Е. Н. Залесская, Н. Н. Воробьев, О решетках частично локальных классов Фиттинга, *Сиб. матем. журн.*, 2009, том 50, номер 6, 1319–1327

Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2009. Том 50, № 6

УДК 512.542

О РЕШЕТКАХ ЧАСТИЧНО ЛОКАЛЬНЫХ КЛАССОВ ФИТТИНГА

Е. Н. Залесская, Н. Н. Воробьев

Аннотация. Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Доказана сюръективность отображения решетки всех нормальных классов Фиттинга в решетку секции Локетта, порожденной ненормальными классами Фиттинга, которые не являются классами Локетта. Кроме того, определено достаточное условие для того, чтобы отображение решетки секции Локетта, порожденной произвольными классами Фиттинга, в решетку секции Локетта, порожденной ω-локальными классами Фиттинга, было сюръективно. Тем самым подтверждена гипотеза Локетта для ω-локальных классов Фиттинга заданной характеристики.

Ключевые слова: решетка классов Фиттинга, ω-локальный класс Фиттинга, класс Локетта, секция Локетта, гипотеза Локетта.

Введение

Множества всех классов Фиттинга и формаций являются полными решетками по включению $\subseteq$.

Напомним, что *классом Фиттинга* называется класс групп $\mathfrak{F}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) каждая нормальная подгруппа любой группы из $\mathfrak{F}$ принадлежит $\mathfrak{F}$;

2) из того, что нормальные подгруппы A и B группы G принадлежат $\mathfrak{F}$, всегда следует, что их произведение AB принадлежит $\mathfrak{F}$.

Применение решеточных методов в теории формаций групп впервые осуществлено в работе А. Н. Скибы [1], в которой доказано, что решетка всех (локальных) формаций модулярна. Вместе с тем мы не обладаем достаточной информацией о решетках классов Фиттинга. Так, например, относительно решетки всех (хотя бы разрешимых) классов Фиттинга в настоящее время неизвестно, является ли она модулярной. Поэтому ряд исследований связан с поиском модулярных решеток классов Фиттинга (см. [2, проблема 14.47]). Лаушем в работе [3] доказана модулярность решетки всех разрешимых нормальных классов Фиттинга. Позднее этот результат был расширен Брайсом и Косси [4], которые доказали модулярность и атомарность решетки классов Фиттинга из секции Локетта.

Напомним, что *секцией Локетта класса Фиттинга* $\mathfrak{F}$, обозначаемой $\mathrm{Locksec}(\mathfrak{F})$ [5], называют совокупность всех таких классов Фиттинга $\mathfrak{H}$, для которых $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{H}^*$, где класс $\mathfrak{F}^*$ определяется как наименьший из классов Фиттинга, содержащих $\mathfrak{F}$, такой, что для всех групп G и H справедливо равенство $(G \times H)_{\mathfrak{F}^*} = G_{\mathfrak{F}^*} \times H_{\mathfrak{F}^*}$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют *классом Локетта*, если $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$.

Напомним также, что неединичный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется *нормальным*, если в любой группе G ее $\mathfrak{F}$-радикал $G_{\mathfrak{F}}$ является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой группы G.

Следуя [6], для пары классов Фиттинга $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ определим отображение

$$\mathfrak{X} \to \mathfrak{X} \cap \mathfrak{F}^* \tag{1}$$

из Locksec($\mathfrak{H}$) в Locksec($\mathfrak{F}$). Для $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{E}$, где $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{E}$ — классы всех конечных разрешимых и всех конечных групп соответственно, отображение (1) является сюръективным (см. [6, X, 6.1]); другими словами, секция Локетта $\mathfrak{S}$ определяется секцией Локетта $\mathfrak{E}$. В работе [5] Локетт поставил проблему: верно ли, что отображение (1) сюръективно всегда, когда $\mathfrak{H} = \mathfrak{S}$? Впоследствии эта проблема стала известна как «гипотеза Локетта» [5].

Примечателен тот факт, что первоначально были построены сюръективные отображения решетки всех нормальных классов Фиттинга в решетку секции Локетта, порожденной следующими отдельными случаями локального класса Фиттинга: наследственного класса [4], классов вида $\mathfrak{X}\mathfrak{N}$, $\mathfrak{X}\mathfrak{S}_{\pi}\mathfrak{S}_{\pi'}$ [7], классов с постоянной H-функцией, т. е. классов вида $\mathfrak{X}(\bigcap\limits_{i\in I} \mathfrak{S}_{\pi_i}\mathfrak{S}_{\pi_i'})$ [6, X, 6.10]. Для произвольных локальных классов Фиттинга указанное отображение построено в 1988 г. Н. Т. Воробьевым [8].

В связи с этим актуальна задача отыскания нелокальных классов Фиттинга, удовлетворяющих гипотезе Локетта, т. е. таких нелокальных классов Фиттинга, в решетку секции Локетта которых сюръективно отображается решетка всех нормальных классов Фиттинга. В настоящей работе такая задача решена для p-локальных классов Фиттинга.

Вместе с тем Бергер и Косси [9] построили пример нелокального класса Фиттинга, который не удовлетворяет гипотезе Локетта (см., например, [6, X, 6.16]). Кроме примера Бергера — Косси [9], до настоящего времени не известен ни один из классов Фиттинга, для которого гипотеза Локетта была бы неверна. Заметим также, что Бейдлеманом и Хауком [7] поставлена проблема отыскания других примеров классов Фиттинга, не удовлетворяющих гипотезе Локетта: существуют ли другие несюръективные отображения решетки всех нормальных классов Фиттинга в решетку секции Локетта, порожденной классами Фиттинга?

В настоящей работе найдены новые примеры несюръективных отображений решетки всех нормальных классов Фиттинга в решетку секции Локетта, порожденной классами Фиттинга.

Напомним, что оригинальный вопрос Локетта был расширен Дерком и Хоуксом [6, X, 6.1] следующим образом.

Обобщенная гипотеза Локетта [6, X, 6.1]. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — классы Фиттинга, причем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ удовлетворяет гипотезе Локетта в $\mathfrak{H}$, если отображение* (1) *из* Locksec($\mathfrak{H}$) *в* Locksec($\mathfrak{F}$) *сюръективно.*

В этом случае класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ будем называть *$\mathscr{L}_{\mathfrak{H}}$-классом.* Если $\mathfrak{H} = \mathfrak{S}$, то $\mathscr{L}_{\mathfrak{H}}$-класс назовем просто *$\mathscr{L}$-классом.* Если же класс $\mathfrak{F}$ не является $\mathscr{L}$-классом, то будем называть его *$\overline{\mathscr{L}}$-классом.*

Ввиду результата Брайса и Косси [4] необходимым и достаточным условием для справедливости обобщенной гипотезы Локетта является выполнимость следующего равенства:

$$\mathfrak{F}_* = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{H}_* \tag{2}$$

(см., например, [6, X, 6.1]), где класс $\mathfrak{F}_*$ — пересечение всех таких классов Фиттинга $\mathfrak{X}$, для которых $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{F}^*$.

В 1996 г. Галледжи [10] построено сюръективное отображение решетки $\mathrm{Locksec}(\mathfrak{E})$ в решетку секции Локетта, порожденной произвольными локальными классами Фиттинга.

Нами доказано, что отображение решетки $\mathrm{Locksec}(\mathfrak{X})$ произвольного класса Фиттинга $\mathfrak{X}$ в решетку $\mathrm{Locksec}(\mathfrak{F})$ ω-локального класса Фиттинга $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$, где $\mathrm{Char}(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$, сюръективно. Тем самым подтверждена обобщенная гипотеза Локетта для ω-локальных классов Фиттинга заданной характеристики.

§ 1. Предварительные сведения

Все рассматриваемые группы конечны. Используемая в дальнейшем терминология общепринята (см. [6, 11]).

Пусть $\varnothing \neq \omega \subseteq \mathbb{P}$, где $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел.

Напомним, отображение $f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{$классы Фиттинга$\}$ называется *ω-локальной функцией Хартли* или *ω-локальной H-функцией.*

Пусть $LR_\omega(f) = \{G \mid G^\omega \in f(\omega')$ и $F^p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G)\}$, где $G^\omega = G^{\mathfrak{E}_\omega}, F^p(G) = G^{\mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}}$ и $\mathfrak{E}_\omega$ — класс всех ω-групп.

Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется *ω-локальным* [11], если существует некоторая ω-локальная H-функция f такая, что $\mathfrak{F} = LR_\omega(f)$.

Если $\mathfrak{F} = LR_\omega(f)$, где f — ω-локальная H-функция, то согласно результатам А. Н. Скибы [11] и В. А. Ведерникова [12] справедлива формула

$$\mathfrak{F} = \Big(\bigcap_{p\in\pi_2} \mathfrak{E}_{p'}\Big) \cap \Big(\bigcap_{p\in\pi_1} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}\Big) \cap f(\omega')\mathfrak{E}_\omega, \tag{3}$$

где $\pi_2 = \omega \setminus \pi_1$, $\pi_1 = \omega \cap \mathrm{Supp}(f)$ и $\mathrm{Supp}(f) = \{a \in \omega \cup \{\omega'\} \mid f(a) \neq \varnothing\}$.

Заметим, что в случае, когда $\omega = \{p\}$, класс Фиттинга называется *p-локальным.*

Лемма 1 [8]. *Если $\mathfrak{F}$ — некоторый класс Фиттинга и $\mathfrak{X}$ — насыщенный радикальный гомоморф, то $(\mathfrak{F}\mathfrak{X})^* = \mathfrak{F}^*\mathfrak{X}$.*

Лемма 2 [6]. *Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — классы Фиттинга. Справедливы следующие утверждения:*

(1) *если $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Y}$, то $\mathfrak{X}^* \subseteq \mathfrak{Y}^*$ и $\mathfrak{X}_* \subseteq \mathfrak{Y}_*$;*

(2) *$(\mathfrak{X}_*)_* = \mathfrak{X}_* = (\mathfrak{X}^*)_* \subseteq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}^* = (\mathfrak{X}_*)^* = (\mathfrak{X}^*)^*$;*

(3) *$\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}_*\mathfrak{A}$;*

(4) *если $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — множество непустых классов Фиттинга, то $\big(\bigcap_{i\in I} \mathfrak{F}_i\big)^* = \bigcap_{i\in I} {\mathfrak{F}_i}^*$.*

Лемма 3 [10]. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ — классы Фиттинга, причем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Если существует класс Фиттинга $\mathfrak{Y}$ такой, что $(\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{p'} \cap \mathfrak{F}) \vee \mathfrak{Y}\mathfrak{E}_p = \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{X}_* \cap \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{p'}$.*

Лемма 4 [10]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга. Тогда если существует класс Фиттинга $\mathfrak{Y}$ такой, что $\mathfrak{Y}\mathfrak{E}_p \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{Y}\mathfrak{E}_p\mathfrak{E}_{p'}$ для всех $p \in \mathrm{Char}(\mathfrak{F})$, то $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}$.*

Лемма 5 [6]. *Пусть p и q — различные простые числа. Тогда*

$$\mathfrak{S}_q\mathfrak{S}_p \nsubseteq \mathfrak{S}_*.$$

Лемма 6 [11]. *Пусть $\mathfrak{Y}$ — класс Фиттинга. Тогда следующие условия равносильны:*

1) $\mathfrak{Y}(F^p)\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{Y}$ *для всех* $p \in \omega$;

2) $\mathfrak{Y} = LR_\omega(f)$, *где* $f(\omega') = \mathfrak{Y}$ *и* $f(p) = \mathfrak{Y}(F^p)\mathfrak{N}_p$ *для всех* $p \in \omega$;

3) *класс* $\mathfrak{Y}$ ω*-локален.*

Напомним, что если $\mathfrak{X}$ — произвольная совокупность групп и p — некоторое простое число, то

$$\mathfrak{X}(F^p) = \begin{cases} \mathrm{Fit}(F^p(G) \mid G \in \mathfrak{X}), & p \in \pi(\mathfrak{X}), \\ \varnothing, & p \notin \pi(\mathfrak{X}). \end{cases}$$

Лемма 7. *Если $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ — классы Фиттинга, то* $(\mathfrak{X}_* \cap \mathfrak{F}_*)_* = (\mathfrak{X} \cap \mathfrak{F})_*$.

Доказательство. Докажем включение $(\mathfrak{X}_* \cap \mathfrak{F}_*)_* \subseteq (\mathfrak{X} \cap \mathfrak{F})_*$. Так как по лемме 2(2) $\mathfrak{X}_* \subseteq \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}_* \subseteq \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{X}_* \cap \mathfrak{F}_* \subseteq \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}_* \cap \mathfrak{F}_* \subseteq \mathfrak{F}$. Из этого следует, что $\mathfrak{X}_* \cap \mathfrak{F}_* \subseteq \mathfrak{X} \cap \mathfrak{F}$. Следовательно, ввиду леммы 2(1) имеем $(\mathfrak{X}_* \cap \mathfrak{F}_*)_* \subseteq (\mathfrak{X} \cap \mathfrak{F})_*$.

Докажем обратное включение. Очевидно, что $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}$. Ввиду леммы 2(1) $(\mathfrak{X} \cap \mathfrak{F})_* \subseteq \mathfrak{X}_*$ и $(\mathfrak{X} \cap \mathfrak{F})_* \subseteq \mathfrak{F}_*$. Поэтому $(\mathfrak{X} \cap \mathfrak{F})_* \subseteq \mathfrak{X}_* \cap \mathfrak{F}_*$. Следовательно, $((\mathfrak{X} \cap \mathfrak{F})_*)_* \subseteq (\mathfrak{X}_* \cap \mathfrak{F}_*)_*$. В силу леммы 2(2) получаем $((\mathfrak{X} \cap \mathfrak{F})_*)_* = (\mathfrak{X} \cap \mathfrak{F})_*$.

Итак, $(\mathfrak{X}_* \cap \mathfrak{F}_*)_* = (\mathfrak{X} \cap \mathfrak{F})_*$. Лемма доказана.

В следующей доказываемой нами лемме 8, а также в § 2, 3 все рассматриваемые группы конечны и разрешимы.

Лемма 8. *Пусть классы Фиттинга $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ таковы, что отображение решетки всех нормальных классов Фиттинга в решетку секции Локетта, порожденной классом $\mathfrak{X}$, сюръективно, а $\mathfrak{Y}$ — насыщенная радикальная формация. Тогда если отображение решетки всех нормальных классов Фиттинга в решетку секции Локетта, порожденной классом $\mathfrak{X}^*\mathfrak{Y}$, сюръективно, то и отображение решетки всех нормальных классов Фиттинга в решетку секции Локетта, порожденной классом $\mathfrak{X}_*\mathfrak{Y}$, сюръективно.*

Доказательство. Ввиду [6, X, 1.19; X, 6.1] сюръективность отображения решетки всех нормальных классов Фиттинга в решетку $\mathrm{Locksec}(\mathfrak{X}^*\mathfrak{Y})$ равносильна тому, что класс Фиттинга $\mathfrak{X}^*\mathfrak{Y}$ удовлетворяет гипотезе Локетта, т. е. справедливо равенство $(\mathfrak{X}^*\mathfrak{Y})_* = (\mathfrak{X}^*\mathfrak{Y})^* \cap \mathfrak{S}_*$.

Так как $\mathfrak{Y}$ — насыщенный радикальный гомоморф, то по лемме 1 имеем $(\mathfrak{X}^*\mathfrak{Y})^* = (\mathfrak{X}^*)^*\mathfrak{Y}$. Ввиду леммы 2(2) $(\mathfrak{X}^*)^* = \mathfrak{X}^*$. Следовательно,

$$(\mathfrak{X}^*\mathfrak{Y})_* = \mathfrak{X}^*\mathfrak{Y} \cap \mathfrak{S}_*. \tag{4}$$

По лемме 2(2) $(\mathfrak{X}^*\mathfrak{Y})_* = ((\mathfrak{X}^*\mathfrak{Y})_*)_*$ и поэтому $((\mathfrak{X}^*\mathfrak{Y})_*)_* = ((\mathfrak{X}^*\mathfrak{Y})_* \cap \mathfrak{S}_*)_*$. Докажем, что $\mathfrak{S}_* = (\mathfrak{S}_*\mathfrak{Y})_*$. Очевидно, что $\mathfrak{S}_* \subseteq \mathfrak{S}_*\mathfrak{Y}$. Значит, по лемме 2(1) $(\mathfrak{S}_*)_* = \mathfrak{S}_* \subseteq (\mathfrak{S}_*\mathfrak{Y})_*$. С другой стороны, так как $\mathfrak{Y}$ — разрешимый класс Фиттинга и $\mathfrak{S}_* \subseteq \mathfrak{S}$ ввиду леммы 2(2), то $\mathfrak{S}_*\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{S}$. Следовательно, по лемме 2(1) $(\mathfrak{S}_*\mathfrak{Y})_* \subseteq \mathfrak{S}_*$. Поэтому

$$((\mathfrak{X}^*\mathfrak{Y})_*)_* = ((\mathfrak{X}^*\mathfrak{Y})_* \cap \mathfrak{S}_*)_* = ((\mathfrak{X}^*\mathfrak{Y})_* \cap (\mathfrak{S}_*\mathfrak{Y})_*)_*.$$

По лемме 7 $((\mathfrak{X}^*\mathfrak{Y})_* \cap (\mathfrak{S}_*\mathfrak{Y})_*)_* = (\mathfrak{X}^*\mathfrak{Y} \cap \mathfrak{S}_*\mathfrak{Y})_*$.

В силу того, что $\mathfrak{Y}$ — радикальная формация, получаем $\mathfrak{X}^*\mathfrak{Y} \cap \mathfrak{S}_*\mathfrak{Y} = (\mathfrak{X}^* \cap \mathfrak{S}_*)\mathfrak{Y}$. Итак,

$$(\mathfrak{X}^*\mathfrak{Y})_* = ((\mathfrak{X}^* \cap \mathfrak{S}_*)\mathfrak{Y})_*. \tag{5}$$

Из (4) и (5) следует, что $((\mathfrak{X}^* \cap \mathfrak{S}_*)\mathfrak{Y})_* = \mathfrak{X}^*\mathfrak{Y} \cap \mathfrak{S}_*$.

Ввиду того, что отображение решетки всех нормальных классов Фиттинга в решетку секции Локетта, порожденной классом $\mathfrak{X}$, сюръективно, имеем $\mathfrak{X}_* = \mathfrak{X}^* \cap \mathfrak{S}_*$. Из этого следует, что $(\mathfrak{X}_*\mathfrak{Y})_* = ((\mathfrak{X}^* \cap \mathfrak{S}_*)\mathfrak{Y})_*$. Поэтому $(\mathfrak{X}_*\mathfrak{Y})_* = \mathfrak{X}^*\mathfrak{Y} \cap \mathfrak{S}_*$.

Рассмотрим класс Фиттинга $(\mathfrak{X}_*\mathfrak{Y})^*$. Так как $\mathfrak{Y}$ — насыщенный радикальный гомоморф, по лемме 1 $(\mathfrak{X}_*\mathfrak{Y})^* = (\mathfrak{X}_*)^*\mathfrak{Y}$. Ввиду леммы 2(2) $(\mathfrak{X}_*)^* = \mathfrak{X}^*$. Следовательно, $(\mathfrak{X}_*\mathfrak{Y})^* = \mathfrak{X}^*\mathfrak{Y}$.

Итак, получаем $(\mathfrak{X}_*\mathfrak{Y})_* = (\mathfrak{X}_*\mathfrak{Y})^* \cap \mathfrak{S}_*$. Это означает, что отображение решетки всех нормальных классов Фиттинга в решетку секции Локетта, порожденной классом $\mathfrak{X}_*\mathfrak{Y}$, сюръективно. Лемма доказана.

§ 2. p-Локальные $\mathscr{L}$-классы

В следующей теореме доказана сюръективность отображения решетки всех нормальных классов Фиттинга в решетку секции Локетта, порожденной p-локальными классами Фиттинга, что подтверждает существование p-локальных $\mathscr{L}$-классов, которые не являются классами Локетта.

Теорема 1. *Пусть* $\mathfrak{Y} = (\mathfrak{S}_{p'})_*\mathfrak{N}_p$. *Тогда* $\mathfrak{Y}$ — *p-локальный класс Фиттинга, который не является классом Локетта, и отображение решетки всех нормальных классов Фиттинга в решетку* $\mathrm{Locksec}(\mathfrak{Y})$ *сюръективно.*

Доказательство. Класс Фиттинга $\mathfrak{Y}$ p-локален. Действительно, ясно, что $\mathfrak{Y}(F^p) \subseteq (\mathfrak{S}_{p'})_*$ и, следовательно, $\mathfrak{Y}(F^p)\mathfrak{N}_p \subseteq (\mathfrak{S}_{p'})_*\mathfrak{N}_p = \mathfrak{Y}$. Ввиду леммы 6 последнее означает, что класс Фиттинга $\mathfrak{Y}$ p-локален.

Для того чтобы доказать сюръективность отображения решетки всех нормальных классов Фиттинга в решетку $\mathrm{Locksec}(\mathfrak{Y})$, достаточно доказать ввиду [6, X, 1.19; X, 6.1], что класс Фиттинга $\mathfrak{Y}$ является $\mathscr{L}$-классом.

Покажем, что класс Фиттинга $\mathfrak{Y}$ является $\mathscr{L}$-классом.

Так как отображение решетки всех нормальных классов Фиттинга в решетку $\mathrm{Locksec}(\mathfrak{S}_{p'}\mathfrak{N}_p)$ сюръективно, а $\mathfrak{S}_{p'}$ — класс Локетта, то и отображение решетки всех нормальных классов Фиттинга в решетку $\mathrm{Locksec}((\mathfrak{S}_{p'})^*\mathfrak{N}_p)$ сюръективно. Следовательно, по лемме 8 ввиду того, что отображение решетки всех нормальных классов Фиттинга в решетку $\mathrm{Locksec}(\mathfrak{S}_{p'})$ сюръективно и $\mathfrak{N}_p$ — насыщенная радикальная формация, получаем, что отображение решетки всех нормальных классов Фиттинга в решетку $\mathrm{Locksec}(\mathfrak{Y})$ сюръективно.

Покажем, что класс $\mathfrak{Y}$ не является классом Локетта.

Предположим от противного, что класс Фиттинга $\mathfrak{Y}$ является классом Локетта, т. е. $((\mathfrak{S}_{p'})_*\mathfrak{N}_p)^* = (\mathfrak{S}_{p'})_*\mathfrak{N}_p$.

Ввиду того, что $\mathfrak{N}_p$ — насыщенный радикальный гомоморф, имеем

$$((\mathfrak{S}_{p'})_*\mathfrak{N}_p)^* = ((\mathfrak{S}_{p'})_*)^*\mathfrak{N}_p = (\mathfrak{S}_{p'})^*\mathfrak{N}_p = \mathfrak{S}_{p'}\mathfrak{N}_p.$$

Получаем, что $\mathfrak{S}_{p'}\mathfrak{N}_p = (\mathfrak{S}_{p'})_*\mathfrak{N}_p$.

Так как $\mathfrak{S}_{p'}$ удовлетворяет гипотезе Локетта, то $(\mathfrak{S}_{p'})_* = \mathfrak{S}_{p'} \cap \mathfrak{S}_*$. Следовательно, $(\mathfrak{S}_{p'} \cap \mathfrak{S}_*)\mathfrak{N}_p = \mathfrak{S}_{p'}\mathfrak{N}_p$. Ввиду того, что $\mathfrak{N}_p$ — насыщенная радикальная формация, получаем $(\mathfrak{S}_{p'} \cap \mathfrak{S}_*)\mathfrak{N}_p = \mathfrak{S}_{p'}\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{S}_*\mathfrak{N}_p$. Значит, $\mathfrak{S}_{p'}\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{S}_*\mathfrak{N}_p = \mathfrak{S}_{p'}\mathfrak{N}_p$. Поэтому $\mathfrak{S}_{p'}\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{S}_*\mathfrak{N}_p$.

Очевидно, что $\mathfrak{S}_{p'} \subseteq \mathfrak{S}_*\mathfrak{N}_p$. Из этого следует, что справедливо включение $\mathfrak{S}_{p'} \cap \mathfrak{S}_*\mathfrak{S}_{p'} \subseteq \mathfrak{S}_*\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{S}_*\mathfrak{S}_{p'}$. Ясно, что $\mathfrak{S}_{p'} \cap \mathfrak{S}_*\mathfrak{S}_{p'} = \mathfrak{S}_{p'}$, а $\mathfrak{S}_*\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{S}_*\mathfrak{S}_{p'} = \mathfrak{S}_*(\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{S}_{p'}) = \mathfrak{S}_*$. Следовательно, $\mathfrak{S}_{p'} \subseteq \mathfrak{S}_*$. Ввиду леммы 5 получаем противоречие.

Итак, класс Фиттинга $\mathfrak{Y}$ не является классом Локетта. Теорема доказана.

§ 3. $\overline{\mathscr{L}}$-классы

Заметим, что в общем случае отображение решетки всех нормальных классов Фиттинга в решетку секции Локетта, порожденной частично локальными классами Фиттинга, не является сюръективным. Для построения такого отображения мы будем использовать класс Бергера — Косси $\mathfrak{B}$ [9]. Напомним основные этапы его построения.

Пусть R — экстраспециальная группа порядка 27 и экспоненты 3 и W — точный неприводимый R-модуль над полем $GF(7)$ размерности 3. Пусть $Y = WR$. Обозначим через A группу автоморфизмов группы R. Пусть $B = C_A(Z(R))$, Q — подгруппа кватернионов группы B и $X = Z(Q)Y$.

Следуя [9], определим класс $\mathfrak{M} = (G \mid O_2(G/O_{\{2,3\}}(G)) \in S_n D_0(X))$, где $D_0(X)$ — класс всех конечных прямых произведений изоморфных копий группы X и $\mathfrak{B} = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{S}_7\mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_2$. В [9] установлено,что $\mathfrak{B}$ является классом Локетта и $\mathfrak{B}_* \neq \mathfrak{B} \cap \mathfrak{S}_*$. По [6, X, 6.1] это означает, что отображение решетки всех нормальных классов Фиттинга в решетку $\mathrm{Locksec}(\mathfrak{F})$ не сюръективно.

Теорема 2. *Существует такое простое p, что отображение решетки всех нормальных классов Фиттинга в решетку секции Локетта, порожденной p-локальным классом Фиттинга $\mathfrak{B}_*\mathfrak{N}_p$, не является сюръективным.*

Доказательство. Предположим, что для каждого простого p отображение решетки всех нормальных классов Фиттинга в решетку $\mathrm{Locksec}(\mathfrak{B}_*\mathfrak{N}_p)$ сюръективно. Ввиду [6, X, 6.1] это равносильно тому, что выполняется равенство $(\mathfrak{B}_*\mathfrak{N}_p)_* = (\mathfrak{B}_*\mathfrak{N}_p)^* \cap \mathfrak{S}_*$ для каждого простого p. Так как $\mathfrak{N}_p$ — насыщенный радикальный гомоморф, по леммам 1 и 2 $\bigcap\limits_{p\in\mathbb{P}} (\mathfrak{B}_*\mathfrak{N}_p)_* = \bigcap\limits_{p\in\mathbb{P}} (\mathfrak{B}^*\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{S}_*)$. Но

$$\bigcap_{p\in\mathbb{P}} (\mathfrak{B}^*\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{S}_*) = \bigcap_{p\in\mathbb{P}} (\mathfrak{B}^*\mathfrak{N}_p) \cap \mathfrak{S}_* = \mathfrak{B}^* \cap \mathfrak{S}_*.$$

Докажем теперь, что $\bigcap\limits_{p\in\mathbb{P}} (\mathfrak{B}_*\mathfrak{N}_p)_* = \mathfrak{B}_*$.

Ввиду леммы 2(2) $(\mathfrak{B}_*\mathfrak{N}_p)_* \subseteq \mathfrak{B}_*\mathfrak{N}_p$ для каждого $p \in \mathbb{P}$. Следовательно,

$$\bigcap_{p\in\mathbb{P}} (\mathfrak{B}_*\mathfrak{N}_p)_* \subseteq \bigcap_{p\in\mathbb{P}} (\mathfrak{B}_*\mathfrak{N}_p) = \mathfrak{B}_*.$$

С другой стороны, $\mathfrak{B}_* \subseteq \mathfrak{B}_*\mathfrak{N}_p$ для каждого $p \in \mathbb{P}$. Но по лемме 2(1) $(\mathfrak{B}_*)_* = \mathfrak{B}_* \subseteq (\mathfrak{B}_*\mathfrak{N}_p)_*$ для каждого $p \in \mathbb{P}$. Следовательно, $\mathfrak{B}_* \subseteq \bigcap\limits_{p\in\mathbb{P}} (\mathfrak{B}_*\mathfrak{N}_p)_*$. Значит, $\mathfrak{B}_* = \bigcap\limits_{p\in\mathbb{P}} (\mathfrak{B}_*\mathfrak{N}_p)_*$. Таким образом, $\mathfrak{B}_* = \mathfrak{B}^* \cap \mathfrak{S}_*$. А это противоречит тому, что класс Фиттинга $\mathfrak{B}$ является $\overline{\mathscr{L}}$-классом. Итак, существует такое простое p, что класс $\mathfrak{B}_*\mathfrak{N}_p$ является $\overline{\mathscr{L}}$-классом. Ввиду [6, X, 1.19] это означает, что отображение решетки всех нормальных классов Фиттинга в решетку $\mathrm{Locksec}(\mathfrak{B}_*\mathfrak{N}_p)$ не сюръективно. Теорема доказана.

§ 4. ω-Локальные $\mathscr{L}_{\mathfrak{H}}$-классы

Следующая теорема определяет достаточное условие для того, чтобы отображение решетки секции Локетта, порожденной произвольными классами Фиттинга, в решетку секции Локетта, порожденной ω-локальными классами Фиттинга, было сюръективно. Этот результат мы докажем в классе всех конечных групп.

Теорема 3. *Пусть* $\mathfrak{F}$ — *ω-локальный класс Фиттинга, причем* $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$, *где* $\mathfrak{X}$ — *некоторый класс Фиттинга. Если* $\mathrm{Char}(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$, *то отображение решетки* $\mathrm{Locksec}(\mathfrak{X})$ *в решетку* $\mathrm{Locksec}(\mathfrak{F})$ *сюръективно.*

Доказательство. Ввиду [6, X, 1.19; X, 6.1] для того, чтобы доказать сюръективность отображения решетки $\mathrm{Locksec}(\mathfrak{X})$ в решетку $\mathrm{Locksec}(\mathfrak{F})$, достаточно доказать, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является $\mathscr{L}_{\mathfrak{X}}$-классом.

Покажем, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является $\mathscr{L}_{\mathfrak{X}}$-классом. Необходимым и достаточным условием для этого ввиду результата Брайса — Косси [4] является справедливость равенства (2) $\mathfrak{F}_* = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{X}_*$.

Так как $\mathfrak{F}$ ω-локален, по лемме 6 имеем $\mathfrak{F}(F^p)\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $p \in \omega$ и, значит, для каждого $p \in \mathrm{Char}(\mathfrak{F})$.

Ввиду ω-локальности класс $\mathfrak{F}$ определяется с помощью ω-локальной H-функции f следующим образом:

$$\mathfrak{F} = \Big(\bigcap_{p\in\pi_2} \mathfrak{E}_{p'}\Big) \cap \Big(\bigcap_{p\in\pi_1} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}\Big) \cap f(\omega')\mathfrak{E}_{\omega},$$

где $\pi_1 = \omega \cap \mathrm{Supp}(f)$, $\pi_2 = \omega \setminus \pi_1$. Следовательно, $\mathfrak{F} \subseteq f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$ для всех $p \in \pi_1$. Но по лемме 6 имеем $f(p) = \mathfrak{F}(F^p)\mathfrak{N}_p$ для всех $p \in \omega$ и тем самым $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}(F^p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$ для всех $p \in \mathrm{Supp}(f) \cap \omega$. При этом

$$\mathfrak{F}(F^p) = \begin{cases} \mathrm{Fit}(F^p(G) \mid G \in \mathfrak{F}), & p \in \pi(\mathfrak{F}), \\ \varnothing, & p \notin \pi(\mathfrak{F}). \end{cases}$$

Ввиду того, что $\mathrm{Char}(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$, для каждого $p \in \mathrm{Char}(\mathfrak{F})$ справедливы включения $\mathfrak{F}(F^p)\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}(F^p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$. Следовательно, по лемме 4 получаем, что $\mathfrak{F}$ — класс Локетта. Значит, ввиду [13, теорема 1] класс $\mathfrak{F}$ определяется наибольшей приведенной ω-локальной H-функцией F, причем $F(p)\mathfrak{N}_p = F(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $p \in \omega$.

Рассуждая аналогично, заключаем, что для всех $p \in \mathrm{Char}(\mathfrak{F})$ справедливы включения $F(p)\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F} \subseteq F(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$. Покажем теперь, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$.

Так как $\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$ — насыщенная формация Фиттинга, по лемме 1 $(\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p)^* = (\mathfrak{F}_*)^*\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$. Но по лемме 2(2) $(\mathfrak{F}_*)^* = \mathfrak{F}^*$. Следовательно, $(\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p)^* = \mathfrak{F}^*\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$. Поскольку классы $\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$ и $\mathfrak{F}\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$ локальны (см. [8, следствие 1]), ввиду [8, лемма 5] они являются классами Локетта. Следовательно, $\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p = \mathfrak{F}\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$, и поэтому $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$.

Отсюда следует, что $G/G_{\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{p'}} \in \mathfrak{N}_p$ для всех групп $G \in \mathfrak{F}$. Кроме того, из включения $\mathfrak{F} \subseteq F(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$ вытекает, что $G/G_{F(p)\mathfrak{N}_p} \in \mathfrak{E}_{p'}$ для всех групп $G \in \mathfrak{F}$.

Докажем теперь, что $\mathfrak{X}_* \cap \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{p'}$ для всех $p \in \mathrm{Char}(\mathfrak{F})$. Для этого установим первоначально, что $(\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{p'} \cap \mathfrak{F}) \vee F(p)\mathfrak{N}_p = \mathfrak{F}$. Включение $(\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{p'} \cap \mathfrak{F}) \vee F(p)\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$ очевидно.

Докажем обратное включение. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $G/G_{\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{p'}} \in \mathfrak{N}_p$ и $G/G_{F(p)\mathfrak{N}_p} \in \mathfrak{E}_{p'}$. Отсюда следует, что $G/G_{F(p)\mathfrak{N}_p}G_{\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{p'}} \in \mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{E}_{p'} = (1)$. Значит, $G = G_{F(p)\mathfrak{N}_p}G_{\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{p'}}$. Но $G_{\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{p'}} = G_{\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{p'}} \cap G = G_{\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{p'}} \cap G_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{p'}\cap\mathfrak{F}}$.

Итак, если $G \in \mathfrak{F}$, то $G = G_{F(p)\mathfrak{N}_p}G_{\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{p'}\cap\mathfrak{F}}$. Отсюда $G \in (\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{p'}\cap\mathfrak{F})\vee F(p)\mathfrak{N}_p$.

Таким образом, мы установили, что

$$\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{p'} \cap \mathfrak{F}) \vee F(p)\mathfrak{N}_p.$$

Значит, по лемме 3 имеем $\mathfrak{X}_* \cap \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{p'}$ для всех $p \in \mathrm{Char}(\mathfrak{F})$.

Остается выяснить, что если $\mathfrak{X}_* \cap \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{p'}$ для всех $p \in \mathrm{Char}(\mathfrak{F})$, то $\mathfrak{X}_* \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{F}_*$.

Очевидно, что $\mathfrak{F}_* \subseteq \mathfrak{X}_* \cap \mathfrak{F}$.

Пусть G — группа наименьшего порядка из класса $(\mathfrak{X}_* \cap \mathfrak{F}) \setminus \mathfrak{F}_*$. Тогда G имеет единственную максимальную нормальную подгруппу $M = G_{\mathfrak{F}_*}$. Составим фактор-группу G/M, и пусть p — простой делитель порядка $|G/M|$.

Ввиду того, что $G \in \mathfrak{F}$, по лемме 2(3) получаем, что $G/G_{\mathfrak{F}_*}$ — абелева группа. Следовательно, G/M — композиционный фактор порядка p, т. е. $G/M \simeq Z_p \in \mathfrak{N}_p$. Отсюда $p \in \mathrm{Char}(\mathfrak{F})$. Но по доказанному выше $G \in \mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{p'}$ и, значит, $G/M \in \mathfrak{E}_{p'}$.

Итак, $G/M \in \mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{E}_{p'} = (1)$ и $G = M \in \mathfrak{F}_*$, что противоречит предположению о том, что $G \notin \mathfrak{F}_*$. Таким образом, $\mathfrak{X}_* \cap \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_*$. Следовательно, $\mathfrak{X}_* \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{F}_*$. Учитывая лемму 4, имеем $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}$, поэтому $\mathfrak{F}$ является $\mathscr{L}_{\mathfrak{X}}$-классом, т. е. отображение решетки $\mathrm{Locksec}(\mathfrak{X})$ в решетку $\mathrm{Locksec}(\mathfrak{F})$ сюръективно. Теорема доказана.

Заметим, что в случае, когда ω совпадает с множеством $\mathbb{P}$ всех простых чисел, ω-локальный класс Фиттинга локален. Однако не каждый ω-локальный класс Фиттинга локален (например, класс Фиттинга $\mathfrak{X} = \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p$, где $\mathfrak{F}$ — произвольный нетривиальный нормальный класс Фиттинга, является ω-локальным классом Фиттинга для $\omega = \{p\}$, но не является локальным). Легко видеть, что разрешимый ω-локальный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ с $\mathrm{Char}(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$ локален. Кроме того, ввиду [8, лемма 5] каждый локальный класс Фиттинга является классом Локетта. В связи с этим возникает вопрос о существовании в классе $\mathfrak{E}$ всех конечных групп ω-локальных классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ с $\mathrm{Char}(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$, которые нелокальны. Положительным решением этого вопроса является следующий

Пример 1. Пусть E — простая неабелева группа, $\mathfrak{X} = \mathrm{Fit}\, E$ — класс Фиттинга, порожденный E, $\mathfrak{F} = \mathfrak{X}\mathfrak{N}_p$ и $\omega = \{p\}$, где p — простое число. Тогда $\mathfrak{F}$ — ω-локальный класс Локетта с $\mathrm{Char}(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$, который ненормален и нелокален.

Действительно, так как $\mathfrak{F}(F^p) \subseteq \mathfrak{X}$ и, следовательно, $\mathfrak{F}(F^p)\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{N}_p = \mathfrak{F}$, по лемме 6 получаем, что $\mathfrak{F}$ — ω-локальный класс Фиттинга для $\omega = \{p\}$.

Поскольку $\mathfrak{X}$ состоит лишь из единичных групп и конечных прямых произведений групп, изоморфных E, то $\mathfrak{X}$ — формация Фиттинга, а значит, и $\mathfrak{F} = \mathfrak{X}\mathfrak{N}_p$ является формацией Фиттинга и каждая группа из $\mathfrak{F}$ будет либо p-группой (возможно, единичной), либо расширением конечного прямого произведения групп, изоморфных E, с помощью p-группы (возможно, единичной). Отсюда следует, что $\mathrm{Char}(\mathfrak{F}) = \{p\}$, а по [6, X, 1.25] $\mathfrak{F}$ — класс Локетта.

Докажем теперь, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ нелокален. Предположим, что $\mathfrak{F} = LR(f)$, где f — полная приведенная H-функция. Тогда

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_\pi \cap \Big(\bigcap_{p\in\pi} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}\Big),$$

где $\pi = \mathrm{Supp}(f)$. Ввиду [10, 4.9b)] имеем $\mathrm{Char}(\mathfrak{F}) = \pi(\mathfrak{F})$. Так как в данном случае $\mathrm{Char}(\mathfrak{F}) = \{p\}$, а $|\pi(\mathfrak{F})| \geq 2$, получаем противоречие с тем, что $\mathrm{Char}(\mathfrak{F}) = \pi(\mathfrak{F})$. Следовательно, $\mathfrak{F}$ нелокален.

Покажем, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ ненормален. Действительно, если $\mathfrak{F}$ — нормальный класс Фиттинга, то ввиду [6, X, 3.2] $\mathrm{Char}(\mathfrak{F}) = \mathbb{P}$. Последнее противоречит тому, что $\mathrm{Char}(\mathfrak{F}) = \{p\}$.

Следовательно, если $\omega = \{p\}$, где $p \in \mathbb{P}$, то $\mathfrak{F}$ — ω-локальный класс Локетта с $\mathrm{Char}(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$, который не является нормальным и нелокален.

Таким образом, в случае $\omega = \mathbb{P}$ из теоремы 3 вытекает результат Галледжи [10], который мы приведем в качестве следствия.

Следствие 1 [10]. *Любой локальный класс Фиттинга является $\mathscr{L}_{\mathfrak{E}}$-классом.*

В случае, когда $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$, из теоремы 3 получаем

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — ω-локальные классы Фиттинга такие, что* $\mathrm{Char}(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$ *и* $\mathrm{Char}(\mathfrak{H}) \subseteq \omega$. *Тогда*

$$(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \cap \mathfrak{S}_*.$$

Доказательство. Так как $\mathrm{Char}(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$, по теореме 3 класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является $\mathscr{L}$-классом. Аналогично класс Фиттинга $\mathfrak{H}$ является $\mathscr{L}$-классом.

Ввиду [11, лемма 21] пересечение ω-локальных классов Фиттинга $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ является ω-локальным классом Фиттинга, причем $\mathrm{Char}(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \subseteq \omega$. Следовательно, по теореме 3 ω-локальный класс Фиттинга $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ является $\mathscr{L}$-классом, т. е. $(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})^* \cap \mathfrak{S}_*$.

Так как ввиду теоремы 3 классы Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ являются классами Локетта, по лемме 2(4) $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ — класс Локетта, поэтому $(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_* = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \cap \mathfrak{S}_*$. Следствие доказано.

Заметим, что следствие 2 дает утвердительный ответ на вопрос Лауша (см. [2, проблема 8.30]) для случая ω-локальных классов Фиттинга, характеристика которых является подмножеством множества ω.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Скиба А. Н.* О локальных формациях длины 5 // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп. Минск: Наука и техника, 1986. С. 149–156.
2. *Нерешенные вопросы теории групп.* Коуровская тетрадь. 15-е изд. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 2002.
3. *Lausch H.* On normal Fitting classes // Math. Z. 1973. Bd 130, Heft 1. S. 67–72.
4. *Bryce R. A., Cossey J.* A problem in theory of normal Fitting classes // Math. Z. 1975. Bd 141, Heft 2. S. 99–110.
5. *Lockett P.* The Fitting class $\mathfrak{F}^*$ // Math. Z. 1974. Bd 137, Heft 2. S. 131–136.
6. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
7. *Beidleman J. C., Hauck P.* Über Fittingklassen und die Lockett–Vermutung // Math. Z. 1979. Bd 167, Heft 2. S. 161–167.
8. *Воробьев Н. Т.* О радикальных классах конечных групп с условием Локетта // Мат. заметки. 1988. Т. 43, № 2. С. 161–168.
9. *Berger T. R., Cossey J.* An example in the theory of normal Fitting classes // Math. Z. 1977. Bd 154. S. 287–293.
10. *Gallego M. P.* Fitting pairs from direct limits and the Lockett conjecture // Comm. Algebra. 1996. V. 24, N 6. P. 2011–2023.
11. *Скиба А. Н., Шеметков Л. А.* Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Мат. труды. 1999. Т. 2, № 2. С. 114–147.
12. *Ведерников В. А., Сорокина М. М.* ω-Веерные формации и классы Фиттинга конечных групп // Мат. заметки. 2002. Т. 71, № 1. С. 43–60.
13. *Воробьев Н. Т.* О наибольшей приведенной функции Хартли // Изв. Гомельск. гос. ун-та им. Ф. Скорины. 2000. № 1. С. 8–13.

Статья поступила 11 марта 2008 г., окончательный вариант — 28 февраля 2009 г.

Залесская Елена Николаевна, Воробьев Николай Николаевич
Витебский гос. университет, Московский пр., 33, Витебск 210038, Беларусь
alenushka0404@mail.ru, vornik2001@yahoo.com