Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, №3(60), 2010

УДК 512.542

О характеризации классов Фишера конечных групп

Е. Н. Залесская, С. Н. Воробьёв

В теории конечных разрешимых групп основополагающие результаты, связанные с описанием канонических подгрупп при помощи радикалов (в частности, нильпотентных инъекторов), были получены Фишером [1]. При этом ключевыми объектами в исследованиях стали классы групп, обладающие свойством частичной наследственности: классы групп G, замкнутые относительно произведений подгрупп вида PN, где P – подгруппа Силова и N – нормальная подгруппа в G. Такие классы в дальнейшем стали называть классами Фишера [2].

По мере развития теории классов важная роль классов Фишера в нахождении новых классов сопряженных подгрупп (подгрупп Фишера) и описании свойств инъекторов в конечных разрешимых группах была подтверждена работами Локетта [3], Андерсона [4], Хартли [2], Хоукса [5] и Хаука [6]. Для развития алгебры классов Фишера определяющими стали следующие два результата. Первый из них – теорема Локетта [3] о том, что произведение двух любых разрешимых классов Фишера является классом Фишера. Второй – изящная характеризация классов Фишера в терминах операции замыкания, определяемой свойством субнормальности нильпотентных корадикалов подгрупп, полученная Хоуксом [5].

Указанные результаты были доказаны лишь в классе $\mathfrak{S}$ всех конечных разрешимых групп. В связи с этим возникает задача расширения этих результатов на универсум $\mathfrak{E}$ всех конечных групп. Такая задача для произведений обобщенных классов Фишера (Λ-классов Фишера, где Λ – непустое множество) была реализована авторами [7].

В настоящей работе мы расширяем понятие класса Фишера в другом направлении. Мы определяем $\mathfrak{X}$-классы Фишера, операцию замыкания $S_{\mathrm{F}_{\mathfrak{X}}}$ и посредством этой операции в классе $\mathfrak{E}$ доказываем критерий $\mathfrak{X}$-класса Фишера. В работе рассматриваются только конечные группы. В определениях и обозначениях мы следуем монографии Л. А. Шеметкова [8] и книге [9].

1. Классы групп и операции замыкания. Напомним некоторые сведения об операциях на классах групп, которые мы будем использовать. Классом групп называется множество групп $\mathfrak{K}$ со следующим свойством: если $G \in \mathfrak{K}$ и $H \cong G$, то $H \in \mathfrak{K}$. Заметим, что если S – множество групп, то через (S) мы будем обозначать наименьший класс групп, содержащий S. Если H – подгруппа группы G и $H \in \mathfrak{K}$, то H называют $\mathfrak{K}$-подгруппой.

Определение 1.1 (см. [9]). Отображение C называют операцией замыкания, если C сопоставляет каждому классу групп $\mathfrak{K}$ класс $\mathrm{C}\mathfrak{K}$ такой, что выполняются следующие условия:

1) $\mathfrak{K} \subseteq \mathrm{C}\mathfrak{K}$;

2) $\mathrm{C}(\mathrm{C}\mathfrak{K}) = \mathrm{C}\mathfrak{K}$;

3) если $\mathfrak{K}_1 \subseteq \mathfrak{K}_2$, то $\mathrm{C}\mathfrak{K}_1 \subseteq \mathrm{C}\mathfrak{K}_2$.

Класс групп $\mathfrak{K}$ называется C-замкнутым, если $\mathrm{C}\mathfrak{K} = \mathfrak{K}$. По определению будем считать, что если $\mathfrak{K} = \emptyset$, то $\mathrm{C}\mathfrak{K} = \mathfrak{K}$ для любого оператора замыкания C.

Напомним определения следующих операций на классе групп $\mathfrak{K}$:

$\mathrm{S}\mathfrak{K} = (G : \exists H \in \mathfrak{K}$ и $G \leqslant H)$;

$\mathrm{S}_n\mathfrak{K} = (G : \exists H \in \mathfrak{K}$ и $G \trianglelefteq\trianglelefteq H)$;

$\mathrm{Q}\mathfrak{K} = (G/N : G \in \mathfrak{K}, N \trianglelefteq G)$;

$\mathrm{N}_0\mathfrak{K} = (G : \exists N_i \trianglelefteq\trianglelefteq G, N_i \in \mathfrak{K}(i = 1, .., r)$ и $G = \langle N_1, .., N_r\rangle)$;

$\mathrm{R}_0\mathfrak{K} = (G : \exists N_i \trianglelefteq\trianglelefteq G, G/N_i \in \mathfrak{K}(i = 1, .., r)$ и $N_1 \cap \ldots \cap N_r = 1)$.

В терминах операций замыкания можно определить класс Фиттинга и формацию следующим образом.

Определение 1.2 (см. [9]). Класс групп $\mathfrak{F}$ называют: 1) классом Фиттинга, если $\mathfrak{F}$ является одновременно S_n-замкнутым и N_0-замкнутым, то есть $\langle \mathrm{S}_n, \mathrm{N}_0\rangle\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$; 2) формацией, если $\mathfrak{F}$ одновременно Q-замкнут и R_0-замкнут, то есть $\mathfrak{F} = \langle \mathrm{Q}, \mathrm{R}_0\rangle\mathfrak{F}$.

Используя операции замыкания, в каждой группе G можно выделить следующие два вида канонических подгрупп.

Пусть $\mathfrak{K}$ – непустой класс групп. Тогда:

(а) если $\mathfrak{K}=\mathrm{N}_0\mathfrak{K}$, то через $G_{\mathfrak{K}}$ обозначают наибольшую нормальную $\mathfrak{K}$-подгруппу из G (её называют $\mathfrak{K}$-радикалом группы G).

(б) если $\mathfrak{K}\mathrm{R}_0=\mathfrak{K}$, то через $G^{\mathfrak{K}}$ обозначают наименьшую нормальную подгруппу из G, факторгруппа по которой является $\mathfrak{K}$-группой (её называют $\mathfrak{K}$-корадикалом группы G).

2. $\mathfrak{X}$-класс Фишера и операция $\mathbf{S}_{\mathrm{F}_{\mathfrak{X}}}$. Класс групп называют наследственным (или S-замкнутым), если он замкнут относительно взятия подгрупп. Как уже отмечалось во введении, свойством частичной наследственности обладают классы Фишера. Напомним, что класс групп $\mathfrak{F}$ называют классом Фишера [2], если $\mathfrak{F}$ является N_0-замкнутым, а из условия $K \subseteq H \subseteq G \in \mathfrak{F}, K \trianglelefteq G$ и $H/K \in \mathfrak{N}$, всегда следует, что $H \in \mathfrak{F}$.

Легко видеть, что любой класс Фишера является классом Фиттинга и что любой S-замкнутый класс Фиттинга является классом Фишера.

Расширим понятие класса Фишера следующим образом.

Определение 2.1. Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс групп. Тогда класс групп $\mathfrak{F}$ назовём $\mathfrak{X}$-классом Фишера, если выполняются следующие условия:

1) $\mathfrak{F}= \mathrm{N}_0\mathfrak{F} \neq \emptyset$;

2) если $K \subseteq H \subseteq G \in \mathfrak{F}, K \trianglelefteq G$ и $H/K \in \mathfrak{X}$, то $H \in \mathfrak{F}$.

Понятно, что в случае, когда $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}$, класс $\mathfrak{F}$ является классом Фишера. Если единичная группа содержится в $\mathfrak{X}$, то $\mathfrak{X}$-класс Фишера является классом Фиттинга. Тот факт, что не всякий $\mathfrak{X}$-класс Фишера является классом Фишера, подтверждает следующий

Пример 2.2. Пусть $\mathfrak{Z}^3 = (G \in \mathfrak{E} : Soc(G) \leqslant Z(G))$. Тогда, по теореме IX.2.8 [9], $\mathfrak{Z}^3$ — класс Фиттинга. Определим класс разрешимых групп $\mathrm{L}_2(\mathfrak{Z}^3) = \mathfrak{F}$ следующим образом: $G \in \mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда индекс в G её $\mathfrak{Z}^3$-инъектора является $3'$-числом. Как было установлено Локеттом (см., например, IX.1.15 [9]), класс $\mathfrak{F}$ является классом Фиттинга и $\mathfrak{F}\mathfrak{S}_{2'} = \mathfrak{F}$. Заметим также, что $\mathfrak{F}$, ввиду примера IX.3.15 [9], не является нормально вложенным классом Фиттинга. Следовательно, по теореме IX.3.4(a) [9], $\mathfrak{F}$ не является классом Фишера. Пусть теперь $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}_{2'}$ — класс всех разрешимых $2'$-групп. Покажем, что $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{X}$-классом Фишера. Пусть $G \in \mathfrak{F}$ и $K \subseteq H \subseteq G$, где K — такая нормальная подгруппа G, что $H/K \in \mathfrak{X}$. Так как $G \in \mathfrak{F}$, то $K \in \mathfrak{F}$ и поэтому $K \subseteq H_{\mathfrak{F}}$. Следовательно, ввиду изоморфизма $H/H_{\mathfrak{F}} \simeq H/K/H_{\mathfrak{F}}/K$ и Q-замкнутости класса $\mathfrak{X}$, заключаем, что $H/H_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{X}$. Отсюда следует, что $H \in \mathfrak{F}\mathfrak{X} = \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{X}$-классом Фишера.

Следуя [5], для характеризации $\mathfrak{X}$-классов Фишера определим теперь операцию частичной наследственности посредством свойства субнормальности корадикалов подгрупп.

Определение 2.3. Пусть $\mathfrak{K}$ — класс групп и $\mathfrak{X}$ — непустой R_0-замкнутый класс, содержащий единичные группы. Тогда через $\mathrm{S}_{\mathrm{F}_\mathfrak{X}}$ обозначим операцию, которая сопоставляет каждой группе $G \in \mathfrak{K}$ класс групп $\mathrm{S}_{\mathrm{F}_\mathfrak{X}}\mathfrak{K} = (H : H \subseteq G \in \mathfrak{K}$ и $H^\mathfrak{X} \trianglelefteq\trianglelefteq G)$.

Если $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}$, то операцию $\mathrm{S}_{\mathrm{F}_\mathfrak{N}}$ будем обозначать, как и в [5], через S_F. Свойства операции $\mathrm{S}_{\mathrm{F}_\mathfrak{X}}$ описывает следующий результат.

Теорема 2.4. *Для любого непустого $\langle S,R_0\rangle$-замкнутого класса $\mathfrak{X}$ операция $S_{F_\mathfrak{X}}$ является операцией замыкания.*

Доказательство. Проверим для $\mathrm{S}_{\mathrm{F}_\mathfrak{X}}$ выполнение условий (1)–(3) определения 1.1. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — классы групп. В случае, если $\mathfrak{F}$ или $\mathfrak{H}$ пуст, теорема очевидна. Предположим, что $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ не пусты.

(1) Покажем, что $\mathfrak{F} \subseteq S_{\mathrm{F}_\mathfrak{X}}\mathfrak{F}$. Действительно, если $G \in \mathfrak{F}$, то из $G^\mathfrak{X} \trianglelefteq G$ вытекает $G \in \mathrm{S}_{\mathrm{F}_\mathfrak{X}}\mathfrak{F} = (X : X \subseteq Y \in \mathfrak{F}$ и $X^\mathfrak{X} \trianglelefteq\trianglelefteq Y)$.

(2) Ввиду (1) заключаем, что $\mathrm{S}_{\mathrm{F}_\mathfrak{X}}\mathfrak{F} \subseteq S_{\mathrm{F}_\mathfrak{X}}(S_{\mathrm{F}_\mathfrak{X}}\mathfrak{F})$. Докажем обратное включение. Пусть $L \in \mathrm{S}_{\mathrm{F}_\mathfrak{X}}(S_{\mathrm{F}_\mathfrak{X}}\mathfrak{F})$. Тогда найдётся такая группа $H \in \mathrm{S}_{\mathrm{F}_\mathfrak{X}}$, что $L \subseteq H$ и $L^\mathfrak{X} \trianglelefteq\trianglelefteq H$. Теперь из того, что $H \in \mathrm{S}_{\mathrm{F}_\mathfrak{X}}\mathfrak{F}$, получаем, что существует такая группа $G \in \mathfrak{F}$, что $H \subseteq$ $\subseteq G$ и $H^\mathfrak{X} \trianglelefteq\trianglelefteq G$. Так как $L \subseteq H$, то $LH^\mathfrak{X}/H^\mathfrak{X}$ — подгруппа $\mathfrak{X}$-группы $H/H^\mathfrak{X}$. Но класс $\mathfrak{X}$ является S-замкнутым. Значит, $LH^\mathfrak{X}/H^\mathfrak{X} \in \mathfrak{X}$. Отсюда ввиду изоморфизма $LH^\mathfrak{X}/H^\mathfrak{X} \cong$ $\cong L/L \cap H^\mathfrak{X}$ следует, что $L/L \cap H^\mathfrak{X} \in \mathfrak{X}$. Но тогда, учитывая определение $\mathfrak{X}$-корадикала группы L, справедливы включения:$L^\mathfrak{X} \subseteq L \cap H^\mathfrak{X} \subseteq H^\mathfrak{X}$.

Значит, $L^\mathfrak{X} \trianglelefteq\trianglelefteq H$ и $L^\mathfrak{X} \subseteq H^\mathfrak{X}$. Следовательно, мы имеем цепочку субнормальных подгрупп $L^\mathfrak{X} \trianglelefteq\trianglelefteq H^\mathfrak{X} \trianglelefteq\trianglelefteq G$.

Таким образом, $L^\mathfrak{X} \trianglelefteq\trianglelefteq G$ и $L \subseteq G \in \mathfrak{F}$. Это означает, что $L \in \mathrm{S}_{\mathrm{F}_\mathfrak{X}}\mathfrak{F}$ и включение $\mathrm{S}_{\mathrm{F}_\mathfrak{X}}(\mathrm{S}_{\mathrm{F}_\mathfrak{X}}\mathfrak{F}) \subseteq \mathrm{S}_{\mathrm{F}_\mathfrak{X}}\mathfrak{F}$ доказано.

(3) Пусть $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ и $G \in \mathrm{S}_{\mathrm{F}_\mathfrak{X}}\mathfrak{F}$. Тогда $G \subseteq H \in \mathfrak{F}$ и $G^\mathfrak{X} \trianglelefteq\trianglelefteq H$. Так как по условию $H \in \mathfrak{H}$, то очевидно, $G \in \mathrm{S}_{\mathrm{F}_\mathfrak{X}}\mathfrak{H}$ и справедливо включение $\mathrm{S}_{\mathrm{F}_\mathfrak{X}}\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{S}_{\mathrm{F}_\mathfrak{X}}\mathfrak{H}$.

Из (1)–(3) получаем, что $\mathrm{S}_{\mathrm{F}_\mathfrak{X}}$ – операция замыкания.

Теорема доказана.

Следствие 2.5. Для любой непустой наследственной формации $\mathfrak{X}$ операция $\mathrm{S}_{\mathrm{F}_\mathfrak{X}}$ является операцией замыкания.

В случае, когда $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}$, получаем

Следствие 2.6 (Хоукс [5]). Операция S_F является операцией замыкания.

3. Критерий $\mathfrak{X}$-класса Фишера. Пусть класс групп $\mathfrak{X}$ и класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ не пусты. Тогда $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{X}$-классом Фишера в случае, когда из условия $G \in \mathfrak{F}$, $K \subseteq$ $\subseteq H \subseteq G$, $K \trianglelefteq G$ и $H/K \in \mathfrak{X}$ следует $H \in \mathfrak{F}$.

Заметим, что для $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}$ класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является классом Фишера.

Основной результат работы представляет следующая

Теорема 3.1. *Для любой непустой наследственной формации $\mathfrak{X}$ класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{X}$-классом Фишера тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ является $S_{F_\mathfrak{X}}$-замкнутым классом.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = \mathrm{S}_{\mathrm{F}_\mathfrak{X}}\mathfrak{F}$. Покажем, что $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{X}$-классом Фишера. Пусть $G \in \mathfrak{F}$ и K – такая нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в подгруппе H из G, что $H/K \in \mathfrak{X}$. Тогда по определению $\mathfrak{X}$-корадикала группы H имеем включение $H^\mathfrak{X} \subseteq K$. Следовательно, $H^\mathfrak{X} \trianglelefteq K \trianglelefteq H$.

Итак, $H^\mathfrak{X} \trianglelefteq\trianglelefteq G$ и $H \subseteq G \in \mathfrak{F}$. Это означает, что $H \in S_{\mathrm{F}_\mathfrak{X}}\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{X}$-классом Фишера.

Пусть $\mathfrak{F}$ – $\mathfrak{X}$-класс Фишера. Покажем справедливость равенства $\mathrm{S}_{\mathrm{F}_\mathfrak{X}}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$. Так как, по теореме 2.4, $\mathrm{S}_{\mathrm{F}_\mathfrak{X}}$ — операция замыкания, то $\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{S}_{\mathrm{F}_\mathfrak{X}}\mathfrak{F}$.

Докажем обратное включение. Пусть $H \in S_{F_{\mathfrak{X}}}\mathfrak{F}$. Тогда существует такая группа $G \in \mathfrak{F}$, что $H \subseteq G$ и $H^{\mathfrak{X}} \trianglelefteq\trianglelefteq G$. Следовательно, существует ряд подгрупп $H^{\mathfrak{X}} = H_t \trianglelefteq H_{t-1} \trianglelefteq ... \trianglelefteq H_1 = G$. Без ограничения общности мы можем считать, что в данном ряду подгруппа H_i является H-инвариантной для каждого $i \in \{1, \dots, t\}$. Действительно, рассуждая по индукции, заключаем, что для $i = 1$ это очевидно. Пусть $H_i \neq H^{\mathfrak{X}}$. Тогда ввиду того, что $H^{\mathfrak{X}} \trianglelefteq\trianglelefteq H_i$, получаем $H^{\mathfrak{X}} \trianglelefteq\trianglelefteq K \trianglelefteq L_i$. Следовательно, в качестве подгруппы H_{i+1} мы можем выбрать H-инвариантную подгруппу $\cap_{h\in H} K^h$.

Для доказательства $S_{F_{\mathfrak{X}}}$-замкнутости класса $\mathfrak{F}$ применим снова индукцию по i. Докажем, что $H_iH \in \mathfrak{F}$ для всех $i \in \{1, \dots, t\}$. Пусть $i = 1$. В этом случае, так как $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{X}$-классом Фишера, получаем, что $H \in \mathfrak{F}$, и теорема верна. Предположим, что для некоторого s ($s > 1$) справедливо $H_sH \in \mathfrak{F}$. Тогда ввиду изоморфизма $H/H^{\mathfrak{X}}/H \cap \cap H_{s+1}/H^{\mathfrak{X}} \cong H/H \cap H_{s+1}$ получаем, что $H/H \cap H_{s+1}$ является $\mathfrak{X}$-группой. Следовательно, $H/H \cap H_{s+1} \cong HH_{s+1}/H_{s+1} \in \mathfrak{X}$. Но по условию $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{X}$-классом Фишера. Значит, $H_{s+1}H \in \mathfrak{F}$ и для $s = i + 1$ утверждение доказано. Таким образом, по индукции $H = = H_tH \in \mathfrak{F}$ и включение $S_{F_{\mathfrak{X}}}\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}$ доказано. Теорема доказана.

В случае $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$ из теоремы получаем известную характеризацию классов Фишера.

Следствие 3.2 (Хоукс [7]). Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является классом Фишера тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ является S_F-замкнутым.

Резюме. В статье получена характеризация класса Фишера с помощью операции замыкания.

Abstract. In the paper a characterization of generalized Fischer classes by a closure operation is obtained.

Литература

1. Fischer, B. Klassen konjugierter Untergruppen in endlichen auflosbaren Gruppen. Habilitationschrift. Universitat Frankfurt (M), 1966.

2. Hartley, B. On Fisher's dualization of formation theory / B. Hartley // Proc. London Math. Soc. – 1969. – Vol.3, №2. – P.193-207.

3. Lockett, F.P. On the theory of Fitting classes of finite solvable groups: Ph. D. thesis. University of Warwick / F.P. Lockett. – Warwick, 1971.

4. Anderson, W. Injectors in finite solvable groups/W. Andersen// J. Algebra. – 1975. – Vol. 36, №2. – p. 333—338.

5. Hawkes T.O. A Fitting Class Construction // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 80, 1976. – P. 437-446.

6. Hauck P. Eine Bemerkung zur kleinsten normalen Fittingklassen/ P. Hauck // J. Algebra. – 1978. – Vol. 53, №4. – P. 395—401.

7. Залесская, Е.Н. О произведениях классов Фишера / Е.Н. Залесская, С.Н. Воробьёв // Веснік ВДУ. – 2008. – №3. – С. 101-105.

8. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков – М.: Наука, 1978. – 272 с.

9. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова

Поступило 15.09.09