

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ВИТЕБСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
П.М. МАШЕРОВА»

Факультет математики и информационных технологий

Кафедра геометрии и математического анализа

Допущена к защите

«02» июля 2020 г.

Заведующий кафедрой

 М.Н.Подоксенов

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ
УРАВНЕНИЙ В РАДИКАЛАХ

Специальность 1-31 80 03 Математика

Жгиров Владислав Сергеевич,
Магистрант, 2 курс

Научный руководитель:

Грубников Юрий Валентинович
доктор физико-математических наук,
профессор

Витебск, 2020

Реферат

Магистерская диссертация с.64, 30 использованных источников, 1 приложений.

СУПЕРПОЗИЦИИ, АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ПОЛИНОМ, РАЗРЕШИМОСТЬ В РАДИКАЛАХ, ПОЛИНОМ ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ, ПОЛИНОМ ВОСЬМОЙ СТЕПЕНИ, ПОЛИНОМ ШЕСТОЙ СТЕПЕНИ, ПОЛИНОМ ДЕВЯТОЙ СТЕПЕНИ, АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ПОЛИНОМ ДВЕНАДЦАТОЙ СТЕПЕНИ.

Предмет исследования – алгоритм разложения алгебраических полиномов высоких степеней с комплексными коэффициентами на суперпозиции полиномов меньшей степеней.

Объект исследования – алгебраические полиномы комплексного аргумента с комплексными коэффициентами и представление этих полиномов в виде суперпозиции квадратичных, кубических полиномов и полиномов четвертой степени.

Цель работы – сформулировать необходимые и достаточные условия разложения алгебраического полинома четвертой, шестой, восьмой, девятой и двенадцатой степеней на суперпозицию полиномов второй, третьей и четвертой степени, а также привести примеры работоспособности выведенных методов. Также получить условия разрешимости в радикалах уравнений различных степеней.

Полученные результаты – на ряде примеров апробирован новый метод представления алгебраического полиномов высоких степеней в виде их суперпозиций.

Методы исследования – теоретический анализ литературы, аналитические методы исследования и численные методы при помощи пакета символьной математики *Maple 2017*.

Область применения – численные методы.

Теоретическая и практическая значимость – разработанные методы позволяют в символьном виде находить корни алгебраических уравнений высоких степеней.

Содержание

Введение	4
1 Обзор методов решения алгебраических уравнений	6
1.1 Краткая история методов разложения алгебраических полиномов.....	6
1.2 Метод решения алгебраического уравнения пятой степени предложенный Ю.А. Несмеевым.....	8
1.3 Метод предложенный Н.С. Астаповым и И.С. Астаповым.....	13
2 Метод представления алгебраических полиномов высоких степеней в виде суперпозиции	17
2.1 Представление алгебраического полинома четвертой степени в виде суперпозиции квадратичных полиномов.....	17
2.2 Представление алгебраического полинома шестой степени в виде суперпозиции квадратичных и кубических полиномов.....	22
2.3 Представление алгебраического полинома восьмой степени в виде суперпозиции квадратичных полиномов.....	28
2.4 Представления алгебраического полинома девятой степени в виде суперпозиции кубических полиномов	34
2.5 Представления алгебраического полинома двенадцатой степени в виде суперпозиции полиномов третьей и четвертой степени	39
2.6 О перспективах развития темы магистерской диссертации	46
Заключение	58
Список использованных источников	60
Приложение	64

Введение

Алгебраические полиномы, наряду с уравнениями являются неотъемлемой частью нашей жизни. Они возникают при решении разнообразных научных или технических задач, например, задач моделирования, в которых используются интегральные и дифференциальные уравнения, а также одни из самых древних объектов математики – алгебраические уравнения. Так, например, алгебраические уравнения возникают, при изучении равновесных состояний сложных аэродинамических и термодинамических систем. Некоторые алгебраические уравнения необходимы для вычисления параметров матрицы, например, её собственных значений, которые определяют устойчивость некоторых конструкций.

На данный момент для нахождения решения некоторых задач математического моделирования, а также задач математического анализа широко применяются системы компьютерной алгебры [1 – 3, с.60]. В таких системах, распространенной функцией является представление полинома в виде композиции двух или нескольких полиномов.

В настоящее время существует не так много алгоритмов нахождения корней алгебраического уравнения высоких степеней. Один из алгоритмов решения алгебраических уравнений высоких степеней был предложен И.С. Астаповым и Н.С. Астаповым. Их исследование было посвящено разложению на множители полинома пятой и шестой степени специального вида [4, с.60]. Ещё один способ решения данных уравнений, является метод приближенного нахождения корней уравнения через его коэффициенты, изложенным в статье Ю.В. Трубникова и М.М. Чернявского [5, с.64].

Интересным фактом из истории является то, что Виетом было решено уравнение сорок пятой степени специального вида [6, с.60].

В настоящей работе рассматривается метод представления полиномов специального вида, как суперпозиции квадратичных, кубических полиномов и

полиномов четвертой степени. Данный метод был апробирован на нескольких примерах.

Цель работы – сформулировать необходимые и достаточные условия представления алгебраического полинома четвертой, шестой, восьмой, девятой и двенадцатой степеней на суперпозицию полиномов второй, третьей и четвертой степени, а также привести примеры работоспособности выведенных методов. Также получить условия разрешимости в радикалах уравнений различных степеней.

В ходе работы были поставлены следующие **задачи**:

- 1) осуществить поиск и подбор необходимой литературы, касающихся темы исследования;
- 2) изучить методы, полученные другими исследователями, для решения алгебраических уравнений высоких степеней.
- 3) описать метод представления алгебраических полиномов в виде их суперпозиций.
- 4) привести конкретные числовые примеры алгебраических полиномов, решенные при помощи системы компьютерной математики *Maple* 2017, подтверждающие эффективность использования разработанных алгоритмов.

Диссертация состоит из оглавления, введения, двух глав, заключения и списка используемых источников и приложения.

Список использованных источников

1. Бухберг, Б. Компьютерная алгебра. Символьные и алгебраические вычисления / Б. Бухберг – М.: Мир, 1986. – 392 с.
2. Мысовских, В.И. Системы компьютерной алгебры и символьные вычисления / В.И. Мысовских // Записки научных семинаров ПОМИ. – 2001. – т.281. – С.227–236.
3. Кулябов, Д.С. Аналитический обзор систем символьных вычислений / Д.С. Кулябов, Кокотчикова М.Г. // Вестник Российского университета дружбы народов. Сер. «Математика. Информатика. Физика». – 2007. – № 1,2 – С.36–45.
4. Астапов, И.С. Решение алгебраических уравнений третьей и четвертой степеней с помощью компьютерной алгебры / И.С. Астапов, Н.С. Астапов // Теоретический и прикладной научно-технологический журнал, Программная инженерия – 2014. – № 10 – С. 33–43.
5. Трубников, Ю.В. Роль расходящихся степенных рядов в некоторых алгоритмах приближенного аналитического решения алгебраических уравнений / Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский, А.М. Воронов // Веснік ВДУ. – 2017. – №4 (97). – С. 29 – 33.
6. Никифоровский, В.А. Из истории алгебры XVI-XVII вв. / В.А. Никифоровский – Москва: Наука, 1979. – 208 с.
7. Alekseev, V.B. Abel's Theorem in Problems and Solutions / V.B. Alekseev. – New York: Kluwer Academic Publishers. – 2004. – 285 p.
8. Лурье, Б. Б. О неразрешимости в радикалах некоторого класса уравнений пятой степени / Б. Б. Лурье, М. Б. Гладких // Зап. научн. сем. ПОМИ. – 2003. – т.305. – С.163–164.
9. Barton, D.R. Polynomial decomposition / D.R. Barton, R.E. Zippel // Proceedings of Symposium on Symbolic and Algebraic Manipulation. – 1976. – P. 356–358.
10. Barton D.R. Polynomial decomposition algorithms / D.R. Barton, R.E. Zippel // Journal of Symbolic Computation. – 1985. – Vol. 1, № 2. – P. 159–168.

11. Alagar, V.S. Fast polynomial decomposition algorithms / V.S. Alagar, M. Thanh // Proceedings of European Conference on Computer Algebra. – 1985. – P. 150–153.
12. Kozen D. Polynomial decomposition algorithms / D. Kozen, S. Landau // Journal of Symbolic Computation. – 1989. – № 7. – P. 445–456.
13. Seong J.-K., Elber G., Kim M.-S. Polynomial Decomposition and Its Applications [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.cs.utah.edu/~seong/decomposition.pdf>, свободный (дата обращения: 20.04.2020).
14. Несмеев, Ю. А. Развитие одного подхода к решению алгебраического уравнения 4-й степени / Ю. А. Несмеев // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2013. – № 4(24). – С. 29–38.
15. Несмеев, Ю. А. Об одном подходе к решению алгебраических уравнений 3-й и 4-й степеней / Ю. А. Несмеев // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2011. – № 1(13). – С.26–30.
16. Несмеев, Ю.А. Решение уравнения пятой степени разложением левой части на произведение многочленов второй и третьей степени. / Ю.А. Несмеев // Вестник Пермского университета – Пермь, 2017. – №6 – С.21–28.
17. Астапов, И. С. Решение алгебраических уравнений третьей и четвертой степеней с помощью компьютерной алгебры / И.С. Астапов, Н. С // Программная инженерия. – 2014. – № 10. – С. 33–42.
18. Астапов, И. С. Алгоритмы символьного решения алгебраических уравнений / И.С. Астапов, Н. С // Программная инженерия. – 2017. – № 9. – С. 422–432.
19. Перминова, М.Ю. Алгоритм декомпозиции полиномов, основанный на разбиениях / М.Ю. Перминова, В.В. Кручини, Д.В. Кручинин // Вестник Томского государственного университета управления и радиоэлектроники – Томск: ТУСУР, 2015. – №4(38) – С. 102–107.

20. Кручинин, В.В. Степени производящих функций и их применение / В.В. Кручинин, Д.В. Кручинин // Вестник Томского государственного университета управления и радиоэлектроники – Томск: ТУСУР, 2013. – 234 с.

21. Kruchinin, D.V. Application of a composition of generating functions for obtaining explicit formulas of polynomials / D.V. Kruchinin, V.V. Kruchinin // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2013. – Vol. 404, № 1. – P. 161–171.

22. Кручинин, В.В. Алгоритмы генерации и нумерации композиций и разбиений натурального числа n / В.В. Кручинин // Доклады Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники. – 2008. – № 2(17). – С. 113–119.

23. Маркова, Л.В. Методы вычислений: метод. рекомендация / Л.В. Маркова, А.Н. Красоткина; Витебск: ВГУ им. П.М.Машерова, 2014. – 5-10 с.

24. Википедия – свободная энциклопедия [Электронный ресурс]. – https://ru.wikipedia.org/wiki/Точки_либрации. – (дата обращения: 17.05.2020).

25. Прасолов, В. В. Эллиптические функции и алгебраические уравнения. / В.В. Прасолов, Ю.П. Соловьев. – М.: Факториал, 1997. – 288 с.

26. Zhgirov, V.S. On solvability of some classes of algebraic equations in radicals/ V.S. Zhgirov // The Youth of the 21st Century: Education, Science, Innovations : Proceedings of V International Conference for Students, Postgraduates and Young Scientists, Vitebsk, December 12, 2018 / Vitebsk State University ; Editorial Board: I.M. Prishchepa (Editor in Chief) [and others]. – Vitebsk : Vitebsk State P.M. Masherov University, 2018. – P. 25–27.

27. Трубников, Ю.В. Об условиях представимости полиномов четвертой и шестой степени в виде суперпозиции полиномов второй и третьей степени / Ю.В. Трубников, В.В. Юргелас // Веснік Віцебскага дзярж. ўніверсітэта. – 2019. – № 1(102). – С. 17–24.

28. Жгиров, В.С. Об условиях представимости полинома восьмой степени в виде суперпозиции трех квадратичных полиномов/ В.С. Жгиров // Молодость. Интеллект. Инициатива: материалы VII междунар. науч.-практ. конф. студ. и

магистр., Витебск, 18 апреля 2019 г. / Вит. гос. ун-т; редкол.: И.М. Прищепа [и др.].
– Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2019. – С. 15–16.

29. Трубников, Ю.В. Об условиях представимости полинома восьмой степени в виде суперпозиции трех квадратичных полиномов / Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский // Наука – образованию, производству, экономике: материалы XXIV(71) регион. науч.-практ. конф. преп., научн. сотр. и аспирантов, Витебск, 14 февраля 2019 г.: в 2 т. / Витеб. гос. ун-т; редкол.: И.М. Прищепа (гл. ред.) [и др.]. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2019. – Т. 1. – С. 25–28.

30. Zhgirov, V.S. About the conditions of representability of the polynomial ninth degree in the form of superposition of the cubic polynomial from the cubic polynomial / V.S. Zhgirov // The Youth of the 21st Century: Education, Science, Innovations : Proceedings of V International Conference for Students, Postgraduates and Young Scientists, Vitebsk, December 12, 2018 / Vitebsk State University ; Editorial Board: I.M. Prishchepa (Editor in Chief) [and others]. – Vitebsk : Vitebsk State P.M. Masherov University, 2019. – С. 32–34.