МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, МОДЕЛИ И СОВРЕМЕННЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ

ОДНО ОБОБЩЕННОЕ Н-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ НА ПОЛУОСИ

Архиповец Е.Н.,
студент 2-го курса УО «ПГУ», г. Новополоцк, Республика Беларусь
Научный руководитель – ***Скоромник О.В.,*** *канд. физ.-мат. наук, доцент*

Ключевые слова. Н-преобразование, *H*-функция, пространство интегрируемых функций, дробные интегралы и производные.

Keywords. H-transform, *H*-function, space of integrable functions, fractional integrals and derivatives.

Изучается интегральное преобразование:

$$\left(\mathrm{H}_{\eta,\mu;\gamma,\delta,\lambda}\, f\right)(x) = x^{\eta}\int_0^{\infty} H_{p,q}^{m,n}\left[\frac{\lambda x^{\delta}}{t^{\delta}}\right] t^{\mu} f(t)dt \ (x>0), \qquad (1)$$

где η, μ – комплексные, а $\gamma>0, \delta>0, \lambda>0$ – действительные постоянные, *H*-функция $H_{p,q}^{m,n}\left[z\right]$ определяется интегралом Меллина – Барнса при целых неотрицательных m, n, p, q $(0\le m\le q, 0\le n\le p)$, комплексных $a_i, b_j \in \mathrm{C}$ и положительных α_i, β_j $(1\le i\le p, 1\le n\le q)$:

$$H_{p,q}^{m,n}\left[z\right] \equiv H_{p,q}^{m,n}\left[z\left|\begin{matrix}(a_i,\alpha_i)_{1,p}\\(b_j,\beta_j)_{1,q}\end{matrix}\right.\right] = \frac{1}{2\pi i}\int_L \mathcal{H}_{p,q}^{m,n}(s)z^{-s}ds,\ z\neq 0,$$

где
$$\mathcal{H}_{p,q}^{m,n}(s) \equiv \mathcal{H}_{p,q}^{m,n}\left[\left.\begin{matrix}(a_i,\alpha_i)_{1,p}\\(b_j,\beta_j)_{1,q}\end{matrix}\right| s\right] = \frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j+\beta_j s)\prod_{i=1}^{n}\Gamma(1-a_i-\alpha_i s)}{\prod_{i=n+1}^{p}\Gamma(a_i+\alpha_i s)\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j-\beta_j s)}.$$

Здесь *L* –бесконечный контур, выбранный специально, пустые произведения считаются равными единице. Теория *H*-функции подробно изложена в [1, гл.1 – 2].
Конструкция вида (1) обобщает многие интегральные преобразования: G- и Н-преобразования, преобразования Ханкеля, преобразование Лапласа, дробные интегралы Римана – Лиувилля, дробные интегралы Бушмана – Эрдейи, дробные интегралы с гипер-геометрической функцией Гаусса и др. [1, 2].

В работе преобразование (1) изучается в пространствах $L_{\nu,r}$ измеримых по Лебегу комплекснозначных функций f на действительной полуоси $\mathrm{R}_+ = (0,\infty)$, для которых

$$\|f\|_{\nu,r} < \infty, \text{ где } \|f\|_{\nu,r} = \left(\int_0^{\infty}\left|t^{\nu} f(t)\right|^r \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{r}} \ (1\le r<\infty, \nu\in\mathrm{R}).$$

Целью работы является описание функциональных свойств преобразования (1) в пространствах $L_{\nu,r}$ и получение формулы обращения для него.

Материал и методы. Преобразование (1) представляем как композицию H-преобразования [1, формула (3.1.1)] и элементарных операторов M_ξ, W_σ, N_a:

$$\left(M_\xi f\right)(x) = x^\xi f\left(x\right) \quad (\xi \in \mathrm{C});$$
$$\left(W_\sigma f\right)(x) = f\left(\frac{x}{\sigma}\right) \quad (\sigma \in \mathrm{R}_+); \quad \left(N_a f\right)(x) = f\left(x^a\right) \quad (a \in \mathrm{R}, a \neq 0). \tag{2}$$

Получаем

$$\left(\mathrm{H}_{\eta,\mu;\gamma,\delta,\lambda} f\right)(x) = \delta^{-1}\lambda^{(\mu+1)/\delta}(N_\gamma M_{\eta/\gamma}\,\mathrm{H}\,M_{-(\mu+1)/\delta}W_{1/\lambda}N_{-1/\delta} f)(x). \tag{3}$$

Тогда функциональные свойства преобразования (1) будут следовать из соответствующих утверждений для H-преобразования [1, глава 3], свойств операторов (2) [1, глава 1] и представления (3).

Результаты и их обсуждение. Изучены свойства преобразования (1) в пространствах $L_{\nu,r}$ - интегрируемых функций на полуоси. Получены условия ограниченности и взаимной однозначности оператора такого преобразования из одних пространств $L_{\nu,r}$ в другие весовые пространства $L_{\tilde{\nu},\tilde{r}}$ -интегрируемых функций, доказан аналог формулы интегрирования по частям, получены два других интегральных представления для (1) и выведены две формулы его обращения в зависимости от значений параметров η, μ, γ, δ, λ.

Заключение. Полученные результаты обобщают полученные ранее для соответствующего преобразования при $\gamma = \delta = \lambda = 1$ [1, глава 5].

Благодарности. Работа выполнена в рамках программы ГПНИ "Конвергенция-2025", подпрограмма "Математические методы и модели".

1. Kilbas, A.A., Saigo M.H. H - Transforms. Theory and Applications / A.A. Kilbas, M.H. Saigo. – London: Chapman and Hall. CRC Press, 2004. – 401 p.

2. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688с.

О КВАТЕРНИОННЫХ МОНОГЕННЫХ В СМЫСЛЕ В.С. ФЁДОРОВА ФУНКЦИЯХ

Воронина А.М.,
студентка 2-го курса Международного университета «МИТСО»,
г. Минск, Республика Беларусь
Научный руководитель – ***Шилинец В.А.,*** *канд. физ.-мат. наук, доцент*

Ключевые слова. Моногенность в смысле В. С. Фёдорова, кватернионные функции, краевая задача, интегральное представление.

Keywords. Monogeneity in the sense of V. S. Fedorov, quaternionic functions, boundary value problem, integral representation.

В. А. Гусев в работе [1] изучал кватернионные моногенные в смысле В. С. Федорова (F-моногенные) функции [2] на плоскости. В работах [3–5] исследовались F-моногенные кватернионные функции трех и четырех действительных переменных.

В данной работе исследуются F-моногенные кватернионные функции, отличные от ранее рассмотренных. Целью исследования является получение интегрального представления для этих кватернионных функций и решение краевой задачи.