Ж. В. Захаренко, А. И. Яблонский, Качественное исследование системы дифференциальных уравнений при наличии алгебраического интеграла, *Дифференц. уравнения*, 1995, том 31, номер 5, 759–764

МАЙ 1995 г., ТОМ 31, № 5

УДК 517.925.11

Ж. В. ЗАХАРЕНКО, $\boxed{\text{А. И. ЯБЛОНСКИЙ}}$

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ НАЛИЧИИ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ИНТЕГРАЛА

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= cx + ly + a_2x^2 + 2b_2xy + c_2y^2 = Q(x, y), \\ \dot{y} &= ax + by + a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2 = P(x, y), \end{aligned} \tag{1}$$

которая имеет частный алгебраический интеграл

$$F(x, y) = \sum_{k=0}^{4} F_k(x, y), \tag{2}$$

где $F_k(x, y)$ — однородные полиномы степени k.

В работе [1] рассматривается построение дифференциальных уравнений по заданным решениям, в [2] и [3—5] качественное исследование систем вида (1) проводится при наличии алгебраического интеграла второго и третьего порядка. В [6] исследуются общие свойства таких систем с интегралами любого порядка, а также строится качественная картина поведения интегральных кривых в целом для системы, имеющей интеграл четвертого порядка частного вида. В [7] рассматриваются системы из [6] с комплексными коэффициентами.

Здесь система (1) исследуется при условии существования у нее алгебраического интеграла четвертого порядка, не рассмотренного ранее, который после применения аффинных преобразований [6] имеет вид

$$\begin{aligned} F(x, y) = xy(x+y)^2 + \alpha_1y^3 + \beta_1y^2x + \gamma_1yx^2 + \delta_1x^3 + \\ + \beta_2y^2 + \gamma_2xy + \delta_2x^2 + \gamma_3y + \delta_3x + \delta_4 = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

В этом случае в (1) $c_2 = a_1 = 0$ и для интеграла (3) имеет место соотношение

$$\frac{\partial F}{\partial x} Q + \frac{\partial F}{\partial y} P = FL, \tag{4}$$

где $L(x, y) = rx + sy + p$; r, s, p — постоянные [6, с. 1754].

Из (4) видно, что любая точка покоя системы (1) лежит либо на интеграле (3), либо на прямой $L(x, y) = 0$. Пусть хотя бы одна конечная точка покоя не лежит на интеграле. Не нарушая общности, можно предположить, что это — начало координат. Тогда $F(0, 0) = F_0 \neq 0$, $L(x, y) = rx + sy = 0$. На основании (4) коэффициенты интеграла (3) и системы (1) связаны следующими соотношениями:

$$r = 3a_2 + 2b_1, \quad s = 2b_2 + 3c_1, \tag{5_1}$$

$$2a_2 + 2c_1 - 4b_2 - 4b_1 = 0, \tag{5_2}$$

$$\begin{aligned} 2\delta_1b_1 = a, \quad \gamma_1a_2 + \delta_1(3c_1 - 4b_2) = 4a + b + 3c, \quad 2\alpha_1b_2 = l, \\ \alpha_1(3a_2 - 4b_1) + \beta_1c_1 = 3b + c + 4l, \end{aligned} \tag{5_3}$$

$$\gamma_1(2c_1-2b_2)+\beta_1(2a_2-2b_1)=3a+4b+4c+3l, \tag{5_4}$$

$$\delta_2(a_2+2b_1)=3\delta_1c+\gamma_1a,\ \ \beta_2(c_1+2b_2)=\beta_1l+3\alpha_1b,$$

$$2\gamma_2a_2+\delta_2(3c_1-2b_2)=\gamma_1(2c+b)+3\delta_1l+2\beta_1a, \tag{5_5}$$

$$\beta_2(3a_2-2b_1)+2\gamma_2c_1=3\alpha_1a+2\gamma_1l+\beta_1(c+2b), \tag{5_6}$$

$$\delta_3(2a_2+2b_1)=2\delta_2c+\gamma_2a,\ \ \gamma_3(2c_1+2b_2)=\gamma_2l+2\beta_2b, \tag{5_7}$$

$$3\gamma_3a_2+3\delta_3c_1=\gamma_2(c+b)+2\delta_2l+2\beta_2a, \tag{5_8}$$

$$\delta_4(3a_2+2b_1)=\delta_3c+\gamma_3a, \tag{5_9}$$

$$\delta_4(3c_1+2b_2)=\delta_3l+\gamma_3b. \tag{5_{10}}$$

Будем считать, что $b_1b_2\neq 0$, так как в противном случае имеем системы с распадающимися частными интегралами вида (3). Пусть $b_1=-b_2=1/2$. Этого всегда можно добиться, изменяя масштаб на осях координат. Тогда из (5_2) имеем $a_2=-c_1$, и если $a_2\neq 0$, $a_2\neq -1$, $a_2\neq -1/2$, то соотношения (5_3), (5_5), (5_7), (5_9) дают условия, выражающие коэффициенты интеграла через коэффициенты системы:

$$\delta_1=a,\ \ \gamma_1a_2=3aa_2+2a+b+3c,\quad \alpha_1=-l,$$

$$\beta_1a_2=-(3la_2+3b+c+2l),$$

$$\delta_2a_2(a_2+1)=a_2(3a^2+3ac)+2a^2+ab+3ac,$$

$$2\gamma_2a_2^2(a+1)=a_2^2(9a^2+15ac+3ab-3al)+a_2(3a^2+$$
$$+6c^2+b^2+2ab+14ac-7al+5bc)+(-2a^2+6c^2+$$
$$+b^2-5ab-ac-4al+5bc),$$

$$\beta_2a_2(a_2+1)=3a_2l(b+l)+3bl+cl+2l^2,$$

$$2\delta_3a_2^2(a_2+1)(2a_2+1)=a_2^2(9l^2a-3a^2l+$$
$$+12ac^2+12a^2c+15abl+3alc)+a_2(8a^2c+$$
$$+13ac^2+3l^2a+6b^2a-7a^2l+2alc+14alb+9abc)+$$
$$+(ac^2-2al^2+6ab^2-4a^2l+5abc-abl-5alc),$$

$$2\gamma_3a_2^2(a_2+1)(2a_2+1)=a_2^2(-9a^2l+3al^2-12lb^2-12l^2b-$$
$$-15acl-3abl)+a_2(-3a^2l-6c^2l-13b^2l-8l^2b+$$
$$+7al^2-2abl-14acl-9bcl)+(2a^2l-6c^2l-b^2l+$$
$$+5abl+acl+4al^2-5bcl),$$

$$\delta_4(3a_2+1)=\delta_3c+\gamma_3a.$$

Равенства (5_4), (5_6), (5_8), (5_{10}) связывают коэффициенты системы (1):

$$(3a_2-1)(a_2(a+l)+(a+l+2b+2c))=0, \tag{6_1}$$

$$a_2^2(9a^2-9l^2+15ac-15bl+3ab-3lc)+a_2(3a^2-3l^2+$$
$$+5c^2-5b^2+2ab+14ac-2lc-14lb)+(2l^2-2a^2+$$
$$+5c^2-5b^2-5ab-ac+bl+5lc)=0, \tag{6_2}$$

$$a_2^3(42a^2l+42l^2a+54a^2c+66ac^2+66b^2l+54l^2b+$$
$$+72acl+72alb+6bcl+6abc)+a_2^2(12c^3+12b^3+16a^2l+$$
$$+16al^2+18c^2l+18b^2a+82b^2l+39l^2b+82ac^2+39a^2c+$$
$$+12b^2c+12bc^2+34bcl+75abl+75acl+34abc)+$$
$$+a_2(18c^3+18b^3-10a^2l-10al^2+18c^2l+18ab^2+15b^2l+$$
$$+15ac^2-a^2c-l^2b+18b^2c+18bc^2+7abc-17abl-17acl+$$

$$+7bcl)+(6c^3+6b^3-2a^2c-ac^2+6b^2c+6bc^2-2l^2b-$$
$$-b^2l-4abl-5blc-5abc-4alc)=0, \qquad (6_3)$$
$$a_2^2(-9a^3l-12lb^3+9l^3a+12a^2c^2+12ac^3-12l^2b^2-6a^2lc-$$
$$-12a^2bl-15b^2al+6l^2ab+12l^2ac+15c^2al)+a_2(13ac^3-$$
$$-13b^3l+3l^3a-3a^3l+8a^2c^2-8l^2b^2-13a^2lc-5a^2lb+$$
$$+6b^2ac-9b^2la-9b^2lc+5l^2ac+13l^2ab+9c^2al+$$
$$+9c^2ab-6c^2lb)+(ac^3+2a^3l-b^3l-2al^3+7a^2bl-$$
$$-3a^2cl+6b^2ac+10b^2al-5b^2cl-10c^2al-5c^2ab-$$
$$-7l^2ac+3l^2ab-6c^2lb)=0. \qquad (6_4)$$

Из (6_1) видно, что возможны два случая: 1) $a_2=1/3$; 2) $a_2=-(a+$ $+l+2b+2c)/(a+l)$.

Пусть $a_2=1/3$. Тогда равенства (6) имеют вид

$$a(4c-3b)+(5c^2-5b^2-4bl+3cl)=0,$$
$$9a^2c+a(35c^2+18b^2+3bc+3cl+3bl)+(30c^3+30b^3+$$
$$+30b^2c+30c^2b+35b^2l+18c^2l+3bcl+9bl^2)=0,$$
$$a^2(3c^2+3bl-6lc)+a(5c^3+4b^2l+6l^2b-3l^2c-4c^2l+6b^2c+$$
$$+6c^2b)+(-3l^2b^2-6b^2lc-6c^2lb-5b^3l)=0.$$

Пусть $l\neq 0$. Обозначим $a=\alpha l$, $b=\beta l$, $c=\gamma l$. Исключив α и l, найдем соотношения, связывающие между собой коэффициенты β и γ:

$$(\gamma+\beta)(5\gamma+3)\{18\beta^3+\beta^2(-51\gamma+15)+\beta\gamma(44\gamma-26)+\gamma^2(\gamma+15)\}=0,$$
$$(\gamma+\beta)(\gamma-\beta)\{-25\gamma^4+\gamma^3(-45\beta-40)+\gamma^2(-105\beta^2-$$
$$-148\beta-45)+\gamma(90\beta^3+76\beta^2-7\beta-18)+$$
$$+(30\beta^3+45\beta^2+24\beta)\}=0.$$

Пусть $\gamma\neq-\beta$, $\gamma\neq\beta$, $\gamma\neq-3/5$. Введем параметр $\mu:\beta=(\mu+1)\gamma$. Тогда соотношение между γ и μ определяется системой

$$\gamma(18\mu^3+3\mu^2-4\mu+12)+(15\mu^2+4\mu+4)=0,$$
$$\gamma^3(90\mu^3+165\mu^2+15\mu-85)+\gamma^2(30\mu^3+166\mu^2+ \qquad (7)$$
$$+94\mu-82)+\gamma(45\mu^2+83\mu-7)+(24\mu+6)=0.$$

Исключив γ из системы (7), получим

$$(2\mu-1)(3\mu-1)^2(3\mu-8)(3\mu+1)(11\mu+8)\times$$
$$\times(3\mu^2+4\mu+1)(\mu^2+2\mu+2)=0. \qquad (8)$$

Не будем рассматривать системы с комплексными коэффициентами. Тогда, согласно (7) и (8), возможны следующие значения для коэффициентов системы (6):

1) $a=\alpha l$, $b=0$, $c=0$;
2) $a=0$, $b=0$, $c=-3/5l$;
3) $a=-l$, $b=-\gamma l$, $c=\gamma l$;
4) $a=l$, $b=-(1/3)l$, $c=(1/3)l$;
5) $a=(27/8)l$; $b=-(9/8)l$; $c=-(3/4)l$;
6) $a=(8/27)l$; $b=-(2/9)l$; $c=-(1/3)l$;
7) $a=(35/27)l$; $b=-(11/9)l$; $c=-(1/3)l$;
8) $a=(27/35)l$; $b=-(9/35)l$, $c=-(33/35)l$.

Причем во всех случаях, кроме первого, а также при $l=0$ интеграл (3) распадается, получаем либо прямую и кривую третьего порядка, либо две прямые и кривую второго порядка. Системы с распадающимися интегралами также не рассматриваются.

Рассмотрим систему $\dot{x}=ly+(1/3)x^2-xy$, $\dot{y}=\alpha lx-(1/3)y^2+xy$, которая имеет своим частным интегралом функцию

$$F(x, y)=4xy(x+y)^2-4y^3-36ly^2x+36\alpha lx^2y+4\alpha lx^3+$$
$$+27l^2y^2-90\alpha l^2xy+27\alpha^2l^2x^2+54\alpha l^3y-54\alpha^2l^3x+27\alpha^2l^4=0.$$

Данный интеграл распадается лишь в следующих случаях:

при $\alpha=0$ на прямую и кривую третьего порядка;

при $\alpha=-1$ на две прямые и кривую второго порядка.

Пусть $x=l\bar{x}$, $y=l\bar{y}$, $t=\bar{t}/l$, тогда, перейдя к старым обозначениям, получим

$$\dot{x}=y+(1/3)x^2-xy,\ \dot{y}=\alpha x-(1/3)y^2+xy \tag{9}$$

и

$$F(x, y)=4xy(x+y)^2-4y^3-36xy^2+36\alpha x^2y+$$
$$+4\alpha x^3+27y^2-90\alpha xy+27\alpha^2x^2+54\alpha y-54\alpha^2x+27\alpha^2=0. \tag{10}$$

Координаты состояний равновесия являются решениями системы двух уравнений: $3y+x^2-3xy=0$, $3\alpha x-y^2+3xy=0$. Из первого уравнения данной системы находим

$$y=x^2/(3x-3). \tag{11}$$

Подставляя (11) во второе уравнение системы, получим

$$x(8x^3+x^2(27\alpha-9)-54\alpha x+27\alpha)=0,$$

откуда $x=0$ или

$$\alpha=x^2(9-8x)/(27(x-1)^2). \tag{12}$$

Рассмотрим точку $O(0; 0)$. Характеристическое уравнение для этого состояния равновесия запишем в виде $\lambda^2-\alpha=0$. Следовательно, $\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{\alpha}$. Тогда точка $O(0; 0)$ при $\alpha>0$ — седло, при $\alpha<0$ — центр или фокус.

Пусть $\alpha<0$, обозначим $-\alpha=k$. Система (9) имеет вид $\dot{x}=y+(1/3)x^2-xy$, $\dot{y}=-kx-(1/3)y^2+xy$. Приведем ее к каноническому виду, введя переменные $u=-kx$, $v=\sqrt{k}y$, $\tau=\sqrt{k}t$. Получим

$$du/d\tau=-v-u^2/3k\sqrt{k}-uv/k,\quad dv/d\tau=u-v^2/3k-uv/k\sqrt{k}.$$

Для систем такого вида Н. И. Сахарников [8, с. 670] выделил все случаи, когда положение равновесия точка $O(0; 0)$ является центром. В нашем случае условия Сахарникова выполняются лишь при $\alpha=-1$. Поэтому точка $O(0; 0)$ является центром при $\alpha=-1$ и фокусом при $\alpha<0$, $\alpha\neq-1$.

Исследуем характер остальных точек покоя системы (9), не находя явно их координаты. Для этого параметр α будем рассматривать как функцию от x. График этой функции в плоскости αOX изображен на рис. 1. Непосредственно из графика видно, что уравнение (12) имеет три различных действительных решения при $\alpha>0$ и одно решение при $\alpha<0$. Следовательно, система (9) имеет четыре положения равновесия при $\alpha>0$ и два при $\alpha<0$. Координаты точек покоя, отличных от точки $O(0; 0)$, находятся по формулам (11), (12).

Для исследования этих точек рассмотрим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} \partial Q/\partial x-\lambda & \partial Q/\partial y \\ \partial P/\partial x & \partial P/\partial y-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

решая которое получим $\lambda_1=2x(2x-3)/(9(x-1))$, $\lambda_2=x(2x-3)/(3(x-$

$-1)$). Здесь характеристические числа одного знака, т. е. точки равновесия, координаты которых определяются по формулам (11) и (12), всегда узлы, за исключением точки $(3/2, 3/2)$, которая соответствует значению $\alpha=-1$ и является сложной особенностью с эллиптической областью. При этом если абсцисса точки покоя $x \in (\infty; 0) \cup (1; 3/2)$, то узел устойчивый, если $x \in (0; 1) \cup (3/2; \infty)$, то узел неустойчивый.

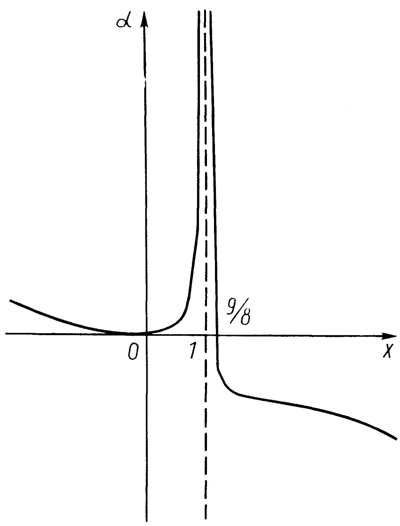

Рис. 1

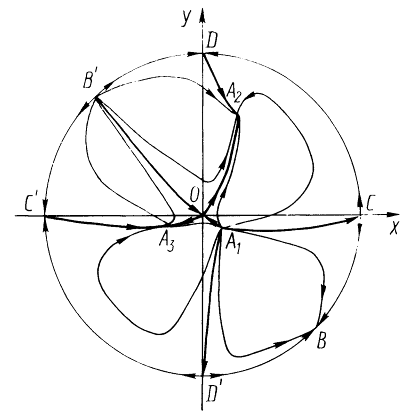

Рис. 2

Рассмотрим поведение траекторий системы (9) в бесконечности. С помощью преобразования Пуанкаре $x=v/z$, $y=1/z$ и умножения полученных уравнений на z (9) приводится к виду $dz/d\tau=-(1/3)z+uz-uz^2$, $du/d\tau=\alpha z+(2/3)u+(2/3)u^2-u^2 z$, где $\tau=t/z$. Данная система имеет два состояния равновесия на оси $z=0$: $C(0;0)$ — седло и $B(-1;0)$ — устойчивый узел.

С помощью другого преобразования Пуанкаре $x=v/z$, $y=1/z$ можно показать, что состояние равновесия, лежащее на бесконечно удаленной части оси Oy, является седлом.

Докажем, что у системы (9) при $\alpha<0$, $\alpha\neq-1$ не существует предельных циклов вокруг фокуса.

Предварительно заметим, что кривая (10) не имеет замкнутой ветви, окружающей начало координат, так как в противном случае график функции $F(x,y)=0$ должен пересекать как положительную, так и отрицательную полуось Oy. Но при $x=0$ $F(x,y)=-4y^3+27(y+\alpha)^2=0$, т. е. данная кривая пересекает ось Oy лишь при $y>0$.

Применим критерий Дюляка, выбирая в качестве функции Дюляка $B(x,y)=x^3y^{-3}F^{-5/6}(x,y)$, где $F(x,y)$ — частный алгебраический интеграл (10). Тогда получим

$$\partial(BQ)/\partial x+\partial(BP)/\partial y=F^{-5/6}(x,y)x^2y^{-4}[y^2(3-2x)-x^2(3\alpha+2y)]/y^4. \tag{13}$$

Заметим, что предельные циклы, если они существуют, должны лежать в области $y<-\alpha$, $x<1$, так как на прямых $y=-\alpha$ и $x=1$ соответственно имеем $\dot{y}=-(1/3)y^2<0$, $\dot{x}=(1/3)x^2>0$. Но в этой области выражение (13) сохраняет знак. Следовательно, предельных циклов у системы (9) нет.

Рассмотрим поведение интегральных кривых в целом при $\alpha>0$, $-1<\alpha<0$, $\alpha<-1$ на конкретных примерах. Пусть 1) $\alpha=5/27$, 2) $\alpha=-25/27$, 3) $\alpha=-5/4$.

Система

$$\dot{x}=y+(1/3)x^2-xy,\quad \dot{y}=(5/27)x-(1/3)y^2+xy$$

имеет четыре состояния равновесия в конечной части плоскости. Координаты точек, отличных от точки $O(0; 0)$, находятся по формулам (11) и (12). Из предыдущих рассуждений следует, что точка $O(0; 0)$ — седло, точка $A_1(1/2, -1/6)$ — неустойчивый узел, точка $A_2(\sqrt{5}/2; 5(\sqrt{5}+2)/6)$ — устойчивый узел, точка $A_3(-\sqrt{5}/2; -5(\sqrt{5}-2)/6)$ — устойчивый узел.

Система

$$\dot{x}=y+(1/3)x^2-xy,\ \dot{y}=-(25/27)x-(1/3)y^2+xy$$

имеет две особые точки: точка $O(0; 0)$ — фокус, точка $A(3; 3/2)$ — устойчивый узел. По доказанному ранее предельных циклов вокруг фокуса нет.

Система

$$\dot{x}=y+(1/3)x^2-xy,\ \dot{y}=-(5/4)x-(1/3)y^2+xy$$

имеет две особые точки: точка $O(0; 0)$ — фокус, точка $A(10/8, 25/12)$ — неустойчивый узел. Предельных циклов также не существует.

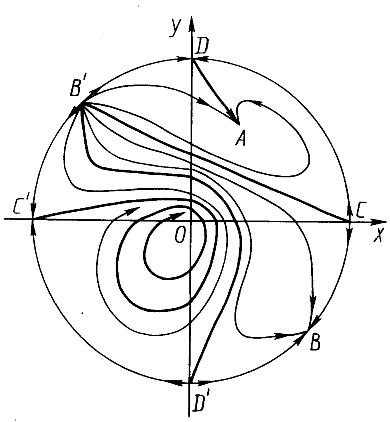

Рис. 3

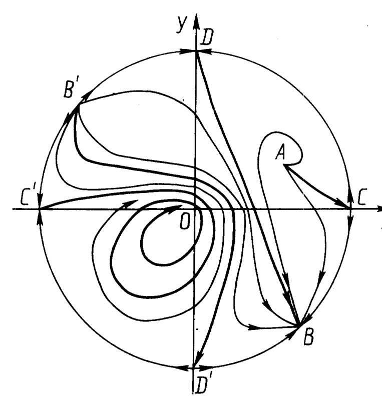

Рис. 4

Число и конфигурация бесконечно удаленных точек покоя не зависят от значений α, поэтому для данных систем на бесконечности имеем седла на осях координат и узел на прямой $y=-x$.

Качественная картина поведения интегральных кривых в круге Пуанкаре при $\alpha=5/27$, $\alpha=-25/27$, $\alpha=-5/4$ показана соответственно на рис. 2—4.

Литература

1. Еругин Н. П. // Прикл. математика и механика. 1952. Т. 16, вып. 6. С. 659—670.
2. Черкас Л. А. // Докл. АН БССР. 1963. Т. 7, № 11. С. 732—735.
3. Евдокименко Р. М. // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6, № 8. С. 1780—1791.
4. Евдокименко Р. М. // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 9. С. 1507—1568.
5. Евдокименко Р. М. // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 12. С. 215—221.
6. Яблонский А. И. // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6, № 10. С. 1752—1780.
7. Яблонский А. И. // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, № 12. С. 279—285.
8. Сахарников Н. А. // Прикл. математика и механика. 1948. Т. 12, вып. 5. С. 669—670.
9. Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. М., 1966.

Белорусский государственный педагогический университет,
Белорусский государственный экономический университет

Поступила в редакцию 8 февраля 1994 г.