для различных классов матричных нелинейных уравнений. Данная глава занимает наибольший объем в диссертации и является основной.

В разделах 2.1 и 2.2 приведено описание известных «классического» и модифицированного методов Ньютона-Канторовича решения операторных уравнений в банаховом пространстве. В разделе 2.3 объяснена трудность непосредственного применения данного метода для решения нелинейных матричных уравнений и подробно описан способ обойти данную трудность. Разделы 2.4 и 2.5 посвящены описанию алгоритма применения метода Ньютона-Канторовича для некоторых типов матричных нелинейных уравнений и рассмотрению конкретных решенных примеров в системе компьютерной математики *Maple* 2016 [49].

Третья глава посвящена применению итерационного метода мажорантных уравнений Л. В. Канторовича для решения матричных нелинейных уравнений. Несмотря на незначительный объем по сравнению со всей магистерской диссертацией, данная глава имеет высокое самостоятельное значение, поскольку описываемый в ней итерационный метод решения матричных нелинейных уравнений существенно отличается от методов, рассмотренных в первой и второй главе.

В разделе 3.1 описана теория применения метода мажорантных уравнений для решения полиномиальных матричных уравнений. В разделе 3.2 приведены примеры применения метода мажорантных уравнений для решения квадратных и кубических матричных уравнений, а также осуществлено его сравнение с модификацией метода Ньютона-Канторовича, рассмотренной во второй главе.

Публикация результатов. Результаты, полученные в ходе выполнения работы, докладывались на IV и V Международных научно-практических конференциях студентов и магистрантов «Молодость. Интеллект. Инициатива» [9, 12] (оценены дипломами первой и второй степени соответственно), на

Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «X Машеровские чтения» (оценены дипломом третьей степени), а также опубликованы в виде тезисов докладов международной научной конференции «XII Белорусская математическая конференция» (приложение В).

Список использованных источников

1 Канторович, Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – 3-е изд., перераб. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. – 752 с.

2 Канторович, Л.В. Функциональный анализ в нормированных пространствах / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1959. – 684 с.

3 Икрамов, Х.Д. Численное решение матричных уравнений: Ортогональные методы / Х.Д. Икрамов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. – 192 с.

4 Хорн, Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М.: Мир, 1988. – 655 с.

5 Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – 5-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 560 с.

6 Приближенное решение операторных уравнений / М.А. Красносельский [и др.]. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1969. – 455 с.

7 Далецкий, Ю.Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю.Л. Далецкий, М.Г. Крейн. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1970. – 536 с.

8 Колдаев, В.Д. Численные методы и программирование: учеб. пособие / В.Д. Колдаев; под ред. проф. Л.Г. Гагариной. – М.: ИД «ФОРУМ»: ИНФРА-М, 2009. – 336 с.

9 Чернявский, М.М. Особенности метода Ньютона-Канторовича приближенного нахождения решений квадратных матричных уравнений / М.М. Чернявский // Молодость. Интеллект. Инициатива: материалы IV междунар. науч.-практ. конф. студ. и магистр., Витебск, 29 апреля 2016 г. / Вит. гос. ун-т; редкол.: И.М. Прищепа [и др.]. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2016. – С. 23-24.

10 Чернявский, М.М. Особенности метода Ньютона-Канторовича приближенного нахождения корней n-й степени из матриц / М.М. Чернявский // X

Машеровские чтения: материалы междунар. науч.-практ. конф. студ., аспирантов и молодых ученых, Витебск, 14 октября 2016. / Вит. гос. ун-т; редкол.: И.М. Прищепа [и др.]. – Витебск, 2016. – С. 29–31.

11 Трубников, Ю.В. Применение метода Ньютона-Канторовича для численного решения квадратных матричных уравнений / Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский // XII Белорусская математическая конференция: материалы междунар. науч. конф., Минск, 5–10 сентября 2016 г.: в 5 ч. / Институт математики НАН Беларуси; ред. С.Г. Красовский. – Минск, 2016. – Ч. 1. – С. 25–26.

12 Чернявский, М.М. Модифицированный метод Ньютона-Канторовича приближенного нахождения корней матричного полиномиального уравнения / М.М. Чернявский // Молодость. Интеллект. Инициатива: материалы V междунар. науч.-практ. конф. студ. и магистр., Витебск, 21 апреля 2017 г. / Вит. гос. ун-т; редкол.: И.М. Прищепа [и др.]. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2017. – С. 55–56.

13 Horn, R Topics in matrix analysis / R. Horn, C. Johnson. – Cambridge: Cambridge University Press, 1991. – 607 p.

14 Bini, D.A. Numerical Methods for Structured Markov Chains/ D.A Bini, G. Latouche, B. Meini. – King’s Lynn: Oxford University Press, 2005. – 327 p.

15 Higham, N.J. Functions of Matrices: Theory and Computation / N.J. Higham. – Philadelphia: SIAM, 2008. – 425 p.

16 Bai, Z. Matrix Functions and Matrix Equations / Z. Bai, W. Gao, Y. Su. – Beijing: Higher Education Press and World Scientific, 2015. – 148 p.

17 Zeroing Dynamics, Gradient Dynamics, and Newton Iterations / Y. Zhang [et al.]. – N. Y.: CRC Press LLC, 2016. – 340 p.

18 Davis, G. J. Numerical Solution of a Quadratic Matrix Equation / G. J. Davis // SIAM J. Sci. Statist. Comput. – 1981. – Vol. 2, № 2. – P. 164–175.

19 Davis, G.J. Algorithm 598: An Algorithm to compute Solvents of the Matrix Equation $AX^2 + BX + C = 0$ / G.J. Davis // ACM Trans. Math. Software. – 1983. – Vol. 9, № 2. – P. 246–254.

20 Bjorck, A. A Schur Method for the Square Root of a Matrix / A Bjorck, S. Hammerling, // Linear Algebra and Appl. – 1983. – Vol. 52-53. – P. 127–140.

21 Higham, N.J. Newton's Method for the Matrix Square Root / N.J. Higham // Mathematics of Computation. – 1986. – Vol. 46, № 174. – P. 537–549.

22 Iannazzo, B. A note on computing the matrix square root / B. Iannazzo // Calcolo. – 2003.– Vol. 40, № 4. – P. 273–283.

23 Meini, B. The matrix square root from a new functional perspective: theoretical results and computational issues / B. Meini // // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2004. – Vol. 26, № 2. – P. 362–376.

24 Li C.-M. Newton's Method for the Matrix Nonsingular Square Root / C.-M. Li, S.-Q. Shen // J. Appl. Math. – 2014. – Vol. 2014. – 7 p.

25 16 Guo, C.-H. Analysis and Modification of Newton's Method for Algebraic Ricatti equations / C.-H. Guo, P. Lancaster // Mathematics of Computation. – 1998. – Vol. 67, № 223. – P. 1189–1105.

26 Solving Algebraic Riccati Equations on Parallel Computers Using Newton's Method with Exact Line Search / P. Benner [et al.] // Parallel Computing. – 2000. – Vol. 26, № 10. – P. 1345–1368.

27 Higham, N. J. Numerical analysis of a quadratic matrix equation / N. J. Higham, H.-M. Kim // IMA J. Numer. Anal. – 2000. – № 20. – P. 499–519.

28 Guo, C.-H. Iterative Solution of two Matrix Equations / C.-H Guo, P. Lancaster // Mathematics of Computation. – 1999. – Vol. 68, № 228. – P. 1589–1603.

29 On the Newton's method to solve matrix polynomial equations / L. Machado [et al.]; edited by L. Machado // Controlo'2000 [Electronic resource]: 4th Portuguese conf. on automatic control, Guimaraes, 4-6 October 2000. – Electr. data. – Guimaraes: Campus de Azurém-Univ. do Minho, 2000. – 1 electr. opt. disc (CD-ROM). – P. 625-629.

30 Higham, N.J. Solving a Quadratic Matrix Equations by Newton's Method with Exact Line Searches / N.J. Higham, H.-M. Kim // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2001. – Vol. 23, № 2. – P. 303–316.

31 Gao, Y.-H. Newton's method for the quadratic matrix equation / Y.-H. Gao // Applied Math. and Comput. – 2006. – Vol. 182, № 2. – P. 1772–1779.

32 Long, J.-H. Improved Newton's method with exact line searches to solve quadratic matrix equation / J.-H. Long, X.-Y. Hu, L. Zhang // J. Comp. Appl. Math. – 2008. – Vol. 222, № 2. – P. 645–654.

33 Han, Y.-H. Finding the Skew-Symmetric Solvent to a Quadratic Matrix Equation / Y.-H. Han, H.-M. Kim // East Asian Math. J. – 2012. – Vol. 28, № 5. – P. 587–595.

34 Yu, B. A Structure-Preserving Doubling Algorithm for Quadratic Matrix Equations arising form damped mass-spring system / B. Yu, N. Dong // Advanced Modeling and Optimization. – 2010. – Vol. 12, № 1. – P. 85–100.

35 On iterative methods for the quadratic matrix equation with M-matrix / B. Yu [et al.] // Applied Math. and Comput. – 2011. – Vol. 218, № 7. – P. 3303–3310.

36 Bini, D.A. Algorithms for the matrix pth root/ D.A. Bini, N.J. Higham, B. Meini // Numerical Algorithm. – 2005.– Vol. 39, № 4. – P. 349–379.

37 Guo, C.-H. A Schur-Newton Method for the Matrix p'th Root and its Inverse / C.-H. Guo, N.J. Higham // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2006. – Vol. 28, № 3. – P. 788–804.

38 Guo, C.-H. On Newton's Method and Halley's Method for the Principal p'th Root of a Matrix / C.-H. Guo // Linear Algebra and its Appl. – 2010. – Vol. 432, № 8. – P. 1905–1922.

39 Ramadan, M.A. Iterative positive definite solutions of the two nonlinear matrix equations / M.A. Ramadan, T.S. El-Danaf, N.M. El-Shazly // Applied Math. and Comput. – 2005. – Vol. 164. – P. 189–200.

40 Bai, Z.-Z. On two Iteration Methods for the Quadratic Matrix Equations / Z.-Z. Bai, X.-X. Guo, J.-F. Yin // Intern. J. Numer. Anal. Model. – 2005. – Vol. 2, № 1. – P. 114–122.

41 Guo, C.-H. On a quadratic matrix equation associated with an M-matrix / C.-H. Guo // IMA J. Numer. Anal. – 2003. – Vol. 23, № 1. – P. 11–27.

42 A quadratically convergent Bernoulli-like algorithm for solving matrix polynomial equations in Markov chains / C. He [et al.] // Electr. Transactions on Numer. Anal. – 2004. – Vol. 17. – P. 151–167.

43 Guo, C.-H. Iterative Solution of a Nonsymmetric Algebraic Riccati Equation / C.-H. Guo, N.J. Higham // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2007. – Vol. 29, № 2. – P. 396–412.

44 Bini, D.A. A fast Newton's method for a nonsymmetric algebraic Riccati equation / D.A. Bini, B. Iannazzo, F. Poloni // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2008.– Vol. 30. – Supp. – P. 114–122.

45 Han, Y.-H. Newton's Method for Symmetric and Bisymmetric Solvents of the Nonlinear Matrix Equations / Y.-H. Han, H.-M. Kim // J. Korean Math. Soc. – 2013. – Vol. 50, № 4. – P. 755–770.

46 Zeroing Dynamics, Gradient Dynamics, and Newton Iterations / Y Zhang . et al.]. – USA: CRC Press. Taylor & Francis Group, 2016. – 350 p.

47 Poloni, F. Algorithms for Quadratic Matrix and Vector Equations / F. Poloni. Pisa : Edizioni della Normale, 2011. – 239 p.

48 Kim, Y.-J. Diagonal update method for a quadratic matrix equation / '.-J. Kim, H.-M. Kim // Appl. Math. Comput. – 2016. – Vol. 283. – P. 208–215.

49 Maple 2016 – Technical Computing Software for Engineers, Mathematicians, cientists, Instructors and Students // Maplesoft [Electronic resource]. – Waterloo Maple ıc., 2016. – Mode of access: http://www.maplesoft.com/products/Maple/ – Date of :cess: 12.06.2017.