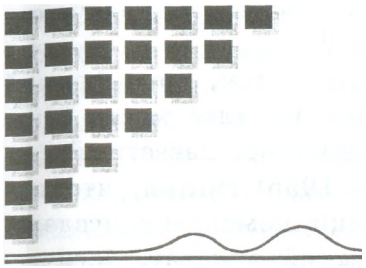
Змест



Праблемы, меркаванні, прапановы

К.О.Ананченко, кандидат педагогических наук, профессор, докторант Белорусского государственного педагогического университета им. М.Танка

РАЗВИТИЕ ИНТУИЦИИ УЧАЩИХСЯ ПРИ ОБУЧЕНИИ АЛГЕБРЕ

Развитие интуиции учащихся — очень сложный и мало разработанный вопрос в теории и методике обучения математике. Особый интерес к этой проблеме возникает в связи с углубленным изучением курса алгебры. В самом деле, в процессе его изучения у учащихся зачастую возникает необходимость выполнения того или иного алгебраического действия без наличия для этого нужных знаний. Например, ученики постоянно сталкиваются с решением творческих задач, способ решения которых им не известен, им самим предстоит найти этот способ. Процесс поиска решения таких задач осуществляется с помощью эвристических приемов. Однако в составе этого процесса есть истины, которые учащиеся обнаруживают не на основе логического рассуждения, а путем своеобразного “интеллектуального видения”.

Под интуицией понимают способность к догадке, непосредственному усмотрению истины, внутреннее “озарение”, просветление мысли. Иногда интуитивное решение задачи (проблемы) сравнивают с решением кроссворда,

когда человеку предстоит угадать, подобрать пропущенную связь, образующую слово.

Интуиция является не только знанием, но и формой добывания знания. Многие ученые немалое место отводят ей в научном творчестве. Например, известный физик-теоретик А.Эйнштейн (1879—1955) считал, что интуитивные процессы — творческий компонент исследовательской деятельности. Логический аппарат, логические рассуждения как таковые еще не дают возможности создать нечто новое. А.Эйнштейном отчетливо осознавалась роль интуиции в процессе раскрытия новых закономерностей. Он писал, что к открытию фундаментальных законов природы ведет “основанная на проникновении в суть опыта интуиция”.

Интуиция представляет собой существенный момент научного математического творчества, на что указывали такие крупные ученые, как Р.Декарт, Д.Пойа, А.Пуанкаре, Н.Бурбаки, А.Н.Колмогоров и др. “Интуиция безраздельно господствует в генезисе открытий”, — вот что по этому поводу пишет Н.Бурбаки [1, с. 253].

Интуиция и логика, будучи двумя различными сторонами математической деятельности, не исключают друг друга, а напротив, друг друга дополняют. “Интуиция намечает, логика проверяет; интуиция предуказывает, логика устанавливает; интуиция открывает, логика доказывает”, — пишет известный советский математик В.Ф.Каган (1869—1953).

Хорошо известен рассказ о маленьком Гауссе, который впоследствии стал выдающимся немецким математиком Карлом Фридрихом Гауссом (1777—1855). Однажды в начальной школе (Гауссу в то время было 10 лет) учитель предложил классу трудную задачу: сложить все натуральные числа от 1 до 100. Он надеялся на долгое время занять учеников и был очень удивлен, когда маленький Гаусс шагнул вперед, в то время, как

остальные ученики только собирались приступить к работе, — положил грифельную доску на стол учителя и сказал: “Готово!” Учитель даже не взглянул на нее, поскольку был совершенно убежден в неправильности ответа. После того, как все остальные учащиеся выполнили задание и сложили свои грифельные доски на доску маленького Гаусса, он вытащил ее и посмотрел. На его грифельной доске было написано: 101 • 50=5050.

Мы, конечно, не знаем и никогда не сможем узнать, как маленький Гаусс нашел это решение. Однако попробуем вообразить нечто, кажущееся правдоподобным. Маленький Гаусс был очень умным и развитым ребенком. Возможно, что ему удалось более непосредственно, чем другим детям, уловить конечную цель задачи, сосредоточить свое внимание на наиболее существенном. Весьма вероятно, он более четко и ясно, чем его одноклассники, представлял, что требуется в задаче, т.е. найти сумму натуральных чисел:

1+2+3+ ... +100.

Возможно, он видел задачу не так, как другие, а более глубоко и заметил, что любая пара чисел, равноудаленных от концов этой записи, дает в сумме одно и то же число: 1+100=2+99=3+98= ... =50+51=101, а значит, сумма равна: 101*50.

Интуитивное решение возникает только на основе настойчивого размышления и накопленного опыта. “Интуиция не есть беспочвенное наитие, а есть результат напряженной деятельности сознания. Никакое знание невозможно вне сознательной, целенаправленной познавательной и преобразовательной деятельности. Это означает, что постановка задачи, размышление, упорные поиски, накопление знаний и умений, творческие усилия и воля, страстность и одержимость, высокое осознание необходимости достижения определенного результата в своей творческой и интеллектуальной деятельности — вот

что порождает интуицию как эвристический феномен, как важнейший момент сознательного процесса познания и преобразования”, — пишут В.Р.Ирина и А.А.Новикова [1, с. 110—111].

Ряд известных ученых математиков, психологов, педагогов, методистов указывают на огромную роль интуиции в процессе обучения математике и на важность развития интуиции учащихся. “Главная цель обучения математике — это развить известные способности ума, а между этими способностями интуиция отнюдь не является наименее ценной”, — писал французский математик А.Пуанкаре [7, с. 359].

Известный американский педагог-математик Д.Пойа, обращаясь к преподавателям математики, призывал: “Давайте учить догадываться!” [5, с. 389].

В теории и практике обучения математике чаще всего говорят о развитии интуиции в процессе изучения геометрии. Так, например, в одной работе академик А.Н.Колмогоров говорит о “геометрической интуиции”. В пособии для студентов по методике преподавания математики [3, с. 123—127] проявление интуитивного мышления учащихся иллюстрируется, как правило, примерами из школьного курса геометрии. Однако интуиция учащихся может и должна развиваться и средствами алгебраического материала, особенно углубленного курса алгебры. Раскроем содержательные возможности этого курса для организации работы по развитию интуиции учащихся.

В процессе изучения теоретического материала углубленного курса алгебры часто возникают ситуации, в которых нельзя обойтись без интуиции учащихся и должно быть разумное соотношение интуиции и логики. Например, учащимся трудно понять элементы теории иррациональных чисел без интуиции непрерывности, усвоить понятие предела без интуиции движения.

Велика роль интуиции в процессе поиска новой для учащихся алгебраической закономерности. Например, исходя из известных формул разложения на множители суммы и разности кубов

$$X^3 \pm y^3 = (x \pm !/)(x^2 + xz/ + z/^2),$$

учащимся нетрудно записать формулы для суммы и разности пятых степеней переменных х и *у*.

$$x^b \pm y^b = (x \pm y)(x^* + x^3 y + x^2 y \backslash x y^2 + y \backslash$$

а также аналогичные формулы для седьмых степеней переменных х -и *у* и вообще для $x^n \pm y^n$, при любом не^ четном *n*.

Важно создать условия, в которых учащиеся сначала догадываются о существовании самой теоремы, а затем ставить вопрос о ее истинности и доказательстве. Например, при рассмотрении уравнений высших степеней целесообразно предложить учащимся решить уравнения:

а) $x^3 - x^2 - 81x + 81 = 0$,

б) $x^3 + 3x^2 - 16x - 48 = 0$,

в) $x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = 0$,

т.е. найти их корни x_1, x_2, x_3 (а) {-9; 1; 9}; б) {-4; -3; 4}; в) {-4; -1; 2}), а затем вычислить $x_1 + x_2 + x_3$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$, $x_1x_2x_3$ и сравнить с коэффициентами уравнений.

Рассмотрев эти частные примеры, учащиеся догадываются о существовании теоремы: если x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$, то имеют место равенства:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a_1,$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = a_2,$$

$$x\text{^}\text{г}x\text{^}\text{-}a\text{з}.$$

Затем это утверждение доказывается и обобщается.

Для развития интуиции учащихся нужно постепенно приобщать их к опыту творческой деятельности посредством включения в процесс обучения творческих задач. Напомним, что задачи, способ решения которых не известен ученику, а имеющихся у него знаний достаточно для нахождения способа, называют творческими задачами.

Учить учащихся догадываться следует на простых задачах и постепенно усиливать их трудность. С этой целью целесообразно предлагать серии задач, характеризующиеся постепенным усилением уровня трудности. Если задачи подобраны и расположены так, что ученик постоянно поставлен перед необходимостью прилагать определенные усилия для их выполнения, то способность к интуиции развивается, совершенствуется, становится более прочной. Проиллюстрируем сказанное на примерах задач, когда по заданным первым членам последовательности следует подобрать одну из формул общего члена.

Сначала рассматривается самая простая последовательность:

а) 1; 2; 3; 4; 5; 6; ....

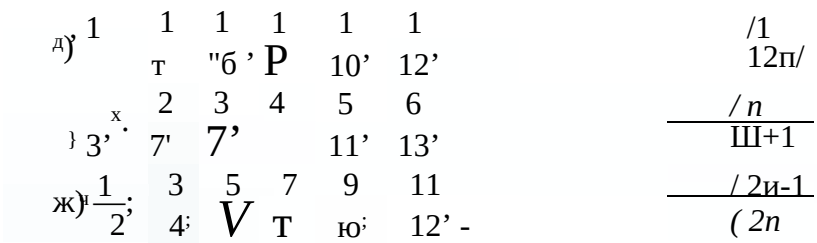
Формулу общего члена последовательности угадать легко: $a_n=n$. Затем предлагается подобрать формулу общего члена последовательности, для которой более трудно подметить закономерность между членом последовательности и ее номером:

б) 2; 4; 6; 8; 10; 12; ... *($a_n=2n$, n&N).*

в) 3; 5; 7; 9; 11; 13; ... *($a_n=2n+1$, n&N).*

г) 1; 3; 5; 7; 9; 11; ... ($a_л$=2п-1, *n&N).*

После этого предлагаются такие последовательности, подбор общего члена которых основывается на прежних догадках:



Как показывает практика, учащиеся, которые успешно справились с решением первых задач, относительно

легко справляются с нахождением формулы общего члена последовательности и в более сложных случаях.

В значительной мере к интуиции прибегают при поиске способа решения творческих задач. Например, учащиеся интуитивно чувствуют необходимость введения новой переменной при решении такого уравнения

$$\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}=10\left(\frac{x}{3}+\frac{4}{x}\right)$$

и догадываются, с помощью какой подстановки его можно решить.

Зачастую важно угадать правильное направление поиска решения творческой задачи, когда логика не может помочь. Например, на республиканской олимпиаде в 1991 году предлагалась задача: “Доказать, что в любом треугольнике

$$\text{A} + \frac{}{h_a} \frac{}{h_b} \text{p}_\text{c} > \frac{}{},$$

где li_a, h_b — высоты к сторонам *а* и *Ь*, P_c — биссектриса к стороне с”.

В этом случае необходимо догадаться доказать аналогичное, но более простое неравенство $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}>\frac{1}{h_c}$. Доказав его, легко доказать и исходное неравенство.

Нельзя обойтись без интуиции и при осуществлении плана решения задачи. Выполняя запись решения задачи, учащийся должен контролировать каждый свой шаг. Для контроля он пользуется или интуицией, или логикой.

Решив задачу, мы приучаем ученика сделать “взгляд назад”: “А нет ли более рационального способа решения задачи?” Заметим, что отыскание такого способа часто основано на интуиции.

Выполнить обратное алгебраическое действие всегда сложнее, чем прямое. Так, например, разложить много-

член на множители труднее, чем выполнить умножение многочленов. Творческая задача на разложение многочленов требует от учащихся способности к догадке, интуиции. Например, пусть требуется разложить многочлен x^5+x^4+1 на множители. Проанализируем один из возможных способов решения:

$$x^5+x^4+1=(x^5-x^3+x^2)+(x^4-x^2+x)+(x^3-x+1)=$$
$$=x^2(x^3-x+1)+x(x^3-x+1)+(x^3-x+1)=(x^3-x+1)(x^2+x+1).$$

Операция представления многочлена x^5+x^4+1 в виде трех многочленов основана на догадке, интуиции. Однако ее возникновение зависит от опыта решения творческих задач ученика, уровня сформированности умения использовать эвристические приемы, от его алгебраических способностей.

Для развития интуиции полезно предлагать учащимся для решения обратную задачу. Так, например, учащиеся решают задачу, в которой дана функция, и требуется исследовать ее свойства. Для процесса обучения, в частности для развития интуиции, важна обратная задача: составить (придумать) функцию, обладающую данным свойством (или свойствами). Как правило, они имеют несколько решений. Приведем примеры таких задач.

1. Привести пример функции $y=f(x)$, область определения которой представляет собой: а) пустое множество; б) одно (два, три) числа; в) промежуток [4; 5]; г) R;
д) множество всех целых чисел.

2. Существует ли функция, определенная на всей числовой прямой, которая одновременно является: а) нечетной и возрастающей; б) нечетной и убывающей; в) четной и возрастающей; г) четной и убывающей?

Развитие интуиции учащихся тесно связано с умозаключениями по индукции. Переход от посылок к заключению в процессе выполнения индуктивного умозаключения осуществляется в ряде случаев на интуитивной основе. Например, найти формулу суммы

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$$

мы можем, пользуясь индуктивным умозаключением, в котором переход от посылок:

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot 1;\quad S_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{2}{3};\quad S_3=\frac{2}{3}+\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{3}{4}$$

к заключению $S_n=\frac{n}{n+1}$ основан на догадке, интуиции.

В этом случае интуиция проявляется прежде всего при переходе от наблюдений к формулированию гипотезы, выражающей утверждение о наличии некоторой закономерности.

"... при обучении школьников, — пишет известный педагог-математик Д.Пойа, — мы должны делать больший упор на интуицию, а не на дедукцию, и обращаться к первой гораздо раньше, чем ко второй" [6, с. 319].

Проиллюстрируем эту мысль следующими примерами.

Пример 1. При каких значениях параметра *а* система уравнений

имеет единственное решение?

Воспользуемся сначала геометрической интерпретацией уравнений, входящих в эту систему. Рассмотрим на координатной плоскости множество точек (х; *у),* задаваемых уравнениями системы. Первое уравнение задает прямую *y=1—x,* а второе — множество концентрических окружностей с центром в начале координат и радиусом Va. Опираясь на рисунок, можно догадаться, что система имеет единственное решение для того значения параметра *а,* при котором окружность касается прямой. Это будет окружность радиусом $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Соответствующее ей значение параметра *а* равно 0,5.

Затем дается аналитическое решение.

Полезно, приступая к решению какой-либо задачи, < помощью рисунка, графика, модели выявить, пронаблюдать те соотношения, которые надо установить.

Пример 2. Угадайте корни уравнения $x(x+1)+(x+1) \cdot \cdot (x+2)+(x+2)(x+3)=1 \cdot 2+2 \cdot 3+3 \cdot 4$ и докажите, что корней нет.

Легко догадаться, что $x_x=1$ и $x_2=-4$ корни уравнения. После выполнения очевидных данное уравнение сводится к квадратному, а оно иметь не более двух корней. Поскольку оба корня уравнения угаданы, то, следовательно, оно решено.

В углубленном курсе алгебры отводится определенное место задачам такого характера, т.е. учащиеся сначала догадываются, а затем доказывают.

В процессе обучения, с одной стороны, воспитывать у учащихся привычку к терпеливому, упорному поиску способа решения творческой задачи, желание и стремление преодолевать трудности на этом пути, с другой стороны, всячески поощрять у учащихся желание и способность к догадке. При этом важно обращать их внимание на то, что каждую гипотезу, выдвинутую с помощью догадки, следует подвергнуть проверке на правдоподобность, а затем провести ее обоснование (если она не будет опровергнута контрпримером).

Развитие интуиции происходит и в процессе самостоятельного доказательства алгебраических утверждений. Любое доказательство предусматривает необходимость построения цепочки дедуктивных умозаключений. Выбор общих положений в качестве посылок, поиск идей доказательства во многом зависит от интуиции, догадки учащихся. В доказательстве интуиция играет наводящую роль. Логика не может объяснить, почему при доказательстве избирается тот или иной способ рассуждения, эти построения, преобразования, а не другие. Такие воп-

росы приходится решать с помощью интуиции, а следовательно, и происходит ее развитие. Однако интуиция воспитывается не на пустом месте, а на основе прочных знаний. Например, если учащийся прочно усвоил некоторые методы рассуждения, то он может догадаться, каким из них воспользоваться при доказательстве. Необходимо, чтобы учащийся, доказав математическое предложение, почувствовал его истинность, проанализировал, как оно согласуется с его опытом и представлением и т.д. “Попытка формально доказать то, что усмотрено интуитивно, и увидеть интуитивно то, что доказано формально, — это прекрасное упражнение для развития интеллекта”, — пишет Д.Пойа [4, с. 132].

В заключение отметим, что важнейшей задачей углубленного курса алгебры является развитие интуиции учащихся. Формирование этой способности зависит от многих факторов: от математической направленности ума ученика, его склонностей и одаренности, опыта решения творческих задач, методов и приемов обучения. Важным средством развития интуиции являются творческие задачи, среди которых можно выделить следующие:

- задачи на поиск алгебраических закономерностей;
- задачи на подбор формул *n-го* члена последовательности;
- составление и решение обратных задач;
- задачи на самостоятельный поиск доказательств;
- геометрическая интерпретация алгебраических формул, функций, неравенств, числовых последовательностей;
- задачи, для поиска решения которых надо сначала с помощью рисунка, графика, схемы пронаблюдать соотношения, которые надо установить, и др.

В процессе обучения следует всячески поощрять стремление учащихся к догадке, интуиции при изучении теоретического материала и поиске решения задач.

1. *Бурбаки Н.* Очерки по истории математики. — М., 1963.
2. *Ирина В.Р., Новикова АЛ.* В мире научной интуиции. — М.: Наука, 1978. — 191 с.
3. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика / В.А.Оганесян, Ю.М.Колягин и др. — М.: Просвещение, 1980. — 368 с.
4. *Пойа Д.* Как решать задачу: Пособие для учителей. — М.: Учпедгиз, 1961. — 208 с.
5. *Пойа Д.* Математика и правдоподобные рассуждения / Пер. с англ. И.А.Вайштейна; Под ред. С.А.Яновской. — М.: Наука, 1975. — 463 с.
6. *Пойа Д.* Математическое открытие / Пер. с англ. В.С.Бермана; Под ред. И.М.Яглома. — М.: Наука, 1970. — 452 с.
7. *Пуанкаре А. О* науке / Пер. с франц.; Под ред. Л.С.Понтрягина. — М.: Наука, 1983. — 560 с.

А.А.Дадаян, профессор БГПУ им. М.Танка

ШКОЛЬНЫЙ КУРС МАТЕМАТИКИ И ЕГО ПРОБЛЕМЫ

Перестройка системы народного образования, проводимая в Республике Беларусь, предполагает, в частности, и реформу школьного математического образования. При этом по новому учебному плану резко сократилось число часов, отводимых на математические дисциплины. Сразу возникло несколько проблем. Одна из них — сохранить ли весь учебный материал, который преподавался в прежней школе, “втиснув” его в рамки отведенного учебного времени, или, путем некоторого отбора, исключить из него тот материал, который не имеет сколь-