Е. Н. Залесская, О новых классах сопряженных инъекторов конечных групп, *Дискрет. матем.*, 2004, том 16, выпуск 1, 105–113

DOI: https://doi.org/10.4213/dm145

Дискретная математика

том 16 выпуск 1 * 2004

УДК 512.542

О новых классах сопряженных инъекторов конечных групп

© 2004 г. Е. Н. Залесская

В исследовании задачи существования и сопряженности инъекторов в произвольной конечной группе известен результат Блессеноля–Лауе о том, что в любой конечной группе G существует единственный класс сопряженных квазинильпотентных инъекторов, которые в точности являются $\mathfrak{N}^*$-максимальными подгруппами G, содержащими обобщенную подгруппу Фиттинга $F^*(G)$. В настоящей работе, используя конструкции классов Блессеноля–Лауе и Гашюца, мы расширяем результат Блессеноля–Лауе на случай, когда класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}\mathfrak{B}$, где $\mathfrak{H}$ — непустой класс Фиттинга и $\mathfrak{B}$ — класс Блессеноля–Лауе, тем самым выделяя новый класс сопряженных $\mathfrak{F}$-инъекторов в классах $\mathfrak{E}$ всех конечных групп и $\mathfrak{S}^\pi$ всех конечных π-разрешимых групп соответственно. Более того, мы доказываем, что $\mathfrak{F}$-инъекторы группы G — это в точности все те $\mathfrak{F}$-максимальные подгруппы G, которые содержат ее $\mathfrak{F}$-радикал $G_{\mathfrak{F}}$. Специальными случаями таких инъекторов являются инъекторы для многих известных классов Фиттинга. В частности, такие инъекторы в классе $\mathfrak{S}$ всех конечных разрешимых групп были описаны Хартли, Фишером, Францем, Локеттом.

1. Введение

В теории классов Фиттинга конечных разрешимых групп один из основополагающих результатов — обобщение теорем Силова и Холла, которое представляет теорема Гашюца–Фишера–Хартли [1] о том, что для любого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ в любой конечной разрешимой группе G существуют $\mathfrak{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены в G.

Напомним, что класс Фиттинга — класс групп, замкнутый относительно нормальных подгрупп и их произведений, а формация — класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Если класс групп одновременно является классом Фиттинга и формацией, то его называют формацией Фиттинга. Заметим, что если $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга, то подгруппа V группы G называется ее $\mathfrak{F}$-инъектором [2], если $V \cap N$ является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой в N для любой субнормальной подгруппы N группы G.

Расширение указанного выше результата на случай произвольных конечных групп в общем случае невозможно (см., например, стр. 295 в [2]). Однако в этом направлении известны результаты Л. А. Шеметкова [3, 4], В. Г. Сементовского [5], которые выделяют классы сопряженных инъекторов в случае, когда группа G частично разрешима.

Впервые классы сопряженных инъекторов в произвольной конечной группе были найдены Блессенолем и Лауе [6]. При этом, ярким результатом в этом направлении является теорема о том, что любая конечная группа G имеет единственный класс сопряженных квазинильпотентных инъекторов ($\mathfrak{N}^*$-инъекторов), которые в точности являются $\mathfrak{N}^*$-максимальными подгруппами G, содержащими обобщенную подгруппу Фиттинга $F^*(G)$.

Напомним, что класс всех квазинильпотентных групп $\mathfrak{N}^*$ — это класс групп $(G \mid G = F(G)L(G) = F^*(G))$, где $F(G)$ — подгруппа Фиттинга, $L(G)$ — полупростой радикал группы G (см. [7]).

В настоящей работе, используя классы Блессеноля–Лауэ [6], а также конструкции классов Фиттинга, предложенные Гашюцом (см. IX.2 в [2]), мы находим новые классы сопряженных инъекторов в классе $\mathfrak{E}$ всех конечных групп и классе $\mathfrak{S}^\pi$ всех конечных π-разрешимых групп. Заметим, что специальными случаями таких инъекторов являются инъекторы для многих известных классов Фиттинга. В частности, такие инъекторы в классе $\mathfrak{S}$ всех конечных разрешимых групп были описаны Хартли [8], Фишером [9], Францем [10], Локеттом [11].

Для описания инъекторов мы будем использовать понятие произведения классов Фиттинга. Произведением классов Фиттинга $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ называется класс всех тех групп G, для которых $G/G_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{Y}$.

Рассматриваются только конечные группы. В определениях и обозначениях мы следуем [2].

2. Предварительные сведения

2.1. BL-классы

Вначале напомним процедуру построения классов Фиттинга, которая была предложена Блессенолем и Лауэ [6].

Пусть $\mathfrak{L}$ — подкласс класса $\mathfrak{J}$ всех простых групп, J — произвольная простая группа и $K(J)$ — подгруппа $\mathrm{Aut}(J)$, которая удовлетворяет следующим требованиям:

(1) если J и J_1 — изоморфные простые группы и ψ — изоморфизм $\mathrm{Aut}(J)$ на $\mathrm{Aut}(J_1)$, то $K(J)^\psi = K(J_1)$;

(2) если J — циклическая группа, то $K(J) = 1$;

(3) для каждой простой группы J справедливо включение $\mathrm{Inn}(J) \leqslant K(J)$.

Тогда ввиду (1) $K(J) \lhd \mathrm{Aut}(J)$ для любой простой группы J.

Если L/M — главный фактор группы G и L/M является прямым произведением изоморфных друг другу простых групп $J_1, \dots, J_r$, то $C_G^K(L/M)$ — нормальная подгруппа G, которая определяется следующим образом: $g \in C_G^K(L/M)$ тогда и только тогда, когда для $g \in G$ справедливо равенство $J_i^g = J_i$ и g индуцирует на J_i автоморфизм из $K(J_i)$ для $1 \leqslant i \leqslant r$.

Главный фактор L/M группы G называют K-центральным в G, если $C_G^K(L/M) = G$.

Пусть подгруппы T и S нормальны в G и $T \subseteq S$, тогда под главным фактором G между T и S понимают какой-нибудь G-главный фактор G-группы S/T. Если он является минимальной нормальной подгруппой группы G/T, то такой фактор называется минимальным главным фактором G между S и T. Главный фактор L/M группы G называют $\mathfrak{L}$-фактором, если он является прямым произведением простых групп, принадлежащих $\mathfrak{L}$.

Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — классы Фиттинга, причем $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}$. Блессенолем и Лауэ [6] были введены два класса $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_{\mathfrak{L}}^K(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ и $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_{\mathfrak{L}}^{\mathfrak{K}}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, которые определяются следующим образом:

$G \in \mathfrak{B}^{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{L}}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ тогда и только тогда, когда каждый главный $\mathfrak{L}$-фактор G между $G_{\mathfrak{X}}$ и $G_{\mathfrak{Y}}$ K-централен в G;

$G \in \mathfrak{C}^{K}_{\mathfrak{L}}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ тогда и только тогда когда каждый минимальный главный $\mathfrak{L}$-фактор G между $G_{\mathfrak{X}}$ и $G_{\mathfrak{Y}}$ K-централен в G.

Классы $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ назовем классами Блессеноля–Лауе или коротко BL-классами. Как установлено [6] (см. теорему 1.2), BL-классы являются классами Фиттинга.

2.2. BL-классы и конструкции Гашюца

Композиционной функцией Хартли или композиционной H-функцией назовем функцию $f : \mathfrak{J} \to$ {классы Фиттинга}, принимающую одинаковые значения на изоморфных группах. Если функция $f : \mathfrak{J} \to$ {формации} принимает одинаковые значения на изоморфных группах, то f называют (см. [12]) композиционным экраном или композиционным спутником.

Пусть $\mathfrak{F}$ — такая формация Фиттинга, что $D_0(J) \subseteq \mathfrak{F} \subseteq D_0S_n(\mathrm{Aut}(J))$.

Определим композиционную H-функцию f следующим образом:

$$f(J) = \begin{cases} (1), & J \in \mathfrak{L} \cap \mathfrak{A}, \\ \mathfrak{F}, & J \in \mathfrak{L} \setminus \mathfrak{A}, \\ \mathfrak{E}, & J \in \mathfrak{J} \setminus \mathfrak{L} \end{cases}$$

Напомним, что если f — композиционный спутник и L/M — нормальная секция группы G, то L/M называют f-гиперцентральной в G, если каждый G-главный $\mathfrak{L}$-фактор R/S группы L/M является f-центральным в G, то есть $G/C_G(R/S) \in f(J)$ для всех $J \in \mathfrak{L}$. Следуя Гашюцу (см. IX.2 в [2]), пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — классы Фиттинга, причем $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Y}$ и $R(G) = G_{\mathfrak{Y}}/G_{\mathfrak{X}}$ для всех групп $G \in \mathfrak{E}$. Тогда ввиду IX.(4.α) из [2] класс групп

$$HR(f, R) = \{G \in \mathfrak{E} \mid R(G)\ f\text{-гиперцентральна в } G\}$$

совпадает с BL-классом $\mathfrak{B}$ и является классом Фиттинга.

Если же ψ — такая композиционная H-функция, что

$$\psi(J) = \begin{cases} (1), & J \in \mathfrak{L} \cap \mathfrak{A}, \\ D_0(J), & J \in \mathfrak{L} \setminus \mathfrak{A}, \\ \mathfrak{E}, & J \in \mathfrak{J} \setminus \mathfrak{L}, \end{cases}$$

то для построения класса Фиттинга $\mathfrak{C}$ мы будем также использовать конструкцию Гашюца (см. IX.2 в [2]).

При этом напомним, что цоколем группы G называется произведение всех минимальных нормальных подгрупп группы G.

Пусть $S(G) = (G_{\mathfrak{Y}}/G_{\mathfrak{X}}) \cap \mathrm{Soc}(G/G_{\mathfrak{X}})$ для всех групп $G \in \mathfrak{E}$. Тогда класс групп

$$HS(\psi, S) = \{G \in \mathfrak{E} \mid S(G)\}\ \psi\text{-гиперцентральна в } G\}$$

ввиду IX.2.8 из [2] является классом Фиттинга и кроме того (см. стр. 629 в [2]) совпадает с BL-классом $\mathfrak{C}$.

В дальнейшем мы будем использовать свойства BL-классов $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ и свойства инъекторов, которые приведем в виде следующих двух лемм.

Пусть $\pi = \mathrm{Char}(\mathfrak{L})$ и S^{π} — класс всех π-разрешимых групп. Тогда с учетом леммы IX.4.2 из [2] и теорем 4.1 и 4.2 из [3] справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Для классов $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ справедливы следующие утверждения:*

(1) *в любой группе $G \in \mathfrak{E}$ существует единственный класс сопряженных $\mathfrak{B}$-инъекторов, которые в точности являются $\mathfrak{B}$-максимальными подгруппами G, содержащими $\mathfrak{B}$-радикал группы G;*

(2) *в любой группе $G \in \mathfrak{S}^{\pi}$ существует единственный класс сопряженных $\mathfrak{C}$-инъекторов, которые в точности являются $\mathfrak{C}$-максимальными подгруппами G, содержащими $\mathfrak{C}$-радикал группы G.*

Лемма 2 ([2]). *Пусть G — произвольная группа и $\mathfrak{F}$ — непустой класс Фиттинга. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *если V — $\mathfrak{F}$-инъектор G и $K \lhd G$, то $V \cap K$ — $\mathfrak{F}$-инъектор группы K;*

(2) *если V — $\mathfrak{F}$-инъектор G и $\alpha\colon G \to G\alpha$ изоморфизм, то $V\alpha$ является $\mathfrak{F}$-инъектором группы $G\alpha$;*

(3) *подгруппа V группы G является ее $\mathfrak{F}$-инъектором, если V является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой группы G и $V \cap M$ является $\mathfrak{F}$-инъектором M для любой максимальной нормальной подгруппы M группы G.*

3. Инъекторы произведений классов Фиттинга

Если $\mathfrak{F}$ — непустой класс Фиттинга, то группу G называют $\mathfrak{F}$-скованной [13], если $C_G(G_{\mathfrak{F}}) \leqslant G_{\mathfrak{F}}$.

Лемма 3. *Пусть $\mathfrak{H}$ — некоторый непустой класс Фиттинга, $\mathfrak{Z} \in \{\mathfrak{B}, \mathfrak{C}\}$ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}\mathfrak{Z}$. Если G — такая группа, что группа $G/G_{\mathfrak{H}}$ $\mathfrak{Z}$-скована, и V – подгруппа группы G, содержащая ее $\mathfrak{F}$-радикал $G_{\mathfrak{F}}$, то справедливы следующие утверждения:*

(1) *$V_{\mathfrak{H}} = G_{\mathfrak{H}}$;*

(2) *V является $\mathfrak{F}$-подгруппой группы G тогда и только тогда, когда $V/G_{\mathfrak{H}}$ — $\mathfrak{Z}$-подгруппа группы $G/G_{\mathfrak{H}}$;*

(3) *подгруппа V $\mathfrak{F}$-максимальна в G тогда и только тогда, когда подгруппа $V/G_{\mathfrak{H}}$ $\mathfrak{Z}$-максимальна в $G/G_{\mathfrak{H}}$.*

Доказательство. 1. По условию $G_{\mathfrak{F}} \lhd V$ и $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Следовательно,

$$[V_{\mathfrak{H}}, G_{\mathfrak{F}}] \subseteq V_{\mathfrak{H}} \cap G_{\mathfrak{F}} = (G_{\mathfrak{F}})_{\mathfrak{H}} = G_{\mathfrak{H}}.$$

Но по лемме А.7.4.(с) из [2] $[V_{\mathfrak{H}}/G_{\mathfrak{H}}, G_{\mathfrak{F}}/G_{\mathfrak{H}}] = [V_{\mathfrak{H}}, G_{\mathfrak{F}}]G_{\mathfrak{H}}/G_{\mathfrak{H}}$. Поэтому

$$[V_{\mathfrak{H}}, G_{\mathfrak{F}}]G_{\mathfrak{H}}/G_{\mathfrak{H}} \subseteq G_{\mathfrak{H}}/G_{\mathfrak{H}}.$$

Следовательно, подгруппы $V_{\mathfrak{H}}/G_{\mathfrak{H}}$ и $G_{\mathfrak{F}}/G_{\mathfrak{H}}$ поэлементно перестановочны. Значит, $V_{\mathfrak{H}}/G_{\mathfrak{H}} \subseteq C_{G/G_{\mathfrak{H}}}(G_{\mathfrak{F}}/G_{\mathfrak{H}})$. Но $C_{G/G_{\mathfrak{H}}}((G/G_{\mathfrak{H}})_{\mathfrak{Z}}) \subseteq (G/G_{\mathfrak{H}})_{\mathfrak{Z}}$. Ввиду леммы IX.1.12(b) из [2] $(G/G_{\mathfrak{H}})_{\mathfrak{Z}} = G_{\mathfrak{H}\mathfrak{Z}}/G_{\mathfrak{H}} = G_{\mathfrak{F}}/G_{\mathfrak{H}}$, и поэтому $C_{G/G_{\mathfrak{H}}}(G_{\mathfrak{F}}/G_{\mathfrak{H}}) \subseteq G_{\mathfrak{F}}/G_{\mathfrak{H}}$.

Таким образом, $V_{\mathfrak{H}}/G_{\mathfrak{H}} \subseteq G_{\mathfrak{F}}/G_{\mathfrak{H}}$ и $V_{\mathfrak{H}} \subseteq G_{\mathfrak{F}}$. Следовательно,

$$G_{\mathfrak{H}} = (G_{\mathfrak{F}})_{\mathfrak{H}} = V_{\mathfrak{H}} \cap G_{\mathfrak{F}} = V_{\mathfrak{H}}.$$

2. Так как $G_{\mathfrak{F}} \subseteq V$, то по утверждению 1 леммы 3 $V_{\mathfrak{H}} = G_{\mathfrak{H}}$. Следовательно, V является $\mathfrak{F}$-подгруппой в точности тогда, когда $V/G_{\mathfrak{H}}$ является $\mathfrak{Z}$-группой.

3. Пусть V — $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа группы G. Предположим, что $V/G_{\mathfrak{H}} \subset L/G_{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{Z}$. Ввиду того, что $G_{\mathfrak{F}} \subset L$, по утверждению 1 леммы 3 $L_{\mathfrak{H}} = G_{\mathfrak{H}}$. Следовательно, $L/G_{\mathfrak{H}} = L/L_{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{Z}$ и $L \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие с тем, что подгруппа V является $\mathfrak{F}$-максимальной в G. Значит, $V = L$ и подгруппа $V/G_{\mathfrak{H}}$ является $\mathfrak{Z}$-максимальной в $G/G_{\mathfrak{H}}$.

Пусть теперь подгруппа $V/G_{\mathfrak{H}}$ является $\mathfrak{Z}$-максимальной в $G/G_{\mathfrak{H}}$. Предположим, что $V \subset L \in \mathfrak{F}$. Тогда из того, что $G_{\mathfrak{F}} \subset L$, по утверждению 1 леммы 3 следует, что $L_{\mathfrak{H}} = G_{\mathfrak{H}}$. Так как $L \in \mathfrak{F}$, то $L/L_{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{Z}$. Значит, $V/G_{\mathfrak{H}} \subset L/G_{\mathfrak{H}} = L/L_{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{Z}$. Это противоречит тому, что $V/G_{\mathfrak{H}}$ является $\mathfrak{Z}$-максимальной в $G/G_{\mathfrak{H}}$. Следовательно, $V = L$ и подгруппа V является $\mathfrak{F}$-максимальной в G. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{H}$ — некоторый непустой класс Фиттинга и $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}\mathfrak{B}$. Тогда для любой группы G такой, что $G/G_{\mathfrak{H}}$ является $\mathfrak{B}$-скованной, и ее подгруппы V справедливы следующие утверждения:*

(1) *V является $\mathfrak{F}$-инъектором группы G тогда и только тогда, когда $V/G_{\mathfrak{H}}$ является $\mathfrak{B}$-инъектором группы $G/G_{\mathfrak{H}}$;*

(2) *$\mathfrak{F}$-инъекторы группы G — это в точности все те ее $\mathfrak{F}$-максимальные подгруппы, которые содержат $\mathfrak{F}$-радикал $G_{\mathfrak{F}}$;*

(3) *в любой группе G существуют $\mathfrak{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены в G.*

Доказательство. Докажем первое утверждение. Пусть V — $\mathfrak{F}$-инъектор группы G. Тогда $G_{\mathfrak{F}} \subseteq V$ и V является $\mathfrak{F}$-максимальной в G. Следовательно, по утверждению 3 леммы 3 подгруппа $V/G_{\mathfrak{H}}$ является $\mathfrak{B}$-максимальной в $G/G_{\mathfrak{H}}$. Ввиду леммы IX.1.12(b) из [2] $(G/G_{\mathfrak{H}})_{\mathfrak{B}} = G_{\mathfrak{F}}/G_{\mathfrak{H}}$. Поэтому из того, что $G_{\mathfrak{F}} \subseteq V$, следует, что $(G/G_{\mathfrak{H}})_{\mathfrak{B}} \subseteq V/G_{\mathfrak{H}}$. Отсюда по утверждению 1 леммы 1 получаем, что $V/G_{\mathfrak{H}}$ есть $\mathfrak{B}$-инъектор группы $G/G_{\mathfrak{H}}$.

Обратное утверждение докажем индукцией по порядку группы G. Пусть G — контрпример минимального порядка. Согласно утверждению 1 леммы 1 в группе $G/G_{\mathfrak{H}}$ существует $\mathfrak{B}$-инъектор $V/G_{\mathfrak{H}}$. Пусть M — любая максимальная нормальная подгруппа группы G. Ввиду леммы IX.1.1.(a) из [2] $M_{\mathfrak{H}} = G_{\mathfrak{H}} \cap M$. Рассмотрим два возможных случая.

1. Группа $G_{\mathfrak{H}} \subseteq M$. Тогда $G_{\mathfrak{H}} = M_{\mathfrak{H}}$. Так как $V/G_{\mathfrak{H}}$ — $\mathfrak{B}$-инъектор группы $G/G_{\mathfrak{H}}$, по утверждению 1 леммы 2 подгруппа $V \cap M/G_{\mathfrak{H}}$ является $\mathfrak{B}$-инъектором группы $M/G_{\mathfrak{H}}$. Но в данном случае $M_{\mathfrak{H}} = G_{\mathfrak{H}}$, и поэтому $V \cap M/M_{\mathfrak{H}}$ — $\mathfrak{B}$-инъектор группы $M/M_{\mathfrak{H}}$. Следовательно, по индукции подгруппа $V \cap M$ — $\mathfrak{F}$-инъектор группы M. Так как $V/G_{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{B}$, про утверждению 2 леммы 3 $V \in \mathfrak{F}$. Докажем, что V — $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа группы G. Действительно, ввиду утверждения 1 леммы 1 $V/G_{\mathfrak{H}}$ — $\mathfrak{B}$-максимальная подгруппа группы $G/G_{\mathfrak{H}}$, содержащая подгруппу $(G/G_{\mathfrak{H}})_{\mathfrak{B}}$. Так как по лемме IX.1.12 (b) из [2] $(G/G_{\mathfrak{H}})_{\mathfrak{B}} = G_{\mathfrak{F}}/G_{\mathfrak{H}}$, то $G_{\mathfrak{F}} \subseteq V$. Следовательно, по утверждению 3 леммы 3 V является $\mathfrak{F}$-максимальной в G.

Итак, в данном случае V — $\mathfrak{F}$-инъектор группы G по утверждению 3 леммы 2. Полученное противоречие исключает случай 1. Остается принять случай 2.

2. Группа $G_{\mathfrak{H}} \nsubseteq M$. В этом случае, ввиду максимальности M, $G = G_{\mathfrak{H}}M$. Так как

$$G/G_{\mathfrak{H}} \simeq M/G_{\mathfrak{H}} \cap M = M/M_{\mathfrak{H}},$$

по утверждению 2 леммы 2 подгруппа $V \cap M/M_{\mathfrak{H}}$ является $\mathfrak{B}$-инъектором группы $M/M_{\mathfrak{H}}$. Следовательно, по индукции $V \cap M$ — $\mathfrak{F}$-инъектор группы M. По утверждению 2 леммы 3 $V \in \mathfrak{F}$, и аналогично, как и в случае 1, V является $\mathfrak{F}$-максимальной в G.

Значит, ввиду произвольности выбора максимальной нормальной подгруппы M группы G из утверждения 3 леммы 2 следует, что V — $\mathfrak{F}$-инъектор группы G. Полученное противоречие завершает доказательство первого утверждения теоремы.

Если подгруппа V является $\mathfrak{F}$-инъектором группы G, то по определению $\mathfrak{F}$-инъектора, очевидно, что $G_{\mathfrak{F}} \subseteq V$ и V является $\mathfrak{F}$-максимальной в G.

Докажем обратное утверждение. Пусть V — любая $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа группы G, содержащая ее $\mathfrak{F}$-радикал $G_{\mathfrak{F}}$. Покажем, что V — $\mathfrak{F}$-инъектор группы G. Так как $G_{\mathfrak{F}} \subseteq V$ и $V \in \mathfrak{F}$, по утверждению 2 леммы 3 $V/G_{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{B}$. Тогда, применяя утверждение 3 этой леммы, заключаем, что подгруппа $V/G_{\mathfrak{H}}$ является $\mathfrak{B}$-максимальной в $G/G_{\mathfrak{H}}$. Но из того, что $G_{\mathfrak{F}} \subseteq V$, следует, что

$$(G/G_{\mathfrak{H}})_{\mathfrak{B}} = G_{\mathfrak{F}}/G_{\mathfrak{H}} \subseteq V/G_{\mathfrak{H}}.$$

Следовательно, по утверждению 1 леммы 1 $V/G_{\mathfrak{H}}$ является $\mathfrak{B}$-инъектором группы $G/G_{\mathfrak{H}}$. Но тогда из первого утверждения теоремы вытекает, что подгруппа V является $\mathfrak{F}$-инъектором группы G. Второе утверждение теоремы доказано.

Ввиду утверждения 1 леммы 1 в любой группе G существуют $\mathfrak{B}$-инъекторы и любые два из них сопряжены в G. Следовательно, из первого утверждения теоремы вытекает, что в любой группе G существуют $\mathfrak{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены в G. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{H}$ — некоторый непустой класс Фиттинга и $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}\mathfrak{C}$. Тогда для любой группы $G \in \mathfrak{S}^{\pi}$ такой, что группа $G/G_{\mathfrak{H}}$ является $\mathfrak{C}$-скованной, и ее подгруппы V справедливы следующие утверждения:*

(1) *V является $\mathfrak{F}$-инъектором группы G тогда и только тогда, когда $V/G_{\mathfrak{H}}$ является $\mathfrak{C}$-инъектором группы $G/G_{\mathfrak{H}}$;*

(2) *в любой группе G существует единственный класс сопряженных $\mathfrak{F}$-инъекторов;*

(3) *$\mathfrak{F}$-инъекторы группы G — это в точности все те $\mathfrak{F}$-максимальные подгруппы G, которые содержат $\mathfrak{F}$-радикал $G_{\mathfrak{F}}$.*

Доказательство теоремы осуществляется аналогично доказательству теоремы 1 с учетом леммы 3 и утверждения 2 леммы 1.

Замечание 1. Если класс Фиттинга $\mathfrak{H}$ совпадает с классом Фиттинга $\mathfrak{X}$, который определяет класс $HR(f, R)$, то ввиду леммы IX.3.19 из [2] условие $\mathfrak{C}$-скованности для факторгруппы $G/G_{\mathfrak{X}}$ можно опустить. В этом случае, учитывая лемму 3, получаем, что в любой группе $G \in \mathfrak{S}^{\pi}$ существует единственный класс сопряженных $\mathfrak{X}\mathfrak{C}$-инъекторов, которые в точности являются $\mathfrak{X}\mathfrak{C}$-максимальными подгруппами G, содержащими $\mathfrak{X}\mathfrak{C}$-радикал $G_{\mathfrak{X}\mathfrak{C}}$.

4. Следствия теорем 1 и 2

Вначале приведем следствия из теоремы 1, которые получаются с помощью задания конкретных значений композиционной H-функции f, определяющей конструкцию Гашюца $HR(f, R)$.

Пусть классы $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{L}$ таковы, что $\mathfrak{X} = (1)$, $\mathfrak{Y} = \mathfrak{E}$ и $\mathfrak{L} = \mathfrak{J}$. Определим композиционную H-функцию следующим образом:

$$f(J) = \begin{cases} (1), & J \in \mathfrak{L} \cap \mathfrak{A}, \\ D_0(J), & J \in \mathfrak{L} \setminus \mathfrak{A}. \end{cases}$$

Тогда ввиду того, что по леммам III.4.3 и X.13.12 из [7] каждая группа $\mathfrak{N}^*$-скована, для класса $HR(f, R) = \mathfrak{N}^*$ мы получаем следующее утверждение.

Следствие 1. *В любой группе G существуют $\mathfrak{H}\mathfrak{N}^*$-инъекторы и любые два из них сопряжены в G.*

В случае, когда $\mathfrak{H} = (1)$, из следствия 1 вытекает следующее утверждение, доказанное в [6].

Следствие 2. *В любой группе G существуют квазинильпотентные инъекторы, и любые два из них сопряжены в G.*

Приведем теперь следствия из теоремы 1, которые получаются при конкретных значениях классов $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{L}$, определяющих BL-класс $\mathfrak{B}$.

Пусть $\mathfrak{X} = \mathfrak{E}$, $\mathfrak{Y} = (1)$, причем $\mathfrak{L}$ — класс простых групп, который содержит все группы простого порядка, тогда согласно 5.2 из [6] получаем следующее утверждение.

Следствие 3. *В любой группе G такой, что $G/G_{\mathfrak{H}}$ является $\mathfrak{N}$-скованной, существуют $\mathfrak{H}\mathfrak{N}$-инъекторы и любые два из них сопряжены в G.*

Следствие 4 ([8]). *В каждой разрешимой группе G ее $\mathfrak{H}\mathfrak{N}$-инъекторы — это в точности $\mathfrak{H}\mathfrak{N}$-максимальные подгруппы G, содержащие ее $\mathfrak{H}\mathfrak{N}$-радикал.*

Если же $\mathfrak{H} = (1)$, то из следствия 3 вытекает следующее утверждение.

Следствие 5 ([14]). *Каждая $\mathfrak{N}$-скованная группа обладает единственным классом сопряженных $\mathfrak{N}$-инъекторов.*

Следствие 6 ([9]). *В каждой разрешимой группе G ее нильпотентные инъекторы — это в точности все те из максимальных нильпотентных подгрупп G, которые содержат подгруппу Фиттинга $F(G)$.*

Наконец, в случае, когда $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}$, $\mathfrak{Y} = (1)$, причем $\mathfrak{L} = \{\mathbf{Z}_p\}$, мы получаем для класса Фиттинга

$$\mathfrak{K} = \{G \in \mathfrak{E} \mid O_p(G) \leqslant Z_\infty(G)\}$$

следующие утверждения.

Следствие 7. *В любой группе G такой, что $G/G_{\mathfrak{H}}$ является $\mathfrak{K}$-скованной, существуют $\mathfrak{H}\mathfrak{K}$-инъекторы и любые два из них сопряжены в G.*

Следствие 8 ([10]). *В каждой разрешимой группе G ее $\mathfrak{K}$-инъекторы — это в точности $\mathfrak{K}$-максимальные подгруппы G, содержащие $\mathfrak{K}$-радикал $G_{\mathfrak{K}}$.*

Укажем теперь следствия, которые вытекают из теоремы 2 и описывают инъекторы для некоторых известных классов Фиттинга.

Пусть в дальнейшем $\pi = \mathrm{Char}(\mathfrak{L})$, где $\mathfrak{L}$ — подкласс класса $\mathfrak{J}$ всех конечных простых групп. Тогда в случае, когда $\mathfrak{X} = (1)$, учитывая замечание к теореме 2, получаем следующее утверждение.

Следствие 9 ([6]). *В любой π-разрешимой группе G существует единственный сопряженный класс $\mathfrak{C}$-инъекторов, каждый из которых в точности является $\mathfrak{C}$-максимальной подгруппой группы G, содержащей ее $\mathfrak{C}$-радикал $G_{\mathfrak{C}}$.*

Пусть теперь классы $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{L}$, определяющие конструкцию Гашюца $HS(\psi, S)$, таковы, что $\mathfrak{X} = (1)$, $\mathfrak{Y} = \mathfrak{E}$, $\mathfrak{L}$ — класс всех неабелевых простых групп, и композиционная H-функция ψ такова, что

$$\psi(J) = \begin{cases} \mathfrak{E}, & J \in \mathfrak{L} \cap \mathfrak{A}, \\ D_0(J), & J \in \mathfrak{L} \setminus \mathfrak{A}. \end{cases}$$

Тогда ввиду IX.2.9 (c) из [2] класс

$$HS(\psi, S) = \mathfrak{R} = (G \in \mathfrak{E} \mid [\mathrm{Soc}(G), \mathrm{Soc}(G)] \text{ является прямым множителем } G)$$

и справедливо следующее утверждение.

Следствие 10. *В любой π-разрешимой группе G такой, что $G/G_{\mathfrak{H}}$ является $\mathfrak{R}$-скованной, существует единственный класс сопряженных $\mathfrak{H}\mathfrak{R}$-инъекторов.*

В случае, когда $\mathfrak{H} = (1)$ справедливо следующее утверждение.

Следствие 11. *В любой π-разрешимой $\mathfrak{R}$-скованной группе G существуют $\mathfrak{R}$-инъекторы, и любые два из них сопряжены в G.*

Теперь приведем следствия из теоремы 2, которые получаются при конкретных значениях классов $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{L}$, определяющих BL-класс $\mathfrak{C}$.

Пусть $\mathfrak{X} = \mathfrak{E}$, $\mathfrak{Y} = (1)$, причем $\mathfrak{L} = \{\mathbf{Z}_p\}$, тогда BL-класс

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{Z}^p = (G \in \mathfrak{E} \mid \mathrm{Soc}_p(G) \leqslant Z(G))$$

и из теоремы 2 вытекает следующее утверждение.

Следствие 12. *В p-разрешимой группе G такой, что $G/G_{\mathfrak{H}}$ является $\mathfrak{Z}^p$-скованной, существуют $\mathfrak{H}\mathfrak{Z}^p$-инъекторы, и любые два из них сопряжены в G.*

Специальным случаем следствия 12 в классе всех разрешимых групп является результат Локетта–Франца [11, 10].

Заметим, что теорема 2 в общем случае в классе $\mathfrak{E}$ неверна. Действительно, если $\mathfrak{X} = \mathfrak{E}$, $\mathfrak{Y} = (1)$, причем $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{A} \neq 0$, то согласно 4.6 из [6] найдется группа G, в которой существуют по крайней мере два класса сопряженных $C^K_{\mathfrak{L}}(\mathfrak{E}, (1))$-инъекторов.

Список литературы

1. Fischer B., Gaschutz W., Hartley B., Injektoren endlicher auflosbarer Gruppen. *Math. Z.* (1967) **102**, №5, 337–339.
2. Doerk K., Hawkes T., *Finite soluble groups.* Walter de Gruyter, Berlin, 1992.
3. Шеметков Л. А., О подгруппах π-разрешимых групп. В кн.: *Конечные группы.* Наука и техника, Минск, 1975, с. 207–212.
4. Шеметков Л. А., Некоторые свойства инъекторов конечных групп. *Изв. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины, Вопросы алгебры.* (1999) **15**, №1, 5–13.
5. Сементовский В. Г., Δ-нильпотентные инъекторы конечных групп. *Вопросы алгебры* (1985) **1**, 72–86.
6. Blessenohl D., Laue H., Fittingklassen endlicher Gruppen in denen gewisse Haupfaktoren einfach sind. *J. Algebra* (1979) **56**, 516–532.
7. Huppert B., Blackburn N., *Finite groups.* III. Springer, Berlin, 1982.
8. Hartley B., On Fisher's dualization of formation theory. *Proc. London Math. Soc.* (1969) **3**, №2, 193–207.
9. Fischer B., *Klassen konjugierter Untergruppen in endlichen auflosbaren Gruppen.* Habilitationschrift, Univ. Frankfurt, 1966.
10. Frantz W., *Spezielle Fittingklassen und ihre Injektoren.* Diplomarbeit, Kiel, 1970.
11. Lokett P., *On the theory of Fitting classes of finite soluble groups.* Ph. D. Thesis, Univ. Warwick, 1971.
12. Шеметков Л. А., *Формации конечных групп.* Наука, Москва, 1978.
13. Iranzo M. J., Perez Monasor F., $\mathfrak{F}$-constraint with respect to a Fitting class. *Arch. Math.* (1986) **46**, 205–210.
14. Mann A., Injectors and normal subgroups of finite groups. *Israel J. Math.* (1971) **9**, 554–558.
15. Laue P., Über nichtauflosbare normale Fittingklassen. *J. Algebra* (1977) **45**, 274–283.

Статья поступила 03.04.2003.