КЪ РЕФОРМѢ СРЕДНЕЙ и ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ

Евгеній Дюрингъ

МЫСЛИ

О ЛУЧШЕЙ ПОСТАНОВКѢ

ПРЕПОДАВАНІЯ и ИЗУЧЕНІЯ МАТЕМАТИКИ

ВЪ СРЕДНЕЙ И ВЫСШЕЙ ШКОЛѢ

И О САМОСТОЯТЕЛЬНЫХЪ ШТУДІЯХЪ.

СЪ ПРИЛОЖЕНІЕМЪ ЭТЮДА

„КРИТИКА ОСНОВЪ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНАГО ИСЧИСЛЕНІЯ".

Перевелъ съ нѣмецкаго

Н. Маракуевъ.

Типо-литографія Т-ва И. Н. КУШНЕРЕВЪ и Ко. Пименовская ул., соб. д.
Москва — 1904.

Дозволено цензурою. Москва, 23 іюня 1904 года.

ОТЪ ПЕРЕВОДЧИКА.

Предлагаемая книжка имѣетъ цѣлью распространить въ средѣ учащихъ и вообще лицъ, интересующихся вопросами воспитанія и образованія, но мало знакомыхъ съ трудами Дюринга, его мысли о лучшей постановкѣ изученія и преподаванія математики. Въ настоящее время, когда все общество живо интересуется вопросомъ о реформѣ средней и высшей школы и о лучшей постановкѣ школьнаго дѣла вообще, всякія указанія, освѣщающія хотя бы какую-либо одну сторону дѣла, въ частности, не должны быть оставляемы безъ вниманія. Но въ данномъ случаѣ, говоря о математикѣ, авторъ попутно касается и многихъ общихъ вопросовъ, относящихся къ постановкѣ преподаванія и къ состояніямъ подлежащихъ сферъ. Дюрингъ уже давно пользуется славою смѣлаго и честнаго реформатора въ наукѣ, и къ нему нерѣдко и съ разныхъ сторонъ обращались за совѣтами лица, ищущія лучшихъ и надежнѣйшихъ путей въ дѣлѣ самообразованія и обученія. Въ отвѣтъ на такіе запросы во многихъ изъ его сочиненій появились руководящія указанія, какъ вести дѣло изученія и обученія той или другой области знанія, а по математикѣ, кромѣ того, совмѣстно съ сыномъ, не безызвѣстнымъ физикомъ, имъ написана даже цѣлая книга „Neue Grundmittel zur Analysis, Algebra etc“ (*Новыя основныя средства анализа* и т. д.), гдѣ читатель найдетъ множество драгоцѣнныхъ указаній по разсматриваемому вопросу. Изъ этой книги и взяты нами четыре главы, которыя даютъ возможность всякому орьентироваться въ дѣлѣ, составить себѣ планъ для веденія преподаванія или для самообразованія, и избѣжать ненужной траты времени и даже многихъ опасностей. „Моральная сила,—говоритъ онъ въ своей автобіографіи,—и умъ, не терпящій никакой фальши въ наукѣ, имѣютъ большое вліяніе и на чисто научные успѣхи. Честное сознаніе передъ самимъ собою, что̀ знаешь и чего не знаешь, не давая себя въ обманъ ни чужому авторитету, ни собственному тщеславію,—таковъ важнѣйшій ключъ къ критикѣ и предварительное условіе всякой научной реформы и всякаго творчества“. Руководясь этимъ принципомъ и рано почувствовавъ призваніе къ реформаторской дѣятельности, онъ энергично взялся за дѣло и ранѣе всего другого принялся за математику, съ цѣлью устранить всякую неясность, всякій мистицизмъ изъ различныхъ традиціонныхъ понятій математики и на мѣсто ихъ поставить болѣе раціональныя представленія, легче примѣнимыя и болѣе плодотворныя. „Въ наукѣ,—говоритъ онъ,—сносные элементы еще не отдѣлены надлежащимъ образомъ, а частію и вовсе, отъ вымысловъ; она испорчена со стороны удобопонятности, и потому не только производитъ опустошенія въ головахъ юношества, но и заводитъ на ложные пути. Довольствуются скорлупою, и не очень интересуются ядромъ“ и т. д. Онъ совершенно основательно указываетъ на извращеніе здраваго смысла у современныхъ математиковъ, на господство косности, рутины у университетскихъ преподавателей, на непониманіе дѣла у идущаго по ихъ стопамъ большинства, на совершенный хаосъ въ учебной литературѣ, на порчу, вносимую въ учебное дѣло учеными изъ племени іудина, каковыхъ на университетскихъ каѳедрахъ съ каждымъ годомъ появляется больше и больше и т. д. Все это имѣетъ отношеніе и къ намъ, русскимъ. Что касается послѣдняго пункта, въ частности, то, кромѣ сказаннаго, на русской почвѣ нужно обратить вниманіе на вносимую „учеными евреями“ страшную порчу русскаго языка, который въ ихъ рукахъ обратился въ какой-то невыносимо-отвратительный „бердичевскій жаргонъ“, на которомъ они невозбранно каркаютъ съ университетскихъ каѳедръ. Любая еврейская газета, любая книга, написанная евреемъ, убѣдитъ васъ въ этомъ. Вотъ, напр., одна изъ такихъ книгъ, носящая заглавіе „*Основанія ученія объ электрическихъ и магнитныхъ явленіяхъ*“ г. Б.: въ ней вы наткнетесь на такое ужасное насиліе надъ русскимъ языкомъ, на такое невозможное искаженіе и коверканье языка, что чтеніе этой книги настоящая пытка. Въ цѣляхъ охраны русскаго языка желателенъ былъ бы положительный законъ, который закрывалъ бы еврейскимъ ученымъ доступъ на каѳедры, разъ они не владѣютъ чистою русскою рѣчью, устною и письменною. Впрочемъ, иниціатива этой мѣры должна бы была исходить отъ Академіи, на которую возложена обязанность блюсти чистоту русской рѣчи. Но мало ли что дѣлаетъ и чего не дѣлаетъ наша Академія! Не такъ давно она отказалась принять въ свои нѣдра Ньютона химіи, великаго Менделѣева, и предложила вакантное кресло одному совсѣмъ не великому химику. Дѣло это въ свое время получило огласку въ газетахъ и вызвало кое-какіе протесты со стороны общества. Вотъ въ такой-то и подобной неурядицѣ и помогаетъ разобраться Дюрингъ. Между прочимъ онъ указываетъ, что нужно искать и гдѣ найти искомое. Въ поясненіе приведемъ два-три примѣра.

Если обратиться къ элементарной геометріи, то начинающій преподаватель, незнакомый съ указаніями Дюринга,—если только преподаватель этотъ не ремесленникъ,—будетъ поставленъ въ большое затрудненіе, какой точки зрѣнія держаться, и потому какой системѣ слѣдовать, какой взять учебникъ, тѣмъ болѣе что у насъ еще нѣтъ Нормальныхъ Школъ для подготовки учителей въ среднія школы,—университеты считаютъ это дѣло себѣ чуждымъ,—и у насъ нѣтъ лицъ, которыя приступали бы къ преподаванію математики во всеоружіи надлежащей подготовки. Преподаватель, при выборѣ того или другого учебника, долженъ ясно поставить себѣ цѣль, которую онъ долженъ преслѣдовать, и этою цѣлью и долженъ опредѣляться выборъ учебника. Чего же долженъ онъ добиваться, преподавая геометрію? Дюрингъ укажетъ ему ясную и опредѣленную цѣль—уясненіе истиннаго синтеза, какъ пути отъ простого къ сложному. Руководясь этою цѣлью, онъ убѣдится, что, напр., учебникъ Мазинга, гдѣ авторъ сваливаетъ въ одну кучу всѣ теоремы о треугольникахъ, въ другую—теоремы о четыреугольникахъ и т. п., что этотъ учебникъ къ дѣлу нейдетъ. Обратившись къ учебнику Давидова, онъ найдетъ, что это—просто плохая передача курса Лежандра, худшая этого, все-таки хорошаго, источника. Онъ найдетъ, что только Эвклидъ удовлетворяетъ намѣченной цѣли, и такимъ образомъ при выборѣ учебника дѣло сразу будетъ рѣшено въ пользу учебника Ващенко-Захарченко, изложеннаго строго по Эвклиду, съ дополненіемъ всего того, чего у Эвклида нѣтъ. Преподаватель будетъ сразу поставленъ на настоящій путь, и ему не придется дѣлать опытовъ, неблагопріятно отзывающихся на учебномъ дѣлѣ.

Возьмемъ еще примѣръ. Вотъ учебникъ по Приложенію алгебры къ геометріи, написанный г-мъ Некрасовымъ,—замѣтимъ, учебникъ съ тремя заглавіями и съ добавленіемъ къ нимъ. Не говоря уже о томъ, что учебникъ этотъ, размазывая безъ нужды вещи банальныя и легко усвояемыя, каково, напр., построеніе алгебраическихъ выраженій, къ тому же извѣстное ученикамъ изъ курса геометріи, тогда какъ болѣе трудныхъ сторонъ предмета, каково изслѣдованіе вопросовъ, касается лишь слегка, избирая при этомъ пути тяжелые, аляповатые,—не говоря объ этомъ, всего интереснѣе то, что авторъ, какъ бы въ видѣ особенно цѣннаго подарка, преподноситъ ученикамъ такъ называемую „Воображаемую Геометрію“ Лобачевскаго,—ахинею, въ которой напрасно будешь искать здраваго смысла. Отъ увлеченій подобными нездоровыми направленіями Дюрингъ настойчиво предостерегаетъ. У насъ Ученый Комитетъ Министерства Народнаго Просвѣщенія также этой пропаганды метафизической стряпни въ нашихъ средне-учебныхъ заведеніяхъ не одобрилъ, допустивъ книжку г. Некрасова только безъ дополнительной главы, посвященной развитію „идей“ Лобачевскаго, и поступилъ, прямо скажемъ, мудро, особенно если имѣть въ виду Софуса-Ли, который, увлекшись этими идеями, окончилъ дни свои въ домѣ умалишенныхъ. Насколько же правъ, поэтому, Дюрингъ, говоря, что въ XIX-мъ столѣтіи точныя науки упали, пустѣйшія умозрѣнія загрязнили собою наслѣдіе ясныхъ и трезвыхъ умовъ, науку Ферматовъ, Ньютоновъ, Гюйгенсовъ, Лагранжевъ. Предостерегая отъ пустой и вредной траты времени, онъ, напротивъ того, указываетъ, на чемъ именно долженъ сосредоточить вниманіе учащійся, указываетъ на алгебру и на анализъ, какъ на могучее математическое орудіе, созданное новымъ временемъ и свойственное генію новыхъ народовъ, въ противоположность геометріи, какъ главному математическому методу древнихъ. Между прочимъ онъ указываетъ, что въ низинахъ анализа не слѣдуетъ забывать образцовыхъ лекцій Лагранжа (Leçons d'arithmetique et d'algebre), а въ высшихъ частяхъ анализа настоятельно рекомендуетъ изученіе твореній Лагранжа, какъ краеугольнаго камня математики новаго времени, совѣтуетъ избѣгать такихъ лекцій, какъ, напр., Римановскія и другихъ метафизиковъ, не посвящать несоразмѣрно много времени штудированью Коши и, напротивъ, серьезнѣе заняться изученіемъ Абеля и Галуа и т. д.

Многія изъ высказываемыхъ авторомъ мыслей не новы, кое-что говорилось раньше и у насъ, въ Россіи. Такъ, въ актовой рѣчи покойнаго профессора Московскаго университета Н. В. Бугаева (*Математика какъ орудіе научное и педагогическое*, Москва, 1869) читаемъ: „Къ сожалѣнію, настоящій объемъ и обстановка математическаго образованія въ нашихъ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ далеко не соотвѣтствуетъ высокимъ требованіямъ современной цивилизаціи. Математика въ настоящемъ состояніи не оказываетъ полной воспитывающей силы. Преподаваніе ея обрывается тамъ, гдѣ собственно только начинаетъ опредѣляться ея глубокое значеніе для уясненія законовъ природы и законовъ мысли. Курсъ математическихъ наукъ въ общеобразовательныхъ учебныхъ заведеніяхъ необходимо расширить, по крайней мѣрѣ до объема, который далъ бы почувствовать, что послѣ Эвклида жили Декартъ, Лейбницъ, Ньютонъ, Монжъ". Вотъ требованія, заявленныя почти полвѣка тому назадъ, но доселѣ не осуществленныя. Точно такія же желанія высказываетъ и Дюрингъ, требуя введенія въ курсъ средней школы начатковъ аналитической геометріи, дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій и начертательной геометріи. Съ устраненіемъ обязательности древнихъ языковъ, въ средней школѣ освободилось достаточно времени, чтобы можно было преподаваніе математики здѣсь расширить до требуемаго Дюрингомъ и Бугаевымъ объема. Это сообщило бы курсу этихъ школъ ту серьезность и основательность, которыхъ въ настоящую переходную эпоху имъ недостаетъ. Нужно замѣтить, что въ нашихъ гимназіяхъ 40-хъ годовъ начертательная геометрія преподавалась, но уже въ 50-хъ годахъ исчезла изъ курса этихъ школъ. Замѣтимъ также, что во французскихъ коллежахъ и лицеяхъ давнымъ-давно преподаются и начатки исчисленія безконечно-малыхъ, и аналитической геометріи, и начертательная геометрія, а курсъ физики поставленъ основательнѣе и шире, чѣмъ у насъ. Какъ далеки мы отъ всего этого!

И другія требованія Дюринга, напр., касательно очистки дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій отъ всякихъ примѣсей метафизики, сопровождавшей первые шаги въ этой области и удержанной кое-гдѣ и доселѣ,—также не новость. Попытку къ постановкѣ раціональнаго понятія о дифференціалѣ находимъ, напр., въ курсѣ Гоуэля, составленномъ по указаніямъ Дарбу. Насколько оздоровленіе корней здѣсь все еще необходимо, можно видѣть изъ того, что, несмотря на появленіе курса Гоуэля еще въ 1878 году, въ лекціяхъ 80-хъ годовъ профессора Цингера можно встрѣтить опредѣленіе дифференціала какъ *предѣла безконечно-малой*! Такое же опредѣленіе дифференціала находимъ и въ лекціяхъ этого ученаго, читанныхъ имъ въ 60-хъ годахъ. Но предѣлы безконечно-малыхъ суть нули; интересно было бы узнать отъ него, какимъ образомъ изъ ничего онъ ухитрился бы сложить, напр., дугу кривой? И не упраздняется ли этимъ опредѣленіемъ дифференціала все дифференціальное исчисленіе, а съ нимъ, конечно, и интегральное? Невольно вспоминаются здѣсь слова Л. Толстого, что все, что неясно, не можетъ быть основаніемъ чего бы то ни было... Слѣдующій примѣръ еще поучительнѣе, такъ какъ касается знаменитаго Гельмгольтца, по мнѣнію котораго (см. стр. 22 тома I „Научныхъ статей“) *площадь есть сумма ординатъ*. Итакъ, по мнѣнію одного, небольшого, ученаго, дифференціалы суть нули, а по мнѣнію другого, большого, ученаго, площадь есть сумма прямыхъ! Этюдъ IV покажетъ читателю, какимъ образомъ нашъ авторъ пытается установить раціональное понятіе о дифференціалѣ, свободное отъ всякой метафизики.

Критическія работы Дюринга по математическимъ наукамъ, выясняя и исправляя недостатки въ самыхъ основахъ науки, важны еще въ томъ отношеніи, что даютъ компасъ для оцѣнки научныхъ величинъ. Насколько это необходимо, видно изъ приводимаго въ одномъ изъ трудовъ Дюринга примѣра, что историкъ

Шлоссеръ не усомнился поставить на одну доску незначущую фигурку какого-то профессора Кестнера съ міровымъ геніемъ, Архимедомъ. Къ сожалѣнію, подобныя смѣшенія далеко не рѣдкость. Такъ, въ книгѣ Лоджа „Піонеры науки“ (стр. 210—211 русскаго перевода) читаемъ: „Онъ (Лапласъ) много трудился совмѣстно съ Лагранжемъ, *хотя и не столь блестящимъ математикомъ*, но болѣе основательнымъ человѣкомъ и т. д.“. Это говорится о Лагранжѣ — творцѣ варьяціоннаго исчисленія, аналитической механики, новыхъ методовъ въ теоріи уравненій, авторѣ Теоріи функцій и т. д., и т. д. Такимъ господамъ, какъ авторъ „Піонеровъ науки“, Дюрингъ совѣтуетъ разъ навсегда уяснить себѣ, что между компиляторскою виртуозностью Лапласовъ и свободнымъ геніальнымъ творчествомъ Лагранжевъ — цѣлая пропасть. Еще курьезнѣе сужденіе русскаго професора. Въ брошюрѣ „Разборъ статьи Ермакова о преподаваніи алгебры“ г. Шапошниковъ называетъ Ковалевскую первокласснымъ математикомъ, ставя ее, такимъ образомъ, рядомъ съ Ньютономъ, Лагранжемъ и тому подобными величинами. Комментаріи излишни. Право, не мѣшало бы этимъ господамъ раздавателямъ высокихъ чиновъ, которые съ такимъ легкимъ сердцемъ вѣнчаютъ въ геніи кого имъ угодно и съ забавнымъ апломбомъ ставятъ высочайшіе пьедесталы воробьямъ, не мѣшало бы имъ припомнить извѣстную русскую поговорку о сверчкѣ и шесткѣ.

Заслуживаетъ вниманія и Дюрингова критика состоянія университетовъ, которые, съ ихъ мертвящею манерою преподаванія, являются, какъ онъ совершенно основательно смотритъ, учрежденіями отжившими, средневѣковыми руинами, новымъ запросамъ жизни не отвѣчающими...

Обращаемъ вниманіе читателя и на то обстоятельство, что только у Дюринга можно найти великолѣпныя, блестящія характеристики именитыхъ математиковъ,—такія, какихъ нигдѣ въ иномъ мѣстѣ не встрѣтите. Иногда, какъ, напр., при оцѣнкѣ Лагранжа, эти характеристики отличаются полнотою, иногда это—два-три штриха; но всегда передъ вами—живое лицо.

Однако, пора кончить. Предоставимъ слово самому автору; замѣтимъ только, что авторъ этотъ принадлежитъ къ писателямъ рѣзкимъ, нестѣсняющимся въ своихъ сужденіяхъ никакими, посторонними дѣлу, усмотрѣніями. Само собою разумѣется, переводчикъ за это отвѣтственности не несетъ. Текстъ выбранныхъ этюдовъ переданъ безъ всякихъ сокращеній, на которыя переводчикъ не считалъ себя въ правѣ.

Одесса,
7 іюля 1904.

I.

Обученіе «Элементамъ» математики и ихъ изученіе.

1. Значеніе „Элементовъ“. 2. Характеристика „Элементовъ“ математики вообще. Путь отъ простого къ сложному какъ истинная сущность настоящаго синтеза. Схоластическій пріемъ дѣленія на рубрики подлежитъ устраненію. 3. Взглядъ Лагранжа на геометрію какъ на мертвый языкъ математики. Примѣръ Паскаля и его стремленія все доказать какъ свидѣтельство неплодотворности изученія древнихъ при неимѣніи соотвѣтствующаго собственнаго таланта. Извлеченіе кое-чего жизненнаго изъ самихъ по себѣ жизненныхъ точекъ зрѣнія. 4. Лежандровы „Элементы“ геометріи какъ анахронизмъ. Излишекъ чистой геометріи. 5. Элементы ариѳметики и алгебры какъ главный пунктъ новаго направленія. Опытъ Эйлера. Образцовый курсъ Лагранжа. 6. Практическія точки зрѣнія на курсъ начатковъ математики. Онъ долженъ обнимать собою исходные пункты и высшихъ частей науки, и новыхъ направленій. 7. Пути къ сокращенію, концентрированію и упрощенію всей области Элементовъ. Болѣе натуральные способы доказательствъ. 8. Закладка прочнаго фундамента. Примѣненіе новыхъ изысканій. Новая обработка уравненій. Практическое веденіе всякаго курса.

1. Въ фундаментѣ всякихъ штудій и всего обученія, въ элементахъ, должно быть выяснено, насколько прочную почву подъ собою имѣетъ математика въ своихъ основныхъ понятіяхъ и основныхъ истинахъ. Поэтому подъ *Элементами* или *Начатками* науки не слѣдуетъ разумѣть чего-то такого, что можетъ быть, такъ сказать, набросано на-

чинающимъ какъ попало и что будетъ для нихъ хорошо въ какой угодно формѣ. Элементы не представляютъ собою чего-то низшаго, къ чему можно бы было отнестись слегка. Въ древности никогда такъ не думали, ибо иначе не могли бы появиться на свѣтъ произведенія, отличающіяся такою относительною строгостью, каковы напр. *Архимедовы*. Если-бы древніе не требовали отъ элементовъ, т.-е. отъ простѣйшихъ оснований науки, никакой ясности, то они не обнаружили бы ея и въ болѣе сложныхъ ученіяхъ. Что же касается новаго времени, то теперь очевиднѣе чѣмъ когда-либо, что обработкѣ основаній какъ математики новаго времени, такъ и вообще этой науки не придаютъ ясности, а тамъ, гдѣ она уже имѣлась налицо, нигдѣ ее не удерживаютъ. За это пренебреженіе математики новаго времени поплатились тѣмъ, что въ высшихъ областяхъ науки породили спутанность и почти всюду, за весьма рѣдкими исключеніями, утратили способность къ сколько-нибудь понятному, не говоря уже—сносному, или, тѣмъ болѣе, изящному изложенію. Со временъ *Гюйгенса* только *Лагранжъ* является послѣднимъ и замѣчательнымъ исключеніемъ; въ настоящее же время—въ періодъ анти-эвклидовской геометріи—туманная пустота, разложеніе и гніеніе являются характерными чертами направленія, въ какомъ культивируется математика. Такая культура въ значительной мѣрѣ инфицировала и область элементарной математики; и если эта эпоха разложенія—не болѣе какъ быстротечная фаза, то все-таки о здраво-обоснованной системѣ всей математики рѣчь можетъ быть не раньше, какъ когда элементы будутъ обработаны такъ, что будутъ обнимать собою, въ ясномъ изложеніи, всѣ начатки какъ античной, такъ и современной математики, въ формѣ цѣльнаго однороднаго сплава.

2. Новое и болѣе зрѣлое время требуетъ расширенія границъ и въ области элементовъ математики, — оно не можетъ довольствоваться тѣми узкими рамками элементовъ и сопринадлежныхъ имъ методовъ, какими могли довольствоваться древніе. Въ чемъ же заключаются элементы математики и каковы ихъ границы? — Разныя эпохи всемірной исторіи давали на этотъ вопросъ и разные отвѣты. Со временемъ Эвклида, слѣдовательно, болѣе чѣмъ за двѣ тысячи лѣтъ до нашего времени, наименованіе «Элементы» (Stoicheja) сдѣлалось классическимъ; однакожъ рѣдко обращали вниманіе на то, въ какой мѣрѣ наименованіе мало соотвѣтствовало границамъ содержанія. Съ именемъ элементовъ древніе соединяли понятіе естественно логическое; таковымъ же должно оно оставаться и для насъ. Связный и отчасти весьма сложный матеріалъ извѣстной области знанія представляли себѣ разложеннымъ на простѣйшія составныя части его, и подъ элементами науки вообще разумѣли всѣ существенныя составныя части ея, при помощи которыхъ можно бы было пріобрѣсти болѣе сложныя воззрѣнія и рѣшать какъ угодно комбинированные вопросы. Такимъ образомъ простое противополагалось сложному, результаты разложенія — разнообразнымъ комбинаціямъ. У Эвклида, впрочемъ, къ этому присоединялось еще большее, но едва ли чѣмъ оправдываемое, ограниченіе. Эвклидъ ограничилъ свои элементы, въ которыхъ, кстати замѣтить, преобладало геометрическое содержаніе, узкими рамками такихъ только истинъ, изложеніе которыхъ не касалось измѣренія длины кривыхъ прямою, не касалось даже измѣренія круга. Намъ показалось бы очень страннымъ, если бы опредѣленію отношенія окружности къ діаметру, т.-е. числа π, не было бы отведено мѣста въ самыхъ «Элементахъ». Въ самомъ дѣлѣ, всякому покажется страннымъ,

что Эвклидъ сравниваетъ площади разныхъ круговъ, но удерживается отъ непосредственнаго опредѣленія площади одного круга въ отдѣльности.

Правда, для выпрямленія кривой и для опредѣленія ограничиваемой ею площади необходима особая аксіома, которой не было въ его Prota. Архимедъ не преминулъ ввести эту новую аксіому. Существенно для указанной цѣли необходимое, хотя и не доказанное имъ, положеніе состояло въ томъ, что длина дуги содержится всегда между двумя прямолинейными предѣлами, именно, что она, съ одной стороны, больше соотвѣтствующей хорды, съ другой стороны, меньше ломаной, образуемой двумя касательными, проведенными въ конечныхъ точкахъ дуги. Аксіома эта составляетъ рѣзкую границу между низшею и высшею математикою древнихъ. Обыкновенно указываютъ на то, что построенія, требующія для своего выполненія только прямой линіи и круга, составляютъ отличительный признакъ Эвклидовской элементарной математики; это—правда, но не составляетъ еще достаточнаго признака: въ самомъ дѣлѣ, исключеніе задачи объ измѣреніи круга изъ рамокъ элементовъ не связано существенно съ указаннымъ ограниченіемъ средствъ построенія. Построеніемъ вписанныхъ и описанныхъ многоугольниковъ можно заключить окружность въ произвольно тѣсные предѣлы, какъ это и сдѣлалъ Архимедъ, а Пиѳагорова теорема вполнѣ достаточна для опредѣленія периметровъ этихъ многоугольниковъ. Правда, пріемъ этотъ даетъ только неограниченное приближеніе; но доказательство невозможности точной квадратуры должно быть необходимо дано въ самыхъ «Элементахъ». Еслибы на доказательство этой невозможности всегда смотрѣли какъ на дѣло самыхъ «Элементовъ», то изъ среды лучшихъ изъ учащихся никогда бы не возникъ рядъ чудаковъ, занимающихся отыскиванiемъ квадратуры круга. Если и теперь еще эта эпидемiя, какъ и прежде, требуетъ постоянныхъ жертвъ и увлекаетъ безполезно лучшiе умы, то, безъ сомнѣнiя, нѣкоторая доля вины въ этомъ падаетъ и на несовершенство обработки элементовъ математики.

Держаться «Элементовъ» Эвклида, какъ образца, еще и въ наше время менѣе опасно, чѣмъ отдаться новѣйшей пустотѣ и безформенности. Изъ этой старой книги можно, по меньшей мѣрѣ, научиться тому, что такое доказательство и какъ образуется цѣпь связанныхъ одна съ другою истинъ. Изъ нея можно научиться, что исходные пункты даетъ не неопредѣленно-общее, а, напротивъ, наиболѣе спецiальное, даже индивидуально-типичное образовъ, и насколько поэтому ненатурально, слѣдуя общепринятому схоластическому прiему, дѣлать общiя рубрики, въ которыхъ исчерпывались бы всѣ предметы одного рода безъ всякаго отношенiя къ подлежащей доказательству зависимости. Примѣромъ этихъ, такъ излюбленныхъ новѣйшими, рубрикъ можетъ служить соединенiе въ одной статьѣ всѣхъ соотношенiй, какiя могутъ существовать между двумя прямыми на плоскости. Въ эту рубрику должно бы было включить изложенiе свойствъ смежныхъ угловъ, угловъ вертикальныхъ, перпендикуляровъ, параллельность и совпаденiе, при чемъ, чтобы это выходило вполнѣ натурально, безъ помощи третьей сѣкущей линiи. Но очевидно, что такая задача, безъ вставки нѣкоторыхъ промежуточныхъ звеньевъ, основывающихся на другихъ предпосылкахъ, неразрѣшима. Уже манера соединенiя въ одну статью всѣхъ случаевъ конгруенцiи какихъ угодно треугольниковъ не Эвклидовская. Эвклидовской системѣ приличествуетъ, скорѣе начать съ равносторонняго треугольника, то-есть не съ треугольника вообще, но съ индивидуальнаго правильнаго типа. Индивидуализированіе этого рода проводится черезъ всю систему: такъ, обобщенію Пиѳагоровой теоремы должно предшествовать въ своемъ мѣстѣ доказательство ея въ обыкновенномъ тѣсномъ смыслѣ. Въ этомъ и состоитъ истинный смыслъ синтетическаго развитія истинъ, причемъ, конечно, понятіе синтеза берется въ совершенно иномъ смыслѣ, чѣмъ тотъ, какой ему непосредственно приписывается въ обыкновенной логикѣ. Послѣдняя разумѣетъ подъ синтезомъ всякій переходъ отъ общаго къ частному, и обыкновенное представленіе разумѣетъ при этомъ подчиненіе болѣе частныхъ истинъ болѣе общимъ. Очевидно, это не есть то отношеніе, которое имѣетъ мѣсто при переходѣ отъ частнаго случая Пиѳагорова предложенія къ обобщенію этой теоремы. Здѣсь частное предшествуетъ, а общее слѣдуетъ за нимъ; но это общее отношеніе вещей обусловливается болѣе богатыми по своимъ послѣдствіямъ предпосылками, слѣдовательно, нѣкоторымъ плюсомъ въ спеціальныхъ возможностяхъ. Случай прямоугольнаго треугольника есть исключительный въ сравненіи со всѣми возможными видами треугольниковъ. Итакъ, сложеніе (Zusammensetzung) и потому настоящій синтезъ состоитъ въ сведеніи общаго случая къ частному и въ указаніи такой комбинаціи, въ силу которой присущая индивидуальному типу истина образуетъ составную часть соотвѣтствующаго общему случаю отношенія вещей.

Въ самомъ дѣлѣ, было бы въ высшей степени благотворно, если бы новѣйшіе воздѣйствовали въ смыслѣ возрожденія этой, погребенной въ античныхъ образцахъ, концепціи истиннаго синтеза. Вмѣсто того чтобы заниматься воспроизведеніемъ, даже и звнѣ не особенно красиваго, логическаго зданія рубрикъ, копировать мертвые скелеты и возиться съ манекенами, какъ иногда еще и теперь случается и въ математикѣ и внѣ ея, лучше бы было вникнуть въ истинный духъ Эвклида и высвободить натуральное и здоровое зерно, скрытое въ оболочкѣ Эвклидовскаго изложенія. Зерно это есть болѣе строгое понятіе о доказательствѣ и лучшая концепція настоящаго синтеза истинъ.

3. По случаю новаго изданія Эвклида Пейраромъ Лагранжъ высказался въ томъ смыслѣ, что теперь геометрія есть уже мертвый языкъ; но что кто хочетъ изучать ее, долженъ для этого пользоваться тѣми произведеніями, которыя написаны, когда она была еще живымъ языкомъ. Эти слова дышатъ гордою увѣренностью въ превосходствѣ силъ современнаго анализа. Лагранжъ, который въ своихъ произведеніяхъ не помѣстилъ ни одного чертежа, видѣлъ въ современномъ анализѣ живой языкъ математики, а въ геометріи и въ геометрическихъ методахъ уже отжившіе способы представленія и выраженія. Два-три чисто геометрическихъ исходныхъ пункта, а въ остальномъ исключительно алгебраическій методъ обработки даже всѣхъ пространственныхъ отношеній—таковъ, фактически, его методъ. Къ произведеніямъ древнихъ относился онъ съ большимъ уваженіемъ, какъ это доказывается собственною его оцѣнкою работы Архимеда относительно равновѣсія твердыхъ тѣлъ, погруженныхъ въ жидкость, и еще болѣе явствуетъ изъ настоятельныхъ его указаній въ собственныхъ, формально болѣе совершенныхъ, работахъ, на строгость понятій, какою отличались древніе. Все-таки, во всемъ наслѣдствѣ, завѣщанномъ намъ древними, по скольку преобладалъ въ немъ языкъ геометріи, видѣлъ онъ уже отжившее проявленіе духа. Онъ твердо стоялъ на томъ, что отнынѣ мы должны пользоваться своимъ собственнымъ символическимъ языкомъ, примѣнимымъ къ какимъ угодно величинамъ, а не увядшимъ образнымъ языкомъ геометріи.

Эта точка зрѣнія величаво одностороння, но въ ней — и истинное превосходство. Въ самомъ дѣлѣ, приведеніе спеціально-геометрическаго элемента къ наименьшей мѣрѣ есть основной законъ высшаго развитія математики. Все что относится къ величинамъ вообще, все это и должно быть доказано во всей общности, и незачѣмъ доказывать это сначала спеціально для пространственныхъ величинъ. Какъ скоро оказывается возможнымъ привести извѣстную область пространственныхъ отношеній къ абстрактному аналитическому выраженію, этимъ самымъ непосредственная геометрія ограничивается и ея мѣсто занимаетъ родъ посредствующей геометріи. Послѣдняя нуждается лишь въ очень немногихъ, собственно геометрическихъ, исходныхъ пунктахъ, все же остальное совершаетъ путемъ вычисленія, при помощи либо чиселъ, либо буквенныхъ знаковъ для выраженія совершенно общихъ количественныхъ понятій.

Кто хочетъ основательно выучиться по-латыни и по-гречески, долженъ взять классическихъ авторовъ, для которыхъ эти языки не только были живыми, но и находились въ полномъ своемъ расцвѣтѣ. Но если онъ обратится къ гальванизированной жизни ихъ наслѣдниковъ, т.-е. къ латыни среднихъ вѣковъ и новаго времени, то встрѣтится съ испорченностью, или, въ лучшемъ случаѣ, съ мертвымъ искусствомъ подражанія. Итакъ, желая изучить мертвые языки, должно истинный характеръ ихъ искать въ наслѣдіи нѣкогда живого міра, а не въ подражательныхъ произведеніяхъ позднѣйшихъ, чуждыхъ тому времени и принадлежащихъ уже иной жизни, эпохъ. Другой вопросъ состоитъ, конечно, въ томъ, стоитъ ли вообще особенно заботиться о мертвыхъ языкахъ. Мы положительно отрицаемъ, чтобы въ такомъ костылѣ была надобность. Ходять на своихъ ногахъ, которыя для того и даны. Съ мертвыми языками въ собственномъ смыслѣ слова современному человѣчеству пора уже покончить; но съ тою мертвою геометріей и математикой древнихъ покончить еще не пришло время; ибо нѣтъ еще для нея той замѣны, о которой, конечно, уже могъ думать Лагранжъ съ своей индивидуально весьма высокой позиціи. Современный математическій міръ ежедневно даетъ доказательства тому, какъ еще полезенъ ему элементарный курсъ на томъ мертвомъ языкѣ, чтобы поддержать въ немъ хоть сколько-нибудь логически здоровую жизнь.

Во всякомъ случаѣ изученіе Эвклида не научитъ математической логикѣ того, кто въ самомъ себѣ не имѣетъ задатковъ къ такому мышленію. Выдающимся примѣромъ этого рода недостатка былъ суевѣрный Паскаль. Открытія въ геометріи даютъ ему безспорное право на признаніе въ немъ генія, по крайней мѣрѣ, въ этой области знанія. Съ дѣтскаго возраста самостоятельное изученіе Эвклидовыхъ «Элементовъ» было самымъ любимымъ его занятіемъ. И однако, онъ въ такой слабой степени одаренъ былъ пониманіемъ сущности научной системы, что въ своихъ «Мысляхъ» о математикѣ, въ которыхъ онъ желалъ логически поучать міръ, обнаружилъ весьма странныя фантазіи. Онъ полагалъ, именно, идеалъ познанія въ томъ, чтобы все доказать, и считалъ только слѣдствіемъ умственнаго безсилія людей то, что аксіомы остались недоказанными. Высказываться въ такомъ родѣ—значитъ не имѣть никакого понятія о природѣ истиннаго знанія. Поистинѣ, сноснѣе была бы обратная ошибка, т.-е. утвержденіе, что необходимость доказательства обусловливается нѣкоторымъ несовершенствомъ человѣческаго способа возрѣнія, ибо совершенство состояло бы въ томъ, чтобы не только аксіомы, но и все познавать непосредственно, т.-е. безъ всякой потребности въ доказательствѣ. Это была бы другая крайность, и въ отношеніи Паскалева заблужденія составляла бы, такъ сказать, противузаблужденіе. На самомъ же дѣлѣ нѣтъ такого знанія, въ которомъ не выступали бы простое и непосредственное какъ исходные пункты, а доказательство—какъ защита сложныхъ воззрѣній. Истинныя аксіомы не только не нуждаются въ доказательствѣ, но и совершенно не могутъ быть доказаны. Даже измышленный Паскалемъ Богъ не могъ бы доказать ихъ при всемъ своемъ всемогуществѣ, точно такъ же какъ не могъ бы сдѣлать дважды два равнымъ пяти. Довольно, однако, съ этимъ замѣчательнымъ примѣромъ того, что, смотря по обстоятельствамъ, иногда изученіе Эвклида приноситъ формальную пользу, иногда же не приноситъ. Древній матадоръ Александрійской ученой казармы Птоломеевъ далъ все-таки міру нѣчто лучшее въ смыслѣ практически-логической муштровки, чѣмъ самъ учитель Александра. Правила Аристотеля принесли во всякомъ случаѣ меньше пользы, чѣмъ Эвклидовы «Элементы»; но и тотъ и другой оказались доселѣ неспособными породить нѣчто дѣйствительно жизненное. Заблужденіе Паскаля, одно взятое, не составило бы еще достаточной инстанціи; но безумія настоящаго времени, не постигающія даже логическихъ требованій теоріи параллелей и узаконяющія здѣсь безаксіомность доказательствъ, т.-е. очевидную безсмыслицу, фактически доказываютъ этимъ подобное же, только еще болѣе взвинченное заблужденіе. Итакъ, если чему и нужно еще поучиться у древнихъ, то это сдѣлается возможнымъ не раньше, чѣмъ наша собственная новая иниціатива окрѣпнетъ и такимъ образомъ получитъ возможность для ею самою поставленныхъ задачъ позаимствовать кое-какія указанія и изъ мертваго наслѣдія. Но подобное дается только особо одареннымъ въ этомъ направленіи умамъ. Но какъ скоро уже существуютъ требуемыя указанія на такіе пункты, на которыхъ слѣдуетъ сосредоточить вниманіе въ произведеніяхъ древняго міра, то для изученія и обученія было бы очень полезно, чтобы нѣкоторыя изъ античныхъ книгъ, по крайней мѣрѣ въ переводахъ, получили бы болѣе широкое распространеніе. Примѣромъ упомянутыхъ пунктовъ могутъ служить нѣкоторыя формальныя воззрѣнія въ первой книгѣ «Элементовъ» Эвклида; этихъ воззрѣній нельзя извлечь въ такомъ же совершенствѣ изъ новой математической литературы.

4. Между новѣйшими руководствами собственно геометріи лучшее, хотя далеко еще не хорошее, принадлежитъ безспорно Лежандру. Это—простое подражаніе геометрической части Эвклидовыхъ «Элементовъ»; потому въ немъ принятъ Эвклидовскій методъ, и на дѣлѣ оно является отраженіемъ, хотя и слабымъ, античной строгости «Элементовъ». Но въ смыслѣ вышеуказанннаго воззрѣнія Лагранжа оно—явный анахронизмъ; это—тотъ же мертвый языкъ, только говоритъ съ вами человѣкъ новаго времени. Даже болѣе: это не только мертвый языкъ, но по большей части и мертвый матеріалъ; ибо такой перевѣсъ чистой геометріи, какой данъ въ этомъ сочиненіи, противорѣчитъ и новому духу, и новымъ средствамъ.

Лежандръ былъ дѣйствительно почтенный ученый, остающійся до сего времени во второмъ рангѣ. Методъ наименьшихъ квадратовъ обнародовалъ онъ ранѣе Гаусса, и во многихъ пунктахъ стоялъ на одинаковомъ уровнѣ съ этимъ, такъ чрезмѣрно и не по заслугамъ вознесеннымъ своими коллегами профессоромъ. Нѣкоторая особаго рода извѣстность подобныхъ лицъ проистекаетъ и изъ того, что они посвящаютъ себя разработкѣ такихъ спеціальныхъ вопросовъ, которые, какъ второстепенные, не удостоиваются особаго вниманія со стороны такихъ первоклассныхъ математиковъ, какимъ былъ, напримѣръ, Лагранжъ. Люди менѣе сильныхъ дарованій держатся ближе къ землѣ, а ползающій червякъ можетъ скорѣе наткнуться на что-либо такое, что ускользаетъ отъ вниманія ума болѣе проницательнаго, но парящаго на значительной высотѣ. Высокій полетъ умовъ перворазрядныхъ открываетъ истины и методы болѣе общіе и намѣчаетъ направленія, въ которыхъ знаніе должно быть далѣе распространяемо. Удѣлъ умовъ второразрядныхъ—только двигаться мало-по-малу въ направленіи, проложенномъ геніемъ. Къ такого рода изслѣдованіямъ принадлежитъ, напримѣръ, Гауссова теорія двучленныхъ уравненій, ибо, прежде чѣмъ можно было приступить къ разработкѣ этой частной задачи, Лагранжъ долженъ былъ создать общій методъ рѣшенія уравненій. Извѣстность Лежандра еще въ большей мѣрѣ обусловливалась его способностью вращаться лишь въ области узко индивидуализированныхъ вопросовъ.

Такія индивидуализированныя задачи обусловливаются не столько духомъ геометрическаго метода, сколько занятіемъ типически опредѣленными формами, поскольку это есть требованіе истиннаго синтеза, т.-е. перехода отъ простого къ сложному. Иное дѣло—формулировать общіе законы равновѣсія или частичнаго притяженія, и иное дѣло—эти законы примѣнять къ частнымъ случаямъ шаровъ или эллипсоидовъ. Кто одаренъ способностью схватывать предметъ сперва въ спеціализированной и типически опредѣленной формѣ, хотя и не достигнетъ такимъ образомъ высшихъ обобщеній, но скорѣе чѣмъ какимъ-либо другимъ путемъ достигнетъ предложенiй наиболѣе характеристическихъ и плодотворныхъ въ приложенiяхъ. Естественный синтезъ, въ области ли геометрiи или анализа. всегда идетъ этимъ путемъ; и потому нѣтъ никакой исключительно-свойственной древнимъ особенности въ постановкѣ вопроса сначала въ формѣ частнаго случая и въ переходѣ затѣмъ къ болѣе общимъ случаямъ лишь послѣ того, какъ частный типъ будетъ вполнѣ исчерпанъ. Какъ выше было указано, распространенiе Пиѳагоровой теоремы могло явиться только послѣ установленiя ея въ частномъ случаѣ. Но именно въ этомъ частномъ случаѣ навсегда останется она типически характеристическою истиною, и даже имѣетъ индивидуальную физiономiю, исчезающую въ ея обобщенiи. Въ своей первоначальной частной формѣ остается она всегда простою составною частью, слѣдовательно, простою истиною, снова появляющеюся при распространенiи ея только въ сочетанiи съ другими элементами.

При всемъ уваженiи къ современному анализу въ формѣ, данной ему Лагранжемъ, не слѣдуетъ однако терять изъ виду, что стремленiе его къ всеобъемлющему обобщенiю не всегда въ достаточной степени уравновѣшивалось обращенiемъ къ частнымъ типамъ. Въ этомъ отношенiи поучительны для насъ не только древнiе, но и тѣ изъ новѣйшихъ мыслителей, которые, какъ наприм. Гюйгенсъ, выступали во всѣхъ направленiяхъ представителями синтеза въ смыслѣ типичныхъ специальныхъ задачъ. Въ настоящее время тотъ, кто признаетъ плодотворность индивидуализирующихъ въ указанномъ смыслѣ методовъ, все равно идетъ ли рѣчь о геометрiи или объ анализѣ, даже при сравнительно скромныхъ дарованiяхъ достигнетъ большихъ успѣховъ, чѣмъ тотъ, кто вращается исключительно въ абстрактныхъ рамкахъ высокой степени общности.

Универсальный же успѣхъ возможенъ, конечно, только при сочетанiи обѣихъ точекъ зрѣнiя. Такъ или иначе, изъ вышеизложеннаго видно, какимъ образомъ Лежандръ и математики одного съ нимъ уровня, хотя лишь въ частностяхъ, однако достигали тамъ и сямъ кое-какихъ результатовъ, идя съ самаго начала, такъ сказать, элементарнымъ путемъ, т.-е. дѣлая предметомъ своихъ изысканiй простѣйшiе частные случаи вопросовъ.

Итакъ, Лежандръ служитъ намъ примѣромъ того, что изученiе мертваго языка геометрiи имѣетъ своего рода хорошую сторону, способствуя изученiю языка живого. Эта хорошая сторона есть охарактеризованный нами настоящiй синтезъ, поэтому въ геометрiи въ тѣсномъ смыслѣ ничего существеннаго она и не создала. Путь отъ простѣйшихъ типовъ къ болѣе сложнымъ образамъ есть вообще самый естественный и въ то же время единственный дѣйствительно элементарный. Для ариѳметики имѣетъ онъ такое же точно значенiе, какъ и для геометрiи; какъ и Эвклидовы «Элементы» носятъ характеръ не исключительно геометрическiй, содержа въ себѣ и нѣкоторыя ученiя, относящiяся къ числамъ. Между тѣмъ, Лежандръ въ своей книгѣ занимается исключительно геометрiей. Анахронизмъ этой книги въ томъ именно и состоитъ, что въ ней преобладаетъ элементъ чисто геометрическiй. Въ духѣ же новѣйшей математики элементы геометрiи должны быть ограничены необходимыми составными частями чисто и спецiально геометрическаго характера; все же, что можетъ быть исчерпано вычисленiемъ, должно быть въ самомъ дѣлѣ сведено къ абстрактнымъ алгебраическимъ методамъ и установлено при ихъ помощи. Ближайшимъ примѣромъ примѣненiя методовъ вычисленiя могутъ служить всѣ вопросы объ опредѣленiи поверхностей и объемовъ и объ ихъ сравненіи. Принципіально здѣсь слѣдуетъ ограничиваться двумя-тремя геометрическими точками приложенія, все же остальное безъ стѣсненія выполнять при помощи не только ариѳметики, но и общаго количественнаго анализа. Безъ этого мы дадимъ, совершенно безъ всякой нужды и пользы, преобладающее значеніе кропотливымъ способамъ непосредственной геометріи тамъ, гдѣ удобнѣе примѣняются болѣе короткіе и болѣе ясные методы посредствующей геометріи. Подобная геометрическая роскошь не только ненаучна, ибо на мѣсто общности аналитическихъ заключеній даетъ преобладаніе частнымъ нагляднымъ компликаціямъ, но и представляетъ вредное обремененіе для начинающихъ.

Въ виду широты рамокъ современной математики, нельзя довольствоваться границами, господствовавшими въ первыхъ античныхъ основаніяхъ нашей науки, и опредѣлявшимися областью геометріи. Высшая абстракція, господствующая въ законахъ вычисленія, доставляетъ сокращенія, и не наглядность въ смыслѣ пространственнаго представленія, но индивидуализированіе въ смыслѣ элементарныхъ, и потому легко понятныхъ, типовъ должно служить основнымъ закономъ хорошаго способа обученія. Наглядность пространственную слѣдуетъ удержать настолько, насколько окажется необходимымъ, чтобы овладѣть всѣми типичными основными образами. Въ остальномъ должно дать мѣсто вычисленію и съ нимъ тому особому мышленію, которое оставляетъ въ сторонѣ чувственные образы, чтобы при посредствѣ другихъ знаковъ проявить дѣятельность разума, который, уже не воспособляемый средствами наглядности, работалъ бы болѣе энергично. Относительно необходимости нагляднаго элемента въ обученіи распространены самыя неправильныя воззрѣнія;

смѣшали легкость схватыванія съ пространственною наглядностью, между тѣмъ какъ только въ простѣйшихъ случаяхъ наглядное является вмѣстѣ съ тѣмъ и легко воспринимаемымъ. Наглядность пространственная во всякомъ случаѣ нужна какъ неизбѣжный исходный пунктъ; но отсюда не слѣдуетъ, чтобы всюду должна была царить пространственная наглядность. Напротивъ, важнѣе, чтобы разумъ могъ скорѣе возвыситься надъ почвою простого созерцанія и двигаться на своихъ ногахъ. Поэтому, въ будущемъ элементы геометріи должны быть преподаваемы въ самомъ концентрированномъ видѣ, и всегда не иначе какъ при пособіи началъ общаго анализа, т.-е. въ сочетаніи съ извѣстными ариѳметическими, алгебраическими и аналитическими предпосылками. Это и ничуть не противорѣчитъ той истинѣ, что, какъ указываетъ и самый путь исторіи, нѣкоторыя наглядныя геометрическія основныя ученія совершенно независимы отъ высшихъ частей ариѳметики, а то немногое изъ ариѳметики, въ чемъ они нуждаются, они могутъ какъ бы приносить съ собою непосредственно въ геометрическомъ изложеніи. Въ такихъ простыхъ вещахъ познаніе имѣетъ общій источникъ и пространственныя созерцанія сочетаются съ непосредственнымъ и нагляднымъ счисленіемъ, которое и выполняется неразрывно съ этими созерцаніями и на нихъ. Раздѣленіе наступаетъ только въ вопросахъ, касающихся болѣе сложныхъ отношеній; но тогда оно должно вести уже къ принципіальному разъединенію обоего рода элементовъ.

5. Отличительною чертою развитія новой математики является постановка на первый планъ элементовъ ариѳметики, алгебры и анализа. И въ самомъ дѣлѣ, нельзя не считать отсталымъ стремленіе, подобное тому, какое имѣло мѣсто у грековъ въ классическій періодъ ихъ исто-

ріи,—почти исключительно оставаться въ области нагляднаго и дѣлать такимъ образомъ изъ геометріи мѣрило для всей математики. Художническія наклонности грековъ, въ силу чего образное получило у нихъ первенствующее значеніе, также не могли не повліять въ смыслѣ упроченія указанной односторонности. Что касается техники исчисленія, то въ ней греческій классическій періодъ не пошелъ далѣе первыхъ дѣтскихъ начатковъ, и превосходство новѣйшихъ въ значительной мѣрѣ обусловливается тѣмъ, что они не только овладѣли индійскимъ счисленіемъ, но главнымъ образомъ самостоятельно развили абстрактное исчисленіе общихъ величинъ. Однако же примѣръ, данный греками, какъ въ особенности при теперешнемъ положеніи дѣла, такъ въ извѣстной мѣрѣ и навсегда, останется поучительнымъ постольку, поскольку онъ указываетъ начинать изученіе математики съ концентрированныхъ началъ геометріи. Этимъ путемъ мы можемъ, по меньшей мѣрѣ, пріучить фантазію къ порожденію закономѣрныхъ пространственныхъ образовъ и пойдемъ навстрѣчу неразвитому уму новичка въ томъ именно направленіи, въ какомъ менѣе всего успѣваютъ природныя способности новѣйшихъ народовъ. Введеніемъ въ хорошіе элементы геометріи можно способствовать развитію не одной фантазіи по образу грековъ, но вообще всякой способности представленія, отъ природы предназначенной къ формированію воззрѣній. Такъ сказать, дѣтскій стадій умственнаго возбужденія имѣетъ право, по примѣру историческаго развитія математики, начать свое развитіе упражненіемъ надъ сродными ему элементами геометріи. Общій же анализъ величинъ есть отвлеченіе отъ видовой опредѣленности различныхъ, дѣйствительно существующихъ величинъ, и тотъ родъ дѣйствительныхъ величинъ, какой прежде всего является намъ, находится именно въ области пространственныхъ образовъ.

Если обратимся къ стадію обученія, предшествующему математикѣ въ собственномъ смыслѣ, то въ наше время на низшихъ ступеняхъ обученія всюду встрѣтимъ элементы вычисленія, но всегда въ формѣ внѣшней дрессировки. Счисленіе, поставленное въ элементарныхъ школахъ на ряду съ чтеніемъ и письмомъ, занимается, какъ и эти послѣднія, выработкой техническихъ навыковъ, а отнюдь не настоящаго и основательнаго знанія. Правила дѣйствій сообщаются внѣшне; объ основаніяхъ же дѣла не сообщается ничего. Если бы дѣло поставлено было иначе, какъ должно оно быть поставлено при дѣйствительно хорошемъ элементарномъ обученіи, то элементы счисленія должны бы были составлять вмѣстѣ съ тѣмъ и начатки математики, сводясь къ концетрированнымъ элементамъ ариѳметики. Тогда легко практически разрѣшился бы и вопросъ о мѣстѣ элементовъ геометріи въ системѣ обученія. Элементы геометріи шли бы рука объ руку съ элементами ариѳметики, служа къ взаимному дополненію. Такимъ образомъ обрѣли бы мы дѣствительные элементы математики, и вошелъ бы въ свои права тотъ естественный ходъ познаванія, въ силу котораго, прежде чѣмъ сдѣлать шагъ въ абстрактномъ направленіи, нужно еще изъ разсмотрѣнія опредѣленныхъ величинъ подняться до отвлеченныхъ понятій.

Когда умы высшаго ранга, являющіеся творцами въ своей наукѣ, обращаютъ вниманіе на изложеніе или на преподаваніе элементовъ, то это не только возвышаетъ значеніе и дѣятельность такихъ лицъ, но и служитъ признакомъ начала строгой формовки и серьезнаго построенія науки въ самыхъ ея основаніяхъ. Въ новое время первою попыткою въ этомъ направленіи была алгебра Эйлера, изданная на нѣмецкомъ языкѣ въ Петербургѣ въ 1770 г. въ двухъ томахъ. Обнародованіемъ этого сочиненія мы обязаны потерѣ зрѣнія ея авторомъ. Она начинается изложеніемъ элементарнѣйшихъ правилъ исчисленія и обнимаетъ область уравненій до четвертой степени, со включеніемъ анализа Діофанта. По смерти Эйлера, спустя четверть столѣтія послѣ перваго изданія, значеніе этого сочиненія было еще болѣе поднято во французскомъ изданіи (Петербургъ, 1798 г.) прибавленіями Лагранжа, касавшимися неопредѣленнаго анализа и имѣвшими сами объемъ цѣлой книги. Прибавленія эти находятся и въ появившемся недавно полномъ изданіи произведеній Лагранжа въ VII томѣ (1877 г.). Относительно собственно Эйлерова труда еще и теперь можно сказать, что, несмотря на его старину, онъ имѣетъ безспорное превосходство передъ современнымъ винегретомъ учебниковъ, обезображенныхъ модными прабавками, въ родѣ, напр. детерминантовъ, а главное—страдающихъ неосновательностью и туманностью новѣйшей математики эпигоновъ. Нынѣ забытая алгебра Эйлера является все еще драгоцѣннымъ пособіемъ для начинающихъ. Книгу, изданную сто лѣтъ тому назадъ доселѣ можно было найти только въ библіотекахъ. Но въ 1884 г. въ Лейпцигѣ появилось дешевое изданіе ея въ Рекламовской Универсальной Библіотекѣ. Такимъ образомъ всякій за нѣсколько копѣекъ можетъ извлечь познанія, и если онъ не кто-нибудь, а обладаетъ и способностью критическаго отношенія къ дѣлу, то можетъ составить себѣ и собственное представленіе о преимуществахъ и недостаткахъ Эйлеровскаго метода. Теперь, правда, въ виду появившагося позднѣе элементарнаго руководства Лагранжа, Эйлеровъ трудъ отошелъ на второй планъ, но, какъ дополненіе къ первому, все-таки еще имѣетъ значеніе. Сверхъ того, рано или поздно элементарная часть нашихъ собственныхъ «*Новыхъ основныхъ средствъ*» должна повести къ составленію болѣе совершеннаго учебника.

Со временъ Эйлера и до нашихъ «Новыхъ основныхъ средствъ» въ область элементарной математики не внесено ничего новаго, и новыя изслѣдованія, сдѣланныя Лагранжемъ и послѣ него, не содержащіяся въ книгѣ Эйлера, касаются только высшихъ областей теоріи уравненій и потому существенно состоятъ не въ иномъ чемъ, какъ въ созданной Лагранжемъ алгебрѣ соединеній, обнародованной въ 1770 г., и въ томъ, что болѣе полстолѣтія спустя было установлено Абелемъ и Галуа относительно условій разрѣшимости уравненій выше четвертой степени. Къ этому, во всякомъ случаѣ, слѣдуетъ присовокупить открытіе англичанина Джеррарда, который, почти одновременно съ Абелемъ и Галуа, обобщеніемъ стараго Чирнгаузенскаго метода указалъ путь, какимъ можно всякое уравненіе, кромѣ членовъ второго и третьяго, освободить и отъ членовъ четвертаго и пятаго, и такимъ образомъ уравненіе пятой степени привести къ трехчленнему виду. Но все это имѣетъ существенное приложеніе только въ высшихъ отдѣлахъ алгебры и не имѣетъ непосредственнаго отношенія къ ея начаткамъ, какъ ихъ понимаютъ со временъ Лагранжа и какъ самъ онъ понималъ ихъ, несмотря на свои собственныя открытія. Что касается элементовъ алгебры, то даже въ настоящее время взглядъ на содержаніе ихъ ни мало не измѣнился. Правда, Эйлерова алгебра по содержанію была шире, какъ и вообще всѣ книги этого замѣчательнаго математика. Къ этому присоединялась и большая ясность, свойственная всѣмъ работамъ Эйлера. Но болѣе раціональный способъ мышленія, глубина и концентрація встрѣчаются впервые лишь у Лагранжа, и потому въ высшей степени важно, что этотъ первоклассный оригинальный умъ коснулся также и элементарнаго курса ариѳметики и алгебры.

Внѣшнимъ толчкомъ къ этому послужили учрежденія французской революціи. Лагранжъ читалъ легкіи по ариѳметикѣ и алгебрѣ въ Нормальной Школѣ; стенографіи ихъ, имъ просмотрѣнныя, расходились между слушателями, а также, по частямъ, появились и въ томахъ «Séances des écoles normales» въ 1795 году. По совѣту Лагранжа, къ которому обращались съ просьбою о соотвѣтственномъ руководствѣ, лекціи эти 17 лѣтъ спустя были вновь отпечатаны въ журналѣ Политехнической Школы (7-я и 8-я тетради, томъ II, 1812 г.). Наконецъ, въ наше время онѣ появились снова въ VII томѣ полнаго собранія произведеній Лагранжа (1877 г.). Пренебреженіе, выказанное въ отношеніи къ этому, по объему небольшому труду, въ которомъ, тѣмъ не менѣе, обработка элементовъ отличается не только проницательностью и точностью, но и умомъ и оригинальностью, и котораго, несмотря на все это, нельзя было достать, было бы удивительно, если бы вобще не вошло въ обычай огромному большинству учащихся давать въ руководство обыкновенный рыночный товаръ намѣсто превосходныхъ произведеній, схороненныхъ на долгое время подъ грудою сорныхъ травъ. Къ счастію, такія первоклассныя произведенія имѣютъ свойство доживать до глубокой старости, не старѣя. Переводъ этихъ лекцій и въ настоящее время является поэтому не несвоевременнымъ; онъ и обнародованъ подъ заглавіемъ «Lagranges mathematische Elementarvorlesungen» Нидермюллеромъ, въ Лейпцигѣ, въ 1880 г. Переводчикъ, незадолго до того какъ приступилъ къ дѣлу, познакомился съ этимъ трудомъ Лагранжа благодаря нашимъ указаніямъ и нашей характеристикѣ

Въ самомъ дѣлѣ, эти «Leçons d'arithmetique et d'algebre» Лагранжа и доселѣ являются лучшимъ руководствомъ. Кромѣ того, лекціи эти служатъ и лучшимъ памятникомъ свободнаго устнаго изложенія великаго математика, а ихъ какъ бы бьющая черезъ край натуральность позволяетъ видѣть ходъ и изящную соразмѣрность его мыслей еще непосредственнѣе, чѣмъ это могли бы сдѣлать лекціи, редижированныя въ концентрированномъ видѣ. Такъ или иначе, Лагранжъ разумѣлъ область элементовъ ариѳметики и алгебры не шире того, какъ было въ обычаѣ въ его время и какъ разумѣютъ еще и нынѣ. Поэтому онъ и не включилъ въ свою книгу оригинальнѣйшаго въ области элементовъ созданія своего, именно алгебры соединеній. На томъ же основаніи и неопредѣленный анализъ не нашелъ въ ней мѣста. Но въ рамкахъ своего содержанія книга эта является образцовою въ своемъ родѣ, и по основательности и точности не имѣетъ соперниковъ между обыкновенными учебниками, компендіями и руководствами.

6. Въ сдѣланныхъ нами указаніяхъ не забыто ничего дѣйствительно выдающагося въ области элементовъ какъ геометріи, такъ и алгебры. И если всемірная исторія науки не произвела въ этомъ отношеніи болѣе ничего, то это вполнѣ согласно съ тѣмъ общимъ фактомъ, что и въ другихъ сферахъ—все равно, науки, искуства или практической жизни—великія явленія въ каждомъ родѣ встрѣчаются лишь въ небольшомъ числѣ. Однако же изъ этой скудости никакъ не слѣдуетъ, чтобы уже былъ достигнутъ тотъ идеалъ, который долженъ быть поставленъ. Древній міръ сравнительно былъ менѣе далекъ отъ мыслимаго въ его

сферѣ идеала. Онъ достигъ высокой степени строгости и систематичности, хотя въ концѣ-концовъ и не могъ избѣжать тяжеловѣснаго формализма, и не удержалъ естественности въ направленіяхъ мышленія. Что касается новаго времени, то хотя изложеніе формально иногда и натуральнѣе, какъ, напр., у Лагранжа, но до идеала ему еще далеко. Всеобъемлющіе элементы математики, во всѣхъ частяхъ правомѣрные и приведенные въ послѣдовательную связную систему, въ то же время въ основѣ своей совершенной строгіе, прямо составляютъ еще только предметъ желанія. Анархія обширной литературы компендій, все равно, касаются ли они отдѣльныхъ отраслей или общихъ руководствъ, не можетъ замѣнить собою хорошо обработанной системы. Напротивъ, служатъ они только къ тому, чтобы неурядицу, господствующую въ современной математикѣ, перенести и въ элементы и распространить въ нихъ.

Въ настоящее время фактически никто не можетъ совсѣмъ избѣжать этого рода компендій; ибо если они и не навязываются прямо школою, то при самостоятельныхъ занятіяхъ уже трудно обойтись безъ кое-чего такого. И если въ текущемъ столѣтіи въ отношеніи «Элементовъ» и не сдѣлано какихъ-либо новыхъ и важныхъ дополненій, зато нѣтъ недостатка въ изобрѣтеніи новыхъ именъ для старыхъ предметовъ; кромѣ того, нельзя не указать, какъ на вредную роскошь, на введеніе чрезмѣрнаго множества техническихъ понятій тождественнаго содержанія. Такимъ образомъ, новичокъ долженъ выучиться понимать не только языкъ, но и жаргонъ тѣхъ областей знанія, въ которыя онъ вступаетъ. Благодаря этому, чаще онъ вынужденъ корпѣть надъ модною дребеденью, которая нова только по виду, вмѣсто того чтобы обращать все свое вниманіе на изученіе старыхъ образцовъ. Даже при наилучшемъ преподаваніи безъ этихъ уклоненій дѣло не обходится, хотя, конечно, у счастливо одаренныхъ натуръ этимъ только укрѣпляется убѣжденіе въ томъ, что изученіе обыкновенно рекомендуемыхъ ходовыхъ руководствъ похоже на вытягиваніе лотерейныхъ билетовъ изъ урны, сплошь наполненной пустыми нумерами.

Въ виду всего сказаннаго, дѣйствительно хорошій общій курсъ элементарной математики есть задача, еще ожидающая своего разрѣшенія. Наступитъ ли оно теперь или спустя столѣтія, во всякомъ случаѣ воззрѣнія, на него указывающія и дѣлающія его возможнымъ, уже и въ настоящее время принесутъ нѣкоторую пользу обученію. Если бы этимъ руководящимъ идеямъ дано было мѣсто хотя только въ слабой мѣрѣ, то и въ такомъ случаѣ мы были бы ближе къ лучшей постоновкѣ дѣла и, хотя бы и въ несовершенной формѣ, все же облегчили бы путь молодымъ силамъ.

Прежде всего понятіе «Элементовъ» должно брать въ болѣе широкомъ смыслѣ, чѣмъ оно было доселѣ. Во всѣхъ отрасляхъ математики имѣются элементы, т.-е. въ ней имѣютъ мѣсто простѣйшія ученія, оканчивающіяся тамъ, гдѣ относительно сложный характеръ вопросовъ уже не подлежитъ сомнѣнію и цѣлесообразность дѣла безусловно требуетъ отдѣленія ихъ отъ элементовъ. Такъ, напримѣръ, главный факторъ новой математики—исчисленіе перемѣнныхъ и непрерывныхъ величинъ—имѣетъ также свои простѣйшія элементарныя понятія и элементарныя предложенія, легко допускающія выдѣленіе ихъ изъ обычныхъ курсовъ дифференціальнаго, интегральнаго и варіаціоннаго исчисленій и перенесеніе въ область такъ называемой элементарной математики. Въ такой же мѣрѣ возможно, хотя и не такъ необходимо, выдѣленіе нѣкоторыхъ основныхъ ученій теоріи чиселъ въ теперешнемъ тѣсномъ смыслѣ этого слова, съ тѣмъ, чтобы эти простѣйшія свойства чиселъ были отнесены къ элементамъ, гдѣ они должны занимать одинаковый рангъ со свойствами фигуръ. Рядомъ съ элементарной геометріей должно стоять и отдѣльное элементарное ученіе о числахъ, которое не слѣдуетъ смѣшивать ни съ ариѳметикою счисленій, ни съ алгеброю; уже у Эвклида находимъ кое-что въ этомъ родѣ, хотя и въ античномъ смыслѣ, и къ этому вынуждала необходимость выясненія понятія геометрической несоизмѣримости.

Намѣченное въ приведенныхъ примѣрахъ расширеніе курса элементовъ будетъ увеличиваться въ зависимости отъ состоянія и объема различныхъ математическихъ дисциплинъ. Какъ скоро какая-либо изъ нихъ получитъ новыя средства и дополненія, какъ, напримѣръ, геометрія въ методѣ проекцій, то вмѣстѣ съ тѣмъ и начатки таковыхъ, въ формѣ наиболѣе характеристичныхъ основныхъ истинъ, должны быть введены въ элементарный курсъ. Такъ, примѣненіе Монжемъ двоякой проекціи, съ помощью которой создалъ онъ описательную, или, какъ ее еще называютъ, начертательную, геометрію, составляетъ геометрическій методъ, самъ по себѣ элементарнаго характера и потому тѣмъ болѣе пригодный для введенія въ элементарный курсъ. Уже болѣе трудностей представляетъ центральная проекція тамъ, гдѣ она выступаетъ въ качествѣ общаго средства геометрическаго изслѣдованія. Эта такъ называемая проективная геометрія, извѣстная прежде подъ весьма несвойственнымъ именемъ новѣйшей синтетической, образцовымъ изложеніемъ которой еще доселѣ остается трактатъ Понсле о проективныхъ свойствахъ фигуръ, страдаетъ какъ въ своемъ первоначальномъ видѣ, такъ особенно въ ея позднѣйшей формѣ, стремленіемъ подчинить слишкомъ многое своимъ крайне ограниченнымъ средствамъ. Неестественность метода изслѣдованія, возникшая изъ этой ошибки, въ настоящее время слишкомъ запутала всю эту область. Поэтому необходимо критическое изслѣдованіе проективныхъ методовъ и приведеніе ихъ въ естественныя границы, прежде чѣмъ этотъ новый отпрыскъ геометріи приметъ такой видъ и явится въ такомъ свѣтѣ, при которыхъ онъ можетъ быть введенъ въ общіе элементы математики какъ нѣчто достаточно простое, ясное и полезное. Не входя въ подробности относительно полезности и мѣста этихъ новыхъ геометрическихъ методовъ въ системѣ математики, замѣтимъ только, что въ сравненіи съ могущественными средствами древнихъ, а также въ сравненіи съ здраво и натурально приложеннымъ анализомъ, они являются не болѣе какъ второстепенными средствами, хотя и служили все-таки хорошимъ противоядіемъ противъ безсмысленнаго и пренебрегавшаго своими реальными точками приложенія употребленія анализа. Итакъ, гдѣ центральныя проекціи и такъ называемые пучки и должны быть употребляемы въ элементахъ какъ сравнительно простыя средства для нѣкоторыхъ геометрическихъ изслѣдованій, тамъ всегда надо имѣть въ виду, что тѣсный кругъ вполнѣ естественныхъ примѣненій этихъ средствъ явно обусловливается не только фактическою, но и необходимою ихъ ограниченностью. Проективные методы занимаютъ лишь незначительный уголъ во всей системѣ операцій, служащихъ къ извлеченію на свѣтъ и къ доказательству геометрическихъ истинъ. А отсюда вытекаетъ и соотвѣтствующее мѣсто ихъ основаній въ элементахъ математики.

7. Такой образцовый курсъ элементовъ математики, какой мы имѣемъ въ виду, по относительной краткости и

силѣ долженъ превзойти лучшіе изъ прежнихъ, излагавшихъ лишь особые отдѣлы науки, курсовъ. Эвклидовы «Элементы» геометріи и элементы алгебры Лагранжа, вмѣстѣ взятые, еще не исчерпываютъ обычную въ наше время область элементовъ, ибо плоская и сферическая тригонометрія и начатки аналитической геометріи, поскольку можно изучить ихъ, по крайней мѣрѣ, на кругѣ и на шарѣ, также должны быть включены въ рамки элементовъ. Но если замѣнить «Элементы» Эвклида въ нѣкоторыхъ отношеніяхъ элементами геометріи Лежандра, что̀ въ отношеніи именъ, конечно, выглядитъ комично, но въ отношеніи полноты матеріала неизбѣжно, то новыхъ ученій получится нѣсколько больше, но еще далеко не все. Именно, останется въ сторонѣ еще та ограниченная область аналитической геометріи, которая имѣетъ дѣло, по меньшей мѣрѣ, со всѣми коническими сѣченіями, а еще лучше и съ главными типами поверхностей второго порядка, если только ученіе это должно имѣть какое-нибудь практическое значеніе, а не оставаться пустымъ вооруженіемъ. Но разъ мы коснулись пространственныхъ образовъ второго порядка, то не видно, почему въ алгебрѣ общее изложеніе уравненій второй степени должно оставаться вполнѣ элементарнымъ, а въ геометріи разсматриваться какъ нѣчто высшее и болѣе сложное.

Очевидно, дѣло тутъ въ томъ, что въ элементы геометріи и алгебры должно быть введено ученіе о неопредѣленности или, что то же, о перемѣнности величинъ. Простѣйшія Діофантовы уравненія относятся къ элементарной алгебрѣ, къ ней же должно присовокупить и элементарный анализъ въ той мѣрѣ, въ какой онъ даетъ возможность изучать протяженія второго порядка при помощи дифференціаловъ, интеграловъ и варіацій. Этимъ были бы устранены и сомнительныя права нынѣ принятаго изложенія аналитической геометріи, выдѣленіе которой въ особую дисциплину еще и теперь основывается главнымъ образомъ на томъ, что ее разсматриваютъ односторонне, просто какъ алгебраическій методъ изученія геометріи, и, сообразно этому, исключаютъ изъ нея всѣ задачи, рѣшеніе которыхъ требуетъ вычисленій съ перемѣнными, а главное—интегрированія. Такое выдѣленіе—вещь довольно странная, и потому всегда будетъ приводить къ случайнымъ непослѣдовательностямъ, т.-е. къ примѣси кое-гдѣ уклоненій. Какъ комично, напримѣръ, думать, что возможна была бы аналитическая механика при ограниченіи аналитической геометріи отношеніями, съ которыми справляются чисто алгебраическими средствами! Но разъ мы рѣшились не разъединять того, что естественно связано одно съ другимъ, то тотчасъ же должны будемъ подъ аналитическою обработкою геометріи въ элементахъ разумѣть совмѣстное примѣненіе всѣхъ простыхъ аналитическихъ средствъ.

Во всякомъ случаѣ,—и это соотвѣтствовало бы даже и теперешнимъ рамкамъ элементовъ, гдѣ круговыя функціи вводятся лишь тригонометрически,—въ расширенныхъ рамкахъ элементовъ эти функціи слѣдуетъ трактовать также аналитически и выводить изъ обращенія круговыхъ интеграловъ. При этомъ можно, напримѣръ, указать на выгоду новѣйшаго вывода отношенія окружности къ діаметру болѣе соотвѣтственнымъ способомъ, позволяющимъ устранить всю безполезную возню, неизбѣжную при Архимедовомъ способѣ вписыванія и описыванія многоугольниковъ. Вообще, отпадетъ не мало чистой геометріи, все еще примѣшанной къ вычисленіямъ, такъ что факторъ вычисленія получитъ подобающее ему значеніе, а исключительно геометрическій элементъ будетъ ограниченъ необходимыми точками отправленія. Если мы вообразимъ себѣ, что первые принципы анализа перемѣнныхъ всюду введены во всѣ части элементовъ математики, то, напримѣръ, и въ теперешней стереометріи встрѣчающіяся вычисленія могли бы выполняться отвлеченнѣе, проще и яснѣе, и вообще во всѣхъ отдѣлахъ математики, въ томъ числѣ и въ тригонометріи, введеніе анализа повело бы за собою сокращеніе чисто геометрической оснастки. Приведеніе послѣдней къ наименьшей мѣрѣ, но при условіи, чтобы за нею сохранены были всѣ ея права, такъ чтобы наглядность удержала подобающее ей значеніе,—все это, въ виду современнаго состоянія математики, есть требованіе строгой научности. Практическимъ плодомъ этого, какъ уже выше сказано, была бы краткость и основательность, а при этихъ условіяхъ для возведенія универсальныхъ и обнимающихъ всѣ части математики элементовъ потребовалось бы не болѣе мѣста, чѣмъ его нужно теперь при болѣе узкихъ рамкахъ элементовъ.

Этого рода концентрація становится болѣе и болѣе настоятельною въ интересахъ обученія и образованія, ибо чѣмъ экстенсивнѣе накопленіе новаго матеріала, тѣмъ интенсивнѣе должны быть формальныя силы и средства, позволяющія имъ овладѣть. Повтореніе и расплывчатость, такъ вошедшія въ обыкновеніе, не должны болѣе имѣть мѣста. Въ противоположность этому, все вниманіе должно быть обращено только на характеристичныя истины опредѣленной индивидуальной физіономіи, и устранены малозначительныя и второстепенныя отношенія. Послѣднія—просто сухая солома, тогда какъ первыя плодотворны и даютъ возможность легко овладѣть всѣмъ остальнымъ, что̀ бы, при случаѣ, ни понадобилось изъ области истинъ низшаго порядка. При выборѣ характеристичныхъ предложенiй первымъ и внѣшнимъ указателемъ должна служить ихъ естественная выпуклость въ исторiи науки; однако же такiя указанiя не составляютъ послѣдней инстанцiи, и именно въ отношенiи доказательствъ истинъ типъ будетъ разнообразно измѣняться въ направленiи къ болѣе отвлеченному. Сюда относится, напримѣръ, уже не разъ указанная нами необходимость замѣнять элементъ непосредственно геометрическiй въ значительнѣйшей мѣрѣ факторомъ вычисленiя. Этотъ принципъ замѣны можетъ повести и къ измѣненiю нѣкоторыхъ исторически установившихся доказательствъ. Но краткость и простота доказательствъ опредѣляются числомъ и натуральностью посредствующихъ звеньевъ. Въ каждомъ случаѣ, для доказательства истины, слѣдуетъ выбирать возможно кратчайшее и наиболѣе естественное изъ всѣхъ возможныхъ. Вставка посредствующихъ понятiй вообще служитъ лишь къ тому, чтобы достичь непосредственныхъ воззрѣнiй, т.-е. аксiомъ, а въ цѣлой совокупности системы—уже доказанныхъ предложенiй.

Именно въ системѣ элементовъ все, что не есть непосредственное воззрѣнiе, т.-е. не есть аксiома, необходимо должно быть доказано. Иначе немыслимо было бы приведенiе къ простѣйшему, а слѣдовательно и полная строгость не была бы достигнута. Такъ, предложенiе, что во всякомъ произведенiи можно измѣнять мѣста сомножителей, не измѣняя этимъ величины произведенiя, само по себѣ непонятно. Но въ настоящее время его доказываютъ лишь при вступленiи въ высшую, по современнымъ понятiямъ, область математики, именно какъ одну изъ первыхъ основныхъ теоремъ теорiи чиселъ. Общепринятое доказательство,— какъ скоро уже исчерпаны обыковенные наглядные обороты при помощи пространственныхъ измѣреній и какъ скоро является вопросъ о большемъ количествѣ множителей,—во всякомъ случаѣ слишкомъ сложно и неестественно, чтобы его рекомендовать для элементовъ въ собственномъ смыслѣ слова. Въ такихъ случаяхъ слѣдуетъ постараться улучшить положеніе дѣла изысканіемъ дѣйствительно элементарныхъ доказательствъ.

Что касается вышеприведеннаго примѣра относительно перемѣстимости сомножителей, то намъ кажется, что достаточно одной линіи или, лучше сказать, одного ряда, чтобы доказать, что перемѣна мѣстъ сколькихъ угодно множителей не вліяетъ на результатъ. Въ самомъ дѣлѣ, доказать нужно не иное что, какъ то, что общее число единицъ остается безъ измѣненія, на сколько бы разрядовъ и группъ мы ихъ ни раздѣляли и въ какомъ бы порядкѣ мы ихъ ни соединяли. Во-первыхъ, группу единицъ множимаго располагаемъ въ рядъ и, продолжая рядъ, повторяемъ эту группу столько разъ, сколько единицъ имѣетъ множитель; эту составную группу такимъ же точно образомъ повторяемъ столько разъ, сколько единицъ имѣетъ третій сомножитель, и т. д. безъ всякаго ограниченія. Затѣмъ доказываемъ,—и въ этомъ заключается нервъ доказательства,—что общее число единицъ можно сосчитать различнѣйшими способами. Можно, напримѣръ, изъ одной группы, вмѣсто того чтобы брать всѣ ея единицы одну за другой, взять одну только первую единицу, и къ ней присоединять первую единицу изъ каждой слѣдующей группы, пока не переберемъ такимъ образомъ всѣ группы; то же самое дѣлаемъ со вторыми единицами и т. д.; такимъ образомъ, очевидно, достигнемъ перемѣны дѣйствія въ смыслѣ перестановки двухъ сомножителей. Выражаясь лучше, мы измѣнили способъ синтеза единицъ, не измѣнивъ ихъ числа. Во всякомъ случаѣ, требуется нѣкоторое отвлеченіе, для того чтобы, въ случаѣ скопленія факторовъ, правильно представить себѣ различные пути, которыми мы идемъ въ этомъ ряду; зато здѣсь отсутствуютъ трудности и неоднородность въ способѣ доказательства. Само собою разумѣется, что данный здѣсь очеркъ не замѣняетъ собою полнаго элементарнаго доказательства, которое должно быть обстоятельнѣе, но зато не требуетъ пособія опредѣленныхъ схемъ и чиселъ.

8. Преобразовавши въ этомъ родѣ доказательства и подыскавъ новыя, гдѣ этого потребуетъ измѣненіе хода дѣла, мы построимъ новый фундаментъ математики, который будетъ гораздо натуральнѣе и, при относительной краткости, проще, строже и даже изящнѣе по формѣ, чѣмъ у Эвклида. Не слѣдуетъ забывать, что Эвклидовы «Элементы» возникли въ эпоху господства александрійской ученой конюшни, въ силу чего и носятъ на себѣ характеръ неестественности, которою отличаются не въ меньшей мѣрѣ, чѣмъ глубиною, которой они обязаны своимъ происхожденіемъ изъ болѣе лучшаго источника и изъ болѣе свободныхъ кружковъ. По всему видно, что новый міръ ожидаетъ иная судьба, чѣмъ древній, что онъ обладаетъ шансами высшей эмансипаціи. Врядъ ли поэтому суждено нашему патентованному университетскому ученому сословію совершить указанное преобразованіе. Ученая стряпня, которая обыкновенно выходитъ изъ рукъ такихъ ученыхъ, не можетъ разсчитывать на прочное существованіе, и такъ какъ о совершенномъ подавленіи свободныхъ натуръ и кружковъ въ новое время нечего и думать, то никакому ученому педанту не достанется въ удѣлъ быть наслѣдникомъ прежней лучшей жизни и не удастся когда-либо исковеркать на свой ладъ наслѣдство, завѣщанное благо-

родными умами. Самый стиль, въ которомъ только и можетъ быть возведено зданіе новой математики, долженъ быть свободный, естественный и благородный, ибо иначе наличному обширному матеріалу нельзя дать сколько-нибудь соразмѣрной формы. Поэтому задача должна быть рѣшена хорошо, иначе придется съ нею сѣсть на мель, и такое положеніе дѣла должно успокоить тѣхъ, кто вздумаетъ содѣйствовать цѣли съ подготовкою.

Прежде чѣмъ элементы всей математики достигнутъ того идеала совершенства и всесторонней ясности, какой мы намѣтили немногими штрихами, нужно еще привести въ полный порядокъ основы спеціально новой математики. Если мы припомнимъ, въ какомъ жалкомъ состояніи находятся доселѣ ученія объ отрицательныхъ количествахъ, о мнимыхъ и ученія о безконечности и многозначности, то не будемъ удивляться тому, что при такихъ фундаментальныхъ недостаткахъ и пробѣлахъ строгая обработка элементовъ новой математики пока невозможна. Для выработки лучшаго элементарнаго курса, по меньшей мѣрѣ, нельзя обойти того, что нами выяснено въ первыхъ трехъ главахъ касательно основныхъ ученій *). Но потребны и общія части нашихъ дальнѣйшихъ изслѣдованій, если мы хотимъ поставить элементы такъ, чтобы и вся система высшей математики къ нимъ примыкала и составляла просто ихъ продолженіе.

Что касается обработки алгебры, наше «исчисленіе значностей» (Werthigkeitsrechnung) **) даетъ средство ввести

*) Объ отрицательныхъ и мнимыхъ величинахъ и о безконечности.

**) Терминъ Werthigkeitsrechnung введенъ авторами „Новыхъ основныхъ средствъ“ для обозначенія новаго, принадлежащаго имъ, алгебраическаго метода. Можетъ быть, позволительно передать этотъ терминъ словами „исчисленіе значностей“, хотя это и звучитъ для русскаго уха въ область элементовъ, т.-е. до уравненій четвертой степени, или другими словами, для разрѣшимыхъ алгебраически въ общемъ видѣ уравненій, правильную методу на мѣсто теперешнихъ случайныхъ пріемовъ и уловокъ. Элементар-

---

нѣсколько нескладно. Смыслъ термина Werthigkeit объясняютъ они слѣдующимъ образомъ. Роль величинъ въ совокупности вычисленій различаютъ по ихъ знакамъ; понимаемая въ этомъ смыслѣ, роль величинъ названа авторами „значностью" (Werthigkeit). При этомъ они не ограничиваютсся указаніемъ на знаки $+$ и $-$; но всякіе алгебраическіе признаки, служащіе для отличія другъ отъ друга корней изъ одного и того же количества, имѣющихъ одинаковую абсолютную величину, разсматриваютъ какъ нѣчто аналогичное знакамъ $+$ и $-$. Поэтому корень характеризуется его абсолютною величиной и какою-либо изъ возможныхъ значностей, въ силу которой онъ получаетъ свое спеціальное значеніе. Поэтому, во всѣхъ случаяхъ различныя значенія корней изъ единицы служатъ для изображенія различныхъ возможныхъ значностей.

Чтобы дать нѣкоторое понятіе о самомъ методѣ, укажемъ приложеніе его къ рѣшенію квадратнаго уравненія $x^2 + px + q = 0$. Отдѣльный двузначный членъ можетъ быть только корнемъ чистаго квадратнаго уравненія; придавъ къ этому члену еще однозначный, будемъ имѣть форму корней даннаго уравненія. И такъ полагаемъ $x = u \pm v$. Подставивъ въ уравненіе, вмѣсто x, сперва $u + v$, а потомъ $u - v$, найдемъ:

$$u^2 + 2uv + v^2 + pu + pv + q = 0 \text{ и}$$
$$u^2 - 2uv + v^2 + pu - pv + q = 0.$$

Складывая эти уравненія, а потомъ вычитая, имѣемъ

$$u^2 + v^2 + pu + q = 0 \quad . \; . \; . \; (^1)$$
$$\text{и } 2uv + pv = 0. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (^2).$$

Сокративъ $(^2)$ на v, найдемъ $2u + p = 0$, откуда

$u = -\frac{p}{2}$. Вставивъ эту величину u въ уравненіе $(^1)$, найдемъ:

$v^2 - \frac{p^2}{4} + q = 0$, откуда найдемъ двузначный элементъ

$= \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$. Итакъ

$$x = u \pm v = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

и уравненіе рѣшено. *Прим. переводчика.*

ное обученіе, какъ оно еще ведется теперь, было бы приведено въ большое затрудненіе заключеніемъ о формѣ корней. Но здѣсь, и не ожидая, когда будетъ усовершенствованъ элементарный курсъ и въ этомъ направленіи, было бы все-таки лучше дать непосредственно форму корней,— и это была бы единственная немотивированная уловка,— вмѣсто того, чтобы, какъ доселѣ практикуется, вводить въ ходъ дѣла множество уловокъ. Наша новая метода имѣетъ цѣну не только сама по себѣ, но и въ отношеніи улучшенія преподаванія. Къ преимуществамъ ея относится то, что она ведетъ за собою двѣ степени такого улучшенія: во-первыхъ, выходя изъ формы корней, она устраняетъ временно необходимость въ какихъ-либо случайныхъ уловкахъ, а во-вторыхъ, окончательно вводитъ въ общіе элементы математики такіе способы заключенія и такой путь веденія дѣла, что даже начинающаго дѣлаетъ опытнымъ въ строгомъ выводѣ требуемой въ разныхъ случаяхъ формы корней. При цѣлесообразномъ веденіи дѣла и при настоящемъ синтезѣ, какъ уже раньше замѣчено, слѣдуетъ избѣгать схоластическихъ рубрикъ. Само собою разумѣется, что уравненія второй степени нужно также излагать по нашей методѣ, прежде чѣмъ браться за теоремы общей теоріи уравненій. Но цѣлесообразнѣе послѣднія предпосылать алгебраическому рѣшенію уравненій третьей и четвертой степени.

Отсюда очевидно, что элементы въ собственномъ смыслѣ подлежатъ выдѣленію изъ общей теоріи уравненій и введенію въ элементарный курсъ. Тогда высшая область науки будетъ методически естественно разграничена съ низшей, начинаясь тамъ, гдѣ становится необходимымъ введеніе Лагранжевой алгебры соединеній въ область прежнихъ въ высшемъ смыслѣ слова элементарнѣйшихъ методовъ. Сообразно съ этимъ, эскизъ, данный нами въ шестой главѣ, уже и въ настоящее время пригоденъ, чтобы образовать основы для элементарныхъ выводовъ, посредствомъ которыхъ можно рѣшать уравненія до 4-й степени простымъ, однообразнымъ и чисто-алгебраическимъ методомъ, основаннымъ на исчисленіи значностей. Понятно, что тотъ же методъ легко распространить непосредственно и на уравненія со многими неизвѣстными, если только степень уравненія, получаемаго при сочетаніи ихъ, не превышаетъ четвертой, т.-е. предѣла алгебраической разрѣшимости. Рѣшающимъ типомъ было бы здѣсь сочетаніе двухъ уравненій второй степени съ двумя неизвѣстными, и въ этомъ случаѣ съ самаго начала можно примѣнить форму корней четвертой степени. Впрочемъ, такое расширеніе метода послужило бы лишь къ тому, чтобы доказать его общность. Въ большинствѣ же случаевъ, уравненія со многими неизвѣстными посредствомъ обыкновеннаго исключенія лучше приводить къ одному неизвѣстному.

Разсматривая начала элементарной математики въ указанномъ выше расширенномъ смыслѣ слова, мы не должны забывать, что понятіе о неограниченно маломъ приращеніи и простѣйшія начала относящагося сюда исчисленія должны войти въ область элементарнаго курса, находя приличное примѣненіе, напримѣръ, въ стереометрическихъ вычисленіяхъ. Но оставляя въ сторонѣ тѣ развѣтвленія элементовъ, которыя нынѣ фактически излагаются въ высшемъ курсѣ, сдѣлаемъ, въ заключеніе, нѣсколько общихъ замѣчаній относительно необходимости практическаго веденія всякаго курса.

Какъ въ преподаваніи, такъ и при самообученіи въ высшей степени ошибочно отвлекаться отъ приложеній и держаться на почвѣ голой и сухой абстракціи, а тѣмъ болѣе взять ее за образецъ. Но преимущественно такая ошибка отомщаетъ за себя въ области элементовъ, ибо здѣсь произвольно поставленная абстракція вредна еще болѣе и еще менѣе находитъ себѣ оправданія чѣмъ гдѣ-либо. Но прежде чѣмъ брать приложенія и отправные пункты изъ области, лежащей внѣ чистой математики, слѣдуетъ держаться такой формовки теоріи, въ силу которой она изображается въ типахъ, даже, такъ сказать, въ индивидуальныхъ образахъ опредѣленно очерченнаго вида. Схема круга и гиперболы въ нашей теоріи мнимыхъ служитъ примѣромъ такой полной опредѣленности и ограниченія. Точно такъ же и относящіяся сюда уравненія, разсматриваемыя чисто - аналитически, уже не будутъ простыми примѣрами для приложенія теоріи, но будутъ и простѣйшими аналитическими типами, отъ которыхъ выходятъ при изложеніи теоріи.

Что касается того матеріала, который лежитъ внѣ математики, но значеніе и плодотворность коего очевидны, который служитъ даже большею частью источникомъ для постановки вопросовъ и открытія теоремъ,—объ этой области, ложно считаемой простымъ матеріаломъ для приложеній, а на самомъ дѣлѣ служащей животворнымъ ключомъ, въ нашемъ очеркѣ говорить не будемъ. Не оставлять этого источника—въ этомъ жизненный вопросъ всего математическаго изслѣдованія; по отношенію же къ элементамъ умѣстно замѣтить,—что, впрочемъ, и само собою понятно,— что въ преподаваніи оживленіе теоріи практикой способствуетъ лишь возбужденію полнѣйшаго интереса и внесенію въ дѣло жизни. Не слѣдуетъ также думать, что такое оживленіе теоріи можетъ быть замѣнено параллельно ведомымъ курсомъ спеціальныхъ вещественныхъ дисциплинъ, въ которыхъ примѣняется математика. Случаи практической математики, наиболѣе пригодные для освѣщенія и оживленія, слѣдуетъ тотчасъ же приводить какъ примѣры, и даже тамъ, гдѣ можетъ имѣть мѣсто болѣе отвлеченное изложеніе, и тамъ требуется, чтобы наиболѣе характеристичныя приложенія были, по крайней мѣрѣ, поименованы. Во всякомъ случаѣ, чтобы осуществить живую систему науки, необходимо, чтобы всегда поддерживалось сознаніе связи высшихъ всеобщностей и отдаленнѣйшихъ отвлеченій съ полною дѣйствительностью.

II.

Курсъ высшей математики.

---

1. Какъ обстоитъ дѣло касательно сносныхъ учебниковъ. Что даетъ французская литература.—2. Относительная пригодность курсовъ Парижской Политехнической Школы.—3. Польза ходовыхъ школьныхъ курсовъ крайне ограниченна. Особенно вредныя стороны ихъ.—4. Серьезное изученіе должно быть сосредоточено на лучшемъ изъ существующихъ доселѣ учебныхъ руководствъ, на теоріи функцій Лагранжа.— 5. Пренебреженіе къ Лагранжевой точкѣ зрѣнія на обученіе и къ его системѣ. Лагранжево предчувствіе касательно состоянія математики въ слѣдующемъ столѣтіи.—6. Самостоятельная выработка цѣлостной системы.—7. Ученіе о функціяхъ въ обширномъ смыслѣ, какъ руководящая математическая наука.—Простыя отвѣтвленія или отдѣльныя точки зрѣнія. Эллиптическія функціи и такъ называемая Теорія чиселъ.—8. Законъ полной аналитической отвлеченности. Построеніе элементовъ высшей математики.

1. Если спросятъ о томъ, гдѣ искать лучшей формы обученія теоретически и практически важнѣйшему въ области современной высшей математики, то указать можно только на французскую почву, хотя изъ этого никакъ не слѣдуетъ, чтобы это лучшее дано было лицами исключительно французскаго происхожденія. Три обстоятельства содѣйствовали въ исходѣ XVIII-го вѣка тому, что именно въ Парижѣ стало возможно, даже и въ позднѣйшія, менѣе благопріятныя времена, осуществить изящную, примѣрную постановку преподаванія въ сферѣ новой математики, такъ что все реакціонное и тусклое XIX-е столѣтіе оказалось

безсильнымъ вполнѣ испортить прочно поставленное дѣло. Эти три обстоятельства были: писательская и учительская дѣятельность Лагранжа, рядомъ съ этимъ оживленіе, которое внесла революція своими новыми путями и учрежденіями и въ учебную область, а затѣмъ и энергія, съ какою вводились умѣлость, вкусъ, а въ извѣстной мѣрѣ и такія вещи, какъ военный порядокъ, въ новѣйшія области высшаго образованія, именно въ сферу общей политехнической подготовки къ различнымъ техническимъ профессіямъ. Взятыя порознь, эти три причины не могли бы произвести ничего подобнаго. Если бы силою внѣшнихъ обстоятельствъ, т.-е. вслѣдствіе революціи, Лагранжу не пришлось пережить, такъ сказать, внутренней духовной революціи, то, въ виду его мирныхъ наклонностей, едва ли онъ рѣшился бы выступить противъ математической метафизики съ особымъ трудомъ, съ своей «Теоріей аналитическихъ функцій», и такимъ образомъ сдѣлаться камнемъ преткновенія для эпигоновъ математики слѣдующаго столѣтія.

Но если бы революція не создала учебныхъ учрежденій новаго рода и не оттѣснила бы на второй планъ университеты и академіи, которые она хотѣла устранить, то и въ извѣстной мѣрѣ лучшій способъ преподаванія и лучшіе учебники не только не получили бы правъ гражданства среди учащейся молодежи, но не могли бы даже и возникнуть. Внутренней возможности появленія хорошаго учебника, т.-е. обстоятельства, что имѣется лицо, могущее написать таковой, еще не достаточно для того, чтобы такая книга появилась. Чтобы это случилось, должны придти на помощь и внѣшніе шансы; ибо никто, у кого есть опытность и знаніе фактическаго и неизбѣжнаго хода такихъ дѣлъ, не станетъ попусту тратить время, зная, что косная, ограниченная, плетущаяся по тропинкѣ обычнаго школьнаго авторитета, удерживаемая къ тому же на ней своими интересами, толпа все-таки будетъ слѣдовать пути жалчайшаго преподаванія и держаться глупѣйшихъ университетскихъ компендій. Что же касается крайне немногочисленнаго и избраннаго меньшинства, которое ничего не хочетъ знать о схолархахъ, никогда не будетъ руководиться требованіями ихъ безсмысленныхъ экзаменовъ, никогда не будетъ искать схоластической протекціи, которое не хочетъ знать ученыхъ ремесленниковъ, не ищетъ должностей на гражданской службѣ, не преклоняется предъ червивыми авторитетиками, — для такого меньшинства, всегда весьма немногочисленнаго, должны быть налицо творенія, прокладывающія новые пути, а никакъ не заурядные учебники. Здѣсь авторы знаютъ, какую жертву они приносятъ, знаютъ, что успѣхъ будетъ невеликъ, и если бы даже, по счастливой случайности, ихъ труды и имѣли свойство быть въ собственномъ смыслѣ элементарными детальными учебниками, то и это преимущество принесло бы мало пользы, и авторъ никакого успѣха не добился бы не только у безсловесной, но и несвободной массы, находящейся въ рукахъ школьнаго фигуранта, обучающаго какъ ремесленникъ и чиновникъ, преслѣдующій только свои эгоистичные интересы. Но если рѣчь должна идти объ учебникахъ въ собственномъ смыслѣ слова, то должно имѣть въ виду массу учащихся какъ массу, а не одни лишь выдающіеся головы и характеры. Безъ значительной уступки требованіямъ книжнаго рынка не можетъ существовать никакая книга, а на рынкѣ господствуетъ, говоря языкомъ экономической науки, либо настоящее средневѣковое право отлученія и насилія въ университетскомъ родѣ, либо вообще господствуетъ вліяніе, каковое, хотя и въ современныхъ формахъ, приноситъ съ собою привилегія монопольнаго обученія, находящаяся въ рукахъ государства.

Не отрицая нѣкоторой доли свободы, фактически существующей въ современномъ обществѣ, все-таки нельзя не сознаться, что каналовъ, дѣйствующихъ въ отпоръ дурнымъ авторитетамъ, далеко недостаточно, чтобы проникнуть въ массу, и еще менѣе достаточно, чтобы овладѣть ея духомъ и направлять его согласно лучшимъ образцамъ. Такъ какъ это общество все-таки привыкло къ офиціальнымъ формамъ и съ ними сжилось, то и все лучшее должно приходить къ нему, такъ сказать, офиціальнымъ путемъ, если оно хочетъ завладѣть болѣе или менѣе широкою ареною дѣйствія. Конечно, это достижимо только при нѣкоторомъ ослабленіи, а отчасти и при нѣкоторомъ искаженіи этого лучшаго; но въ чистомъ, неиспорченномъ видѣ этого лучшаго при современномъ строѣ общества и государства этимъ путемъ и не получищь. Все-таки нужно признать прогрессомъ и то, что учрежденіе новыхъ образовательныхъ институтовъ совершилось подъ вліяніемъ возбужденія, поднятаго революціей, хотя новыя вѣянія и отразились на нихъ въ весьма скромной степени; какъ бы то ни было, эти новые институты были болѣе вѣрны духу новаго времени, нежели старофранцузскіе институты прежняго режима, не только внутренне-испорченные, но и соединявшіе эту испорченность съ импотенціей и старческимъ истощеніемъ.

Названныя учрежденія нельзя считать чистымъ созданіемъ революціи; они были созданіемъ революціи, полузадушенной реакціей. Поэтому, нечего удивляться тому, что воздухъ въ нихъ нѣсколько спертъ; но и доступъ новому духу въ нихъ не былъ закрытъ. Изъ послѣднихъ отпрысковъ этихъ учебныхъ институтовъ знаменитѣйшимъ была

Парижская Политехническая Школа; она занималась не отдѣльными техническими спеціальностями, а общими науками, подготовлявшими ко всякой спеціальности. Въ сущности, слѣдовательно, это была высшая школа математики и естествознанія, и уже благодаря этому она поневолѣ должна была стоять ближе къ современному духу, нежели стояла къ нему отжившая ученость институтовъ стараго режима, въ которыхъ никогда не было настоящей науки, какъ и не можетъ быть ея въ обветшалыхъ и испорченныхъ учрежденіяхъ. Само собою понятно, что этой испорченности не миновала и Парижская Политехническая Школа, ибо она основана была въ рамкахъ остальныхъ институтовъ, да и вообще взрощенныхъ вѣками преданій учености нельзя порѣшить, признавъ требованія новаго духа лишь на-половину. Еще труднѣе создать изъ ничего характеры, которые были бы существенно лучше выводковъ стараго режима. Слѣдовавшая за революціей Наполеоновская эра была вовсе не въ такомъ родѣ, чтобы создать что-либо дѣйствительно великое въ этомъ направленіи. Если она терпѣла нѣчто лучшее и кокетничала, напр., съ Лагранжемъ, то это было случайное наслѣдіе, и причиною его нельзя считать ни эту эру, ни старый режимъ, ни революцію, ни даже націю.

По происхожденію Лагранжъ отчасти былъ итальянской крови; кромѣ того, онъ былъ иноземецъ; во время революціи его даже хотѣли изгнать какъ иностранца, и еще доселѣ въ научной французской литературѣ онъ считается однимъ изъ тѣхъ, которые къ числу собственно французскихъ геніевъ не принадлежатъ, и настоящее его мѣсто— въ болѣе высокой области міровыхъ геніевъ. Даже въ формальномъ отношеніи проявляющееся въ его твореніяхъ чувство изящнаго стоитъ несравненно выше свойственнаго французамъ вкуса, хотя и послѣдній, по сравненію съ аляповатостью кое-какихъ иныхъ народовъ, еще кое-чего стóитъ. и не мало содѣйствовалъ тому, что обученіе въ этой Политехнической Школѣ и ея учебники отличаются, такъ сказать, пріятнымъ фасономъ.

Поэтому еще не значитъ быть требовательнымъ на изящество, а значитъ только имѣть вкусъ и немножко чувствовать безвкусицу и топорность, если, даже чувствуя отвращеніе къ кое-чему иному на французской почвѣ, считать все-таки ходовыя въ Парижской Политехнической Школѣ формы обученія математическимъ и физическимъ наукамъ какъ нѣчто болѣе изящное и болѣе вразумительное, нежели все то, что поступаетъ на рынокъ гдѣ угодно въ иномъ мѣстѣ.

2. Ходовые учебники доселѣ всегда должны были стоять значительно ниже оригинальныхъ твореній жизнетворныхъ умовъ и оставаться далеко позади запросовъ на первоначальную естественость, полную ясность и совершенную соразмѣрность. Причину этого нужно искать въ дурной системѣ образованія, которая ведетъ начало отъ среднихъ вѣковъ и ихъ развязки и понижаетъ до своего уровня и въ своихъ рамкахъ искажаетъ даже самоновѣйшія отрасли знанія. Система эта повинна въ томъ, что многое изъ числа лучшаго появилось на свѣтъ съ мутными примѣсями и въ искаженномъ видѣ, да и то, что вначалѣ появлялось на свѣтъ въ довольно чистой формѣ, она умѣла распространять далѣе въ формѣ деградацій и фальсификацій. Суевѣрная и политически рабская система, каковой новые народы подпали благодаря традиціямъ азіатчины и испорченнаго римскаго государства, т.-е. господство внутренней и внѣшней лжи и слабости, превратила и всѣ учебныя учрежденія съ самаго начала въ весьма значительной мѣрѣ въ школы лжи и рабской покорности. Отсюда объясняется

не только методическій подборъ всегда самыхъ жалчайшихъ ученыхъ характеровъ, но и тотъ фактъ, что такимъ образомъ возникшее и цѣлыми столѣтіями униженія формировавшееся сословіе ученыхъ усвоило себѣ максимы и нравы, которые въ отношеніи несамостоятельности, несвободы, подчиненія ученымъ и инымъ авторитетамъ, и вообще въ смыслѣ угнетенія лучшихъ и болѣе естественныхъ человѣческихъ побужденій, дошли до послѣднихъ ступеней возможнаго. Въ концѣ - концовъ дѣло дошло до того, что какая-то смѣсь кретинизма, глупости, сознательнаго шарлатанства, а иногда и прямо мошенничества сдѣлалась выдающимся отпечаткомъ ученаго сословія, и что дрянность и гнилость духовныхъ качествъ подобающимъ образомъ сочетались съ какимъ-то шатаньемъ по закоулкамъ науки. По отношенію къ наукѣ, которой присуща величайшая ясность и которая способна къ точнѣйшему контролю истины, эта характеристика какъ разъ умѣстна; ибо неопытная публика воображаетъ, что въ математикѣ она имѣетъ передъ собою такую область, которая отъ подобныхъ вещей совершенно свободна. На дѣлѣ же эта-то именно область и есть такое мѣсто, гдѣ контрастъ между истинною и фальсифицированною наукою, а также между подобающею и неподобающею обработкою предмета, между подобающимъ и неподобающимъ обученіемъ проявляется наиболѣе рѣзко. Если учеными креатурами фальсифицируются политика и философія или подобныя вещички, то это никого не удивляетъ и кажется почти—что въ порядкѣ вещей. Во всякомъ случаѣ, здѣсь это понятно; но въ наукѣ чистой и высокой, которая, повидимому, съ обыкновеннымъ хотѣніемъ и съ обыкновенными интересами ничего общаго не имѣетъ, тамъ такая связь не только не понятна, но о ней обыкновенно и не думаютъ.

Однако о ней приходится думать все болѣе и болѣе, разъ идетъ рѣчь о научныхъ предметахъ, и между такими предметами вопросъ объ учебникахъ не послѣднiй. Какъ сказано, Парижская Политехническая Школа при своемъ основанiи была еще, говоря относительно, полна жизни, но чѣмъ дальше, тѣмъ больше и она начинаетъ подходить къ разслабленному типу остальныхъ состоянiй общественной жизни. Ея профессора, что касается моральнаго характера и дарованiй, въ скоромъ времени уже не отличаются особенно отъ фигуръ другихъ учрежденiй, и только новизна предмета и школьная традицiя съ самаго ея основанiя содѣйствуютъ тому, что несмотря на то на поверхности еще остается кое-что хорошее, и что она не совсѣмъ погибаетъ среди всякаго рода неестественностей, которыхъ въ послѣдующiя десятилѣтiя накопляется все больше и больше. О двухъ главныхъ возникшихъ въ этой школѣ учебникахъ высшей математики, а равно и вообще о характерѣ тамошнихъ лекцiй можно сказать, что они представляютъ просто коллективный трудъ этой школы. Выборъ матерiала и способъ преподаванiя частью опредѣлялся вначалѣ даннымъ направленiемъ, отчасти же въ отдѣльныхъ предметахъ прямо предписывался программами, такъ что какъ только дѣло было налажено, профессорамъ не оставалось дѣлать ничего иного, какъ принимать наслѣдство отъ своего предшественника и повторять стереотипно тѣ же лекцiи.

Но разъ появлялся солидный учитель, нѣсколько серьезно относившiйся къ своему дѣлу, то являлась возможность, что на редакцiю тетради будетъ обращено особенное вниманiе. Такимъ мужемъ былъ Навье, выработавшiй свой курсъ приблизительно въ тридцатыхъ годахъ, когда онъ въ литографiяхъ появился въ рукахъ его учениковъ. Такимъ образомъ возникъ и, будучи отпечатанъ, получилъ широкое распространенiе курсъ Навье, его Résumés des leçons d'Analyse. Здѣсь въ двухъ томахъ содержался стереотипный двухгодичный курсъ Политехнической Школы. Все хорошее, что принесли съ собою и сохранили послѣднiе годы восемнадцатаго столѣтiя и первыя десятилѣтiя девятнадцатаго, все это продолжало свое дѣйствiе въ урокахъ профессора, который при своихъ дарованiяхъ видимо весьма озабоченъ былъ тѣмъ, чтобы нѣчто удобопонятное надлежащимъ образомъ стилизировать и дать, какъ пособiе, въ руки своимъ слушателямъ. Имѣя эти два тома, въ которыхъ воплощенъ былъ такимъ образомъ курсъ анализа, всякiй мыслящiй студентъ найдетъ устную лекцiю о томъ же самомъ вещью совершенно лишнею. Однако, въ такой роскошной конкурренцiи печати и устнаго слова, чтенiя по книгѣ и слушанiя лекцiи профессора, виновна университетская традицiя, ведущая начало еще съ 12-го столѣтiя, но никакой отвѣтственности не несетъ такой мужъ, который взялъ на себя трудъ и заслужилъ честь дать хорошiя лекцiи въ формѣ книги. Навье былъ техникъ въ обширномъ смыслѣ слова и извѣстенъ также еще хорошимъ учебнымъ пособiемъ по строительной механикѣ. Хотя въ его трудѣ французскiя традицiи анализа и выглядятъ нѣсколько дубовато, какъ и вообще это—удѣлъ всякихъ учебниковъ, но, по крайней мѣрѣ, у него дерево оказалось здорово и крѣпко, а не хило и гнило, какъ вообще мы находимъ во всѣхъ издѣлiяхъ, которыми снабжаютъ насъ плотники, занимающiеся сколачиванiемъ учебниковъ. И потому очень недурно, что одинъ изъ профессоровъ одного изъ нѣмецкихъ высшихъ техническихъ училищъ, а именно Ганноверской Политехнической Школы, перевелъ книгу Навье на нѣмецкiй языкъ, и что этотъ переводъ, введенный въ тамошнюю школу, получилъ возможность существовать въ продажѣ и въ теченіе какихъ-нибудь трехъ десятилѣтій вышелъ уже четвертымъ изданіемъ.

По смерти Навье каѳедра, которую онъ занималъ, перешла къ прибывшему изъ Женевы эльзасцу, Карлу Штурму, который съ весьма умѣренною порціей дарованій соединялъ рѣшительную способность смиренно присасываться къ вліятельнымъ ученымъ минуты. Эта-то его способность, а именно рабская преданность наполовину ученому, наполовину политическому дѣльцу и актеру въ наукѣ, Араго, и помогла ему заполучить эту профессуру, а никакъ не кое-какія мелочи въ алгебрѣ числовыхъ уравненій, благодаря которымъ позднѣе онъ поднялся и до особой теоремки Штурма,—примѣръ, на которомъ можно видѣть, какъ суетны притязанія и каково вліяніе взаимнаго страхованія маленькихъ величинъ академій. Такимъ то образомъ этотъ Штурмъ, до тѣхъ поръ швейцарецъ, уѣхалъ на кондиціи къ парижскимъ ученымъ и навсегда поселился у нихъ, какъ и вообще это—идеалъ всякаго сорта наемныхъ швейцарцевъ. Вмѣстѣ съ этимъ онъ сдѣлался наслѣдникомъ курса Навье, къ которому и примкнулъ въ своихъ лекціяхъ. Вставка кое-какихъ мелкихъ модныхъ новинокъ въ существѣ дѣла ничего не измѣняла. Курсъ Навье служилъ учебникомъ для нѣсколькихъ поколѣній и въ рукахъ Штурма постарѣлъ на дюжину лѣтъ, и когда послѣдній своими измѣненіями уже не могъ пользоваться какъ монополіей, потому что по нездоровью сдѣлался неспособенъ продолжать преподаваніе, то незадолго до смерти захотѣлъ напечатать какъ бы свой собственный курсъ анализа. Одинъ изъ репетиторовъ *) взялъ на себя этотъ трудъ.

*) E. Prouhet.

Эта новая редакція Курса Анализа Политехнической Школы формально и стилистически не такъ тщательна и не такъ основательна, какъ работа Навье, который обладалъ болѣе солиднымъ характеромъ и, какъ техникъ, не былъ такимъ кривотолкомъ какъ обыкновенные ученые, отличался здравою практическою разсудительностью и лучшими учительскими дарованіями. Натурально, новый курсъ далъ какъ бы полную отставку старому, и отъ 50-хъ до 80-хъ годовъ прошлаго столѣтія выдержалъ до полудюжины изданій. Относительно этого курса нужно замѣтить, что по формѣ и по содержанію, по существу, это не есть единоличное твореніе, а созданіе школы и всѣхъ дѣйствовавшихъ въ ней силъ. И этотъ курсъ, подобно тому какъ и въ своей прежней Навьеровской формѣ, весьма распространенъ въ Германіи, и хотя съ перваго его появленія въ свѣтъ въ 50-хъ годахъ прошлаго столѣтія прошло уже болѣе полувѣка, но появившіяся съ тѣхъ поръ прибавленія и измѣненія въ частностяхъ нисколько не подняли его выше того уровня, какой онъ занималъ вначалѣ. Точка зрѣнія, на которой стоялъ его авторъ, уже и въ то время была отсталою, если придавать вѣсъ и такимъ обстоятельствамъ, какъ отсутствіе рядовъ Фурье,— недостатокъ, непополненный и доселѣ. *) Однако, осуждать этого не приходится; напротивъ, въ нѣкоторыхъ случаяхъ можно считать даже преимуществомъ, когда авторы оставляютъ въ сторонѣ или слегка касаются, какъ вещи не особенно важной, всякаго рода покушеній и незрѣлыхъ

---

*) Теперь этотъ недостатокъ пополненъ. Уже въ 10-мъ изданіи въ дополнительной 4-ой главѣ, редижированной Сенъ-Жерменомъ, трактуется о рядахъ Лагранжа и Фурье. Кромѣ того прибавлена и элементарная теорія эллиптическихъ функцій (редакція Лорана).

Примѣчаніе переводчика.

выкидышей 19-го вѣка, какъ напр. праздныхъ развлеченій Коши, въ родѣ новыхъ выраженій остатка Тайлорова ряда и т. п.

Какую странную форму принимаютъ такъ называемыя учебныя руководства, когда въ нихъ безъ всякой критики пускаются въ неясное и незрѣлое теоретизированье новаго пошиба, самого себя не разумѣющее, въ этомъ можно убѣдиться, взявъ нѣмецкое такъ называемое Руководство къ математикѣ, появившееся по заказу книгопродавца за подписью профессора Шлёмильха. То обстоятельство, что оно по-римановски огауссовано, и, напримѣръ, призрачную графику мнимаго вмѣстѣ съ метафизикою и среднею пропорціональною, — хотя уже самъ Гауссъ въ послѣднихъ своихъ сочиненіяхъ относился къ этой стряпнѣ робко и даже прямо ее замалчивалъ, —преподноситъ догматически и въ самой нелѣпой формѣ какъ истину, а о странныхъ римановскихъ взвинченностяхъ выкрикиваетъ такъ, какъ будто бы это были не только правомочныя истины, а и единственныя въ свѣтѣ средства къ уразумѣнію этого предмета,—вся эта метода, никакимъ измѣненіямъ въ цѣляхъ здраваго обученія неподдающаяся, интересна лишь какъ выдающійся симптомъ возможныхъ доселѣ на нѣмецкой почвѣ состояній. Иначе этотъ, какъ по пониманію дѣла, такъ и по изложенію высшей и низшей математики плоскій, несуразный, странный, специфически - нѣмецкій компендій, не похожій ни на руководство, ни на учебникъ, при своемъ ограниченномъ горизонтѣ, не стоилъ бы и упоминанія. Къ сожалѣнію, такія явленія только рельефнѣе оттѣняютъ достоинства французскихъ учебныхъ курсовъ, и на нашей нѣмецкой почвѣ мы должны еще совершить рядъ большихъ реформъ, даже перестроекъ, чтобы математикѣ и ея преподаванію придать такую форму, которая, по устраненіи всякихъ подмѣсей и всякой туманности, была бы достойна потомковъ Коперника и Кеплера, и даже могла бы оставить за собою и превзойти и все лучшее, чѣмъ гордятся наши сосѣди, т. е. такія благородныя и тонкія формы, какъ у Лагранжа.

3. Когда пользуются такимъ пособіемъ какъ Штурмовскій курсъ, то нужно знать, что въ немъ есть и чего нѣтъ. Мы находимъ въ немъ достаточно испытанную школьную традицію, которая хватаетъ дальше случайнаго автора учебника. Слѣдовательно, имѣемъ нѣчто дѣйствительно провѣренное, форму, отвѣчающую среднему уровню умственнаго развитія учащихся. Но въ подобномъ учебникѣ совершенно не найдемъ ничего такого, что могло бы возбудить къ болѣе серьезному мышленію, не говоря уже о болѣе глубокихъ изслѣдованіяхъ, или просто лишь о болѣе тонкихъ различеніяхъ. Напротивъ того, весь курсъ насквозь отличается коснымъ традиціоннымъ безразличіемъ, чтобы не сказать тупостью пассивной передачи мертвыхъ результатовъ. Лѣниво тянется параграфъ за параграфомъ, и такая монотонная передача,—а въ нее обыкновенно и выливаются завоеванія жизнетворныхъ умовъ въ головахъ низшаго порядка и въ рукахъ профессоровъ—ремесленниковъ,—вотъ и все, чѣмъ питаются учебники. Этою то пищею и долженъ довольствоваться навсегда тотъ, кто прилѣпляется къ учебникамъ и преисполненъ суевѣрнымъ почитаніемъ ихъ.

Зато, если къ такимъ учебникамъ присоединяютъ репетиторіи, то это—большое преимущество, а въ таковыхъ въ новыхъ изданіяхъ Штурмовскаго Курса недостатка нѣтъ. Конечно, это не болѣе какъ повтореніе, даже просто натаскиванье; но въ виду компилятивности и громоздкости преподносимаго при теперешнемъ состояніи преподаванія науки, причемъ студенты рѣшительно задыхаются подъ тяжестью наваливаемаго на нихъ груза, подобныя репетиторіи рѣшительно необходимы, ибо это какъ бы суррогатъ, замѣняющій собою критическую фильтрацію, каковая при лучшемъ состояніи должна бы была быть воплощаема въ самомъ дѣлѣ и въ лекціи, но чего однако на дѣлѣ въ учебникахъ не имѣется. При упадкѣ университетовъ репетиторство становится главнымъ дѣломъ, и оно существуетъ въ учрежденіяхъ позднѣйшаго времени, поскольку и въ нихъ способъ обученія также съ самаго начала получилъ такую постановку, что находится въ прямомъ противорѣчіи съ изобрѣтеніемъ книгопечатанія. Въ самомъ дѣлѣ, общество могло бы, наконецъ, быть избавлено отъ оплаты профессорскаго преподаванія, ибо таковое— не что иное, какъ лишь плохой суррогатъ книги. Но такимъ суррогатомъ являются всѣ лекціи, и пока офиціальная монополія будетъ тяготѣть надъ обученіемъ науки и регулировать таковое, то было бы гораздо меньшимъ зломъ, если бы она своихъ офиціальныхъ ученыхъ пріучала вмѣсто лекцій заниматься производствомъ печатныхъ учебныхъ курсовъ. Такимъ путемъ правительство могло бы дѣлать хорошія сбереженія на профессорахъ и обходиться однимъ персоналомъ натаскивателей. Если бы книги удались хоть наполовину сносно, то ихъ понимали бы лучше, чѣмъ обыкновенно понимаютъ лекціи, которыхъ сплошь и рядомъ не понимаютъ. Веденіе упражненій въ тѣсномъ смыслѣ слова и неспособные студенты препоручались бы натаскивателямъ,—категорія, уже отчасти существующая въ Парижской Политехнической Школѣ въ формѣ офиціальныхъ репетиторовъ. Въ Англіи упадокъ высшихъ школъ наступилъ скорѣе и потому пустилъ тамъ болѣе глубокіе корни; профессура тамъ давно обратилась въ доходную статью и въ синекуру; и подобно тому какъ церковный приходъ управляется не тѣмъ, кто пользуется доходами съ него, но викаріемъ, такъ и тамъ дѣло все болѣе и болѣе сводится къ наполовину ремесленно-офиціальному, наполовину свободному репетиторству. Подобный же ходъ вещей неминуемо водворится и въ нѣмецкихъ университетахъ при все возрастающемъ упадкѣ ихъ, а въ извѣстной мѣрѣ та же участь ожидаетъ и высшія техническія школы, ибо если въ нихъ современнаго духа и обстановки и нѣсколько болѣе, но все-таки этого еще недостаточно, чтобы обезвредить главную ошибку — санкцію преподаванія въ формѣ чтенія лекцій. Лекціи, даже если онѣ хороши, вовсе не составляютъ надежнаго средства для передачи всей науки, но находятъ себѣ оправданіе только при ограниченномъ числѣ возбуждающихъ, время отъ времени, бесѣдъ со стороны болѣе значительныхъ авторитетовъ. Но, кромѣ лекціонной манеры вообще, можно указать и еще на одинъ опасный обычай, существующій въ высшихъ техническихъ школахъ, и спеціально въ Германіи, на обычай поручать преподаваніе чисто теоретическихъ курсовъ математики и высшаго естествознанія сплошь и рядомъ доцентамъ и профессорамъ университетовъ, вмѣсто того, чтобы озаботиться учрежденіемъ на своей собственной почвѣ разсадника для пополненія преподавательскаго персонала. Поступая такъ, какъ это дѣлается теперь, онѣ заносятъ къ себѣ ту заразу, противъ которой могли бы протянуть кордонъ путемъ надлежащей эмансипаціи отъ академій и университетовъ.

Но не только отъ персонала стараго режима, но и отъ непрактичности самаго матеріала должны бы были оградить себя эти политехническія въ истинно-современномъ смыслѣ слова учрежденія. Примѣромъ этой непрактичности въ постановкѣ дѣла можетъ служить офиціальное предписаніе, котораго успѣли добиться лжеученые элементы и въ силу котораго эллиптическія функціи въ Парижской Политехнической Школѣ признаны отнынѣ обязательнымъ курсомъ. Вмѣстѣ съ Штурмовскимъ учебникомъ новыя изданія даютъ привѣсокъ небольшого учебника эллиптическихъ функцій, что, замѣтимъ мимоходомъ, эту дешевую даже для нѣмцевъ книгу дѣлаетъ еще дешевле, и они хотя не прямо государствомъ, но все-таки косвенно отъ государства назначаемыми университетскими профессорами и экзаменаторами вынуждаются терять свое время на «долбежку» учебника эллиптическихъ функцій. Не менѣе скудный, чѣмъ и самый учебникъ, этотъ придатокъ содержитъ, сверхъ того, еще что-то въ родѣ введенія въ маленькую теорію чего-то такого, что, въ отличіе отъ изслѣдованій спеціальныхъ функцій, пытались сформулировать какъ общую теорію свойствъ всякихъ функцій. Конечно, все это, а въ извѣстномъ смыслѣ и теорія спеціальныхъ функцій, если, какъ сплошь и рядомъ бываетъ, и не прямо превращено въ нѣчто уродливое, забавное и неплодотворное, то все-таки по своей формѣ незрѣло и оформлено вовсе не такъ, чтобы въ своемъ теперешнемъ видѣ могло составлять интегрирующую часть практически полезнаго курса высшаго анализа.

Неудивительно, поэтому, что компиляторы учебниковъ не могутъ считать особеннымъ счастьемъ, когда имъ приходится изъ намѣченнаго Абелемъ и тѣми второй руки дѣятелями, которые послѣ Абеля хозяйничали въ этой области, или, скорѣе, ее опустошали,—когда имъ приходится стряпать что-либо такое, что отвѣчаетъ академическимъ нравамъ, т.-е. гдѣ приходится дѣлать сводъ всѣмъ этимъ пустымъ, пошлымъ проказамъ академическихъ и университетскихъ модныхъ и эфемерныхъ авторитетиковъ. Что за неудобоваримыя вещи такимъ образомъ возникаютъ, можно видѣть на примѣрѣ обширной компиляціи Бріо объ эллиптическихъ и Абелевскихъ функціяхъ, на этомъ, такъ сказать, источникѣ компиляцій, ибо къ такимъ книгамъ, которыя во всякомъ случаѣ для просмотра частностей все-таки могутъ играть роль лексиконовъ, учебнички относятся какъ извлеченія изъ того же, по-академически выкроеннаго, матеріала. Сносные лексиконы, въ собственномъ смыслѣ слова, какъ въ маломъ, такъ и въ большомъ масштабѣ, во всякомъ случаѣ, были бы полезнѣе, ибо для серьезнаго, тщательнаго, вдумчиваго изученія весь этотъ родъ продуктовъ математической литературы непригоденъ. Сами по себѣ компиляціи вещь не лишняя, и потому совершенно отвергать ихъ нельзя; но въ такомъ случаѣ онѣ должны быть настоящими конторками съ выдвижными ящиками, и для этого форма словаря и въ математикѣ будетъ наиболѣе пригодною. Само собою разумѣется, это не значитъ, что не должно быть также и трактатовъ, расположенныхъ по алфавиту, въ которыхъ статьи выходили бы изъ рамокъ компиляторнаго характера. Рѣчь здѣсь только о томъ, что обыкновенно поступаетъ и можетъ поступать на рынокъ, а не о томъ, что могло бы быть, какъ исключеніе, осуществлено какъ особый идеальный случай. О томъ, какъ штудировать предметъ, побудившій насъ сдѣлать это замѣчаніе, т.-е. Теорію элиптическихъ функцій и вообще спеціальныхъ функцій, объ этомъ рѣчь будетъ ниже, ибо, какъ уже сказано, этотъ спеціальный случай, по своему свойству, лишь въ весьма малой мѣрѣ относится ко всей теоріи высшей математики, выдержанной съ здравымъ смысломъ и съ чувствомъ соразмѣрности и гармоніи.

4. Лучшимъ курсомъ высшей математики, въ смыслѣ ра-

зумнаго введенія въ предметъ, еще доселѣ служатъ исключительно соотвѣтственныя главныя творенія Лагранжа. Его Теорія аналитическихъ функцій, а равно и имъ самимъ изданныя Лекціи функціоннаго исчисленія,—вотъ то, на чемъ еще и теперь должны сосредоточиваться основательныя штудіи.

Хотя эти произведенія страдаютъ односторонностью,—правда, односторонностью великолѣпія,—однако ни раньше ихъ, ни послѣ нихъ, доселѣ не написано ничего, что въ такой же мѣрѣ отвѣчало бы истинѣ дѣла и отличалось бы такою же проницательностью и такимъ же изяществомъ. Первое изданіе Теоріи аналитическихъ функцій появилось на порогѣ XIX вѣка (1797), а за нимъ въ видѣ особой книги послѣдовали въ 1806 г. и упомянутые «Leçons sur le calcul des fonctions», напечатанные раньше въ журналѣ лекцій Нормальной Школы. Еще при жизни Лагранжа появилось и новое изданіе Теоріи функцій (1813 года). Въ нѣкоторыхъ не несущественныхъ частностяхъ оно содержательнѣе перваго, но уже, какъ книга лекцій—и это при такомъ назначеніи ея совершенно понятно—снабжена указаніями на замѣнимость производныхъ функцій обыкновенными дифференціальными частными. Замѣчанія, при случаѣ, что стоитъ только вмѣсто y' поставить $\frac{dy}{dx}$, чтобы получить дифференціальное исчисленіе, въ первомъ изданіи отсутствуютъ. Послѣднее, хотя и редижировалось по мѣрѣ печатанія, слѣдовательно писалось какъ бы въ типографіи, отличалось такою строгою законченностью, что въ немъ вовсе не встрѣчалось дифференціальныхъ знаковъ, даже и упоминанія о нихъ.

Это, повидимому, маловажное обстоятельство скрывало за собою нѣчто значительное. Благодаря ему, односторопность была полная, но вмѣстѣ съ тѣмъ получалась совершенно строгая, замкнутая въ себѣ система, которая отнюдь не имѣла никакого соприкосновенія съ традиціонною двусмысленностью и метафизикою дифференціальной нотаціи. Точка зрѣнія Лагранжа давала такую строгую систему; но она неспособна была прямо овладѣть тѣмъ, что понуждало ее выйти за предѣлы ея сущности. Поэтому-то ему и не удалось перекинуть, въ строгомъ смыслѣ слова, мостъ къ другой системѣ, къ системѣ дифференціальныхъ элементовъ. Для этого и системѣ дифференціальныхъ элементовъ непосредственно и въ самой себѣ нужно бы было сообщить строгость, а подобныхъ притязаній Лагранжъ никогда не заявлялъ, что подтверждается окончательно вторымъ изданіемъ его Аналитической Механики, появившимся въ концѣ его жизни. Въ ней Лагранжъ еще терпитъ гипотезу безконечно малаго и вмѣстѣ съ тѣмъ оставляетъ открытымъ вопросъ, съ непосредственнымъ разрѣшеніемъ котораго не только связано требованіе совершенно ясной истины, но и болѣе короткое и болѣе удобное средство къ формулировкѣ многихъ заключеній. Лагранжъ довольствовался тѣмъ, что его Теорія функцій косвенно оправдываетъ ученія дифференціальнаго исчисленія собственно. Непосредстренно съ этою ложною гипотезою никогда онъ не справился бы въ собственной ея области, по крайней мѣрѣ, никогда и не принялся бы за это дѣло. Поэтому совершенно понятно, что не только удобства ради, но и въ виду практической необходимости собственно дифференціальнаго исчисленія и второе изданіе Аналитической Механики выполнено не по системѣ производныхъ, а по системѣ непосредственно обработанныхъ дифференціаловъ.

Весьма дурно, что въ обоихъ основныхъ учебныхъ руководствахъ Лагранжа, въ Теоріи функцій и въ Функціонномъ исчисленіи, мы имѣемъ дѣло только съ одною системою, между тѣмъ какъ другая представлена въ механикѣ, да и то, въ сущности, не раціонализирована. Такое же отношеніе къ дѣлу повторяется и въ спеціальныхъ статьяхъ Лагранжа. Въ этомъ рѣшающемъ пунктѣ этотъ не только великій, но доселѣ и величайшій аналистъ сдѣлалъ только половину дѣла, или, лучше сказать, дѣло его одностороннe. Высшій анализъ является у него въ двойственной формѣ, чтобы не сказать—двуликимъ, и второе лицо носитъ на себѣ существенныя черты ложной традиціи. Напримѣръ, исходные пункты механики, разработанные въ третьей части Теоріи функцій, при чемъ ихъ можно разсматривать какъ самостоятельный учебникъ основаній науки, обработаны здѣсь строго по системѣ производныхъ функцій. Если сравнить съ соотвѣтственными ученіями великаго основного произведенія по Аналитической Механикѣ, эти основы представляютъ строгую форму обработки предмета, тогда какъ другой способъ обработки фигурируетъ рядомъ какъ внѣшняя вторая сторона, вмѣсто того, чтобы входить въ одну и ту же единую систему. Такой объединенной обработки онъ не могъ дать, ибо раціонализированіе собственно дифференціальной системы Лагранжъ считалъ дѣломъ невозможнымъ. Такъ и должна была оставаться пропасть, раздѣляющая все на двѣ части, и ради сохраненія удобства пожертвовано строгостью изложенія. Однако прогрессъ, заключавшійся въ постановкѣ строгой системы, не особенно великъ, несмотря на то, что рядомъ ради удобства культивировалась и старая манера вмѣстѣ съ присущею ей неправильною гипотезой.

Если указанная пропасть и не есть единственное, то она есть главнѣйшее зло, въ виду котораго Лагранжевы учебныя творенія хотя и остаются все еще лучшими, но не удовлетворяютъ такимъ претензіямъ, какія можно бы было предъявить къ нимъ, если бы старая ложная традиція была совершенно побѣждена,—претензіямъ, каковыя, съ точки зрѣнія сплошного раціонализированья, были бы возможны уже въ эпоху Лагранжа.

Къ этому недостатку въ существѣ дѣла присоединяется еще случайно и формальное несовершенство, которое, хотя само по себѣ и не много значитъ, тѣмъ не менѣе вредитъ удобствамъ изученія, да и вообще, съ точки зрѣнія эстетическаго единства систематической формы всего матеріала, было бы лучше, если бы этого недостатка не было. Это—фактическое раздвоеніе учебнаго руководства. Если бы Теорія функцій содержала и большую часть того, что включено въ книгу лекцій, или если бы, наоборотъ, послѣдняя, въ отношеніи геометріи и механики, а также и относительно главнаго своего предмета, абстрактнаго анализа, была построена такъ, что въ ней содержалось бы и все цѣнное по теоріи функцій, то нужно бы было только одно произведеніе, и не было бы нужды въ повтореніи. Но въ такомъ распаденіи учебника на-двое виновенъ не самъ авторъ, корень зла нужно искать въ вышеуказанномъ традиціонномъ школьномъ требованіи чтенія лекцій. Лагранжу было навязано, чтобы, давъ учебникъ теоріи функцій, онъ о томъ же предметѣ читалъ бы и лекціи, не предполагая при этомъ, что слушатели уже штудировали книгу. Поэтому, лекціи должны были являть собою нѣчто самостоятельное, и при этомъ нужно было еще позаботиться, чтобы не пускали въ ходъ сплетни, что лекторъ только повторяетъ то, что уже есть въ его книгѣ. Во всякомъ случаѣ, люди геніальные и искусные въ такихъ дѣлахъ умѣютъ вывернуться изъ затрудненій. Они сразу не исчерпываютъ себя, и умѣютъ представить предметъ въ другомъ освѣщеніи. Такъ и Лекціи о функціонномъ исчисленіи были самостоятельною и себѣ довлѣющею работою, отвѣчающею, главнымъ образомъ, первой части Теоріи функцій, но со вплетеніемъ приложеній по геометріи и механикѣ, хотя въ весьма экономной дозѣ ихъ главныхъ исходныхъ пунктовъ. Это—курсъ высшаго анализа, или, если угодно, дифференціальнаго, интегральнаго и варіаціоннаго исчисленія по системѣ производныхъ, но, нужно замѣтить, въ абстрактнѣйшей, какъ бы эмансипированной отъ всякихъ приложеній, формѣ. Степень абстрактности и свободы, въ нихъ господствующая, не встрѣчалась въ исторіи дѣла ни раньше, ни впослѣдствіи. Сверхъ того, въ нихъ содержатся глубокомысленныя по исторіи происхожденія аналитическихъ истинъ указанія, какія могутъ быть свойственны только мужу, съ превосходнѣйшими творческими задатками соединявшему точное и глубокое знаніе фактовъ. Вся совокупность вплетенныхъ тамъ и сямъ замѣтокъ даетъ подробную исторію предмета, какой не найдете нигдѣ болѣе, и всего менѣе въ обширныхъ трудахъ по исторіи математики. Такимъ образомъ, читатель не только научается мыслить, но узнаетъ и то, какъ на дѣлѣ мыслили и какіе пути пролагали человѣческій разумъ и стремленія у различныхъ индивидовъ, принимавшихъ участіе въ созиданіи науки.

Чтобы въ нѣкоторой мѣрѣ устранить на практикѣ указанные недостатки, нужно остановиться на одномъ изъ обоихъ произведеній. Лекціи всего скорѣе дадутъ нѣчто въ практическомъ отношеніи болѣе удовлетворительное. Если найдется время тамъ и сямъ пополнить ихъ, штудируя кое-что и изъ Теоріи функцій, именно по части приложеній къ геометріи и механикѣ, то это будетъ очень полезно. Но для главнаго дѣла это отнюдь не необходимо, и не нужно для тѣхъ, кто если и касается вершинъ математики и хочетъ воспользоваться и болѣе широкими горизонтами, но не имѣетъ въ виду навсегда въ этихъ сферахъ водвориться. Кто не имѣетъ въ виду сдѣлаться математикомъ по профессіи и не желаетъ слишкомъ спеціализироваться въ этихъ занятіяхъ, для того желательно, чтобы не была нарушена его умственная діэта и чтобы онъ не былъ черезъ мѣру обремененъ чтеніемъ и штудированіемъ въ одномъ опредѣленномъ направленіи. Будетъ онъ также по возможности остерегаться чисто пассивнаго отношенія къ дѣлу; пріучать умъ къ воспріятію готоваго хода мыслей должно остерегаться, кто не хочетъ утратить всякихъ способностей къ самостоятельной и энергичной дѣятельности и усыпить умственныя силы къ самопроизвольнымъ движеніямъ.

Если такое воздержаніе необходимо даже по отношенію къ наилучшимъ произведеніямъ литературы, то само собою понятно, что натуры, въ благородномъ смыслѣ слова превосходно одаренныя, будутъ пренебрегать литературою второго порядка и изъ этого правила дѣлать разумныя исключенія лишь постольку, поскольку рѣчь идетъ о мотивированномъ знакомствѣ съ кое-какими отдѣльными частностями и спеціальностями. Иногда и жалчайшая компиляція, но будучи какъ бы указателемъ или какъ бы газетою въ формѣ книги, можетъ служить путеводителемъ въ томъ или иномъ вопросѣ, указывая, гдѣ нужно искать лучшихъ источниковъ. Тѣмъ болѣе работы не чисто компилятивныя, но все-таки не изъ числа высшихъ, и даже не принадлежа къ числу высокихъ, могутъ все-таки по отдѣльнымъ задачамъ содержать кое-какія цѣнныя зернышки. Но только въ силу этого вообще и можно къ нимъ обращаться. Но это случается не часто, и тратить время на детальное штудированіе такихъ работъ нѣтъ надобности, и этого онѣ не стоятъ. Но кого опытъ еще не достаточно научилъ, такъ что новичокъ еще не извѣдалъ на дѣлѣ всей пользы нашего совѣта, тотъ все-таки можетъ a priori понять, что дѣйствительное сосредоточеніе всѣхъ умственныхъ силъ на работахъ перворазрядныхъ не соединимо съ подобнымъ же углубленіемъ въ произведенія, стоящія ниже. Высшая манера, встрѣчаемая въ произведеніяхъ перваго ранга, исключаетъ вкусъ къ низшему. Итакъ, оставимъ эти низшія сферы тѣмъ, кто по невѣжеству, по неспособности отличить лучшее отъ худшаго, или, что чаще бываетъ, застрявъ въ тискахъ школьныхъ рамокъ, никогда не найдетъ дороги къ высшему. Да большинство и всегда таково, что плоское, извращенное и пошлое и даже прямо ложное ему какъ-то болѣе сродно и потому больше говоритъ ему, нежели истинное и благородно оформленное. Это мы видимъ всюду въ жизни. Что касается духовной пищи, то черни здѣсь сравнительно еще больше, и она еще меньше въ состояніи различать здѣсь, нежели въ матеріальной пищѣ. Итакъ, кто хочетъ немного слѣдить за собой, тотъ долженъ остерегаться подражать толпѣ. Да и та любовь, какая умѣстна въ области науки, не терпитъ проституціи.

5. Характернымъ примѣромъ литературы второго порядка являются поползновенія Коши по части учебниковъ, включая сюда и тѣ, къ которымъ прикладывали руку и другіе, пользуясь раздутымъ реноме этого академика, чтобы подъ его флагомъ провести и свою стряпню. О послѣднихъ говорить здѣсь не мѣсто. Но собственныя попытки Коши по составленію учебниковъ не только непрактичны и расплывчаты, но и прямо—нѣчто негармоничное. Но если оставить въ сторонѣ его неудачныя предпріятія по

части учебниковъ, то, что касается другихъ широковѣщательныхъ работъ и «Упражненій» этого аналиста, то ни его дурно направленный скептицизмъ, ни заявленіе, что якобы лишь ему удалось достигнуть строгости, не могутъ обмануть опытнаго знатока подобныхъ типовъ. На дѣлѣ, за всѣмъ этимъ скрывается лишь оппозиція противъ натуральнаго, яснаго и проницательнаго разумѣнія и, такъ сказать, математическое іезуитство. Коши былъ не только наружно главнымъ математикомъ политической и церковной реставраціи, но и разыгрывалъ послѣ Лагранжевской революціи нѣчто въ родѣ математической реставраціи. По части изобрѣтенія новыхъ терминовъ, которыми прежняя простая наука затемнялась, былъ онъ очень плодовитъ; но настоящее дѣло было ему не по плечу, а кое-какія второстепенныя вещицы, ему принадлежащія или заинтересованною стороною ему приписываемыя, ничего не потеряютъ, если свѣдѣнія объ нихъ придутъ изъ вторыхъ или изъ третьихъ рукъ, или даже изъ компиляцій. Напротивъ, онѣ должны еще нѣсколько выиграть, если ихъ можно будетъ подвергнуть пересмотру безъ отношенія къ первоначальной связи ихъ. Да и вообще гдѣ угодно, а не только у безъ нужды широковѣщательнаго Коши, бываетъ это выгодно всюду, гдѣ чувствуется отсутствіе искуства систематической формовки, преимуществъ формы и хода мыслей, и вообще подобающаго и натуральнаго дара изложенія. Истинно-значительные результаты каждаго изъ этихъ преимуществъ рѣдко бываютъ на-лицо; но дѣйствительнаго виновника значительной вещи характеризуетъ, по меньшей мѣрѣ, натуральный ходъ мыслей.

Когда рѣчь идетъ объ изложеніи цѣлой науки, слѣдовательно, и настоящаго обширнаго руководства, то характеръ и цѣльность умственнаго типа имѣетъ еще большее значеніе, чѣмъ если бы рѣчь шла объ отдѣльныхъ статьяхъ и статейкахъ или о небольшомъ отдѣлѣ извѣстной научной области. Впрочемъ, и въ послѣднемъ случаѣ легко замѣтить, въ какой мѣрѣ ихъ виновники обладаютъ истинно систематическимъ умомъ. Однако, сильный систематическій умъ, съ присущею ему всеобъемлющею цѣльностью, въ полной мѣрѣ можетъ только тамъ проявиться, гдѣ приходится развить цѣлую систему ученія. Чтобы создать всеохватывающее учебное произведеніе въ высшемъ родѣ и благороднѣйшей формы, нужны бо̀льшія способности и даже несравненно высшіе духовные задатки, нежели такіе, которые достаточны для какихъ-либо спеціальныхъ изысканій въ извѣстной области и даже для созданія цѣлой такой области. Такъ, *Абель* есть такой аналистъ, котораго мѣсто тотчасъ послѣ Лагранжа, и рядомъ съ которымъ можно поставить только *Галуа*. Хотя Абель умеръ еще въ молодыхъ лѣтахъ, однако въ своей спеціальной области, именно въ эллиптическихъ функціяхъ и въ теоріи уравненій, онъ далъ довольно обширныя работы, такъ что его умственный типъ обрисовался довольно отчетливо. Отсюда для того, кто умѣетъ различать степени творческихъ дарованій, несомнѣнно, что задатками къ универсальной систематикѣ, которыми въ такой высокой степени одаренъ былъ Лагранжъ, Абель обладалъ лишь въ небольшой дозѣ, и что тамъ, гдѣ при обозрѣніи спеціальнаго круга понятій онъ и могъ проявить нѣчто подобное, все-таки задатки эти не могли проявиться у него съ такою же остротою. Поэтому, если бы онъ и прожилъ дольше, то едва ли, какъ Лагранжъ, и въ болѣе зрѣлые годы далъ бы настоящія систематическія произведенія, и если бы дѣйствительно что-либо въ этомъ родѣ предпринялъ, то все-таки въ отношеніи силы и сосредоточенности оставался бы значительно ниже Лагранжевскаго уровня. Если Абель и обладалъ нѣсколько большею точностью и большею логическою остротой по сравненію съ нѣсколько метафизицирующимъ Эйлеромъ, предшественникомъ Лагранжа на стезяхъ анализа, зато онъ не былъ такъ всеобъемлющъ, ибо съ самаго начала заключилъ себя въ слишкомъ узкія рамки. Въ этихъ рамкахъ, конечно, онъ не остался бы надолго, если бы въ немъ были сильные внутренніе задатки къ всеобъемлющему и универсальному. Во всякомъ случаѣ, нечего жалѣть, что есть умственные типы, которымъ врожденно спеціалистическое самоограниченіе, т.-е. у которыхъ неспособность слишкомъ раскидываться въ ширь переходитъ въ стремленіе замкнуться въ одной узкой области. Цѣною такого самоограниченія и односторонности покупается нѣчто хорошее, и иногда это хорошее развивается дальше, когда разъ протоpенное направленіе сохраняется какъ бы въ силу нѣкотораго духовнаго аналогона механическому закону инерціи. Но если это самоограниченіе заходитъ слишкомъ далеко, то это всегда—безусловное зло, если оно въ нѣкоторой мѣрѣ не уравновѣшивается и въ своихъ нежелательныхъ послѣдствіяхъ не находитъ себѣ корректива въ томъ, что другія личности являются носителями болѣе универсальныхъ дѣятельныхъ силъ. Способность держаться въ узкихъ рамкахъ, воздерживаясь отъ широкихъ обобщеній, является преимуществомъ еще тогда, когда должна быть воздѣлана какая-либо спеціальная область; хотя и въ самыхъ спеціальныхъ частностяхъ нерѣдко важно имѣть въ виду всѣ переходы, развѣтвленія и области, сродныя изучаемой.

Самъ Лагранжъ былъ даже натурою, которой стремленія шли выше области одной математики, и этимъ объ ясняется и то, что и въ математикѣ онъ держался универсально. Правда, онъ только на пятомъ десяткѣ всего живѣе почувствовалъ, что до сихъ поръ онъ застрялъ въ рамкахъ математики и механики. На нѣкоторое время вся эта область стала ему претить. Онъ надолго забросилъ всѣ свои занятія математикой, и только испробовавъ всякія другія специальности, снова обратился къ предмету прежнихъ своихъ работъ. Очевидно, проявить творческой дѣятельности въ какой-либо другой сферѣ онъ не могъ: было уже поздно. Но весь этотъ эпизодъ доказываетъ только то, что не его природныя склонности, а схематизмъ распредѣленія занятій у ученыхъ повиненъ въ томъ, что съ раннихъ поръ онъ не привлекъ въ область своего генія и чего-либо иного, кромѣ математики. Еще ранѣе, въ возрастѣ 40 лѣтъ, въ одномъ письмѣ къ Д'Аламберу (1781) онъ высказывается о состояніи истощенія почвы, которое замѣчаетъ онъ въ сферѣ математики. Слова его отчасти содержали оправдавшееся на дѣлѣ предсказаніе, и вообще служатъ свидѣтельствомъ, что чисто математическими занятіями онъ чувствовалъ себя угнетеннымъ и связаннымъ, даже прямо недоволенъ былъ тѣмъ, что ему волей-неволей приходилось замкнуться въ кругу этого рода задачъ. Онъ не ручается, пишетъ онъ, что лѣтъ черезъ 10 онъ возьмется за что-либо въ математикѣ. Буквально читаемъ слѣдующее: «И мнѣ кажется, что шахта почти уже доведена до конца, и что если не откроютъ какихъ-нибудь новыхъ ходовъ, то рано или поздно придется ее покинуть. Физика и химія предлагаютъ теперь сокровища, болѣе блестящія и допускающія болѣе легкую разработку; вкусы вѣка, кажется, всецѣло направились въ эту сторону, и нѣтъ ничего невѣроятнаго, что кресла математики въ академіяхъ въ одно прекрасное утро представятъ такое же зрѣлище, какое теперь въ университетахъ представляютъ каѳедры арабскаго языка». Письмо съ этими словами, вѣкомъ позднѣе, появилось въ 13-мъ томѣ твореній Лагранжа, и это—въ самую пору, чтобы напомнить, что предсказаніе о судьбахъ математики за это время какъ нельзя лучше оправдалось. Въ самомъ дѣлѣ, математиковъ, равныхъ Лагранжу, и успѣховъ въ математикѣ, какіе можно бы было приравнять Лагранжевскому варіаціонному исчисленію, съ тѣхъ поръ не появлялось, и если бы мѣста академиковъ существовали только ради настоящаго творчества, или даже ради творчества высокаго, то они давнымъ-давно были бы пусты. Мнѣніе Лагранжа, какъ это видно и изъ другихъ мѣстъ переписки, просто-на-просто состояло въ томъ, что появленія великихъ математиковъ въ ближайшемъ будущемъ ожидать нечего; ибо рѣшительно все какъ въ оскудѣвшемъ состояніи математики, такъ и въ качествахъ личностей, напр., и въ отношеніи Эйлера въ послѣдніе годы его дѣятельности, свидѣтельствовало о противномъ. Да и изъ себя Лагранжъ исключенія не дѣлаетъ, поскольку онъ припоминаетъ себѣ, что главный свой шагъ, изобрѣтеніе варіаціоннаго исчисленія, сдѣлалъ онъ въ возрастѣ 19-ти лѣтъ, и все, что удалось ему создать послѣ этого, включая и алгебру соединеній, цѣнилъ онъ не особенно высоко, ибо все это его не удовлетворяло. Что же касается сплошь всей послѣ-лагранжевской эры, то его предчувствіе болѣе чѣмъ оправдалось. Великихъ математиковъ, какъ представлялъ ихъ себѣ Лагранжъ, и дѣйствительно новыхъ значительныхъ находокъ не появлялось. Вмѣсто этого, примѣсью дряннѣйшаго суевѣрія и самой безнадежной пустоты успѣли только математику обезобразить и такимъ образомъ уронить еще ниже. Поворотъ къ физикѣ, и особенно къ химіи, сдѣлался еще рѣшительнѣе. Въ самой же математикѣ приходится еще ожидать новыхъ направленій, которыя дѣлали бы науку строже, а ея основы глубже, нежели видимъ это у самого Лагранжа. Но плодотворнѣе во-внѣ математика можетъ сдѣлаться только тогда, когда отпадутъ тѣ стѣсненія, которыя чувствовалъ и Лагранжъ и которыя заставляютъ ученаго вращаться въ слишкомъ тѣсномъ кругу его узкой спеціальности.

Математику и вмѣстѣ физику, по крайней мѣрѣ, мыслящему и вычисляющему физику предлежитъ вращаться въ опредѣленной, естественно отграниченной его предметомъ, сферѣ; но въ натурѣ съ задатками универсальными сюда непроизвольно примѣшиваются и высшія истины общаго міровoго значенія. Послѣднее имѣетъ мѣсто преимущественно въ такія времена, когда математика, механика и физика искуственно затемняются настолько, что могутъ быть очищены только при посредствѣ универсальнаго и основательнаго мышленія. Лагранжъ—единственный математикъ, который кое-что сдѣлалъ въ интересахъ такого поясненія. Но многое оставлено имъ безъ вниманія, и даже тамъ, гдѣ онъ работалъ въ этомъ направленіи всего рѣшительнѣе, это сдѣлалось возможно лишь благодаря тому, что его натура, по крайней мѣрѣ, отчасти, если и не прямо возставала противъ обычной вялости академическихъ сферъ, то все же не оставалась къ такому положенію вещей вполнѣ равнодушною. Лагранжъ былъ мирнымъ революціонеромъ въ наукѣ, или, лучше сказать, спокойнымъ начинателемъ и піонеромъ реформы, которая вполнѣ можетъ показать себя лишь позднѣе. То, что онъ сдѣлалъ, онъ дѣлалъ, по крайней мѣрѣ, въ послѣдній періодъ своей жизни, въ несвободныхъ рамкахъ, всегда насыщенныхъ удушливыми парами, академическихъ сферъ. Принадлежность къ ученому сословію и связанныя съ этимъ усмотрѣнія вообще ведутъ къ подавленію въ лучшихъ натурахъ нѣкоторой дозы хорошихъ свойствъ. Впрочемъ, Лагранжъ въ извѣстной мѣрѣ держалъ себя независимо; но, по характеру своему, не былъ въ состояніи отрѣшиться отъ всего, что, по своей формѣ и содержанію, было въ манерахъ ученаго сословія неестественно, и прямо все это отвергнуть. Этою, присущею его генію, относительною пассивностью объясняется и то, что онъ остановился на полпути, и послѣ революціоннаго порыва только однажды сдѣлалъ рѣшительный шагъ, и на этомъ покончилъ. Онъ былъ въ истинномъ смыслѣ слова учителемъ, и былъ слишкомъ честною натурою, чтобы преподносить старую туманную стряпню. Итакъ, онъ создалъ себѣ систему, свободную отъ этой стряпни. Этотъ актъ былъ самымъ рѣшительнымъ взмахомъ и высшимъ пунктомъ его дѣятельности.

То, что сдѣлалъ Лагранжъ для раціонализированья высшаго анализа, было,—если имѣть въ виду эпигоновъ этой эпохи,—съ одной стороны, слишкомъ много, а съ другой—слишкомъ мало. Слишкомъ много; потому что тѣ, которые выступили послѣ него, не могли подняться на эту высоту. Слишкомъ мало; потому что оставленъ былъ большой пробѣлъ, благодаря чему не было безусловной необходимости, да и не вездѣ было возможно, мыслить въ высшемъ анализѣ правильными понятіями. Какъ сказано, не хватало самаго значительнаго, того, что имѣетъ рѣшающее значеніе,—не было непосредственно дано недвусмысленнаго и правильнаго понятія дифференціала. Неясность и ложь, которыя нашли себѣ здѣсь прочное убѣжище, должно исправить, а не просто обойти. Этимъ и объясняется, почему позднѣйшіе математики, какъ именитые, такъ и обычный хоръ, въ этомъ рѣшающемъ главномъ пунктѣ ничему не научились. Вообще, Лагранжа, и именно его лучшихъ твореній, всего менѣе изучали; его «Лекцій», рекомендованныхъ нами для изученія, даже долго не было въ продажѣ, и даже въ общемъ изданіи пришлось долго ждать ихъ. Характерно также, что это общее изданіе появилось на счетъ государства, и что даже изданія отдѣльныхъ главныхъ произведеній Лагранжа частными предпринимателями являются черезъ длинные промежутки времени, какъ это доказывается французскими изданіями, такъ какъ двухъ или трехъ, вначалѣ въ очень ограниченномъ числѣ экземпляровъ, оказалось достаточно почти для трехъ поколѣній. Нѣмецкій переводъ трехъ чисто математическихъ главныхъ произведеній, «Теоріи функцій», «Функціоннаго исчисленія» и «Числовыхъ уравненій», несмотря на умѣренную цѣну, не разошелся и въ 60 лѣтъ; впрочемъ, это служитъ лишь незначительною инстанціей для характеристики популярности Лагранжевыхъ произведеній. Это не просто сносный переводъ словъ на нѣмецкій, но и невыносимый переводъ формулъ съ Лагранжевскаго языка на языкъ Лейбница, и слѣдовательно, идіотская нелѣпость, которая бьетъ по лицу здравый смыслъ, вслѣдствіе чего новичокъ по этому переводу главнаго-то дѣла и не узнàетъ. Этотъ разладъ между содержаніемъ и формой дѣйствуетъ просто отвратительно, не говоря уже о томъ, что оселъ переводчикъ, лишившій смысла Лагранжевы формулы, этотъ, бывшій якобы основателемъ названнаго его именемъ и, благодаря участію Абеля, нѣкоторое время процвѣтавшаго Креллевскаго журнала математики,—что этотъ переводчикъ возымѣлъ еще пропорціональную своей глупости дерзость прерывать и вспучивать Лагранжевскій текстъ вставкой своихъ каракуль. Если нѣмецкіе покупатели этихъ книгъ и не сознавали ясно, что̀ имъ преподносится подъ именемъ Лагранжа, то все-таки они должны были чувствовать, что такое поученіе не очень имъ поможетъ. Чистыя, принадлежащія обыкновенному анализу, понятія Лагранжа, благодаря устраненію собственной его нотаціи, потеряны, ибо,—напомнимъ это здѣсь еще разъ, —$\frac{dy}{dx}$ есть лишь неограниченное приближеніе къ y', но не есть въ точности самое y'. И самостоятельный французскій учебникъ извѣстнаго Курно, который уже своимъ заглавіемъ «Элементарная теорія функцій» заявлялъ, что онъ какъ бы примыкаетъ къ Лагранжу, не давалъ никакого понятія о сущности Лагранжевской строгости, но своимъ поверхностнымъ философствованьемъ со старою нотаціей преподносилъ, въ сущности, только старую двусмысленность и туманъ. Впрочемъ, авторъ страдалъ чрезмѣрнымъ математическимъ образованіемъ, которое его мучило, и такъ какъ онъ не зналъ, что съ нимъ дѣлать, то иногда заѣзжалъ съ нимъ въ чужіе огороды, которые, какъ наприм., ученіе о народномъ хозяйствѣ, слишкомъ часто посѣщаются лицами съ превратнымъ математическимъ образованіемъ, впутывающими туда математику ни къ селу ни къ городу. Весь этотъ случай приведенъ здѣсь какъ доказательство, что сплошь и рядомъ Лагранжа не понимаютъ; ибо упомянутый учебникъ былъ въ 40-хъ годахъ переведенъ на нѣмецкій языкъ и удостоивался рекомендаціи со стороны тѣхъ, кто еще немножко чувствовалъ и умѣлъ цѣнить преимущества Лагранжевской формы.

6. Способъ обозначенія, отличный отъ дифференціальной нотаціи, неизбѣженъ, если вмѣсто неограниченныхъ приближеній хотятъ выразить сами точныя значенія, чтобы именно отличить ихъ отъ этихъ приближеній. Въ виду этого, Лагранжева система производныхъ функцій съ со-

принадлежною нотаціей должна быть сохранена и послѣдовательно проведена. Но точно такъ же необходимо и непосредственное оперированіе съ малыми величинами, и не только въ приложеніяхъ, но и въ чистой математикѣ. Эта вторая система не равнозначна первой, какъ ошибочно представлялъ себѣ Лагранжъ, но представляетъ собою какъ бы вторую, дополнительную къ первой, половину. Обѣ вмѣстѣ образуютъ новую, цѣльную систему, сформованную какъ бы въ видѣ одного слитка. Въ односторонней Лагранжевской системѣ малыя величины или вспомогательныя количества, обозначаемыя у него буквами i, o и т. п., отступали у него на второй планъ, составляя неизслѣдованный, совершенно неизбѣжный остатокъ дифференціальнаго исчисленія въ собственномъ смыслѣ. Понимая дѣло такимъ образомъ, мы этимъ указываемъ, что исчисленіе съ неограниченно малыми приращеніями принадлежитъ всякому законченному ходу мышленія, и потому со всею свойственною ему удобною нотаціей должно быть включено въ новую систему всего разсматриваемаго способа исчисленія. Эта предлагаемая нами система совершенна лишь благодаря тому, что съ обоими понятіями, при строгомъ ихъ различеніи, оперируетъ такъ, что всякій разъ извѣстно, идетъ ли рѣчь о приближенной величинѣ, или о точной величинѣ; и что точно также всякій разъ даетъ средства судить, какъ всего цѣлесообразнѣе вести заключенія—непосредственно ли съ малыми приращеніями, или при посредствѣ, уже свободныхъ отъ этихъ вспомогательныхъ величинъ, производныхъ.

Пока еще нельзя избѣжать того, чтобы учащійся не испытывалъ нѣкотораго неудобства. Въ основу изученія онъ долженъ положить книгу Лагранжа о функціонномъ исчисленіи, и одновременно съ этимъ усваивать себѣ непосредственно дифференціальныя понятія изъ курсовъ Навье или Штурма. Но къ этой двойственной задачѣ присоединяется еще третье требованіе—оформливать и пополнять Лагранжеву систему по указанію нашихъ «Новыхъ основныхъ средствъ». Только такимъ образомъ возникаетъ совокупность строгихъ и вмѣстѣ всесторонних ученій, посредствомъ которыхъ является возможность удобнымъ и вѣрнымъ путемъ овладѣть всѣмъ высшимъ исчисленіемъ. Конечно, учащемуся было бы пріятнѣе имѣть дѣло съ одною книгой, которая непосредственно удовлетворяла бы всѣмъ указаннымъ требованіямъ, въ которой вмѣстѣ съ тѣмъ разсматривались бы избранные спеціальные вопросы такъ же изящно и доступно, какъ у Лагранжа. Подобный курсъ могъ бы, кромѣ того, рядомъ съ теоретическимъ содержаніемъ включать и непосредственно практическій матеріалъ,—нѣчто такое, что можно было бы назвать практическою высшею математикой. Такимъ образомъ, техникъ, архитекторъ, военный и вообще всякій, кто обращается къ математикѣ главнымъ образомъ ради ея приложеній, нашелъ бы въ книгѣ отвѣчающую его запросамъ форму абстрактнѣйшихъ ученій. Этимъ путемъ воспитывался бы также и распространялся и вкусъ къ чистой и изящной формѣ изложенія, и удовольствіе, какое уже само собою приноситъ хорошо оформленное, ясное и простое знаніе, повышалось бы еще указаніемъ на его практическую силу и значеніе. Но, судя по всѣмъ видимостямъ, такая книга можетъ появиться только тогда, когда ея шансы улучшатся болѣе рѣшительными направленіями какъ въ теоріи, такъ и во внѣшнихъ отношеніяхъ. Если бы Лагранжъ не былъ изобрѣтателемъ варіаціоннаго исчисленія, и если бы не благопріятствовалъ ему внѣшній переворотъ, то мы не имѣли бы и его учебника въ новомъ родѣ, и ему пришлось бы встрѣтить еще большія помѣхи, нежели какія и безъ того ставило ему почти все 19-е столѣтіе.

Замѣтимъ кстати, что такое цѣлостное учебное руководство, какое представляемъ себѣ мы, по объему не должно бы было превосходить тома среднихъ размѣровъ; ибо было бы нелѣпо размѣры книги считать вещью маловажною. Творенія генія и критики всегда, относительно говоря, сжаты. Слишкомъ объемистыя работы всегда имѣютъ характеръ сборниковъ, компиляцій, пустого выпрядания или, въ благопріятнѣйшемъ случаѣ, детальности лексикона. Но для изученія, для образованія и для практическихъ примѣненій годится лишь вполнѣ систематизированное и критическое сочетаніе лучшаго и наиболѣе характеристичнаго, что только можетъ быть дано, такое сочетаніе, что, осиливъ его, всякій легко могъ бы самостоятельно усвоить себѣ все остальное. Но дѣйствительно хорошаго знанія, такого, усвоеніе котораго стоило бы затраченныхъ силъ, въ какомъ угодно родѣ имѣется не слишкомъ много. Пухлые учебники обыкновенно такъ набухаютъ вслѣдствіе отсутствія критики, тупого зарегистровыванія, и въ результатѣ этого и появляется смѣсь всякой всячины, въ которой лишь немного такого, изъ чего можно сдѣлать жизненное употребленіе. Теперешнее размноженіе компендій, объемъ которыхъ является какъ бы издѣвательствомъ надъ этимъ названіемъ, для знатока въ этихъ дѣлахъ, по-истинѣ, вовсе не служитъ признакомъ расширенія, а, напротивъ, служитъ признакомъ упадка науки и обученія. Чѣмъ совершеннѣе наука и обученіе по формѣ и по содержанію, тѣмъ проще и удобнѣе для обозрѣнія долженъ быть изложенъ учебный матеріалъ, все равно, идетъ ли рѣчь о школьныхъ учебникахъ, или объ учебныхъ произведеніяхъ для «большой публики». Конечно, лучше всего было бы, если бы оба рода соединялись воедино, и учебное руководство для большой публики было бы вмѣстѣ и учебнымъ школьнымъ курсомъ или руководствомъ для самообученія по этому предмету. Но такое образцовое изложеніе извѣстной научной области возможно только тогда, когда примѣнены будутъ всѣ средства выбора и просѣванія, которыя дозволяли бы, несмотря на краткость, самостоятельно овладѣть матеріаломъ.

Монографіи отдѣльныхъ вѣтвей той или другой научной области не относятся къ такимъ общимъ курсамъ, которымъ приличествуетъ равномѣрное изложеніе всѣхъ ученій. Но въ раздѣленіяхъ и подраздѣленіяхъ науки всегда есть граница, гдѣ начинаются уже такіе отпрыски, изученіе которыхъ уже не совпадаетъ съ интересами общаго образованія или изученія извѣстной спеціальности. Къ значительнымъ результатамъ, появляющимся въ такихъ спеціальныхъ отрасляхъ, конечно, не должны индифферентно относиться и тѣ, кто не можетъ принимать самостоятельнаго участія въ изслѣдованіяхъ этихъ спеціальныхъ отраслей. Но тогда эти результаты должны быть вносимы въ общіе курсы, предполагая, что уже найдены пути къ обоснованію ихъ простымъ и краткимъ способомъ. Математикъ прежде всякой такой особой отрасли, которою онъ при случаѣ могъ бы также заняться, долженъ прежде всего основательно знать общую математику какъ цѣлое. Что̀ здѣсь, смотря по состоянію науки, можно бы было разрабатывать далѣе, это всегда нетрудно видѣть. Концентрированнаго обзора всѣхъ главныхъ средствъ математики совершенно достаточно, не для математика по профессіи, конечно, который ищетъ овладѣть своею наукой, а напримѣръ, для физика, который ищетъ исключительно полезныхъ приложеній математическихъ ученій.

Здѣсь могутъ имѣть мѣсто разнообразныя формы и отграниченія; но главнымъ дѣломъ всегда остается математическое образованіе какъ нѣчто цѣльное, идетъ ли рѣчь о такъ называемыхъ спеціалистахъ, работающихъ односторонне въ какомъ-нибудь одномъ направленіи, или о такихъ лицахъ, которыя движутся не въ рамкахъ профессіональнаго ученаго. Къ послѣднимъ принадлежатъ не только тѣ, которымъ математика нужна для другихъ цѣлей, или которые занимаются ею изъ любви къ предмету, но и такія рѣдкія явленія, которыя расширяютъ математическую науку, но слишкомъ универсальны, чтобы ограничиваться одною математикой.

7. На чемъ же нужно сосредоточиться, чтобы дать это необходимое цѣлое? Это всего яснѣе опредѣляется тѣмъ, что̀ при какомъ угодно состояніи математическаго знанія является руководящею главною математическою наукой. Въ эпоху Лагранжа математика развилась уже настолько, что изобрѣтенные въ новое время способы исчисленія, именно дифференціальное и интегральное исчисленія, весьма ясно обозначились какъ такія руководящія силы. Соединеніе руководящаго содержанія математики Лагранжемъ въ функціонное исчисленіе сдѣлало это еще яснѣе. Но въ настоящее время, благодаря разработанной нами точкѣ зрѣнія, выяснилось, что высшею математическою наукой, которой должны быть подчинены всѣ другія части математики, должно быть ученіе о функціяхъ и функціонное исчисленіе, даже принимая эти названія шире, нежели какъ понималъ ихъ Лагранжъ.

Во-первыхъ, ученіе объ эллиптическихъ функціяхъ есть лишь спеціальная, да къ тому же весьма неплодотворная вѣтвь этой руководящей области. Она уклоняется слишкомъ далеко въ сторону во всякаго рода изслѣдованія и отношенія, которыя по меньшей мѣрѣ на девять десятыхъ въ двоякомъ смыслѣ никакой цѣны не имѣютъ, какъ неприложимыя на практикѣ, съ одной стороны, и какъ не удовлетворяющія ума, съ другой стороны. Къ тому же, въ послѣднемъ отношеніи, въ нихъ слишкомъ недостаетъ простоты, гармоніи и спекулятивно интересныхъ вопросовъ. Абель, который въ этой области сдѣлалъ почти все, что свидѣтельствуетъ о геніальности, благодаря случайнымъ обстоятельствамъ, свернулъ въ сторону съ настоящаго пути. Когда, благодаря годамъ и обстоятельствамъ, онъ получилъ возможность печатать свои изслѣдованія въ журналѣ, собранные Лежандромъ матеріалы объ эллиптическихъ интегралахъ предоставили въ его распоряженіе желанный матеріалъ, чтобы онъ могъ проявить на немъ свои превосходныя способности. Одного взгляда на аналогіи съ тригонометрическими функціями было достаточно, чтобы прочно установить понятіе объ эллиптическихъ функціяхъ какъ объ обращеніи интеграловъ и установить главнѣйшія предложенія всей этой области. Но чего-либо особенно высокаго во всемъ этомъ нѣтъ, равно и въ тѣхъ обобщеніяхъ эллиптическихъ функцій, которыхъ достигъ Абель и которыя называются функціями Абеля. Предметъ этотъ былъ ниже уровня абелевскаго генія, который, по счастію, упражнялся и въ высшихъ и въ болѣе цѣнныхъ задачахъ, какъ напр. въ алгебраическихъ вопросахъ, завѣщанныхъ Лагранжемъ. Что послѣ трудовъ Абеля раздѣлыванье эллиптическихъ функцій уже не требовало особыхъ способностей, показываютъ качества тѣхъ людей, которые, благодаря любезностямъ коллегъ, получили извѣстность какъ эллиптическія функціонеры по преимуществу. Вся ихъ стряпня не болѣе какъ путаная пачкотня, и вещички, которыми они любятъ похвастаться, просто ребячьи затѣи, но, конечно, не совсѣмъ невинныя шалости, такъ какъ эти кляксы, по меньшей мѣрѣ, мараютъ математику.

Кто объ этомъ отпрыскѣ анализа, называемомъ эллиптическими функціями, хочетъ получить болѣе полныя свѣдѣнія, тотъ, изучивъ общій анализъ по Лагранжу, тотчасъ долженъ обратиться къ Абелевымъ Recherches sur les fonctions elliptiques, которыя и могутъ служить весьма хорошимъ введеніемъ въ этотъ предметъ. Безвкусныя компендіи, которыя пекутся на одинъ день ради школьнаго употребленія, можетъ онъ тогда оставить въ покоѣ; развѣ, пожалуй, можетъ перелистать что-либо въ родѣ прибавленія къ Штурму, чтобы, напр., ознакомиться съ Тэта-функціями, основанія которыхъ, хотя въ другихъ изслѣдованіяхъ, даны также Абелемъ; впослѣдствіи Якоби, какъ и подобаетъ еврею, вывезъ ихъ на рынокъ подъ своею маркою, какъ будто это былъ его товаръ. Нельзя не пожалѣть, что эти Recherches, которыя между многими и обширными работами Абеля являются главными и отличаются своею простотою, не появились въ продажѣ отдѣльно, и могутъ быть покупаемы только въ собраніи его твореній. Да и послѣдняго въ продажѣ долго не было, и только въ 1882 г., изданное на счетъ норвежскаго правительства, оно сдѣлалось снова доступно.

Еще неплодотворнѣе, чѣмъ разработка эллиптическихъ функцій, занятія такъ называемою Теоріей чиселъ, и только тщеславіе Гаусса, въ связи съ его вліяніемъ на замѣщеніе профессорскихъ каѳедръ, повело къ тому, что въ Германіи этотъ жалкій отпрыскъ математическаго знанія, не представляющій ничего серьезнаго, эта чистая забава, на дѣлѣ могла сдѣлаться главнымъ предметомъ университетскихъ лекцій. Вслѣдствіе этого и будущіе учителя математики, въ виду произвола на экзаменахъ, весьма часто бываютъ вынуждены заниматься зубрежкой теоріи чиселъ выше всякой разумной мѣры. Приэтомъ, приписываемыя покойному профессору Лежену-Дирикле лекціи, т.-е. чужая работа, присоединенная къ первой части его чтеній, служатъ главнымъ пособіемъ вмѣстѣ съ этою первою частью.

Во всей Теоріи чиселъ нѣкоторое значеніе имѣютъ собственно только отношенія первой степени. Что же касается почти всего того, что идетъ выше этихъ рамокъ, то современная разработка въ 19-мъ столѣтіи, не исключая и Гауссовской, похожа на пустую молотьбу соломы. Но и касательно первой степени надо замѣтить, что ничего важнаго, что принадлежало бы собственно Гауссу, здѣсь не имѣется; ибо Ферматовы предложенія были доказаны еще Эйлеромъ. Да и вообще Теорія чиселъ, благодаря именно гауссовскимъ работамъ, сдѣлалась прямо полемъ математическаго скудоумія. Въ теоріяхъ и въ литературѣ шахматной игры несравненно больше ума, чѣмъ въ этой теоріи чиселъ, комически выдаваемой за высшую математическую науку. Лежандръ и здѣсь, какъ и для эллиптическихъ интеграловъ, раньше другихъ собралъ матеріалъ и пустилъ въ обращеніе названіе. Однако, точнѣе будетъ, если теорію чиселъ не считать самостоятельною наукою; ибо въ ней рѣчь идетъ лишь о второстепенныхъ вспомогательныхъ средствахъ, которыя нужны при случаѣ, когда болѣе общія математическія задачи приводятъ къ вопросамъ объ отношеніяхъ цѣлыхъ чиселъ. Но пусть мы желаемъ изслѣдовать, какую форму примутъ всѣ функціональныя количественныя отношенія, если въ нихъ всѣ величины или нѣкоторыя изъ нихъ должны быть цѣлыми числами. Такимъ образомъ получилось бы въ обширнѣйшемъ смыслѣ слова и то, что можно бы было назвать свойствами числовыхъ формъ, и что до извѣстной степени во всякомъ случаѣ могло бы составить отдѣльную совокупность ученій. И однако, все-таки было бы неправильно не видѣть второстепенной природы всѣхъ подобныхъ вопросовъ, которые только и имѣютъ значеніе какъ придатокъ къ другому. Во всякомъ случаѣ, цѣлое число есть нѣчто весьма отвлеченное, но и вмѣстѣ нѣчто спеціальное; ибо понятіе абстрактной величины общѣе. Поэтому ученія по теоріи чиселъ могутъ быть только частными случаями болѣе общихъ ученій, имѣющихъ въ виду вообще функціональныя отношенія. Ученіе о функціяхъ, понимая функцію въ болѣе широкомъ смыслѣ слова, остается, слѣдовательно, высшею и руководящею математическою наукою.

Въ заключеніе замѣтимъ еще, что курсъ высшаго анализа, если въ отдѣльныхъ спеціальныхъ частяхъ нужно развѣтвлять его нѣсколько шире, требуетъ, чтобы было обращено особое вниманіе на тему опредѣленныхъ интеграловъ и дифференціальныхъ уравненій съ частными производными. Но отсюда не слѣдуетъ, чтобы нужно было терять время на соотвѣтствующія модныя университетскія лекціи, даже когда подъ этою рубрикою имѣется и нѣчто печатное. Какъ и всѣ вообще университетскія лекціи по математикѣ, это будетъ скудная компиляція, растянутая въ длинный рядъ спеціальныхъ лекцій, чтобы наполнить ими семестръ, или вообще чтобы придать дѣлу видъ чего-то особеннаго. На дѣлѣ же, сносныя спеціальныя главы общаго курса содержатъ все существенное. Все же то, что напечатано, напр., подъ именемъ Риманновскихъ лекцій о парціальныхъ дифференціальныхъ уравненіяхъ, выглядитъ еще кудреватѣе, чѣмъ книги самого Риманна, и всякому натуральному чувству претитъ. Что же касается другихъ спеціальныхъ штукъ, вывезенныхъ на рынокъ подъ знаменемъ того или другого умершаго профессора, съ еще меньшимъ на то правомъ и въ самой паршивой еврейской формѣ, то разбирать ихъ въ частности было бы ниже достоинства нашей критики.

8. Если оставить въ сторонѣ эти отвѣтвленія, даже и тамъ, гдѣ они оформлены лучше, а не основную форму руководящей области воззрѣній, то, въ виду сказаннаго, не можетъ быть никакого сомнѣнія, что всюду приходится имѣть дѣло съ господствомъ полнѣйшей аналитической абстракціи. Только такимъ путемъ наука и штудіи достигаютъ своей полной силы и своего неумаленнаго значенія. Приэтомъ само собою разумѣется, что подняться до возможнѣйшей абстракціи и затѣмъ двигаться далѣе въ полѣ этой абстракціи не то же самое что созидать изъ абстракцій. Думать такъ значитъ не понимать характера произведеній, возможныхъ только благодаря чисто аналитическому алгориѳму, а въ извѣстномъ смыслѣ значитъ также слишкомъ высоко цѣнить ихъ. Но какъ, съ другой стороны, опасность слишкомъ низкой оцѣнки всего болѣе угрожаетъ болѣе грубымъ натуральнымъ точкамъ зрѣнія великихъ людей, а не просто болѣе ограниченнымъ или же менѣе абстрактнымъ умственнымъ наклонностямъ, то полезнѣе разъ навсегда составить себѣ болѣе ясное представленіе о необходимости аналитической абстракціи. Нѣтъ ни одной области, гдѣ необходимость высокой абстракціи и соотвѣтствующаго выдѣленія чистаго вычисленія не имѣла бы мѣста. Такъ, напр., въ аналитическихъ абстракціяхъ геометріи не думайте, что все дѣло въ координатахъ, ибо примѣненіе координатъ, разъ оно должно быть цѣлесообразно,—не обнимаетъ всей области геометріи и ея задачъ. Напр., формулу обобщенной или даже и собственно Пиѳа-

горовой теоремы можно принять за чисто аналитическую абстракцію. То, что такимъ путемъ будетъ найдено, движется уже не путями непосредственной геометріи, а есть результатъ алгебры или анализа перемѣннаго.

До сихъ поръ даже и въ области анализа въ собственномъ смыслѣ не всюду надлежащимъ образомъ слѣдовали закону полной аналитической абстракціи. Даже у Лагранжа, который вообще является представителемъ доселѣ достижимой высшей степени цѣлесообразной абстракціи, недостаетъ нѣкоторыхъ переходовъ. Такъ, тригонометрическія функціи хотя и фигурируютъ у него какъ аналитическія, поскольку предполагается, что для нихъ уже существуютъ ряды, но при непосредственномъ введеніи ихъ, теоремы сложенія, найденныя геометрическимъ путемъ, служатъ каждый разъ для нахожденія первыхъ коэффиціентовъ рядовъ, т.-е. производныхъ функцій, а слѣдовательно, и самихъ рядовъ. Правда, эти геометрическія предложенія, которыми Лагранжъ такимъ образомъ пользуется, выражены у него не языкомъ геометріи, т.-е. не языкомъ, который онъ называетъ мертвымъ. Тѣмъ не менѣе, на дѣлѣ, остается теорема, которая предполагается доказанною чисто геометрическимъ путемъ.

Все это страдаетъ недостаткомъ послѣдовательности въ смыслѣ чистаго вычисленія при посредствѣ сведенія къ возможно меньшей мѣрѣ геометрическихъ точекъ приложенія. Заимствованію изъ тригонометріи подлежитъ понятіе лишь одной тригонометрической функціи, напр., синуса, а не такой сложной истины какъ теорема суммы, выражающая функцію цѣлаго соотвѣтствующими функціями слагаемыхъ. Тамъ, гдѣ развиваютъ теорію синуса какъ аналитической функціи, и самый синусъ разсматривается сплошь какъ функція аналитическая, послѣдняя теорема должна еще быть доказана аналитически путемъ вычисленія, прежде чѣмъ дозволительно ею пользоваться. Чисто геометрическій выводъ ея будетъ не только излишнимъ обремененіемъ, но и прямо погрѣшностью противъ высшей научности новой системы, которую нельзя уже разыгрывать геометрически, разъ научились находить абстрактныя посредства. Было бы прямо логическою ошибкою — заключенія, зависящія только отъ абстрактныхъ понятій, несмотря на это, все-таки вести путемъ понятій конкретныхъ. Такимъ образомъ звенья, путемъ которыхъ идутъ, облекались бы несоотвѣтственными свойствами, на которыя опираться въ цѣляхъ достиженія результата неподобаетъ. Но это будетъ всегда, если безъ нужды привлекать непосредственную геометрію, механику или физику, вмѣсто того чтобы вести изслѣдованія путемъ операцій чистаго вычисленія. Иное дѣло, конечно, если преслѣдуются цѣли наглядности, въ видахъ ли контроля и провѣрки, свободно ли отъ ошибокъ абстрактное цѣлое, или въ тѣхъ видахъ, чтобы нѣсколько помочь такимъ натурамъ или такимъ стадіямъ развитія, которымъ высшій способъ заключеній непонятенъ или необыченъ. Но такое пониженіе высшей научной формы отнюдь не отвергаетъ образцоваго отношенія къ дѣлу вообще. Впрочемъ, конкретные методы всегда будутъ научною отсталостью, разъ имѣются на лицо болѣе абстрактные.

Сообразно этому, — обращаемся опять къ примѣру, — въ анализѣ сплошь необходимо опредѣлять синусъ съ самаго начала какъ функцію обратную дуговому интегралу. Самую дугу представляютъ при этомъ неограниченнымъ числомъ суммованій неограниченно-малыхъ элементовъ, слѣдовательно, совокупностью прямо выполнимыхъ операцій съ неограниченнымъ приближеніемъ. Но обратная этому интегралу функція точно также есть понятіе чистаго вычисленія, совершенно такъ же, какъ понятіе всякаго другого корня уравненія. Поэтому геометрическая точка приложенія оправдывается лишь постольку, поскольку понятію синуса, по справедливости, долженъ быть данъ такой видъ, какъ будто бы оно было создано анализомъ, т.-е. комбинаціями чистаго вычисленія. Это чисто аналитическое созиданіе не должно смѣшивать съ добавочнымъ чисто аналитическимъ опредѣленіемъ. Чистый анализъ могъ бы долго идти ощупью, прежде чѣмъ, подъ давленіемъ потребностей чистаго вычисленія, могъ бы достигнуть функціи, подобной синусу. Во всякомъ случаѣ, единственный путь, которымъ онъ могъ бы достигнуть этого, было бы мнимое разложеніе показательнаго ряда. Пришли бы къ соотношенію $e^{x\sqrt{-1}} = \varphi(x) + \sqrt{-1} \cdot \psi(x)$, выдвинувъ въ ряду r оба ряда r_1 и r_2 какъ особыя функціи. Аналитическое употребленіе и аналитическая теорія этихъ функцій должны бы были примыкать сюда такъ, чтобы не было надобности даже и въ названіяхъ косинуса и синуса, а также чтобы не было никакой нужды обращаться къ геометрическому значенію новыхъ функцій въ чистомъ анализѣ, разумѣя подъ этимъ именемъ не приложенія, а анализъ, вращающійся въ собственной своей области. Слѣд., кто хочетъ изгнать отсюда всякій слѣдъ геометрическихъ точекъ приложенія, тотъ можетъ поступать указаннымъ образомъ. Однако, такіе обороты ни натуральны, ни освящены исторіей; ибо гдѣ аналитическія функціи на дѣлѣ получены отвлеченіемъ отъ вещественныхъ функцій, тамъ этого происхожденія ихъ отрицать не должно. Именно—случай обычный, что аналитическія функціи, носящія опредѣленный сложный отпечатокъ, вмѣстѣ съ тѣмъ отвлеченно выражающій типъ, важный для приложеній, имѣютъ источникомъ вещественныя функціи и на дѣлѣ суть не иное что, какъ эти послѣднія, но лишь съ удержаніемъ того изъ ихъ содержанія, что относится къ количественнымъ операціямъ. Такимъ образомъ, редукція вещественныхъ функцій къ анализу является главнымъ источникомъ дѣйствительно годныхъ въ дѣло аналитическихъ функцій. Другіе, чисто аналитически-комбинаторные пути хотя даютъ также нѣчто важное и имѣющее рѣшающее значеніе, но если оставаться только при нихъ, въ концѣ концовъ распустились бы въ нѣчто шаткое и неопредѣленное, да на дѣлѣ часто и ведутъ къ безсвязной игрѣ.

Изъ формулы чистаго вычисленія путемъ чистаго вычисленія можно получить опять только формулы, притомъ лишь такія, которыя достижимы какъ результатъ преобразованій при посредствѣ операцій чистаго вычисленія. Изъ аналитическаго можно выткать опять лишь аналитическое, и только заключительный переводъ на языкъ вещественный дозволяетъ достигнуть области, которая первоначально и послужила источникомъ для аналитической абстракціи. Но операціи вычисленія сами по себѣ не нуждаются ни въ какомъ вещественномъ руководительствѣ, и поэтому импульсы къ направленію анализа, разъ онъ слѣдуетъ цѣлямъ, не въ самомъ себѣ лежащимъ, необходимо заимствовать изъ какой-либо иной области. Пусть имѣемъ центральное уравненіе круга; то изъ него одного, т.-е. не обращаясь къ какому-нибудь новому геометрическому основанію, нельзя придти къ дуговому интегралу; ибо только какимъ-нибудь случайнымъ путемъ можно бы было натолкнуться на составленіе какъ разъ такого элемента какъ $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ и взять его интегралъ. Для ректификаціи кривыхъ недостаточно имѣть дѣло только съ ихъ уравненіями, но нужно еще обратиться къ уравненію характеристическаго треугольника или къ какому-нибудь суррогату этого характеристическаго геометрическаго соотношенія. У Лагранжа этимъ суррогатомъ является Архимедова аксіома, что величина дуги кривой заключается между ея хордою и двумя отрѣзками касательныхъ въ конечныхъ точкахъ дуги; ибо этихъ линейныхъ отрѣзковъ также нельзя опредѣлить чисто изъ уравненія, а, какъ и въ случаѣ неограниченно - малаго треугольника ds, dx и dy, лишь на основаніи спеціальнаго приложенія Пиѳагоровой теоремы. Такимъ образомъ, во всякомъ случаѣ къ уравненію кривой, абстрагированному изъ геометрическаго матеріала, нужно еще абстрагировать второе уравненіе изъ того же матеріала, и тогда только можно будетъ идти далѣе.

Незнаніе такихъ различій открыло доступъ тому суевѣрію, что будто бы чистое вычисленіе, какъ таковое, можетъ обосновать и произвести все что угодно, и даже лучшимъ авторамъ, какъ Лагранжъ, полезно было бы, чтобы у нихъ имѣлось ясное критическое сознаніе объ этомъ различіи источниковъ воззрѣній, вмѣсто того чтобы руководствоваться просто своимъ врожденнымъ тактомъ. Тогда и второй руки виртуозамъ, вродѣ Лапласа, не могло бы взбрести въ голову такихъ фантазій, какова, напримѣръ, попытка выудить основной законъ силового сложенія, такъ называемый параллелограммъ силъ, изъ чистаго анализа. Но, съ другой стороны, при наличности метода, который охватывалъ бы и радикально выдвигалъ бы эти критическія различенія, скорѣе пришли бы и къ признанію необходимости полной аналитической абстракціи. Тогда не такъ-то легко было бы противопоставить ей тѣ реакціонныя поползновенія, которыя въ 19-мъ столѣтіи нашли себѣ мѣсто въ геометріи и механикѣ. Такимъ образомъ, полнѣйшая аналитическая абстракція и строгость,—возвращаемся опять къ нашему примѣру,—очевидно приводитъ къ тому, чтобы функцію, на дѣлѣ заимствованную изъ геометріи, сдѣлать вполнѣ аналитическою, сведя ее къ совокупности вычислительныхъ операцій. Превращеніе синуса въ разсматриваемое обращеніе интеграла и есть такая редукція, и знакъ *sin* означаетъ въ такомъ случаѣ уже не геометрическое правило, а совокупность извѣстныхъ операцій вычисленія. Въ этомъ лишь смыслѣ понятіе это и становится правомочнымъ въ чистомъ анализѣ, и исключительно изъ этого аналитическаго понятія подлежатъ выводу всѣ дальнѣйшія свойства функціи, напр., ея дифференціалъ, равно и теорема суммы.

Изложеніе, въ которомъ дѣло ведется сказаннымъ образомъ, невозможно до тѣхъ поръ, пока выводамъ дифференціала синуса не будетъ предпослано понятіе объ интегралѣ. Но заканчивать вполнѣ дифференціальное исчисленіе, и только лишь послѣ этого переходить къ интеграламъ, — совершенно безсмысленная схоластика. Истинно синтетическій путь, въ смыслѣ, какъ мы охарактеризовали его въ предыдущей статьѣ, ведетъ къ тому, чтобы въ анализѣ теоремы располагались другъ за другомъ такъ, какъ этого требуетъ переходъ отъ простого къ сложному. Разъ хотятъ ввести синусъ въ аналитическую абстракцію, то понятія интеграла и обращенія функцій—вещь неизбѣжная. Другой способъ, котораго мы коснулись выше и обозначили какъ способъ ненатуральный, идетъ чрезъ мнимое, то-есть это — непрямое опредѣленіе, непрямое въ томъ смыслѣ слова, въ какомъ говорятъ о непрямомъ доказательствѣ. Опредѣленіе понятія чрезъ посредство невозможности, хотя, по нашему мнѣнію, и есть вещь совершенно надежная, но недостаточно прямая, и въ этомъ отношеніи, не говоря уже о вышеупомянутомъ недостаткѣ естественности, опять-таки не есть вещь натуральнѣйшая. Выходя отъ показательной функціи и избѣгая идти путемъ мнимаго, приходятъ лишь къ гиперболическому синусу, а именно расщепляя показательный рядъ для двузначнаго дѣйствительнаго аргумента на основаніи нашего принципа значности. Но и такому аналитическому выводу гиперболическихъ функцій слѣдуетъ предпочесть отвлеченіе отъ геометріи какъ вещь болѣе естественную, потому что на дѣлѣ функція e^x первоначально найдена при посредствѣ гиперболы. Во всякомъ случаѣ, послѣ этого можетъ придти и анализъ и путемъ немотивированныхъ переходовъ достигнуть собственными средствами всякой функціи, которая вначалѣ найдена была по другому поводу путемъ отвлеченія отъ вещественнаго матеріала. Но какъ бы вообще полезно ни было указаніе возможности подобныхъ чисто аналитическихъ сцѣпленій, но въ частностяхъ мы будемъ отвѣчать истинѣ и естественности отношеній только однимъ способомъ, а именно устраненіемъ такихъ путей, гдѣ естественной мотивировки не хватаетъ, и которые вслѣдствіе этого выглядятъ и безъ того какъ нѣчто причудливое и произвольное. Даже и выходъ отъ обратныхъ интеграловъ не имѣетъ никакого оправданія, разъ къ этому не присовокупляютъ историческаго указанія, какимъ образомъ на дѣлѣ пришли къ разсматриваемымъ функціямъ. Освобождая свои абстракціи отъ вещественной подкладки ихъ, анализъ только сообщаетъ своимъ доказательствамъ однородность, но не слѣдуетъ забывать, что подъ областью его абстракцій заложены и всегда будутъ лежать побуды, которыми опредѣляется направленіе и форма вычисленія.

Изъ предыдущаго слѣдуетъ также, что нельзя создать системы, вполнѣ аналитически абстрактной, если и въ анализѣ не слѣдовать выше обозначенному нами понятію синтеза какъ пути отъ простыхъ, даже индивидуальныхъ типовъ къ сложнымъ. При этомъ уже въ самомъ началѣ должны выступить разнообразнѣйшія исходныя понятія, и позднѣе должны найти себѣ мѣсто лишь болѣе содержательныя комбинаціи, какихъ бы способовъ и понятій исчисленія онѣ ни касались. При такомъ ходѣ дѣла, вмѣстѣ съ тѣмъ видны будутъ и высшіе элементы, на которыхъ курсъ можно оборвать, безъ опущенія такимъ образомъ чего-либо иного, кромѣ разнообразныхъ комбинацій. Такимъ образомъ учащемуся можно будетъ съ меньшимъ трудомъ усвоить себѣ существенно важное, и не будетъ надобности возиться съ матеріаломъ очень сложнымъ. Послѣднее придется ему продѣлать лишь въ такомъ случаѣ, если для болѣе опредѣленныхъ цѣлей онъ долженъ будетъ вооружиться въ болѣе опредѣленные доспѣхи. Элементовъ высшей математики, ядро которыхъ должны образовать элементы высшаго анализа, до сихъ поръ еще въ наличности не имѣется. Главнымъ тормозомъ, задерживавшимъ появленіе ихъ, были устраненныя нами неясности понятій объ отрицательномъ, мнимомъ и неограниченно-маломъ, какъ и вообще неясности во всемъ, что связано съ представленіями безконечности. Отнынѣ операціи на этой почвѣ не только благонадежны, но и ясны какъ день.

Но улучшенія, нами указанныя, простираются не только вверхъ, въ верхніе этажи, но и внизъ, на фундаментъ, т.-е. на обыкновенную элементарную математику. Такъ, было бы безразсудно, напр., уяснивъ понятіе опредѣленнаго интеграла, не примѣнять его тотчасъ же въ обыкновенной стереометріи, чтобы такимъ образомъ поднять ее на степень высшей абстракціи. Только такимъ образомъ возможно необходимое, чисто геометрическое содержаніе свести къ возможно меньшей мѣрѣ, и цѣпь анализа протянуть настолько далеко, насколько это дозволяетъ природа дѣла. Эти точки зрѣнія, какъ онѣ указаны нами на этихъ примѣрахъ, могли бы служить средствомъ облегченія и для цѣлей штудій; ибо хотя соотвѣтствующей системы и нѣтъ еще въ исполненіи къ услугамъ каждаго, тѣмъ не менѣе, учащіе и учащіеся могутъ кое-что сдѣлать съ своей стороны, чтобы уже теперь,—насколько это возможно,—привести существующій матеріалъ къ лучшей, а вмѣстѣ съ этимъ и къ болѣе удобной формѣ. Нижеслѣдующія разъясненія о натуральномъ расчлененіи всѣхъ общихъ математическихъ методовъ могутъ еще болѣе способствовать этой цѣли и еще опредѣленнѣе охарактеризовать ту точку зрѣнія, на которую нужно стать въ виду безсвязицы направленій и безсодержательности состояній.

III.

Градаціи математическаго метода и самостоятельныя изслѣдованія.

1. Безсвязность и геометрическая реакція. Наличность правомочной струи въ неудавшейся, вообще говоря, реакціи противъ анализа.—2. Кое-что хорошее, а вообще преобладаніе заносчивости въ новомодной геометріи съ ея воображаемою независимостью отъ анализа.—3. Утайка руководящихъ аналитическихъ понятій со стороны новомодныхъ синтетиковъ. Понятіе порядка и воображаемая его замѣна.—4. Неясная обработка мнимаго и явная безсмысленность понятія аналитической безконечности у проективистовъ. Геометрическое суевѣріе понятія безконечности.—5. Подчиненное положеніе непосредственно геометрическихъ методовъ. Концепція идеальной хорды у Понселе какъ примѣръ недостатка силы абстракціи. Ключъ къ этой темной концепціи. Сложность такъ называемаго ангармоническаго отношенія въ противоположность простотѣ уравненія прямоугольнаго треугольника. Бѣдность проективики новыми вещественно значительными геометрическими теоремами, даже въ сравненіи съ другими направленіями новой геометріи.—6. Натуральная геометрія и натуральная вещественная математика. Доселѣ лучше всего распоряжалась аналитическимъ орудіемъ Лагранжева механика.—7. Указаніе на промахъ, сдѣланный Пуансо въ его нападкахъ на Лагранжа за воображаемую ошибку въ уравненіяхъ его механики.—8. Открытіе геометрической ошибки у Пуансо вслѣдствіе непониманія имъ геометрическаго арранжемента у Лагранжа. Ограниченная геометрическая реакція скомпрометировала себя указаніемъ этой воображаемой ошибки у Лагранжа. Специфически-геометрическій методъ какъ низшая ступень.—9. Аналитическій методъ еще не есть высшая ступень. Полная автономія принадлежитъ еще выше стоящимъ руководящимъ понятіямъ. Формировка штудій въ смыслѣ безупречной математической методы. Отверженіе дрессированной фауны математики.—10. Автономія изслѣдованія. Завѣщанныя исторіей проблемы. Судьба алгебры послѣ Лагранжа. Галуа. Господство пустоты въ послѣ-лагранжевской математикѣ.—11. Познаніе общихъ состояній какъ компасъ для штудій и для изслѣдованія. Симптомъ новѣйшей гебраизаціи математическаго рынка. Очистка лучшаго пути. Математика какъ единая спекулятивно практическая проблема, распадающаяся на спеціальныя проблемы и обнимающая всю количественную дѣйствительность. Проказы математистовъ. Лучшая оснастка.

1. Покончивъ съ элементарными основами и съ общимъ курсомъ высшей математики, перейдемъ къ задачѣ, имѣ-

ющей большее значенiе для тѣхъ, кто въ своей дѣятельности хочетъ идти дальше. Чтобы совершеннѣйшимъ образомъ приспособить науку къ сообщенiю и къ воспрiятiю ея истинъ, рѣчь должна идти не просто объ изученiи существующаго и объ обученiи тому, что уже дано или непосредственно можетъ быть сформировано изъ существующаго матерiала, а о коренной формовкѣ и объ изслѣдованiи. Съ этой стороны дѣло никогда не стояло такъ плохо, какъ въ девятнадцатомъ столѣтiи,—никогда состоянiе математики не представлялось такимъ поверхностнымъ, такимъ мелкимъ, такимъ безсвязнымъ. Кромѣ разнаго рода иныхъ прорухъ особенно вреденъ былъ расколъ между абстрактно — аналитическими и конкретно — геометрическими методами. За временемъ верховенства чистаго анализа, т.-е. элемента вычислительнаго, къ чему путь проложенъ былъ еще въ 17-мъ столѣтiи, и завершенъ въ 18-мъ столѣтiи Лагранжемъ, послѣдовала попытка реакцiи, корень которой лежалъ въ унаслѣдованной отъ древнихъ геометрiи. Эта реакцiя съ самаго начала прокладывала себѣ путь рядомъ съ новыми прогрессирующими методами и въ отпоръ имъ, но манера, съ какою она себя, такъ сказать, выкладывала, съ виду новая и какъ бы современная, вылилась въ форму безсмысленныхъ выкрутасовъ, которыми второстепенные аналисты марали свое же собственное орудiе. Это злоупотребленiе аналитическимъ алгориѳмомъ ради пустыхъ и безсмысленныхъ процедуръ показало дурную оборотную сторону вещи вообще превосходной, а съ тѣмъ вмѣстѣ еще болѣе уронило и эту превосходную вещь въ глазахъ тѣхъ, которые сами не вполнѣ могли оцѣнить ее.

Засимъ слѣдовали попытки, которыя тамъ, гдѣ онѣ, какъ, напр., у *Монжа*, выглядѣли еще, говоря относительно, всего лучше, основывались на стремленіи, какъ бы вытекавшемъ изъ природы дѣла, брать отправнымъ пунктомъ технически геометрическія представленія, источникомъ которыхъ было ученіе о проекціяхъ, и изъ этого рода пространственно наглядныхъ понятій вырабатывать требуемыя воззрѣнія. Въ этомъ родѣ на дѣлѣ была оформленная Монжемъ описательная или, какъ принято у насъ называть, начертательная геометрія. Она оперируетъ главнымъ образомъ посредствомъ прямоугольныхъ проекцій, и въ своемъ родѣ есть нѣчто совершенно элементарное, настолько, что самъ виновникъ этого изобрѣтенія считалъ его доступнымъ двѣнадцатилѣтнимъ ребятамъ, но, натурально, включавшее въ свою сферу и болѣе важныя приложенія. Еще и нынѣ нужно изучать ее по ея оригинальному основному творенію, если хотятъ, чтобы она оказала на умъ дѣйствительно серьезное вліяніе; ибо преимущества ея основываются скорѣе на индивидуальномъ распоряженіи ея методомъ, какое даетъ авторъ, нежели на ея содержаніи, а сухая передача послѣдняго обыкновеннымъ учебникомъ едва ли принесетъ много пользы.

У Монжа мы еще не находимъ вполнѣ сознательнаго отпора анализу, никакой реакціи противъ этого направленія; онъ и самъ пользуется этимъ орудіемъ, хотя оно выглядитъ у него довольно тускло и монотонно. Правда, его знаменитая книга, имѣющая предметомъ приложеніе анализа къ поверхностямъ второго порядка, еще и доселѣ остается лучшимъ произведеніемъ по этому предмету. Но именно на этомъ-то трудѣ и дала намъ себя почувствовать эта мертвенная монотонность изложенія. Очевидно, здѣсь Монжъ двигался не въ своей стихіи. Онъ какъ бы съ нѣкоторою натугою переводилъ самого себя на языкъ анализа, въ то время какъ источникъ его духа, откуда онъ черпалъ, былъ въ непосредственно геометрическомъ родѣ.

Если Монжъ, по образованію—техническій чертежникъ, почти непроизвольно, благодаря своимъ задаткамъ и исходнымъ пунктамъ, прокладывалъ преимущественно иные пути, отличные отъ путей абстрактнаго анализа, и, примыкая къ революціи, содѣйствовалъ геометрически- и технически-художественному образованію народа, то преднамѣренная и принципіальная реакція выступила лишь съ дальнѣйшимъ развитіемъ. Эта реакція, которой расцвѣтъ совпалъ съ періодомъ политической реставраціи, вѣдала преимущественно тѣ геометрическія понятія, которыя примыкали къ центральной проекціи. Ея основныя средства были не совсѣмъ новы; ибо, кромѣ тѣхъ слѣдовъ, которые были на лицо уже въ 17-мъ столѣтіи, съ нашей точки зрѣнія историческаго обозрѣнія мы должны принять во вниманіе, что унаслѣдованное отъ древнихъ ученіе о коническихъ сѣченіяхъ, даже въ своихъ и донынѣ употребительныхъ техническихъ выраженіяхъ обнаруживаетъ, насколько съ самаго начала оно было тѣсно связано съ оптическими точками зрѣнія. Выраженіе «фокусъ», какъ терминъ чисто геометрическій, доказываетъ, что къ изученію коническихъ сѣченій, по крайней мѣрѣ, отчасти, привели соображенія оптическія, хотя бы впослѣдствіи чисто математическая теорія и вовсе забыла о своемъ происхожденіи. Само античное руководящее представленіе, воплощенное въ словѣ «коническое сѣченіе», свидѣтельствуетъ о томъ, что то, что мы теперь называемъ центральной проекціей, въ нѣкоторой опредѣленной формѣ возстановило эти именно образы; ибо центральная или, что то же, оптическая проекція круга на различно наклоненныя плоскости, если разсматривать ее чисто геометрически, есть не иное что какъ пересѣченіе группы проектирующихъ лучей, т.-е. круглаго конуса, этими плоскостями.

Эта геометрія, позднѣе назвавшая себя новою, хотя на дѣлѣ была отсталостью, впервые воплощена была въ обширномъ произведеніи въ 1822 г; это былъ Трактатъ *Понселе* о проективныхъ свойствахъ фигуръ. Какъ бы ни были велики заслуги Понселе и его геніальность, какую проявилъ онъ въ другихъ направленіяхъ, какъ бы ни былъ, наконецъ, справедливъ приговоръ, отрицающій всякую цѣнность дурно приложеннаго анализа, все же намъ теперь, послѣ полнаго обзора историческаго хода дѣла, никакъ нельзя видѣть въ этой проективной геометріи со всѣми измѣненіями, какія доселѣ были въ нее внесены,—видѣть что-либо иное, кромѣ узкой односторонности и уклоненія, прикрытаго искуственными изворотами, а отчасти и фантастически затуманеннаго. Книга Понселе и доселѣ остается основнымъ произведеніемъ, а Штейнеровскіе обрывки, появившіеся лѣтъ десять спустя, не только не затмили этой книги, а, напротивъ, выдвинули ее на первый планъ. Въ своемъ новомъ двухтомномъ изданіи 1866 г. вмѣстѣ со всѣми измѣненіями, внесенными за этотъ промежутокъ времени въ проективную геометрію, между которыми только Штейнеровское направленіе заслуживетъ нѣкотораго вниманія по своему, натурально, впрочемъ, относительному значенію, оно отличается всесторонне критическимъ отношеніемъ къ дѣлу, притомъ съ такою степенью прямоты, какая отнюдь не соотвѣтствуетъ лукавой и лицепріятной манерѣ ученаго сословія, и потому почти не встрѣчается. Правда, Понселе вначалѣ было дѣятельнымъ офицеромъ и свой научный планъ создалъ на досугѣ, когда, послѣ похода 1812 г., находился въ плѣну у русскихъ. Поэтому, въ молодости онъ оставался внѣ ближайшаго соприкосновенія съ свойствами ученаго сословія, по крайней мѣрѣ постольку, поскольку можетъ быть свободенъ отъ такого вліянія,— все-таки подчиняясь ему, хотя бы и пассивно,—питомецъ Политехнической Школы, въ которой онъ получилъ образованіе.

Если,—мы не говоримъ о Лагранжѣ и о работахъ Абеля и Галуа,—если въ протекшихъ съ тѣхъ поръ поколѣніяхъ и заслуживаетъ упоминанія какой-либо трудъ по чистой математикѣ, то это именно упомянутый трудъ Понселе. Но въ этомъ-то обстоятельствѣ и лежитъ приговоръ ненормальному направленію въ математикѣ въ теченіе двухъ поколѣній, протекшихъ со времени выступленія упомянутыхъ послѣ-лагранжевскихъ дѣятелей. Разработка чистаго анализа въ разсматриваемомъ періодѣ до сего времени дала столь жалкіе плоды, что здѣсь не только не приходится указать на что-либо выдающееся, напротивъ, слѣдуетъ заявить объ упадкѣ и о порчѣ всего этого дѣла. Въ виду подвиговъ второстепенныхъ аналистовъ, и именно аналитикующихъ фигуръ вродѣ напр. Коши, такъ называемая синтетическая геометрія, хотя она въ сущности и была реакціей, все-таки, говоря относительно, являетъ собою еще нѣчто свѣжее. Но иногда и съ реакціями, какъ бы съ главной точки зрѣнія онѣ ни были неправомочны, все-таки въ нѣкоторыхъ второстепенныхъ чертахъ дѣло обстоитъ иначе. Онѣ могутъ быть, конечно, лишь въ нѣкоторыхъ особыхъ направленіяхъ, развитіями старыхъ точекъ зрѣнія, которыя если въ цѣломъ и совершенно по праву заброшены, зато въ иныхъ направленіяхъ могутъ принять иное теченіе. Такимъ образомъ возможно даже, что реакціи, въ главномъ дѣлѣ не выдерживающія никакой критики, во второстепенныхъ своихъ элементахъ могутъ представлять дѣйствительный прогрессъ. Поворотъ къ геометріи могъ быть прогрессомъ постольку, поскольку исключительно-аналитическое направленіе уже не разъ обманывалось касательно природы собственной своей арены и заявляло неестественныя притязанія. Это значило только, выходя изъ прежней геометрической традиціи, сочетать съ нею нѣчто сродное ей, чтобы опять, если и не совершенно въ античномъ родѣ, но имѣть дѣло съ непосредственною геометріей, которая была бы независима отъ современныхъ аналитическихъ ученій. Послѣднее условіе, конечно, сразу заявляло о себѣ какъ о черезчуръ затѣйливой штукѣ; ибо къ чему же тогда и болѣе могучія средства, если не пользоваться ими именно постольку, поскольку они дѣйствительно болѣе могучи? Но синтетики или проективисты въ первомъ чаду своей реакціи сразу возмнили себя обладателями чего-то, что было выше анализа, полагая, что они реставрировали такія силы, при наличности которыхъ пользоваться такими низшаго порядка средствами какъ исчисленіе было бы ниже ихъ достоинства.

2. Стать выше счисленія и въ этомъ смыслѣ разрабатывать чистую или, лучше сказать, конкретную геометрію, — этой лжи не сразу подпали лучшіе синтетики или проективисты. Какъ уже сказано, Монжъ вовсе не претендовалъ на что-либо подобное, да и самому Понселе, который былъ одностороннѣе, но все же занимался и анализомъ, не удалось утвердить геометрію начисто на собственной ея почвѣ. Онъ задался лишь цѣлью слѣдовать исключительно одному методу, и именно обслѣдовать, какія свойства образовъ можно вывести изъ разсмотрѣнія центральныхъ проекцій. Коническое сѣченіе, напр., пересѣкается прямою не болѣе какъ въ двухъ точкахъ. Если фактъ этотъ извѣстенъ для круга, то способъ заключенія проективнаго метода тотчасъ даетъ его и для

всѣхъ остальныхъ коническихъ сѣченій; ибо стоитъ только послѣднія представить себѣ какъ центральныя проекціи круга и спроектировать и сѣкущую линію. Въ такомъ случаѣ оба проекціонныхъ луча, соотвѣтствующіе точкамъ пересѣченія, могутъ въ каждой изъ другихъ плоскостей дать очевидно не болѣе двухъ точекъ пересѣченія. Эти-то такъ называемыя неметрическія свойства и были, главнымъ образомъ, тѣмъ, на что обратилъ свое вниманіе главный формовщикъ проективной геометріи. Мы намѣренно сказали главный формовщикъ, а не прямо основатель, ибо трудъ Понселе есть обширный сводъ, которому непосредственно предшествовали единичныя работы и даже руководящія идеи другихъ. И самъ онъ въ первомъ же изданіи своей книги прямо заявляетъ, что идеальнымъ ядромъ его метода былъ одинъ мемуаръ Бріаншона. То, что такимъ образомъ было намѣчено, еще не соединялось, слѣдовательно, съ тѣмъ крайнимъ извращеніемъ дѣла, которое обозначилось только вмѣстѣ съ Штейнеровскимъ направленіемъ; ибо только въ рукахъ этого геометра, не допускавшаго въ геометрію никакихъ аналитическихъ методовъ, вмѣстѣ съ ограниченностью всплыла и заносчивость разработки геометріи проективными методами.

Хотя *Штейнеръ*, въ сравненіи съ профессорами математистами, которые жили въ одно время съ нимъ или послѣ него, и являлся фигурою болѣе или менѣе приличною, все же, самъ по себѣ и если мѣрить его не фальшивою мѣркою, былъ еле-еле на своемъ мѣстѣ. Такъ, — приводимъ въ примѣръ одну характерную черту, — это онъ нажужжалъ въ уши редактору Креллева журнала математики, чтобы тотъ не принималъ въ журналъ работъ Понселе. Чутье его не обманывало; ибо геніальная манера французскаго геометра колола глаза неуклюжему берлинскому швейцарцу, да и штейнеровской натурѣ не могло быть желательно, чтобы слишкомъ распространялся источникъ, изъ котораго по большей части и самъ онъ черпалъ. Указаніе на такія штучки, какъ только что упомянутая штейнеровская, имѣетъ значеніе не только для внѣшняго хода науки, но и для внутренняго достоинства ея, и значеніе это нельзя цѣнить слишкомъ низко. Интимнѣйшая характеристика науки самой по себѣ довольно часто зависитъ отъ умѣнья найти моральныя нити. Ложность теорій часто есть не что иное какъ моральныя прегрѣшенія. Тщеславіе беретъ верхъ и мѣшаетъ признать чужія заслуги; оно не только ведетъ къ пустымъ фантазіямъ, но и поддерживаетъ ихъ довольно часто во вредъ движеніямъ лучшаго знанія. Строго говоря, именно между учеными такія натуры, которыя были бы правдивы, не говоря уже по отношенію къ другимъ, но и по отношенію къ самимъ себѣ, величайшая рѣдкость. Особенно же въ состояніяхъ упадка идеальный обманъ является правиломъ, а честность, не говоримъ даже—совершенная честность, есть единичное и рѣдкое исключеніе. Такимъ образомъ содержаніе самой науки въ значительной степени дѣлается не только чѣмъ-то вещественно ложнымъ, но прямо чѣмъ-то обманнымъ.

Встрѣтивъ послѣднее слово прилагательнымъ къ слову математика, сказаннымъ серьезнымъ тономъ, иной, чуждый этой сферы, можетъ изумиться. Но такое изумленіе исчезнетъ, какъ скоро наша система характеристики научныхъ состояній распространится и на самые крайніе слои сферы образованія. Если взять здѣсь, какъ примѣръ для освѣщенія научной совѣсти, занятую разработкою геометріи группу, еще имѣющую кой-какое значеніе, то эта относительная ея значительность какъ разъ желательна; ибо дѣло идетъ о томъ, чтобы разыскать ту порчу, которая примѣшивается къ лучшему тамъ, гдѣ всего менѣе можно бы было ожидать этого.

Въ книгѣ Штейнера проективная геометрія сваливается съ неба; пучки лучей,—терминъ не особенно красивый,—вводятся безъ всякой мотивировки и совершенно догматически, какъ бы отъ лица, которому совсѣмъ неизвѣстно дѣйствительно обосновывающее и созидающее изложеніе. Это была авторитарно принятая традиція, впрочемъ смѣшанная съ собственною обработкою, но послѣдняя была плодомъ весьма невоздѣланныхъ способностей, и не только не представляла ничего художественнаго, а даже была и ненатуральна. У Понселе еще сколько-нибудь замѣтны основы возникновенія проективныхъ задачъ и методовъ; Штейнеръ же, который большую часть матеріала взялъ уже готовою, отнюдь не проникалъ въ основы и отношенія этого наслѣдія и, что касается высоты и широты пониманія, не могъ подняться до точки зрѣнія своего французскаго образца. Обработка же, вещественно его отличающая, скорѣе есть уклоненіе съ прямого пути, нежели прогрессъ. Именно, онъ беретъ двѣ группы лучей на плоскости, чтобы посредствомъ ихъ комбинаціи выполнить построеніе, и непрерывное слѣдованіе точекъ пересѣченія всякихъ двухъ лучей опредѣляетъ кривую, какъ скоро сочетаніе луча съ лучомъ регулируется нѣкоторымъ закономъ слѣдованія. Напримѣръ, онъ производитъ кругъ, выходя изъ двухъ произвольныхъ центральныхъ точекъ и выбирая тѣ точки пересѣченія, которыя получаются, если, начиная отъ какихъ нибудь двухъ произвольныхъ лучей, заставляютъ пересѣкаться всегда два луча съ одинаковыми угловыми разстояніями. Подобное произвожденіе, какъ это весьма просто видно на примѣрѣ круга, выводится изъ второстепеннаго свойства, напр., въ случаѣ круга, изъ теоремы, что вписанные углы, опирающіеся на одну и ту же дугу, равны. Но едва ли можно не замѣтить искуственности, заключающейся здѣсь въ томъ, что для опредѣленія круга пользуются обратною подобной теоремы и, выходя отъ двухъ точекъ и какъ бы строя надъ соединяющею ихъ хордою всѣ треугольники съ равными углами при вершинѣ, получаютъ точки окружности.

Но подобныя искуственныя средства всюду являются ядромъ штейнеровскаго метода, и даже изложеніе главнаго предмета, обработки коническихъ сѣченій путемъ аналогичнаго производженія посредствомъ такъ называемыхъ пучковъ, оказывается такъ неестественнымъ и скуднымъ, что даже самъ мастеръ, сопровождая читателя на эти яко бы трудно достижимыя высоты, долженъ былъ на дорогу, туда ведущую, наложить пластырь изъ такъ называемыхъ популярныхъ коническихъ сѣченій, т.-е. изъ обыкновенной геометріи. Этимъ легкая воздушность дѣла была нѣсколько попорчена, и фонъ подмѣненъ былъ обыкновеннымъ матеріаломъ. Насъ обмануть трудно, и во всей этой искуственной методѣ производженія намъ видится, въ сущности, не иное что какъ непроизвольная и дурно приноровленная метода своего рода биполярныхъ координатъ. Только средствомъ опредѣленія являются здѣсь не радіусы векторы, т.-е. не разстоянія отъ обоихъ полюсовъ, а законъ, который въ силу угловыхъ соотношеній даетъ тѣ лучи, точки пересѣченія которыхъ должны быть взяты.

Кто способенъ былъ на замалчиваніе того образца, изъ котораго черпалъ, чтобы самому казаться независимымъ, тогда какъ на дѣлѣ такимъ не былъ, тотъ какъ разъ годится, чтобы, имѣя въ виду именно его, заострить вопросъ о томъ, какъ далеко на самомъ дѣлѣ хватаетъ мнимая независимость новомодной синтетической геометріи, или же вся она просто покоится на утайкахъ позаимствованій изъ анализа. Въ виду этого вопроса главнымъ образомъ мы и предпослали кое-какія размышленія о моральной сторонѣ и о точкахъ зрѣнія, съ какихъ можетъ быть поставленъ вопросъ объ измѣреніи честною мѣркою. Мы были бы неправы по отношенію къ Понселе, если бы нѣкоторое непроизвольное внесеніе заимствованныхъ изъ анализа точекъ зрѣнія захотѣли бы приписать лично ему; ибо, какъ уже сказано, фальшивой претензіи полной независимости у него еще не имѣлось. Но такой особый, хотя и подчиненный, въ существенныхъ своихъ чертахъ отличимый отъ анализа характеръ дѣйствительно имѣетъ всякая непосредственно геометрическая метода, и нѣчто подобное свойственно и тѣмъ способамъ, которые первоначально вытекали изъ оптическихъ точекъ зрѣнія и особенно изъ перспективы. Но тамъ, гдѣ ограниченность и глупость, въ сочетаніи съ нечестностью, въ культѣ пустого тщеславія достигли крайнихъ предѣловъ, желая внушить міру, что пріобрѣтена новая, совершенно независимая геометрія, не имѣющая и не желающая имѣть ничего общаго съ анализомъ, — тамъ вполнѣ умѣстно раскрыть не только ненамѣренныя заблужденія, но и элементы сознательнаго обмана и намѣреннаго отрицанія аналитическихъ руководящихъ нитей. Но господствуетъ ли тутъ злой умыселъ, или простой недостатокъ критики, понятно, въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ установить это не всегда возможно; достаточно и того, если положеніе въ наукѣ и характеръ дозволятъ видѣть, въ какой мѣрѣ нѣкоторую дозу обморачиванья по части независимости и источниковъ слѣдуетъ приписать не невѣдѣнію, а дѣйствительно тщеславному намѣренію поднадуть.

3. Когда постояно говорятъ о кривыхъ и о поверхностяхъ опредѣленнаго порядка, и однако не могутъ отыскать въ геометріи ничего такого, что могло бы замѣнить собою аналитическое понятіе порядка, — уже это одно прямо свидѣтельствуетъ о зависимости отъ руководящихъ аналитическихъ понятій. Но дѣло выглядитъ прямо комично, когда думаютъ, что порядокъ плоской кривой можно охарактеризовать числомъ точекъ пересѣченія ея прямою. Это значитъ прибѣгать къ слишкомъ второстепенному свойству, отнюдь не характеризующему сущности дѣла, и вмѣстѣ съ тѣмъ значитъ—оставаться въ рамкахъ внѣшней геометріи, пытаясь обойтись безъ простого и прямого понятія порядка въ его, необходимо, аналитическомъ отвлеченіи. Напримѣръ, кривыя второго порядка, необходимо, всѣ имѣютъ нѣчто геометрически-общее, и это геометрически-общее возможно выразить чисто геометрически. Это общее имъ свойство положено было въ основу изученія этихъ кривыхъ уже древними; оно состоитъ въ томъ что всѣ эти кривыя можно получить, пересѣкая конусъ различно проводимыми плоскостями. Эта общая точка зрѣнія старше понятія порядка; ибо послѣднее есть уже высшее отвлеченіе, такъ сказать, надгеометрическое, и къ нему могли придти не прежде, какъ когда научились ясно выдѣлять общія количественныя отношенія изъ конкретнаго пространственнаго схематизма образовъ путемъ разложенія и отдѣленія. Но по новомодной геометріи, воюющей съ анализомъ, хотя во многихъ пунктахъ она — просто незаконная дочь его, — должно во что бы то ни стало фигурировать на виду что-либо вродѣ понятія порядка, и даже возсѣдать какъ бы на родительскомъ мѣстѣ. Но

совершенно производное обстоятельство, что кривыя разсматриваемаго рода обыкновенно, т.-е. отвлекаясь отъ нѣкоторыхъ особыхъ направленій, пересѣкаются прямою въ двухъ точкахъ, есть слѣдствіе, а никакъ не основаніе, есть второстепенный признакъ, какъ бы производная, сопутствующая, а не конститутивная характерная черта.

Въ самомъ дѣлѣ, начали глубже проникать въ сущность образовъ, когда начали извѣстныя разстоянія въ нихъ связывать уравненіями и такимъ образомъ получать какъ бы функціональную разработку пространственныхъ ограниченій въ формѣ чистыхъ количественныхъ зависимостей. Геометрія, разрабатываемая при помощи аналитическихъ средствъ, стоитъ на высшей ступени научности, есть болѣе развитая и болѣе совершенная форма дѣла, нежели непосредственная, конкретная геометрія, которая не выдвигаетъ точекъ зрѣнія вычисленія, даже если уже и содержитъ ихъ, а въ главныхъ пунктахъ даже и не можетъ вести дѣло путемъ вычисленія, не говоря уже о вычисленіи систематическомъ. Послѣднее замѣчаніе относится преимущественно къ античной геометріи; ибо относить его къ вывертамъ проективной геометріи значило бы слишкомъ уже упускать изъ виду главное дѣло, настоящую геометрію, ради дѣла второстепеннаго. Разсматриваемая нами новѣйшая геометрія есть прямо вещь второстепенная и притомъ весьма двусмысленнаго смѣшаннаго характера, и наше указаніе можетъ имѣть только одну цѣль, — въ видѣ контраста къ ней напомнить нѣкоторыя наличныя черты истинной и натуральной геометріи, присоединивъ сюда и нѣкоторые новые штрихи.

Разъ имѣются налицо аналитическіе методы, то, относительно, не трудно готовую непосредственную геометрію облечь въ аналитическую форму. Это будетъ переводною работою; ибо уже не нужно будетъ отыскивать соотношеній, нужно будетъ просто выразить ихъ на другомъ, и уже готовомъ языкѣ. Отсюда понятно, что на людей, образованіе которыхъ, главнымъ образомъ, состояло въ пріобрѣтеніи ловкости въ пальцахъ при разыгрываніи на аналитическомъ инструментѣ, лучшіе синтетики справедливо указывали какъ на такихъ персонажей, которые, за недостаткомъ дара изобрѣтательности, выжидали случая, чтобы оригинальныя работы синтетиковъ потихоньку переводить на обычный языкъ и преподносить какъ собственныя новости. Впрочемъ, больше другихъ имѣлъ правъ на заявленіе такихъ жалобъ одинъ математикъ, который не принадлежалъ къ числу тѣхъ новомодныхъ, т.-е. проэктивныхъ, синтетиковъ, а старался проложить путь къ новымъ синтетическимъ элементамъ механики, хотя, конечно, также въ смыслѣ нѣкотораго рода геометрической реакціи, и въ этомъ направленіи дѣйствовалъ натуральнѣе, нежели проективисты въ своей исключительно геометрической области. Это былъ *Пуансо*, современникъ проективистовъ; но какъ ни справедливы были со стороны этого мужа, въ высшей степени достойно подвизавшагося въ своей узкой области, указанія его не обкрадываніе его аналитиками, но мы все-таки, хотя предметы механики въ собственномъ смыслѣ слова и не составляютъ предмета нашей настоящей работы,—все-таки должны прямо указать на то, что и въ синтетической механикѣ нельзя не признать, не говорю—нечестныхъ заимствованій у аналистовъ, но заимствованій изъ анализа. Сюда именно принадлежитъ концепція силовыхъ паръ, въ чемъ и заключалась вся оригинальность Пуансо, — концепція, нашедшая себѣ мѣсто даже въ школьной традиціи. Но понятіе силовой пары есть переводъ понятія момента вращенія, т.-е. передѣлка понятія счислительнаго въ форму вещественнаго понятія, и къ тому же,—чего подробнѣе развивать мы здѣсь не можемъ,—лишь далеко неудачная передѣлка.

Все это мы привели лишь потому, что упреки синтетиковъ по адресу аналистовъ за тайныя заимствованія есть нѣчто хорошо извѣстное и весьма понятное, между тѣмъ какъ обратная, хотя лишь по большей части только вещественная зависимость, приведена въ ясность впервые нами, и указаніемъ на область механики можетъ быть уяснена еще больше. Въ самомъ дѣлѣ,—обращаемся снова къ болѣе узкому предмету геометріи, — весьма возмечтавшая о своей оригинальности проективика едва ли ожидала, что, едва перейдя за порогъ второго поколѣнія, она съ своимъ мнимымъ самодержавіемъ прямо попадетъ на зубокъ, и что нѣкоторыя прикрытыя черты ея характера будутъ разоблачены. Понятно, что это не можетъ быть выгодно современнымъ ей аналистамъ; ибо если дѣйствительно лучшіе изъ нихъ, какъ Абель и Галуа, въ виду спеціальной природы своего предмета, и не могли бы касаться этой области, если бы жили и дольше, зато болѣе плохіе аналисты, въ числѣ которыхъ обо всемъ чирикавшій *Коши* и торговавшій отовсюду забраннымъ товаромъ еврей *Якоби* — болѣе именитые представители, были именно такими лицами, у которыхъ поѣданье тихонько присвоенныхъ чужихъ заслугъ и переряживанье чужихъ теорій принадлежали къ главнымъ средствамъ научнаго существованія, все равно о какой бы области рѣчь ни шла, причемъ и у синтетиковъ они таскали коекакія зернышки и пережевывали ихъ аналитически. Такимъ образомъ, критика синтетическихъ, вообще, и проективныхъ опытовъ, въ частности, не можетъ послужить къ чести этихъ эпигоновъ аналитики.

4. Итакъ, открытіе за синтетическими кулисами руководящихъ аналитическихъ понятій охраняетъ права абстрактныхъ мыслей, права истиннаго и натуральнаго, а не односторонне употребляемаго, анализа, которымъ, однако, не всегда равнозначны права величайшихъ аналистовъ. Какъ при этомъ обстояло съ представленіемъ порядка геометрическихъ образовъ, указано было выше. Сюда ближе всего примыкаетъ синтетически-туманный панданъ аналитическаго понятія мнимаго. Само собою разумѣется, что сначала нужно бы было повести рѣчь объ отрицательномъ; но въ немъ трудно сразу же не признать специфически аналитическаго понятія, на которое, въ виду относительной простоты распоряженія имъ, сплавивъ его съ конкретными, геометрическими или механическими представленіями, стали ложно смотрѣть какъ на понятіе синтетическое, т.-е. непосредственно принадлежащее синтезу. По отношенію къ мнимой единицѣ или, еще лучшее, къ абстрактному $\sqrt{-}$, сдѣлать нѣчто подобное было уже невозможно, и сюда присоединялось еще и то, что до нашего указанія не хватало моста отъ аналитически мнимаго къ вещественно мнимому геометрическому, механическому или какому угодно иному, ибо гауссовскія уклоненія отъ цѣли еще нельзя назвать путями къ дѣлу, напротивъ, это были лишь взвинченности и затемнѣнія задачи.

У проективистовъ имѣется свое, мнимое по имени, имъ самимъ неясное гермафродитное представленіе, вслѣдствіе своей туманности неспособное къ ясному опредѣленію, носящееся передъ ними именно какъ туманъ. Однимъ глазомъ оно косится въ аналитическую область, откуда взято не только слово, но и фактъ извѣстной невозможности, между тѣмъ какъ другой глазъ устремленъ въ заоблачные фантазмы, подымающіеся съ почвы принципа непрерывности и носящіеся въ видѣ непонятно расплывающейся безформенности. Эта область, если не прямо абсурдна, то столь же неопредѣленна, какъ и яко бы пространственная более чѣмъ трехмѣрная гауссовщина. Проективныя превращенія фигуръ другъ въ друга оказались съ пробѣлами, и эти пробѣлы, не раздумывая, заполняли словомъ мнимое, подражая просто анализу, въ которомъ, когда при измѣненіяхъ функцій натыкаются на мнимое, просто говорятъ, что функція сдѣлалась мнимою, не представляя себѣ при этомъ ничего болѣе, какъ формулу, снабженную знакомъ $\sqrt{-1}$. Но о томъ, что въ подобныхъ случаяхъ можно бы было прослѣдить дѣло наглядно и вещественно, — объ этомъ и синтетики, съ своими методами, ничего не подозрѣвали. Правда, лучшій изъ обоихъ именитыхъ представителей проективистики нѣкоторыми окольными путями показалъ, что за недостаткомъ яснаго понятія о геометрическомъ мнимомъ, въ отдѣльныхъ случаяхъ, ему удавалось обходиться частными вспомогательными представленіями, въ нѣкоторомъ родѣ какъ бы суррогатами мнимаго. Но именно фактъ, что могли возникать подобные изолированные и несовершенные суррогаты, и служитъ очевиднымъ свидѣтельствомъ отсутствія непосредственнаго понятія. Такъ, Понселе никогда не выдумалъ бы своихъ «идеальныхъ хордъ», если бы въ наукѣ было къ его услугамъ дѣйствительно ясное понятіе о геометрическомъ мнимомъ. Къ этому обстоятельству мы еще вернемся; здѣсь мы имѣемъ въ виду не эти отдѣльные и случайно лучшіе обороты мысли, при каковыхъ, впрочемъ, виновникъ ихъ, несмотря на употребленіе слова «мнимое», никогда не разумѣлъ алгебраически мнимаго; мы констатируемъ только, что дѣло было неладно, и что особенно неладно было оно у Штейнера.

Этотъ берлинскій швейцарецъ, со своимъ топорнымъ методомъ, еще очевиднѣе чѣмъ въ случаѣ мнимыхъ, не только перенялъ, но и еще больше испортилъ дряннѣйшія стороны аналитическихъ представленій по предмету понятій безконечности. Его безконечно удаленныя точки — у него не просто манера выражаться, неправильность которой мы могли бы еще вещественно поправить раціональнымъ истолкованіемъ, но фигурируютъ фактически какъ геометрическія нелѣпицы, по тупости ихъ не ясно, но туманно чувственной концепціи подъ стать гауссовскимъ пересѣкающимся параллелямъ, и иногда прямо имъ конгруэнтны. Правда, въ области анализа уже имѣются и опредѣляются ассимптоты какъ касательныя въ безконечно-удаленной точкѣ гиперболы; но здѣсь двусмысленность и фальшь устранима, если мы, вмѣсто ложнаго представленія безконечности будемъ оперировать съ раціональнымъ понятіемъ неограниченно удаленной, т.-е. такой точки, которую можно взять гдѣ-угодно на гиперболѣ въ удаленіи неограниченномъ. Такая точка, взятая индивидуально гдѣ-либо, представляетъ въ такомъ случаѣ и всѣ другія точки, которыя можно бы было взять вмѣсто нея въ еще большемъ удаленіи. Конечно, она никогда не упадаетъ на ассимптоту или, другими словами, ассимптота никогда чрезъ нее не проходитъ, даже никогда не цѣлитъ въ нее какъ въ цѣль; напротивъ, она стремится всегда къ точкамъ, неограниченно близкимъ къ ней, и было бы непростительно смѣшивать неограниченно малое уклоненіе съ точнымъ совпаденіемъ.

Опредѣленіе и вычисленіе ассимптоты какъ касательной, во-первыхъ, есть не болѣе какъ опредѣленіе дѣйствительной касательной, которой ходъ неограниченно мало уклоняется отъ ассимптоты. Но двѣ различныя линіи всегда будутъ различны, и изъ касательной въ неограниченно удаленной точкѣ можно сдѣлать ассимптоту только опущеніемъ различающаго ихъ обстоятельства. Если обѣ линіи неразличимы для чувствъ, то эта неточность имѣетъ основаніемъ не общее чувственное представленіе, а лишь ограниченность остроты чувствъ, и здѣсь только и можетъ найти себѣ убѣжище мнѣніе, что ассимптота стремится къ безконечно удаленной точкѣ, лежащей на самой кривой. Такая точка—чистый вымыселъ, чтобъ не сказать—ложь; и этой ложью она и будетъ всюду, гдѣ уже есть въ наличности нѣсколько лучшія воззрѣнія, но еще сохраняется культъ безсмыслицъ въ противность голосу математической совѣсти, и сохраняется изъ тщеславія, упрямства, косности, или какъ укоренившаяся метафизическая ложь.

Штейнеръ вращался среди множества такихъ, болѣе чѣмъ просто фальшивыхъ, а отчасти уже и наказуемыхъ понятій. Если ни у аналитиковъ, ни у синтетиковъ, ни у геометриковъ, ни у механиковъ, были ли они проективисты или нѣтъ, не встрѣчалось правильныхъ понятій о безконечности, то Штейнеръ въ извращеніи истины шелъ еще дальше, дѣлая эти неправильныя воззрѣнія до невозможнаго плоскими. Коническія сѣченія у него различаются тѣмъ, что у одной кривой имѣется только одна безконечно удаленная точка, а у другой такихъ точекъ двѣ. Эти жалкія фикціи, выдававшіяся, однако, не за фикціи, а за самые достовѣрные члены математическаго символа вѣры, проистекали какъ изъ анализа, такъ и изъ старой проективной теоремы объ отрѣзкахъ, происходящихъ отъ пересѣченія четырехъ лучей произвольною трансверсалью. Это такъ называемое ангармоническое отношеніе, которое въ сущности есть уравненіе и притомъ въ тригонометрическихъ функціяхъ, и слѣдовательно, ядро его чисто аналитическое, въ своихъ геометрическихъ варьяціяхъ, натурально, ведетъ и къ случаю, когда произвольная сѣкущая дѣлается параллельною одному изъ лучей. Здравая логика подсказываетъ, что въ этомъ случаѣ имѣется только три точки пересѣченія; но абсурдная фикція и сопринадлежное суевѣріе удерживаютъ и четвертую точку пересѣченія, отводя ей мѣсто въ волшебномъ царствѣ безконечности. Отсюда видно, какъ комически велика потребность въ пересѣкающихся параллеляхъ, такъ какъ мы наталкиваемся на нее всюду, гдѣ умственно неуклюжіе и неразборчивые люди бываютъ одурачены фальшивыми традиціоннными понятіями безконечности, ибо у нихъ не хватаетъ не только интеллектуальной гибкости къ достодолжному пониманію, но и моральной силы къ истинному воспріятію дѣла.

Если слѣдовать нашему ясному употребленію понятій и ясному языку, то линіи, неограниченно мало уклоняющіяся отъ параллельности, пересѣкаются въ соотвѣтственно неограниченномъ удаленіи; но этого здраваго положенія Штейнеры и Гауссы не могли твердо поставить на ноги. Положеніе, что параллельныя дѣйствительно пересѣкаются въ безконечности, есть скорѣе положеніе тупого и ограниченнаго метафизическаго суевѣрія. Если надлежаще анализировать его, то, вѣдь, это будетъ положеніе, что прямыя линіи, у которыхъ разность направленій есть ноль, т.-е. у которыхъ нѣтъ никакой разницы направленій, тѣмъ не менѣе, въ безконечности имѣютъ нѣкоторую разницу направленій.

На основаніи нашей системы совсѣмъ не трудно вполнѣ раціонально выполнить всѣ эти непрерывные переходы къ случаю строгой безграничности при посредствѣ неограниченно большого, и напримѣръ, удержать эту четвертую точку въ неограниченно большомъ удаленiи, т.-е. на всякой ступени увеличенiя; и напротивъ, при строгой параллельности о ней не можетъ быть и рѣчи. Но какъ строго параллельное положенiе можно подмѣнить положенiемъ неограниченно приближающимся къ параллельности, сдѣлавъ въ нѣкоторомъ отношенiи не болѣе какъ неограниченно малую ошибку, то заключенiе отъ одного случая къ другому въ разсматриваемыхъ отношенiяхъ возможно, если отвлечься отъ этой малой погрѣшности и отождествить результатъ для обоихъ случаевъ, но отождествить съ безконечнымъ приближенiемъ. Четвертая точка пересѣченiя отодвигается неограниченно далеко, когда трансверсаль приближается къ паралельности, никогда ея не достигая. Но разъ она достигла параллельности, то точка пересѣченiя исчезла. Къ этому неограниченному увеличенiю разстоянiя до четвертой точки примыкаетъ мысль, что при точной параллельности не имѣетъ уже мѣста никакое ограниченiе трансверсали, а имѣетъ мѣсто та безграничность, которая есть отрицанiе конечныхъ (измѣримыхъ) величинъ въ большомъ, подобно тому какъ нуль есть отрицанiе существованiя величины вообще, а съ тѣмъ вмѣстѣ и существованiя величинъ въ сторону уменьшенiя. Допущенiе точки пересѣченiя для случая строгой параллельности и сопринадлежной безграничности равносильно допущенiю (говоря обычнымъ жаргономъ) безконечной ошибки,— ошибки, лежащей внѣ всякой величины, а именно въ понятiи, слѣдовательно, въ качествѣ представленiя. Переходъ отъ не ограниченно большого къ безграничному всюду соотвѣтствуетъ переходу отъ неограниченно малаго къ нулю, и тамъ, гдѣ совершаютъ этотъ переходъ или, скорѣе, скачокъ можно дѣлать совершенно опредѣленныя заключенія о свойствѣ той величины, о которой идетъ рѣчь. Если эта величина, какъ въ нашемъ случаѣ, есть линія, и измѣряется ея протяженіе до точки пересѣченія, то, какъ скоро эту линію дѣлаютъ не просто неограниченно большою, а безграничною, то отсюда слѣдуетъ, что, уже и аналитически, не имѣется никакой точки пересѣченія. Въ самомъ дѣлѣ, безграничность протяженія есть отрицаніе возможности точки пересѣченія; ибо точка пересѣченія была бы границею.

5. Мы отдыхаемъ, когда отъ этихъ неуклюжихъ формъ геометрическаго суевѣрія безконечности, такъ пышно разросшагося изъ своихъ аналитическихъ зародышей, снова обращаемся къ относительно лучшимъ областямъ. Такъ будетъ, когда по вопросу о подчиненномъ положеніи непосредственно геометрическихъ методовъ обратимся къ Понселе и посмотримъ, къ какимъ окольнымъ понятіямъ онъ пришелъ, не будучи въ силахъ извѣстныя геометрическія отношенія, на которыя онъ наталкивался, чѣмъ дальше подвигался въ своихъ обобщеніяхъ, — не будучи въ силахъ ни достаточно отвлеченно схватить ихъ, ни привести ихъ въ связь съ какимъ-либо понятіемъ о геометрически мнимомъ, не говоря уже — съ правильнымъ о немъ понятіемъ. Это случилось съ одною изъ его главныхъ концепцій, которой онъ придавалъ большое значеніе, и которая и въ самомъ дѣлѣ оригинальна, — именно съ его такъ называемою идеальною хордою, о чемъ вскользь мы уже выше упоминали по поводу мнимаго.

Это положеніе дѣла можетъ быть здѣсь очерчено лишь вообще. Хорда коническаго сѣченія, или, если хотимъ быть опредѣленнѣе, хорда круга, если проводить въ отношеніи къ ней извѣстныя линіи, обнаруживаетъ нѣкоторое принадлежащее ей свойство, которое имѣетъ силу и тогда, если сѣкущую перенести параллельно самой себѣ и помѣстить внѣ кривой. Здѣсь она уже не будетъ хордою; но въ виду этого, остающагося въ силѣ, свойства Понселе продолжаетъ называть ее хордою, но, для отличія, идеальною хордою. Очевидно, геометръ чувствовалъ, хотя и не совсѣмъ ясно, что если разсматриваемое здѣсь свойство продолжало оставаться въ силѣ, то сохранялось нѣкоторое единство отношенія, хватающее выше, и указаніе на это составляетъ его заслугу. Недостатокъ же состоялъ въ томъ, что ни онъ, ни другой математикъ не могли дать отчета въ томъ, каково же основаніе этого единства, не говоря уже о томъ, что не могли дать этому отношенію фактически соразмѣрной формы. Сообразно нашему истолкованію мнимаго, хорда въ сущности остается тѣмъ, что она есть; но внѣ кривой она дѣлается хордою мнимой дополнительной кривой, которая, конечно, для Понселе не существовала какъ таковая, и введена лишь нашею системою. Недостатокъ этотъ, если изслѣдовать его точнѣе, былъ недостаткомъ силы отвлеченія, которая оставалась даже ниже уровня анализа, тогда какъ даже въ его собственной области нужно бы было подняться выше этого уровня.

Такимъ образомъ, наше ученіе о мнимомъ есть ключъ, которымъ открывается то, что для Понселе оставалось совершенно темнымъ. Если хорду круга, пересѣкаемую въ ея срединѣ діаметромъ, перенести во внѣ круга, то можно руководствоваться тѣмъ ея свойствомъ, что ея половина есть средняя пропорціональная между разстояніями ея основанія до окружности. Если, продолживъ діаметръ, построимъ линію, длина которой соотвѣтствовала бы указанному свойству, то это и была бы идеальная хорда Понселе. Для насъ же это — просто алгебраически мнимая хорда;

ибо $r - x$ и $r + x$ суть два упомянутыхъ отрѣзка діаметра, лежащіе внутри круга, если x есть отрѣзокъ, считаемый отъ центра. Если, искусственно, сдѣлать $x > r$, то $r - x$ дѣлается отрицательнымъ количествомъ, а средняя пропорціональная, т.-е. полухорда, алгебраически мнимою. Итакъ, идеальная хорда есть алгебраически мнимая хорда; это — хорда сопряженной кругу равнобочной гиперболы. Что такъ называемая идеальная хорда есть въ дѣйствительности хорда гиперболы, объ этомъ Понселе зналъ; но онъ и не подозрѣвалъ, чтобы алгебраически мнимое могло пролить свѣтъ на его темный путь. Сообразно нашей схемѣ круга и гиперболы, такъ называемая идеальная хорда есть мнимая ордината y, и $(r + x) . (r - x) = y^2$ есть не только выраженіе для указаннаго свойства хорды, но и уравненіе круга. Явное игнорированіе намековъ алгебры, съ позаимствованіемъ кое-чего изъ ея указаній, какъ видно, хорошо отомщено, и это — урокъ геометрамъ, даже относительно лучшимъ.

Если припомнимъ, наконецъ, какую фундаментальную роль играло въ проективной геометріи, какъ въ Понселетовской, такъ и въ позднѣйшихъ измѣненіяхъ ея, такъ называемое ангармоническое отношеніе, то игнорированіе анализа является дѣломъ совсѣмъ комичнымъ. Какъ сказано, это отношеніе есть уравненіе, притомъ такое, что его доказательство сводится къ Пиѳагоровой теоремѣ. Поэтому, проще-то Пиѳагорово соотношеніе и выражающее его равенство квадратовъ, которое короче можно бы было назвать уравненіемъ прямоугольнаго треугольника. Разсматриваемое чисто аналитически, т.-е. со стороны простѣйшихъ элементовъ, послѣднихъ отвлеченій и общихъ количественныхъ функцій, упомянутое, характеристичное для проективной геометріи, главное предложеніе есть не только нѣчто вещественно уже весьма сложное, но и есть выраженіе чисто функціоннаго отношенія, скопленіе болѣе простыхъ функцій. Если бы постановка такой компликаціи первымъ элементомъ и отправнымъ пунктомъ науки и не противорѣчила бы всѣмъ основоположеніямъ разлагающаго мышленія, то уже во всякомъ случаѣ было бы недостаткомъ брать въ руководство фактически аналитическое выраженіе этого относительнаго элемента, и трактовать его такъ, какъ бы оно не было чисто аналитическимъ выраженіемъ.

Въ основаніи такъ называемой аналитической геометріи, какъ и первоначальной непосредственной геометріи, лежитъ Пиѳагорова теорема или, выражаясь отвлеченнѣе, та функція, посредствомъ которой всего проще перекидывается мостъ отъ линейныхъ величинъ къ угловымъ. Никакой методъ не можетъ обойти понятія угловой функціи; скорѣе, это—существенное понятіе счисленія, явно или неявно содержащееся во всѣхъ зависимостяхъ фигуръ и ихъ частей. Формально можно это понятіе оформить еще отвлеченнѣе, если форму чистой количественной функціи, т.-е. вообще какъ форму количественную, извлечь изъ отношеній спеціально геометрическихъ, и этотъ актъ отвлеченія даже необходимъ, чтобы могла выступить высшая ступень научнаго метода. Чего же, въ противность этому, хочетъ геометрія, съ самыхъ первыхъ шаговъ трактующая предметъ при помощи относительно сложныхъ данныхъ, каково, напр., ангармоническое отношеніе? Если она хочетъ быть чѣмъ-нибудь, то должна себя анализировать, т.-е. разрѣшиться въ свои элементы. Если при такомъ разложеніи найдется хотя одинъ оригинальный элементъ, который ставилъ бы эту новую геометрію выше старой, то изъ этого еще что-нибудь можно бы было сдѣлать.

только при условіи, чтобы объ игнорированіи аналитической абстракціи не могло быть и рѣчи. Но основные элементы всякой геометрической истины давно уже найдены геометріей древнихъ и, очевидно, и исчерпаны. Все, что было прибавлено къ геометріи дѣйствительно новаго, и уже съ 17-го столѣтія, все это основывается или просто на комбинаціяхъ старыхъ элементовъ, или извлечено изъ такихъ точекъ зрѣнія, которымъ, какъ, напр., измѣренію кривизны, дальнѣйшее развитіе могло быть обезпечено только средствами современнаго анализа. *Гюйгенсъ* былъ послѣднимъ значительнымъ геометромъ въ смыслѣ натуральнаго, непосредственнаго метода, въ которомъ понятія счисленія были ограничены не преднамѣренно, но непроизвольно прилагались въ дозѣ экономной. Но именно самое-то замѣчательное и рѣзче выступающее, на что можно указать какъ на собственное созданіе у этого отличнаго математика, а именно теорія эволютъ, въ своей современной обобщенной формѣ, ни особенно практично, ни особенно привлекательно въ теоретическомъ отношеніи. Въ рукахъ самого творца этой теоріи, который, при надлежащей оцѣнкѣ, во многихъ направленіяхъ является предшественникомъ Ньютона, а въ цѣломъ, своимъ самороднымъ и натуральнымъ геніемъ его превосходитъ, ученіе объ эволютахъ было второстепеннымъ продуктомъ его попытокъ лучшаго устройства часового маятника. Циклоидальный маятникъ не удержался въ техникѣ, но связанная съ его изобрѣтеніемъ теорія эволютъ еще и нынѣ находитъ себѣ мѣсто въ учебникахъ, трактующихъ приложеніе анализа къ геометріи. Хотя,—если отвлечься отъ совершенно частныхъ точекъ зрѣнія,—теперешняя широковѣщательная геометрія эволютъ—вещь излишняя, и есть чистая, даже не совсѣмъ изящная игра, а ядромъ ея были просто какъ бы стружки съ верстака, на которомъ работалъ умъ, занятый болѣе серьезными задачами,—тѣмъ не менѣе, проективная геометрія не можетъ указать въ своей сферѣ ничего, что хотя бы отдаленнѣйшимъ образомъ можно было сравнить съ этимъ Гюйгенсовскимъ вкладомъ въ геометрію, который былъ имъ данъ мимоходомъ. Въ ней нѣтъ ни одной значительной теоремы, которая существенно дополняла бы собою дотолѣ извѣстныя геометрическія истины. Все, что она даетъ, было въ другой формѣ извѣстно и прежде, и никто не можетъ утверждать, чтобы иная оболочка являла собою улучшеніе. Напротивъ, по большей части это была не лучшая одежда, а просто искуственное переряживанье и, какъ сплошь и рядомъ бываетъ съ модными штуками, прямо была неестественнымъ кривляньемъ.

6. Соотвѣтствовать въ геометріи природѣ дѣла, придать этому кругу знанія вполнѣ натуральную форму, короче,—создать натуральную геометрію,—это, во всякомъ случаѣ цѣль достойная; но именно этого-то въ описательной (начертательной) геометріи очень мало, а въ проективикѣ встрѣчаемъ какъ разъ противное сказанному. Даже обыкновенная координатная геометрія аналистовъ, и даже въ лучшихъ рукахъ, какъ, напр., у Лагранжа, осталась чужда этой цѣли; ибо въ той области, гдѣ все дѣло дѣлать должны были исключительно чистыя функціи счисленія, недоставало яснаго пониманія о потребной мѣрѣ непосредственной геометріи. Превосходный геній Лагранжа замѣнилъ здѣсь, во всякомъ случаѣ, очень многое своимъ тактомъ, вводя и привлекая геометрическія и механико-геометрическія вспомогательныя средства, гдѣ это было нужно, чтобы кореннымъ образомъ обезпечить успѣшное развитіе предмета сплошь въ функціяхъ анализа, такъ, напр., чтобы къ функціи или къ уравненію присоединить

новое или, что въ сущности одно и то же, въ какое-либо уравненіе вмѣсто стараго ингредіента ввести оформленный по-новому.

Но необходимость геометрическихъ или, пожалуй, вещественныхъ точекъ зрѣнія и вспомогательныхъ заключеній со стороны якобы всюду достаточнаго анализа совершенно отвергалась. Въ предисловіи къ своей механикѣ Лагранжъ прямо объявилъ, что онъ не нуждался ни въ какихъ геометрическихъ заключеніяхъ, и это его представленіе стояло въ фактическомъ противорѣчіи съ почти полною тактичностью собственной его методы, гдѣ ему довольно часто приходилось аналитическія вспомогательныя соотношенія извлекать изъ простыхъ геометрическихъ соотношеній, когда онъ въ этомъ нуждался при развитіи и пополненіи своихъ болѣе общихъ формулъ, какъ, напримѣръ, основной формулы всей механики. Сверхъ того, подобныя общія основныя формулы были просто результатомъ отвлеченій отъ вещественной области и имѣли реальный смыслъ только по отношенію къ этой области и къ положенному въ основу простому реальному арранжементу. Не удивительно поэтому, что развитіе и преобразованія такихъ формулъ, даже тамъ, гдѣ это состояло просто въ алгебраическихъ операціяхъ, направляемо было не безъ того, чтобы тамъ и сямъ не справлялись и съ вещественнымъ компасомъ. Опредѣляющее основаніе, почему выводилось именно это, а не другое изъ нѣсколькихъ возможныхъ аналитическихъ слѣдствій, и почему дѣлалось это, а не какое-либо другое преобразованіе,—основаніемъ этому всегда была вещественная или, если угодно, понятная руководящая нить или точка зрѣнія, въ силу которой мѣркою успѣха аналитическихъ выводовъ служила не только вещественная цѣль, но и отдѣльныя станціи этого вещественнаго пути.

При такихъ обстоятельствахъ, натурально,—послѣ того какъ нами ясно формулированы необходимыя составныя части прямо или не прямо къ вещественнымъ отношеніямъ сводимыхъ умозаключеній, — должно звучать какъ бы откровеніемъ изъ нелогичнаго міра всякое утвержденіе, что чистымъ анализомъ можно добыть больше вещественнаго матеріала, чѣмъ было въ него вложено. Это значило бы,— обращаемся къ прежнему нашему примѣру, — изъ чисто аналитической обработки уравненія кривой извлечь и ректификацію кривой, не беря въ помощь уравненія характеристичнаго прямоугольнаго треугольника. Но послѣднее включаетъ и геометрическія заключенія и геометрическій фактъ, котораго нельзя извлечь изъ уравненія кривой, а нужно присоединить къ нему какъ чуждое средство для дальнѣйшихъ выводовъ.

Представленіе о натуральной геометріи расширяется въ представленіе о натуральной вещественной математикѣ. Первымъ примѣромъ послѣдней была бы механика, разработанная при возможно широкомъ использованіи аналитическихъ вспомогательныхъ средствъ. Но подобная разработка только тогда выходила бы вполнѣ натуральною, если бы руководящимъ правиломъ оставалась въ двоякомъ отношеніи достодолжная мѣра въ опредѣленіи средствъ. Во-первыхъ, количество спеціально геометрическаго элемента должно быть сведено къ минимуму, и въ этомъ отношеніи фактически большая часть предварительной работы исполнена Лагранжемъ. Во-вторыхъ, и вычисленіе должно быть ограничено минимумомъ и замѣнено болѣе высшими понятіями, которыя отвлеченнѣе и сильнѣе исчислительныхъ операцій и потому должны предшествовать послѣднимъ какъ элементъ руководящій. Никакой реакціи и никакого поворота назадъ за аналитическую точку зрѣнія, какой достигъ Лагранжъ, напротивъ, должно стремиться стать еще выше, чтобы по возможности стѣснить символику чистаго исчисленія и алгориѳмическій автоматизмъ, подобнымъ же образомъ, какъ поставлены предѣлы и специфически геометрическому элементу!

Значительнаго особаго произведенія по предмету аналитической геометріи, подобнаго аналитической механикѣ Лагранжа, не имѣется; ибо Декартова геометрія этому понятію не отвѣчаетъ, и въ новое время къ чему-либо подобному не пришли, ибо предметъ не былъ настолько обширенъ, чтобы умамъ выше стоящимъ пришла охота работать ради этого предмета. Они касались этой области только какъ вещи второстепенной. Геометрическая часть Лагранжевой Теоріи функцій стоитъ у него на второмъ планѣ, но и въ этомъ положеніи является примѣромъ аналитической обработки высшей геометріи и стоитъ выше книгъ, трактующихъ спеціально объ аналитической геометріи или о приложеніяхъ анализа къ геометріи. То, что дѣйствительно могло возбудить этотъ выдающійся умъ, который въ совершенствѣ владѣлъ орудіемъ анализа, это — не относительная пустота чистой геометріи, а уже матеріальная вещественная область, и таковою, по состоянію научнаго знанія, прежде всего являлась механика. То, что могло интересовать въ геометріи, должно было сопутствовать механикѣ какъ вспомогательное средство. Сообразно этому, и въ Лагранжеву аналитическую механику включено существеннѣйшее по аналитической геометріи, и штудируется въ этомъ превосходномъ изложеніи и способѣ примѣненія несравненно лучше, нежели въ видѣ сухой соломы компиляцій и учебниковъ.

7. И въ чисто геометрическомъ отношеніи аналитическая механика Лагранжа превосходнѣе реакціонныхъ про-

изведенiй въ такъ называемомъ синтетическомъ родѣ. Конечно, рѣчь здѣсь не о проективистахъ; но относительно болѣе серьезнымъ и болѣе натуральнымъ представителемъ геометрической реакцiи былъ Пуансо, который въ сущности былъ просто статикомъ, и притомъ статикомъ на древнемъ языкѣ геометрическихъ представленiй силовыхъ подстановокъ, — языкѣ, который въ глазахъ Лагранжа, натурально, былъ языкомъ мертвымъ. Но этотъ-то именно Пуансо, какъ показало намъ наше спецiальное изслѣдованiе, какъ разъ въ сферѣ требуемыхъ геометрическихъ представленiй и оказался неспособнымъ, даже настолько, чтобы лишь правильно уразумѣть главный пунктъ въ Лагранжевой аналитической механикѣ. Благодаря именно недостатку остроты въ пониманiи геометрическихъ возможностей и необходимостей Пуансо и попалъ въ просакъ, написавъ цѣлый мемуаръ, чтобы доказать фундаментальную ошибку у Лагранжа, нанести ударъ его аналитической механикѣ и представить въ выгодномъ свѣтѣ преимущества собственной геометрической методы. Но то, что онъ на дѣлѣ освѣтилъ, была ошибочность собственнаго его отношенiя къ Лагранжевой механикѣ.

Этотъ мемуаръ Пуансо, появившiйся въ 1846 году въ 11-мъ томѣ журнала Лiувилля, какъ бы для полноты комизма былъ напечатанъ редакторомъ 3-го изданiя Лагранжевой механики, 1853 г., академикомъ Бертраномъ, какъ дополненiе къ книгѣ Лагранжа, вмѣстѣ съ другимъ, частiю еще худшимъ, матерiаломъ. Во всей литературѣ мы не нашли даже слѣда, чтобы съ тѣхъ поръ гдѣ-либо была указана неправильность нападокъ Пуансо. Напротивъ того, весь математическiй мiръ, съ полнымъ отсутствiемъ критики, держался авторитета Пуансо, считая, что онъ доказалъ дѣйствительно немаловажную ошибку Лагранжа, послѣдствія которой должны были отразиться на всей аналитической механикѣ. 30 лѣтъ это третье изданіе было единственнымъ изданіемъ, находившимся въ продажѣ, и въ примѣчаніяхъ читателямъ прямо рекомендовалось обратить вниманіе на поправку Пуансо. Не всякому охота самому изслѣдовать фундаментальный пунктъ, а кто, штудирая книгу, и имѣлъ бы интересъ прослѣдить дѣло, не всегда и не при всѣхъ обстоятельствахъ захочетъ взять на себя нелегкій трудъ обслѣдовать обстоятельно, правильно ли возраженіе, которое для матеріальнаго главнаго дѣла, во всякомъ случаѣ, не особенно важно. Но если среди немалаго числа лицъ, штудирующихъ механику Лагранжа, руководимыхъ весьма различными точками зрѣнія и интересами, не нашлось ни одного, который открылъ бы скандалъ, то это — худое свидѣтельство о качествахъ процвѣтавшаго за это время математическаго моднаго міра 19-го столѣтія, который въ молотьбѣ пустой соломы и въ занятіяхъ пустяками великъ, даже длиненъ и широкъ, но въ разпознаніи дѣйствительно хорошаго оказался почти лишеннымъ разсудка *ничѣмъ*. Этотъ хвастливый своимъ ремесленнымъ анализомъ міръ не нашелъ отвѣта на Пуансотовскій подвохъ,—подвохъ, который, будь онъ основателенъ, хотя конечно не могъ бы, какъ того хотѣлъ устроитель подвоха, уронить аналитической методы, ее дискредитировать или компрометировать, но могъ бы сильно поколебать довѣріе къ личному мастерству Лагранжа въ распоряженіи своимъ методомъ. Но что за нужда была этой мелкотѣ ученаго цеха 19-го столѣтія особенно безпокоиться о чести Лагранжа, который стоялъ на высотѣ имъ недоступной, на котораго они смотрѣли съ завистью, и котораго дѣйствительно они всюду только хулили!

Статья Пуансо, когда она появилась, судя по всѣмъ видимостямъ, была старою рукописью, такъ сказать, залежалымъ товаромъ. По смерти Лагранжа прошло уже цѣлое поколѣніе, второе изданіе механики было въ продажѣ почти столько же времени, а статья Пуансо цитуетъ лишь 1-е изданіе 1788 г., въ то время какъ воображаемая ошибка находилась и въ позднѣйшей переработкѣ, и даже въ самомъ началѣ книги, въ первомъ аналитическомъ отдѣлѣ, какъ главная замѣна основного уравненія. Нужно, поэтому, предположить, что Пуансо няньчился съ своимъ воображаемымъ открытіемъ ошибки у Лагранжа еще при его жизни, т.-е. до второго изданія, но что у него не хватило отваги бросить его въ лицо самому Лагранжу, или даже пустить въ ходъ въ первыя десятилѣтія, когда еще свѣжи были послѣдствія Лагранжевской дѣятельности.

Ядро дѣла состоитъ въ слѣдующемъ. Пуансо дѣлаетъ Лагранжу упрекъ, что онъ установилъ уравненіе прямо для косоугольныхъ осей, но что при ближайшемъ изслѣдованіи оказывается, что оно годно яко бы только для прямоугольныхъ осей. За этимъ слѣдуетъ выводъ другого уравненія, которое аналитически сложнѣе Лагранжевскаго, и должно годиться для косоугольныхъ осей. Предметъ, о которомъ идетъ рѣчь у Лагранжа, есть превращеніе нѣкоторой силовой системы въ другую эквивалентную, слѣд., въ систему съ равною равнодѣйствующею, причемъ безразлично, имѣетъ ли послѣдняя какую-либо величину, или равна нулю. Случай сложенія силъ, приложенныхъ въ одной точкѣ, есть частный случай этого общаго, и въ отдѣлѣ о сложеніи силъ, въ которомъ, какъ принадлежность къ дѣлу, уже вводится и потенціалъ, хотя и не подъ этимъ новомоднымъ именемъ, авторъ снова обращается къ своему яко бы ошибочному уравненію, прямо относя его къ косоугольнымъ осямъ. При выводѣ своего уравненія Лагранжъ чисто аналитически, исходя изъ абстрактныхъ мыслей, заключилъ, что встрѣчающіяся въ двухъ формахъ основного уравненія механики виртуальныя скорости суть функціи однѣ другихъ, сообразно этому составивъ парціальное дифференціальное уравненіе, и воспользовался имъ, чтобы получить выраженіе силы эквивалентной системы въ элементахъ данной системы. Какъ и вообще это слѣдуетъ, онъ воображаетъ себѣ силы эквивалентной системы дѣйствующими по произвольнымъ осямъ и потому, въ заключеніе, все приводитъ къ тремъ косоугольнымъ осямъ. Эту задачу и ходъ мыслей Лагранжа можно свести къ простѣйшему случаю,—гдѣ, однако, воображаемая ошибка все-таки должна бы была обнаружиться,—если взять на плоскости только одну силу, подлежащую замѣнѣ двумя эквивалентными, гдѣ, слѣдовательно, въ сущности предлежатъ отношенія такъ называемаго параллелограмма силъ. Слѣдуя нотаціи Лагранжа, въ этомъ случаѣ P, Ξ и Ψ будутъ силы, p, ξ и ψ—произвольной длины линіи, въ направленіи которыхъ эти силы дѣйствуютъ, и dp, $d\xi$ и $d\psi$ виртуальныя скорости, т.-е. прямоугольныя проекціи перемѣщенія точки на направленія силъ. Если, теперь, ξ и ψ фигурируютъ въ качествѣ данныхъ косоугольныхъ осей, то можно, напр., Ξ выразить въ P и въ функціяхъ виртуальныхъ скоростей. Двумя шагами Лагранжъ приходитъ къ уравненію $\Xi = P\frac{dp}{d\xi}$ и къ аналогичному для Ψ.

Пуансо утверждаетъ, что уравненіе $\Xi = P\frac{dp}{d\xi}$ только тогда имѣетъ мѣсто, когда направленія ξ и ψ взаимно перпендикулярны, т.-е. когда въ разсматриваемомъ частномъ случаѣ имѣемъ, такъ сказать, прямоугольникъ силъ. Но и посредствомъ геометрическаго построенія можно наглядно убѣдиться въ томъ, что аналитическая истина, найденная въ предположеніи косоугольныхъ направленій, какъ и должно ожидать, сохраняется и тогда, когда вмѣсто аналитическихъ знаковъ подставить ихъ геометрическія представленія. Доказательство это можно упростить, предположивъ, что въ этомъ случаѣ виртуальное перемѣщеніе dp совпадаетъ съ направленіемъ актуальнаго движенія, такъ какъ и это положеніе также есть случай всѣхъ возможныхъ перемѣщеній свободной точки на плоскости. Однако, требуемыхъ геометрическихъ построеній, посредствомъ которыхъ изображаются частные дифференціалы, на которые распадается dp, взятый по $d\xi$ и $d\varphi$, выполнять мы не будемъ. Достаточно сказать, что они получаются не опусканіемъ перпендикуляровъ, но произведеніемъ такихъ линій къ dp, которыя пересѣкаютъ dp въ углѣ, равномъ углу ξ съ φ.

Понятіе этихъ частныхъ дифференціаловъ основано здѣсь на функціональной геометрической зависимости между расположеніемъ P, котораго постоянная составная часть можетъ быть взята какою угодно, и аналогичными длинами ξ и φ.

8. Давши, такимъ образомъ, тѣмъ, кто, вмѣстѣ съ Пуансо стоя на низшей ступени специфической геометріи, не понимаетъ Лагранжевскаго анализа, — давши имъ средство къ краткой геометрической повѣркѣ, посмотримъ на это дѣло съ обратной стороны. Не Лагранжъ виновенъ въ упущеніи кое-чего геометрическаго, а самъ Пуансо, сдѣлавъ большую геометрическую ошибку. Замѣчая, что Лагранжъ говоритъ о наклонныхъ линіяхъ и посредствомъ ихъ опредѣляетъ мѣста точекъ приложенія силъ, Пуансо вообразилъ себѣ, что здѣсь рѣчь идетъ о косоугольныхъ координатахъ, и совершенно безсмысленно подмѣнилъ ими совершенно иной порядокъ изслѣдованія, взятый Лагранжемъ. Лагранжъ опредѣляетъ свои мѣста

отрѣзками, происходящими при перпендикулярномъ проэктированіи виртуальныхъ перемѣщеній точекъ приложенія. Нужно только въ концѣ абсциссъ провести къ косоугольнымъ осямъ перпендикулярныя плоскости, и ихъ пересѣченіе дастъ мѣсто точки въ пространствѣ. Въ вышеприведенномъ, упрощенномъ и приведенномъ къ одной плоскости, примѣрѣ достаточно перпендикуляровъ. Но Пуансо, въ своей ограниченной поспѣшности, думаетъ о параллелограммахъ или параллелопипедахъ, которые и получаетъ проведеніемъ координатъ, проводя ихъ изъ точекъ приложенія силъ параллельно косоугольнымъ осямъ. При такой замѣнѣ отрѣзки $d\xi$ и $d\varphi$ уже не представляютъ виртуальныхъ скоростей, и бѣдный Лагранжъ повергнутъ въ прахъ, и ему доказано, что его дифференціалы $d\xi$ и $d\varphi$, по отношенію къ которымъ онъ нашелъ аналитически вѣрную зависимость,—ему доказано, что эти дифференціалы суть не виртуальныя скорости, а ихъ косоугольныя проэкціи. Но косйтъ здѣсь никто иной какъ Пуансо, показавшій себя во всемъ этомъ дѣлѣ какимъ-то школьникомъ, притомъ довольно деревяннымъ. Ознакомленіе съ косоугольными координатами, съ этою, надо сказать, весьма непрактичною игрою, есть большею частью дѣло школьной дрессировки. А что не есть дѣло этой дрессировки,—это свободныя воззрѣнія и мысли, и имъ подъ силу и иныя, болѣе практичныя, опредѣленія мѣстъ. Стѣсненный школьной традиціей кругозоръ Пуансо помѣшалъ ему разглядѣть Лагранжевскій, вполнѣ натуральный и цѣлесообразный геометрическій распорядокъ и заставилъ его видѣть совсѣмъ иное, стоящее съ Лагранжевымъ анализомъ въ противорѣчіи. Лагранжевскую геометрію онъ понялъ еще меньше, чѣмъ его алгориѳмическія заключенія. Аналитическая поправка, съ которою выступилъ Пуансо противъ воображаемаго промаха Лагранжа, выглядитъ весьма забавно, и мы предоставляемъ читателю, интересующемуся этою исторически достопамятною штучкою, вооружившись нашимъ компасомъ, самому отправиться въ область Пуансотовскихъ выводовъ. При этомъ онъ долженъ помнить, что Пуансо является солиднѣйшимъ представителемъ геометрическихъ методовъ въ XIX столѣтіи, болѣе солиднымъ, чѣмъ Понселе и Штейнеръ, пожалуй, даже солиднѣе самого вчинателя всего этого направленія, Монжа, и что только это относительное его превосходство и дѣлаетъ его промахъ такъ исторически поучительнымъ.

Специфически геометрическія заключенія,—мы говоримъ не о томъ необходимомъ минимумѣ, который служитъ подкладкою аналитическимъ, — есть низшая ступень образа мышленія, принципіально уже превзойденная, но и фактически подобная мертвому языку, изъ употребленія совершенно и всюду вытѣсненная и исчезнувшая, оставшаяся развѣ у отсталыхъ ученыхъ. Всякія права ею утрачены, разъ уже найденъ болѣе свободный, абстрактный ходъ мышленія, безпримѣсный, болѣе чистый, а потому и болѣе ясный. Только отсталый способъ обученія, да отчасти, пожалуй, нѣкоторая врожденная неразвитость личныхъ задатковъ и склонностей, стремящаяся прежде всего къ полной чувственности, къ конкретному и наглядному, можетъ объяснить намъ то обстоятельство, что кое-гдѣ еще цѣпляются за геометрію и движутся въ области низшей методической позиціи. Впрочемъ, само собою понятно, что такіе ниже стоящіе методы, сами по себѣ не есть что-либо неправильное, только они тяжелѣе, не такъ далеко хватаютъ и не такъ могучи, какъ высшіе методы. Они могутъ довлѣть себѣ и не нуждаться въ высшихъ средствахъ; но при равныхъ прочихъ обстоятельствахъ плоды ихъ будутъ всегда невысокаго качества. Напротивъ того, мысль тотчасъ получаетъ болѣе абстрактной силы и работаетъ какъ бы посредствомъ болѣе совершеннаго механизма, т.-е. при помощи болѣе простыхъ понятій и болѣе удобныхъ знаковъ, какъ скоро она пользуется аналитическимъ орудіемъ. То, чѣмъ является система чиселъ и хорошее умѣнье считать для обыкновеннаго числового счисленья, тѣмъ самымъ вообще будетъ хорошій абстрактный языкъ знаковъ и аналитическій алгориѳмъ для всякаго исчисленія и счислительнаго мышленія.

9. Но и первенствующая роль анализа, каковую онъ игралъ до сего времени, даже въ лучшей своей формѣ у Лагранжа, отнюдь не есть высшій образецъ для разработки вещественнаго предмета. Недостатокъ надлежащей выработки реальныхъ понятій не подлежитъ сомнѣнію, и то, что сознательно имѣлось въ виду лишь какъ усовершенствованіе этого орудія, то самое непроизвольно сдѣлалось, не по праву, господствующимъ главнымъ дѣломъ. Нагроможденіе формулъ напоминать собою логическую схоластику среднихъ вѣковъ, въ которой также культъ сухого и пустого формализма долженъ былъ замѣнять собою непосредственный доступъ къ источнику вещественныхъ истинъ. Для низшихъ или пустыхъ головъ именно анализъ представляетъ удобный случай съ большою легкостью и почти автоматическимъ способомъ вывозить на рынокъ свои бездарные продукты, и людямъ несвѣдущимъ выдавать ихъ за основательныя истины, трудные выводы и глубокія воззрѣнія. Для умовъ превосходныхъ, каковымъ былъ, напр., Лагранжъ, одинокій на своей высотѣ, во всякомъ случаѣ уже и исключительный символизмъ исчисленія не есть простое средство изложенія и доказательства, но есть вмѣстѣ съ тѣмъ и самостоятельный путеводитель къ

выше ведущимъ изобрѣтеніямъ, но лишь постольку, поскольку онъ непроизвольно комбинируется съ вещественными понятіями, и устанавливаетъ уравненія и извлекаетъ изъ нихъ результаты, имѣя въ виду реальныя цѣли. Но тутъ-то и выступаетъ та истина, что эти руководящія понятія прежде всего должны быть непосредственными и вещественными, и что выводы слѣдствій изъ чистаго алгориѳма только тогда бываютъ удачны и плодотворны, когда они по отношенію къ этимъ вещественнымъ понятіямъ занимаютъ подчиненное положеніе, т.-е. прежде всего повинуются законамъ природы вещи. Ихъ самостоятельность лишь относительная и ограниченная, и вычисленіе только тогда идетъ на подобіе машины, когда приводится въ движеніе моторомъ и внѣшними силами. Но дѣйствующія въ въ первой рукѣ силы — никакъ не алгориѳмическія средства, но иного рода мысли, которыя, сдѣлавъ свое дѣло, видимы позади счисленія. Поэтому изъ понятій счисленія только тогда можно нѣчто извлечь, когда приведены будутъ въ порядокъ непосредственныя вещественныя понятія. Только при постоянномъ взаимодѣйствіи вещественныхъ понятій съ понятіями счисленія и возможенъ прогрессъ, и потому считать аналитическую формулировку руководящимъ главнымъ дѣломъ — большой недостатокъ аналитической разработки предмета. Потому-то и нѣтъ такой вещественной науки, которую можно бы было въ разсматриваемомъ смыслѣ назвать аналитическою; ибо анализъ есть просто методическое вспомогательное средство, притомъ только сопутствующее средство, и истинное, подобающее ему, мѣсто — лишь рядомъ съ вещественными нормами понятій позади ихъ.

Въ виду этого мы радикально рекомендуемъ, при всякихъ штудіяхъ и при всякомъ изслѣдованіи думать объ одной единственной совершенной методѣ, и потому ни терять много времени на пересмотръ явленій синтетической реакціи, ни медлить прокладкою самостоятельнаго натуральнаго пути, отдаваясь аналитическимъ экстравагантностямъ. Такъ, напр., нельзя назвать натуральною такую геометрію, когда прилагаемая въ ней теорія функцій выглядитъ такъ, какъ будто назначеніе ея—служить не цѣлямъ геометріи, а существовать ради себя самой, причемъ геометрическій матеріалъ игралъ бы просто роль примѣровъ. Геометрія имѣетъ свои потребности и границы; поэтому съ нею не должно играть произвольно въ аналитическую игру и дѣлать изъ нея арену для разыгрыванія какихъ угодно аналитическихъ фантазій. Аналитически возможны различныя концепціи и комбинаціи, которыя съ точки зрѣнія геометріи, форономіи или механики не имѣютъ никакого смысла и никакого интереса, поскольку онѣ если и не противорѣчатъ, то не соотвѣтствуютъ специфическимъ предварительнымъ условіямъ дѣйствія природы. Въ натуральной геометріи сама геометрія есть цѣль, а анализъ есть средство. То же самое и въ натуральной механикѣ и вообще во всякой отрасли вещественной математики. Здраваго пониманія и обработки предмета можно достичь однимъ путемъ, а именно расчлененіемъ предмета, добывая первостепенной важности нормы понятій, переходя затѣмъ къ возведенію функціональныхъ нормъ исчисленія и, при совмѣстномъ употребленіи того и другого, сохраняя въ виду и специфическія свойства, которыя даны вмѣстѣ съ конкретною природою вещи. Такимъ образомъ, чистое исчисленіе знаетъ просто-на-просто величины, и для него, напримѣръ, функція-синусъ не есть линія-синусъ, не говоря уже о томъ, чтобы это была линія, имѣющая опредѣленное положеніе относительно радіуса. Вмѣсто этого положенія опять фигурируетъ лишь безразличная величина, именно аргументъ, причемъ здѣсь отпадаетъ даже понятіе о началѣ счета. Въ вещественной же наукѣ, напротивъ того, эти-то различительныя specifica и изслѣдуются постепенно другъ за другомъ. Только такимъ образомъ завершается методическая постепенность, которая,—слѣдовать ли снизу вверхъ, или сверху внизъ,—даетъ правильныя научныя сочетанія съ должною мѣрою отвлеченности—безъ излишка, и безъ недостачи ея, и всякому воззрѣнію или способу воззрѣнія указываетъ его мѣсто вмѣстѣ съ соотвѣтствующимъ его приложеніемъ.

Синтетическая реакція въ геометріи вовсе не имѣла въ виду натуральной геометріи, но въ цѣломъ была уклоненіемъ, которое вело къ искуственности, за исключеніемъ въ извѣстной степени геніальной манеры отдѣльныхъ ея представителей, напр., Понселе. Они хотѣли создать нѣчто новое, уродилось же у нихъ нѣчто, такъ сказать, старофранцузское; съ своею всякою-всячиною и съ своею половинчатостью они являются представителями какъ бы романтики въ математикѣ, которая все еще ударяется въ геометрическое суевѣріе, хотя давно уже это рыцарское искуство вытѣснено болѣе могучимъ современнымъ оружіемъ. Къ болѣе натуральной механикѣ посредствомъ геометрико-статической реакціи Пуансо придти имъ также не удалось, хотя здѣсь все-таки нѣкотораго стремленія къ солидности и кое-какихъ заслугъ отрицать нельзя. Метода геометрико-статическихъ силовыхъ подстановокъ выглядитъ, правда, старомодно и, въ частности, статика Пуансо есть нѣчто насквозь старофранцузское. Стало быть, и на этой боковой тропинкѣ терять много времени не стоитъ, хотя во всякомъ случаѣ, въ виду громоздкости анализа, кое-какія упражненія въ непосредственно-геометрическомъ мышленіи повредить не могутъ. Но дѣло нужно вести такъ, чтобы всегда выходить отъ аналитическихъ образцовыхъ твореній, а въ пополненіе брать minimum специфической геометріи или иныхъ вещественныхъ предпосылокъ.

Но берегитесь всякихъ, на анализѣ или иначе выдрессированныхъ, авторитетныхъ машинъ въ человѣческой формѣ, а особенно когда онѣ вывозятъ на рынокъ современное мѣсиво изъ анализа и проэктивики, ибо это—нѣчто лишенное всякаго стиля, сборъ лоскутьевъ. Въ прежнее время математическіе знаки, когда иному приходилось натыкаться на нихъ на какой-либо незнакомой ему почвѣ, какъ, напр., геометрическія фигуры, имѣли значеніе человѣческихъ слѣдовъ, были прямо чѣмъ-то человѣческимъ. Теперь же, встрѣчая эту стряпню изъ формулъ и фигуръ, такъ и хочется крикнуть: это слѣды обезьянъ,—и притомъ (когда хорошо знакомъ съ свойствами профессорской фауны), слѣды нарочито неискусныхъ, вороватыхъ и злыхъ обезьянъ. Конечно, это—культурныя обезьяны; ихъ фабрикуютъ и дрессируютъ, воспитывая въ нихъ тщеславіе, въ университетахъ, для университетовъ и академій; но вслѣдствіе этого именно они являются еще болѣе злою каррикатурою на человѣка, чѣмъ настоящія обезьяны. Отвернись, поэтому, читатель, отъ всей этой толкучки, гдѣ процвѣтаетъ интеллектуальная и моральная пошлость, отвернись своевременно съ презрѣніемъ и брезгливостью, ищи своего пути, и только изрѣдка оглядывайся на одинокія вершины, уходящія въ высь, въ чистый воздухъ!

10. Простыя штудіи, т.-е. усвоеніе того, что уже существуетъ и дано другими, далеко еще не все. Штудіи даютъ много, когда хорошо расположены, а именно, когда вмѣсто чтенія трактатовъ, возможно скорѣе переходятъ

къ переработкѣ уже рѣшенныхъ задачъ. Но это вторичное нахожденіе уже извѣстныхъ результатовъ, особенно когда обращается вниманіе на историческую постепенность нахожденія ихъ, есть лишь предварительныя упражненія, и за ними должны слѣдовать самостоятельныя изысканія. По крайней мѣрѣ, таковъ основной законъ для всей совокупности наличныхъ способностей, хотя такимъ образомъ и касаются лишь немногихъ изъ нихъ.

Подъ именемъ самостоятельныхъ изслѣдованій нужно разумѣть работы двоякаго рода. Либо берутся задачи, унаслѣдованныя исторически, но или не рѣшенныя, или рѣшенныя не вполнѣ; либо изслѣдователь ставитъ самъ себѣ задачу, о которой до сихъ поръ еще не думали. Послѣдняя свободная иниціатива, при одинаковыхъ остальныхъ обстоятельствахъ, очевидно, принадлежитъ къ высшему роду; ибо предложить значительную проблему и достичь первой постановки вопроса есть нѣчто большее, чѣмъ взять что-либо, завѣщанное исторіей. Нерѣдко важнѣйшія три четверти работы состоятъ въ правильной постановкѣ задачи, и для отвѣта на вопросъ остается только одна четверть. Но какъ бы ни обстояло дѣло въ частности, все-таки проявляютъ больше оригинальности, когда успѣшно справляются съ значительными собственными, нежели съ завѣщанными исторіей задачами. Вообще большая или меньшая цѣнность дѣятельности обусловливается родомъ задачъ, надъ которыми работаютъ, все равно идетъ ли рѣчь о цѣлыхъ рядахъ поколѣній, о поколѣніяхъ или прямо объ отдѣльныхъ личностяхъ.

19-ое столѣтіе, т.-е. въ сущности послѣ-лагранжевское время, въ области чистой математики,—разумѣемъ задачи, стоящія упоминанія,—занималось лишь унаслѣдованными проблемами, даже лишь такими, которыхъ рѣшеніе почти доведено было до конца. Лучшія имена, даже единственныя, съ которыми можно связать представленіе о серьезныхъ творческихъ способностяхъ, Абель и Галуа, представляютъ собою все истекшее математическое столѣтіе, причемъ оба подвизались въ рѣшеніи упомянутыхъ второсортныхъ проблемъ. Но этого нельзя поставить въ упрекъ ни тому ни другому; напротивъ, здѣсь все зависѣло отъ времени и отношеній. Кромѣ того, оба они умерли въ молодыхъ лѣтахъ; Галуа даже шелъ лишь третій десятокъ вначалѣ. Неудивительно, поэтому, что они еще находились подъ свѣжимъ впечатлѣніемъ только что унаслѣдованной традиціи, т.-е. твореній Лагранжа. Лагранжъ умеръ незадолго до этого и передъ смертью выпустилъ новыя изданія важнѣйшихъ своихъ произведеній. Именно, его работа объ уравненіяхъ съ незаконченною главною проблемою должна была возбудить къ новымъ попыткамъ, и такимъ образомъ Абель, будучи еще студентомъ, былъ приведенъ къ задачѣ объ общемъ рѣшеніи уравненій, причемъ еще предполагалось, что уравненія вообще разрѣшимы въ алгебраической формѣ. Уже Лагранжъ считалъ это положеніе невѣроятнымъ, но не рѣшилъ вопроса окончательно, и Абель свое знаменитое доказательство невозможности нашелъ сперва путемъ тщетныхъ попытокъ, но онъ имѣлъ и предшественника въ лицѣ Руффини. Это доказательство, вмѣстѣ съ пополненіемъ о случаяхъ алгебраической разрѣшимости, было главною работою юнаго норвежца; ибо эллиптическія функціи, со всѣми добавленіями, принадлежали уже низшей области; къ разработкѣ ихъ дали поводъ матеріалы, собранные Лежандромъ, о чемъ нами упомянуто выше. Въ вопросѣ объ уравненіяхъ самъ Лагранжъ, начиная съ 1770 г., въ теченіи полустолѣтія не подвинулъ дѣла ни на шагъ впередъ, какъ ни близокъ былъ къ завершенію. Абель формулировалъ это заключеніе дѣла, давъ отвѣтъ, который Лагранжъ считалъ дѣломъ труднымъ, въ формѣ широковѣщательной и трудно контролируемой работы. О новой постановкѣ вопроса, которая значительно уклонялась бы отъ Лагранжевской, ни Абель, ни кто другой до сихъ поръ не думалъ; ибо данныя Галуа такъ называемыя рѣшенія въ эллиптическихъ функціяхъ едвали можно серьезно считать побѣдою надъ пятою степенью.

Галуа работалъ послѣ смерти Абеля, выходилъ въ теоріи уравненій также отъ методы Лагранжа, но имъ проложенный путь не совпадалъ съ Абелевскимъ, и самостоятельно пришелъ къ знаменитой теоремѣ, извѣстной подъ его именемъ и сдѣлавшей эпоху. Наслѣдіе Лагранжа было ему еще ближе и болѣе родственно, и о немъ, скорѣе чѣмъ объ Абелѣ, можно бы было сказать, что впослѣдствіи онъ, можетъ быть, достигъ бы болѣе оригинальныхъ результатовъ. Интересна его короткая, черезчуръ быстро и рано оборвавшаяся жизнь, потому что это, вмѣстѣ съ тѣмъ, и эпизодъ изъ исторіи упадка академій и, вообще, ученаго сословія. Молодой человѣкъ, не имѣя средствъ напечатать свои работы на свой счетъ, послалъ ихъ,—о, неопытный! во французскую академію. Тамъ онѣ долго валялись, и преимущественно по винѣ Фурье, который какъ лицо извѣстное второстепенными работами по числовымъ уравненіямъ, долженъ былъ дать отзывъ. Наконецъ, благодаря личному ходатайству Галуа, этимъ дѣломъ занялся Пуассонъ, но въ своемъ отчетѣ отозвался, что работа Галуа непонятна. Такимъ образомъ и въ этомъ случаѣ французская академія выставила въ недурномъ свѣтѣ свои моральныя и интеллектуальныя свойства. Что же касается главнаго въ работахъ Галуа, то несмотря на такое отношеніе къ нимъ академіи, оно опубликовано было почти на полупоколѣніе позднѣе этихъ событій и послѣ вскорѣ за тѣмъ послѣдовавшей смерти героя. Что еще комичнѣе, работа появилась въ журналѣ Ліувилля (1846), — въ изданіи, которое, будучи академическимъ оффиціозомъ, не смотря на то, хотя и съ извращеніемъ свѣдѣній о судьбѣ наслѣдія, оставленнаго Галуа, все таки напечатало его на своихъ страницахъ, — пославъ этимъ самымъ по адрессу академіи оскорбительное memento.

Впрочемъ, довѣрчивость Галуа по отношенію къ ученымъ того времени, даже послѣ его опыта съ академіей, простиралась довольно далеко; ибо, отправляясь на дуэль, которая окончилась его смертью, онъ оставилъ письмо, какъ бы свое завѣщаніе, въ которомъ, разумѣется—вотще, апеллировалъ къ указаннымъ въ немъ знаменитостямъ на нѣмецкой почвѣ, чтобы они своимъ авторитетомъ повліяли на французскихъ ученыхъ, и убѣдили бы ихъ, что имъ дѣйствительно написало нѣчто цѣнное. Бѣдный Галуа, ты, о наивный, назначаешь г-на надворнаго совѣтника Гаусса и г-на еврея Якоби какъ бы исполнителями своего завѣщанія, и испробовавъ у себя въ Парижѣ, какова эта bête triomphante, всетаки надѣешься, что въ Германіи она иная! Къ счастію, съ тѣхъ поръ мы насчетъ этого звѣря просвѣтились и просвѣтили другихъ, и недалеко то время, когда всюду даже и весьма зеленые юнцы будутъ насквозь видѣть, что такое это ученое сословіе, эти академіи и университеты, оффиціально или путемъ кумовства высоко взвинченныя знаменитости различныхъ странъ и племенъ, не исключая и израильскаго,—короче, вся ученая bestia trionfante, что бы уже не слѣдовать примѣру Галуа, и не адресоваться въ ихъ вертепы.

И для штудій и для изслѣдованія сказанное также служитъ важнымъ указаніемъ. То, что теперь извѣстно подъ моднымъ именемъ новой алгербы, еще хуже и болѣе импотентно, нежели реакція, выдающая себя за новую геометрію. Выкрутасы на старый ладъ, но съ новыми этикетками, каковы детерминанты, или съ подмѣной именъ, напр. substitutions вмѣсто permutations, вмѣстѣ съ настолько же безполезными, насколько и некрасивыми перебрасываньями костяшекъ туда и сюда, со всякимъ соромъ и пустяками, —вотъ тѣ великія дѣянія привиллегированныхъ махеровъ, изображавшихъ собою bête regnante. О вредѣ, какой этимъ нанесенъ былъ алгебрѣ, много распространяться не стоитъ. Исторія основательной и серьезной алгебры, что касается главной ея задачи, по смерти Галуа стоитъ на одномъ мѣстѣ вотъ уже цѣлое полустолѣтіе, и даже во второстепенныхъ частяхъ мало появилось вещей порядочныхъ. Даже компилятивныя работы, какъ напримѣръ вторымъ изданіемъ вышедшій въ 1880 г. нѣмецкій переводъ высшей алгебры Серре, только подтверждаютъ собою упадокъ уровня состоянія. Такъ, изложеніе Серре полно модныхъ вывертовъ, модныхъ гримасъ и тумана, но бѣдно яснымъ пониманіемъ и способностью къ ясной и простой репродукціи лучшихъ работъ, такъ что напр. не всякій легко пойметъ изъ нея, какимъ образомъ Галуа нашелъ свою теорему, если еще не знакомъ съ нею, или если не сумѣетъ эту кривую передачу ея привести въ должный порядокъ и пополнить. Не смотря на это, подобныя компиляціи все-таки могутъ сослужить службу лексикона, хотя, во всякомъ случаѣ, лексикона не особенно хорошаго.

11. То, что въ характеристикѣ высшей алгебры сказано нами о состояніяхъ, натурально, относится цѣликомъ и ко всей математикѣ; ибо болѣе абстрактная область и соотвѣтственное заостреніе пониманія, натурально, есть какъ

бы рѣшеніе высшей инстанціи, и если таковое, благодаря внѣшнему господству привиллегированныхъ глупостей, фальшиво, то и въ низшихъ областяхъ или изъ этихъ областей не можетъ возникнуть движенія особенно разумнаго и свободнаго, не говоря уже о чемъ-нибудь такомъ, что было бы насквозь вліятельно. Такъ, напр., Понселе, если бы даже онъ и могъ подняться достаточно высоко, но въ силу естественной слабости своей, въ сущности, геометрической точки зрѣнія, не былъ бы въ состояніи сколько нибудь значительно помочь убожеству, которое онъ, конечно, хорошо видѣлъ. Онъ удовольствовался кое какими насмѣшками, которыя по большей части попадали въ цѣль, и будучи критикою авторитетною и научно свободною, всегда будутъ заслуживать благодарности.

Ограниченностью, которая тормозила дѣло, въ соединеніи съ кое-какими способностями на мелочи, а также своего рода схоластическимъ давленіемъ, мѣшавшимъ свободному взмаху науки, стремившейся къ лучшему, особенно выдѣлялся тотъ Геттингенскій профессоръ Гауссъ, беотійскихъ штучекъ котораго мы не могли пройти молчаніемъ. Существенныя черты общей его характеристики даны нами при выясненіи контрастовъ въ сочиненіи о Робертѣ Майерѣ, которое вообще могло бы служить для характеристики современныхъ ученыхъ сферъ. Но для штудій и для изслѣдованія болѣе тщательная орьентировка въ математическихъ состояніяхъ въ частности была бы здѣсь умѣстна, будучи полезна и внѣшне и внутренне. Въ своихъ основныхъ чертахъ предметъ этотъ не представляетъ трудностей для достойной его оцѣнки, но если войти въ современныя его частности, какъ и въ подробности прежней исторіи, то столкнемся, по большей части, съ такими жалкими и отталкивающими явленіями, что лучше будетъ бросить на все это бѣглый взглядъ издали, нежели угощать себя эстетическими непріятностями ближайшаго лицезрѣнія. Критическое правосудіе при этомъ нечего не потеряетъ, хотя и не будетъ заглядывать во всѣ углы и норы.

Итакъ, укажемъ лишь вообще, что испорченныя состоянія въ своей юности основываются на двухъ вредоносныхъ причинахъ, изъ коихъ и одной было бы совершенно достаточно, чтобы въ области ея господства оттѣснить лучшія традиціи прошедшаго и заглушить лучшія сѣмена будущаго. На первомъ мѣстѣ это—обветшалыя состоянія ремесленной учености университетовъ, рядомъ съ такими же качествами академій, и это ведетъ за собою распложеніе ученыхъ, естественный подборъ которыхъ благопріятствуетъ переживанію малыхъ способностей, но великой покорности. Къ этому присоединяется уже въ средніе вѣка дѣйствовавшій принципъ, въ силу котораго потребное ученое сословіе рекрутировалось изъ такихъ состояній и общественныхъ классовъ, которые менѣе всего привыкли къ свободѣ дѣйствія и мышленія. Вмѣстѣ и самые покорные, и самые ограниченные, даже прямо отупѣвшіе и оглупѣвшіе въ рабствѣ элементы населенія и сословія доставляли изъ своихъ семей не малое число кандидатовъ на мѣста ученыхъ, причемъ такой подборъ давалъ не только теологовъ, но и математиковъ. Въ соединеніи съ упадкомъ всюду университетовъ, которые изъ собственной своей среды давали нѣчто еще худшее, приплодъ дѣлался чѣмъ дальше, тѣмъ дефектнѣе и хуже и морально, и интеллектуально.

Проникновеніе евреевъ въ квалифицированныя такимъ образомъ учрежденія—и это теперь совершается вполнѣ безпрепятственно, тѣмъ болѣе что они больше всего любятъ плодиться и толочься всюду, гдѣ замѣчается порча состоянія,—эта гебраизація математики ведетъ къ окончательному разрушенію всякихъ заботъ о процвѣтаніи математики. Правда, эта вторая причина порчи дѣла только второстепенна, но всетаки слишкомъ низко цѣнить ее не слѣдуетъ; ибо евреи, будучи въ сущности безъ всякихъ задатковъ къ творчеству и къ продуктивности, и даже безъ достаточныхъ способностей къ сносному подражанію, лѣзутъ въ математику словно на рынокъ, чтобы и съ этимъ товаромъ и съ соотвѣтствующими патентами дѣлать свои гешефты. Они только и умѣютъ вести свой гандель чѣмъ бы то ни было, но и этотъ гандель только тогда имъ на руку, когда не требуетъ большого ума. Но гдѣ для сбыта научнаго товара нужна болѣе тонкая критика, тамъ ученымъ отъ чреслъ Іуды приходится кричать «гевалтъ», и здѣсь-то именно они оказываются со всякаго рода товаромъ, настоящая цѣна которому еще меньше, чѣмъ цѣна стараго платья, за которымъ ихъ не такъ ученые братья шмыгаютъ изъ дома въ домъ.

Все низменное и дрянное—какъ разъ по натурѣ еврея, и привлекаетъ ихъ ограниченный умъ больше, нежели высокое и превосходное. Потому-то прямо величайшія и благороднѣйшія явленія, какъ, напр., Лагранжа, они хулятъ, даже нагло злословятъ, и свое насиживанье чужихъ яицъ нахально выдаютъ за главное дѣло, которое удалось только имъ. Такъ дѣлалъ, напр. Якоби, и съ тѣхъ поръ какъ его приспѣшникамъ, чѣмъ дальше тѣмъ больше удавалось рекламировать его какъ математика перваго ранга,—съ тѣхъ поръ еврейство цѣлыми кучами засѣло въ червивые притоны математики. Въ европейскихъ академіяхъ и въ университетской средѣ у евреевъ всюду есть свои люди, они заправляютъ журналами, вмѣшиваются со своими плутнями въ дѣла академій, напр., въ дѣла съ задачами на преміи, втираются въ экзаменаціонныя комиссіи, вынуждаютъ преимущественно къ изученію математиковъ—евреевъ, наконецъ, способствуютъ тѣснящимся отовсюду еврейскимъ кандидатамъ на каѳедры во всякаго рода школахъ легко получать искомое. Вообще они поддерживаютъ всякаго рода шарлатанство, способствуютъ процвѣтанію всякихъ нечистыхъ дѣлъ, такъ что въ ихъ рукахъ физіономія науки сдѣлалось дѣйствительно отвратительною, а внѣшность ея прямо грязною. Занимаясь съ незапамятныхъ временъ ганделемъ, они понаторѣли въ «дважды — два» и сдѣлались немножко рабами цыфирнаго искуства, и на этомъ основаніи набарабанили о себѣ своими болѣе чѣмъ глупо-нахальными, а прямо глупо-безстыдными рекламами, что они особенно даровитые математики, тогда какъ не только исторія ихъ племени, но и всѣ ихъ новѣйшія антрепризы доказываютъ противное. Но этимъ объясняется также, что при своей неспособности они какъ болѣе сродное себѣ почти всегда выбираютъ самое извращенное, и при одинаковыхъ прочихъ обстоятельствахъ, чаще чѣмъ принадлежащіе къ лучшимъ національностямъ попадаются въ просакъ, принимая за истину блестящія нелѣпицы безтолковыхъ авторитетиковъ.

Итакъ, что касается состояній, мы указали на самыя печальныя аномаліи, и, сообразно этому, изучающій можетъ уберечься отъ пустой траты времени, а самостоятельный изслѣдователь и положительно лучше орьентироваться, если онъ,—поскольку вообще онъ беретъ въ руководство то, что уже было, — можетъ слѣдовать примѣру достойныхъ и вмѣстѣ высокоодаренныхъ характеровъ, не слишкомъ поддаваясь обманчивымъ уклоненіямъ или прямо мошенничеству. Немножко анатоміи по части ученаго хозяйства, немножко знанія паразитной расы, копошащейся въ цеховомъ трупѣ, — и изслѣдователь быстро минуетъ многое, что иначе его задержало бы. Онъ будетъ видѣть ограниченность и мошенничество тамъ, гдѣ иначе онъ съ великою довѣрчивостью предполагалъ бы способности и честность и, при этой гипотезѣ, не скоро бы покончилъ съ кое-какими вещичками. Но разъ онъ познакомился съ однимъ—двумя случаями всѣми уважаемой глупости и всѣми уважаемаго мошенничества той или другой знаменитости, свободному полету его мысли и успѣху его уже ничто не стоитъ на пути. Путь ему расчищенъ и ничто не загораживаетъ ему вида на лучшее.

Только при этомъ послѣднемъ предположенiи дѣйствительно великiя традицiи и выступаютъ въ настоящемъ свѣтѣ. Но полной оцѣнки онѣ дождутся только когда будетъ видно, благодаря чему не только позднѣе, но и съ самаго начала, а отчасти и сами по себѣ оставались онѣ въ тѣни. Связь съ академiями вредно влiяла даже на ученыхъ благороднѣйшаго типа, и не такъ-то легко и натурально работается, думается и пишется, какъ это было бы возможно, если бы научный воздухъ былъ чище и здоровѣе. Даже Лагранжева дѣятельность приняла бы еще лучшую форму, если бы онъ не былъ академикомъ и его публикой не былъ бы тѣсный кружокъ ученыхъ. Его превосходнѣйшiя собственно учебныя произведенiя возникли уже благодаря лучшей необходимости и лучшему положенiю, будучи внѣшнимъ образомъ вызваны учрежденiями революцiи, но и съ внутренней и съ внѣшней стороны могли бы выйти еще болѣе цѣлесообразными, если бы нѣкоторая духовная революцiя въ состоянiяхъ ученыхъ сферъ принесла бы съ собою и болѣе натуральный порядокъ и лучшiе нравы. Великимъ явленiямъ оказываютъ плохую услугу, когда считаютъ, будто хорошо все, что выправляетъ не ихъ внутреннiя качества, а тѣ недостатки, съ которыми они связаны въ силу существующихъ отношенiй. Итакъ, если очистить Лагранжа отъ академической шелухи, то вылущится нѣчто такое, что, безъ всякаго ограниченiя, могло бы продолжать свое дѣйствiе и на всю науку будущаго, свидѣтельствуя о благородномъ типѣ высокой умственной силы.

Натуральнѣйшее въ теорiи должно оказаться и въ высшей степени практичнымъ. Всю математику можно разсматривать какъ одну единственную обширную проблему, развѣтвляющуюся на спецiальныя задачи, при чемъ послѣднимъ предметомъ въ ней является вся дѣйствительность вещей и отношенiй даже тамъ, гдѣ эта задача на нѣкоторой абстрактной ступени относится только къ абстрактнымъ возможностямъ общихъ количественныхъ идей. Въ области чистой математики вопросъ объ уравненiяхъ до сихъ поръ былъ и остается высшею проблемою. Но прежняя форма этой проблемы находилась въ противорѣчiи съ непосредственною примѣнимостью ея результатовъ къ практикѣ; включительно даже до третьей степени высшiя уравненiя на дѣлѣ удобнѣе рѣшаются въ приближенiяхъ путемъ методическихъ попытокъ. Сверхъ того, отвѣтъ на эту промблему, до нашихъ упрощенiй и дополненiй, былъ довольно сложенъ, малодоступенъ и нелегко контролируемъ, такъ что, если оцѣнивать дѣло мѣркою умственнаго удовлетворенiя, то преодолѣнiе трудностей не приносило большой радости, да и немногимъ могло быть доступно. Сверхъ того, мы установили какъ норму, что для практики достаточно двухъ первыхъ степеней, и что въ сферѣ вещественной математики, равно и для ближайшихъ интересовъ изученiя и изслѣдованiя, слѣдуетъ по возможности избѣгать высшихъ неприводимыхъ уравненiй. Какимъ путемъ соединимо и то и другое, т.-е. высшая спекулятивная точка зрѣнія съ преслѣдованіемъ въ высшемъ смыслѣ слова практическихъ цѣлей, должно научить болѣе совершенное пониманіе и дальнѣйшая разработка проблемы всей математики. Математика должна стать самою спекулятивною практикою, — чтобы удовлетворить какъ своему высшему, такъ и низшему предназначенію. Въ противность этому, математисты,—нѣчто еще худшее софистовъ математики,—занимаются лишь безполезною игрою и плутовскими проказами.

Въ нашихъ указаніяхъ изучающій математику или ведущій изслѣдованія въ этой области имѣетъ точный компасъ, который поможетъ ему избѣжать коварныхъ пучинъ и водоворотовъ и держать настоящій курсъ; а въ нашихъ «Основныхъ средствахъ» онъ найдетъ не только надежный якорь, но и лучшій руль.

IV.

Критика основъ дифференціальнаго исчисленія.

1. Общая задача въ рамкахъ математики и внѣ ихъ.—2. Историческое въ отношеніи къ анализу положеніе Лагранжа и школъ противоположнаго направленія. — 3. Происхожденіе фикціи безконечно-малаго какъ величины, меньшей всякой данной величины.—4. Главная точка зрѣнія. Непосредственное опредѣленіе неограниченно-малаго.—5. Дифференціальное исчисленіе какъ исчисленіе приблизительное съ неограниченнымъ приближеніемъ. Фигурирующее у Лагранжа неограниченное малое осталось непонятымъ.—6. Такъ называемое „истощеніе“ величинъ есть просто неограниченное приближеніе. Необходимость скачка для перехода къ самому предѣлу. — 7. Неограниченность въ направленіи къ малому, малое и неограниченно-малое. — 8. Основаніе такъ-называемыхъ урѣзокъ въ дифференціальномъ исчисленіи.—9. Неограниченно-приближенныя уравненія фактически смѣшиваютъ съ строгими уравненіями. Гермафродитная безсодержательность въ формѣ и въ нотаціи анализа безконечно-малыхъ. — 10. Отношеніе новыхъ аналитическихъ понятій къ соотвѣтственнымъ вещественнымъ понятіямъ. Разграниченіе понятій: неограниченно-большое и безграничное.—11. Переходъ отъ неограниченно-великаго къ безграничному, по природѣ своей, есть скачокъ.—12. Дальнѣйшія свойства этого перехода. Разрывъ функцій.

1. Никакая область, гдѣ работаютъ умъ и фантазія, несвободна отъ суевѣрій, и математика отнюдь не представляетъ исключенія. Но въ ней всякіе ложные вымыслы, разъ признаны они таковыми, легче указать чѣмъ гдѣ-либо. Не всякіе вымыслы, получившіе права гражданства

въ математикѣ, имѣютъ въ ней и источники. Такъ, вещественное представленіе мнимаго (такъ наз. геометрическая интерпретація мнимаго) возникло на почвѣ самой математики. Но вступая въ область такъ наз. безконечности, мы сталкиваемся съ заблужденіями и трудностями, принадлежащими общему міропредставленію, и никакъ не исключительно математикѣ въ собственномъ смыслѣ. Всѣ понятія бытія, въ которыхъ прямо фигурируютъ время и пространство,—всѣ такія понятія испорчены благодаря предразсудку безконечности. Такимъ образомъ, логика бытія и міра или, лучше сказать, ея каррикатура, какъ инстанція погрѣшающая, предшествуетъ математикѣ. Но разъ эти ложныя представленія укрѣпились на почвѣ логики бытія, имъ уже легче было найти доступъ и въ математику, пустить въ ней корни и расцвѣсти пышнымъ цвѣтомъ. Одна область находила опору въ другой. Слава науки точной,—и ею математика по праву пользовалась за свои лучшія составныя части,—въ теченіе новыхъ вѣковъ не только въ области самой математики прикрывала собою чудовищность понятія безконечности, но способствовала и тому, что метафизика, эта алхимія мышленія, продолжала еще доселѣ влачить свое существованіе.

Кто беретъ на себя задачу очистить математику отъ ложныхъ представленій безконечности, тотъ вмѣстѣ съ тѣмъ дѣлаетъ такой шагъ, посредствомъ котораго и все остальное мышленіе можетъ быть освобождено отъ кошмара безконечности. Обратный путь не былъ бы въ такой же мѣрѣ рѣшающимъ, ибо если не взять этой, повидимому, несокрушимой твердыни въ самой математикѣ, то трудно справиться съ нею съ другой стороны. Да, сверхъ того, и нѣтъ другой области, которая бы въ полнѣйшей мѣрѣ способна была къ поясненію, и вмѣстѣ съ тѣмъ, отличалась бы такою же наглядностью. Чистая схематика понятій имѣетъ первую наглядную станцію въ математикѣ. Здѣсь находятъ себѣ примѣненіе существенныя понятія и здѣсь они какъ бы срослись съ такимъ матеріаломъ, который можетъ быть поставленъ внѣ всякихъ сомнѣній. Итакъ, практическій исходный пунктъ, во всякомъ случаѣ, долженъ быть взятъ въ математикѣ, даже если бы рѣчь шла не непосредственно о ней, а вообще о надлежащемъ мышленіи и объ истинномъ знаніи. Притомъ же, логическая послѣдовательность и, такъ сказать, ранговый порядокъ мыслей только повидимому—иной; ибо если всмотрѣться ближе, то и вообще все, что только можно мыслить опредѣленно, носитъ на себѣ тѣ же основныя черты, какія подлежатъ разсмотрѣнію и въ математикѣ собственно. Математика коренится въ общемъ мышленіи, гдѣ имѣютъ мѣсто необходимости, лишь неправильно считаемыя специфически математическими. У обѣихъ областей общи и объективные факты, которые нерасторжимы, т.-е. ихъ нельзя переносить изъ одной области въ другую. Примѣромъ и основнымъ типомъ такой общности служитъ какъ разъ все, что относится къ руководящимъ понятіямъ о безконечномъ.

Разъ имѣется правильная математика, то вмѣстѣ съ нею имѣется и правильное представленіе бытія. Понятія о неограниченности въ пространствѣ и во времени должны быть образцово порѣшены въ математикѣ, если эта наука хочетъ быть точною, а не просто чѣмъ-то относительнымъ и формальнымъ, или колеблющимся и такъ и сякъ. Въ концѣ концовъ всегда бываетъ такъ, что самые крайніе вопросы и сопринадлежные отвѣты, если только формулировать ихъ точно и съ надлежащею отвлеченностью, получаютъ всегда одну и ту же форму, все равно, будемъ ли искать ихъ на почвѣ схематики бытія, или же на почвѣ математики. Такъ, Элейцы, и между ними особенно Зенонъ, занимаясь вопросами о переходѣ отъ одной непротяженной точки къ другой и о безконечности промежуточныхъ положеній, подвизались въ той же области, гдѣ болѣе двухъ тысячелѣтій спустя, а именно начиная съ XVII столѣтія, надѣлали промаховъ и новѣйшіе математики, и въ числѣ ихъ даже знаменитѣйшіе. Искорененіе математическаго предразсудка безконечности повліяетъ благодѣтельно и въ другомъ отношеніи. Кто пріучитъ себя остерегаться фальши и мыслить лучшими понятіями на почвѣ математики, тому не трудно будетъ и вездѣ держаться правды и сторониться обмана.

2. Ложныя представленія о математической безконечности имѣютъ свою исторію, а наиболѣе выдающіяся черты ея относятся къ послѣднимъ десятилѣтіямъ XVII столѣтія. Исторія эта тянется и до настоящаго времени, самые же удивительные плоды по этой части созрѣли въ отуманенной метафизикою головѣ геттингенскаго профессора Гаусса *). Къ числу этихъ рѣдкостныхъ плодовъ относятся, напр., прямолинейные треугольники, въ которыхъ сумма угловъ меньше двухъ прямыхъ, и вообще вся антиэвклидовская геометрія. Ничего подобнаго не было бы, если бы не существовало предразсудка т. н. безконечности, предразсудка, обусловливаемаго шаткостью и неясностью представленій у величайшихъ математиковъ. Всѣ они причастны одному заблужденію, относящемуся къ понятію о безконечно-маломъ. Единственнымъ исключеніемъ

*) А у насъ на этомъ поприщѣ подвизался, несомнѣнно геніальный, Лобачевскій; онъ также, какъ видно изъ его біографіи, находился подъ вліяніемъ метафизики (Канта).

Примѣч. переводчика.

является Лагранжъ, но и онъ своему несочувствію этому ложному метафизическому представленію далъ лишь непрямое выраженіе, а именно онъ просто обошелъ это понятіе, вмѣсто того чтобы прямо выбросить его за бортъ. А Лагранжъ является не только всеобъемлющимъ представителемъ всей математики новаго времени, такъ что у него наука эта переработана универсальнѣйшимъ и раціональнѣйшимъ образомъ, но онъ и вообще свободенъ былъ отъ всякихъ предразсудковъ, откуда бы они ни проистекали. Тѣмъ не менѣе, и онъ все-таки есть только предварительная стадія къ рѣшительной переработкѣ и очищенію всей высшей математики, и его положеніе двойственно, поскольку онъ одною ногою стоялъ еще на почвѣ старыхъ понятій. Что же касается другихъ знаменитыхъ математиковъ, то не исключая даже и наиболѣе достойныхъ между ними, каковы Абель и Галуа, то изъ нихъ никто не стоялъ на точкѣ зрѣнія этого истиннаго ревнителя анализа, и въ нихъ начатая имъ реформа не нашла себѣ опоры. Да и вообще все направленіе XIX столѣтія носило печать реакціи по отношенію къ стремленіямъ Лагранжа. Если Лагранжъ, хотя и не вполнѣ, отвергъ метафизическое понятіе о безконечно-маломъ, но все-таки, по крайней мѣрѣ, свернулъ отъ него въ сторону, то слѣдовавшія за нимъ поколѣнія снова подпали ложному культу метафизики безконечно-малаго. Характернѣйшимъ примѣромъ этой реакціи служитъ между аналистами католикъ-легитимистъ и учитель іезуитовъ Коши, а на нѣмецкой почвѣ еврей Якоби и профессоръ Дирикле.

Едва ли нужно упоминать о ходовыхъ учебникахъ и курсахъ; это—просто школьное эхо задающаго въ данное время тонъ матадора, а зачастую и еще менѣе. По отношенію къ нашему вопросу, лучшіе курсы питаются старою традиціей, яко-бы критическою, но также до-лагранжевскою. Въ дифференціальномъ исчисленіи это — такъ называемая метода предѣловъ, ядро которой въ ньютоновскихъ первыхъ или послѣднихъ отношеніяхъ, при чемъ академическимъ промоторомъ ея былъ Даламберъ. Исходнымъ пунктомъ берутся здѣсь опредѣленныя конечныя разности, т.-е. какой угодно величины приращенія, и затѣмъ ихъ дѣлаютъ менѣе и менѣе, заставляя въ концѣ концовъ исчезнуть въ предѣлѣ, но при этомъ,—и это нужно хорошо помнить, — не дѣлая ихъ строго нулями. Самые распространенные учебные курсы Парижской Политехнической Школы, какъ въ прежнее время Навье, а позднѣе Штурма, какъ это совершенно осязательно видно, устанавливаютъ безконечно-малое у самаго предѣла, а чрезъ это снова выступаетъ на сцену вся фальшь, и выходъ отъ опредѣленныхъ конечныхъ приращеній становится вещью ненужною. Но должно замѣтить, что Даламберъ и вообще не далъ ничего, что можно бы было назвать логически основательнымъ. Правда, онъ хотѣлъ быть радикальнымъ, но ему недоставало глубины и въ достаточной мѣрѣ чувства истины. Потому-то ему не удалось и методу предѣловъ освободить отъ всякой метафизики, а только перенести метафизическую ложь на не такъ замѣтный задній планъ. Совершенно основательно Лагранжъ высказался противъ методы предѣловъ, но и ему главнаго заблужденія исправить не удалось. Именно, онъ хотѣлъ удержать понятіе предѣла только тамъ, гдѣ неограниченному измѣненію противостоитъ съ очевидностью вполнѣ опредѣленная, постоянная граница, какую представляетъ, напр. кругъ для описываемыхъ и вписываемыхъ многоугольниковъ, когда число сторонъ ихъ возрастаетъ неограниченно. Напротивъ того, касательная въ данной точкѣ, по его воззрѣнію, не составляетъ настоящаго предѣла для проходящихъ чрезъ эту точку сѣкущихъ, ибо можно вращать сѣкущую и далѣе, послѣ того какъ она перешла въ касательную. Но это возраженіе, очевидно, не попадаетъ въ главный пунктъ; ибо о касательной только и можетъ быть рѣчь не какъ о предѣлѣ, за который перейти нельзя, а какъ объ опредѣленномъ положеніи, къ которому можно съ обѣихъ сторонъ приближаться, или отъ него въ ту и другую сторону удаляться. Ошибка методы предѣловъ состоитъ въ томъ, что фактически не доходятъ до самаго предѣла, а довольствуются какимъ-то ни-то ни-cё у предѣла, или лучше, передъ предѣломъ, такъ что выходитъ нелѣпость, несмотря ни на какія возраженія, все еще включающая безконечно-малое и сопутствующій ему метафизическій туманъ. Но Лагранжъ не могъ обратить на это вниманія, ибо и самъ, хотя и неохотно, допускалъ безконечно-малое какъ гипотезу, и потому онъ поступилъ совершенно послѣдовательно, когда и во второмъ изданіи своей Аналитической Механики, появившемся около 15 лѣтъ спустя послѣ Теоріи Функцій, удержалъ эту гипотезу, а не просто дифференціальную символику. Гипотезу эту онъ условно употреблялъ какъ тождественную гипотезѣ недѣлимыхъ, считая ее непосредственно недостаточно точною, и рядомъ съ нею прокладывая другой путь, который долженъ былъ являться болѣе яснымъ и независимымъ отъ всякой метафизической гипотезы. Нѣкоторыя мѣста въ его Аналитической Механикѣ, и именно во второмъ ея изданіи, съ очевидностью свидѣтельствуютъ, что въ его умѣ по отношенію къ безконечно-малому оставалось еще много неяснаго, и эта неясность не дозволяла ему составить себѣ непосредственно точное понятіе о дифференціалахъ и объ ихъ вещественныхъ панданахъ въ приложеніяхъ.

3. Чтобы эти историческія указанія пополнить болѣе спеціальными ссылками, должно дать очеркъ болѣе правильныхъ понятій; ибо только при ихъ помощи можно должнымъ образомъ освѣтить все, что ложно. Въ виду этого, прежде всего укажемъ на двоякую противоположность, которой доселѣ не знали. Всегда были вынуждены отличать нуль отъ безконечно-малаго, не сливая этихъ понятій; но что касается безконечно-большихъ величинъ, то никогда не дѣлали соотвѣтствующаго различія, даже не имѣли и отдаленнѣйшаго понятія о томъ, что подобное различеніе вообще возможно, не говоря уже о томъ, что оно неизбѣжно. Линія тангенса для угла 90^0 есть линія неограниченная, какъ и соотвѣтствующая линія секанса. Но эта фактическая неограниченность есть нѣчто совсѣмъ иное, чѣмъ та безграничность роста, которая имѣетъ мѣсто въ случаѣ тангенса, если уголъ, для котораго линія эта должна служить тангенсомъ, неограниченно приближать къ 90^0, такъ чтобы все еще онъ отличался отъ 90^0, но разность между ними и 90^0 можно бы было сдѣлать какъ угодно близкою къ нулю. При этомъ послѣднемъ предположеніи малость угловой разности не связана ни съ какою опредѣленною величиною, менѣе которой ее нельзя бы было сдѣлать, т.-е. малой величинѣ, о которой идетъ рѣчь, не ставится никакого ограниченія, напротивъ, эта малость неограниченна. Сказать, что предѣломъ малости служитъ 0, значитъ только иначе выразить, что вообще нѣтъ никакого количественнаго предѣла; ибо 0 отнюдь не есть величина, а отсутствіе всякой величины. Но никогда не разсматривали безконечно-малое въ такомъ смыслѣ, но овеществляли его какъ имѣющееся и данное нѣчто, которое меньше всякой данной величины. Но на дѣлѣ только нуль меньше всякой данной величины. Величина

меньшая всякой данной величины есть понятіе, противорѣчащее понятію о величинѣ. То, что должно быть величиною, должно при всякихъ обстоятельствахъ, гдѣ бы оно ни предполагалось, имѣть опредѣленную данную величину. Оно не можетъ быть величиною и вмѣстѣ отсутствіемъ величины; и однако, метафизическая фикція математиковъ допустила такую нелѣпость.

Если слѣдовать этой фикціи, которая и теперь еще въ большомъ ходу, то между нулемъ и нѣкоторою величиною, какъ бы она ни была мала, должно существовать какое-то ни-то ни-сё. Это ни-то ни-сё не должно быть нулемъ, но оно не должно быть и нѣкоторою весьма малою величиною, взятою произвольно; оно должно быть тѣмъ послѣднимъ «чѣмъ-то», что́ предполагается меньше всякой, какую только можно вообразить, степени малости. Какую бы степень малости ни предположить, мы никогда не достигнемъ этого метафизическаго гермафродита нуля и величины; но въ заоблачномъ Кукушградѣ математиковъ фикція эта существуетъ; вѣдь они удостовѣрили въ ея существованіи метафизикою, и она даже показалась имъ весьма способнымъ къ производительности существомъ. Во всякомъ случаѣ, фикція эта была плодовита всякими сомнительнаго рода вещами и всякими глупостями; производительна же была не она, а та истина, которая въ ея туманѣ и вопреки этому туману, хотя и смутно, прорывалась наружу съ безсознательностью природы.

Судя по всему, что можно замѣтить, обращаясь къ прошлому, одинъ способъ выраженія, свойственный весьма отдаленной древности, повиненъ въ томъ, что въ новыя столѣтія возникъ предразсудокъ, благодаря которому появилась эта фикція безконечно-малаго. Выраженіе «менѣе всякой данной величины» иногда можемъ имѣть извѣстный смыслъ. Это—случай, когда его употребляютъ не въ отношеніи къ чему-либо фактическому, какъ бы законченному, но въ совершенно иной словесной и логической связи, гдѣ отъ насъ зависитъ предполагать что-либо всегда меньшимъ нѣкоторой величины, которую мы можемъ задать. Такимъ образомъ мы какъ бы однимъ взглядомъ охватываемъ всѣ степени малости до нуля. Но этою возможностью сразу обозрѣть всѣ степени малости обязаны мы лишь разсмотрѣнію пространственнаго движенія, и ложная видимость, сюда примѣшанная, тотчасъ же сказывается, какъ скоро мы начинаемъ прочно держаться болѣе ясныхъ ариѳметическихъ понятій. Если вставлять дроби между единицею и нулемъ, то во всякомъ случаѣ можно, по неограниченности счета, представить себѣ совокупность ничѣмъ неограниченныхъ вставокъ. Но эта совокупность есть лишь антиципація безконечнаго накопленія, подобно накопленію чиселъ въ неограниченномъ рядѣ чиселъ. Это—логическія рамки для предположенія никогда не могущей окончиться дѣятельности. Но если бы кто при этомъ захотѣлъ никогда не могущее завершиться разсматривать какъ нѣчто завершимое, тотъ не только очутился бы въ противорѣчіи съ собственнымъ своимъ утвержденіемъ, но вмѣстѣ съ тѣмъ погрѣшилъ бы и противъ закона «опредѣленнаго числа». Если что фактически имѣется, какъ число, то оно можетъ существовать только въ опредѣленномъ числѣ. Безконечное число, какъ нѣчто данное, есть безсмыслица, т.-е. въ самомъ себѣ ложное, безсодержательное и невозможное понятіе. На этомъ нашемъ *законѣ опредѣленнаго числа* строится все міровоззрѣніе и имъ исправляются всѣ понятія о мірѣ, ложныя по отношенію къ содержанію времени и пространства; впрочемъ, здѣсь мы имѣемъ дѣло лишь съ чисто-математическими понятіями самими по себѣ. Здѣсь законъ этотъ даетъ достаточно, изгоняя изъ созерцанія движенія всякія искусственно созидаемыя противорѣчія.

Когда говорятъ: „менѣе всякой данной величины“, то это имѣетъ смыслъ не какъ фактичность, а какъ возможность. Если дана нѣкоторая какъ угодно малая величина, то, въ предположеніи неограниченной дѣлимости, возможно задать величину еще меньшую. Упомянутая малая угловая разность между перемѣннымъ угломъ и 90^0, если подвижному радіусу давать послѣдовательно различныя положенія, можетъ принимать, по чисто-математическимъ воззрѣніямъ, всякую степень малости; также и всякій линейный отрѣзокъ, если подвижную точку ближе и ближе перемѣщать къ неподвижной. Поэтому, если, слѣдуя обычному представленію объ абсолютно непрерывномъ движеніи, будутъ пройдены всѣ положенія, то получится видимость, будто-бы фактически пройдены и всѣ степени малости. Движеніе является здѣсь волшебницею, строющею мостъ чрезъ безконечность и ее завершающею, слѣдовательно, даетъ мѣсто противорѣчію дѣйствительности, даетъ мѣсто нелѣпицѣ. Потому-то Элеецъ Зенонъ и провозгласилъ, что само движеніе есть нелѣпость, призракъ, чистая видимость, на дѣлѣ не существующая. Но вмѣсто того, чтобы высказывать подобную глупость и отрицать самое бытіе движенія, лучше было бы обратиться къ собственному разуму и поискать, нѣтъ ли здѣсь опрометчивости, искуственности, не погрѣшаетъ ли разумъ, и не въ этомъ ли вина, что понятіе о движеніи мы себѣ испортили. Чувства, чувственное созерцаніе и представленіе въ этой порчѣ неповинны; взвинчиваніе понятій—вотъ причина, за которую только и могли цѣпляться подобныя утонченныя противорѣчія. Помѣщеніе безконечнаго множества отдѣльныхъ точекъ въ рядъ всегда есть лишь возможность, но никакъ не завершимый фактъ. О двухъ непосредственно смежныхъ точкахъ мы просто не имѣемъ никакого понятія. Непротяженныя точки, о которыхъ только и можетъ быть рѣчь при строго математическомъ мышленіи, либо совпадаютъ въ одну точку; либо онѣ не совпадаютъ, но тогда между ними находится опредѣленное разстояніе, которое, какъ нужно это мыслить, можетъ быть задано. И необходимость этого рода зависитъ никакъ не отъ изслѣдуемой полной дѣйствительности вещей, а отъ свойства и дѣятельности нашихъ понятій и самаго нашего пониманія. Потому непрерывный рядъ непротяженныхъ точекъ, изъ которыхъ одна начиналась бы тамъ, гдѣ другая оканчивалась бы,—такой рядъ есть нелѣпость, допустить которой нельзя. Вообще, ходовое математическое представленіе непрерывности есть замаскированное понятіе безконечности въ ложномъ родѣ. Поэтому, мы можемъ допустить лишь возможность размѣщенія неограниченнаго множества дискретныхъ, т.-е. различныхъ или отдѣльныхъ точекъ, а никакъ не само по себѣ фактичное и законченное, слѣдовательно внутри нѣкоторой линіи уже готовое размѣщеніе такихъ точекъ. Такъ же мало можемъ мы утверждать о размѣщеніи двухъ, а тѣмъ болѣе безконечнаго множества точекъ, непосредственно примыкающихъ другъ къ другу. Непрерывность ничему тутъ не поможетъ; понятіе о непрерывности, подобно понятію безконечности, нужно очистить отъ всякихъ ложныхъ примѣсей, и тогда можно лишь въ понятіи опредѣлить ее какъ такую причину, благодаря которой возможна неограниченная вставка непротяженныхъ точекъ. Такимъ образомъ, сама она будетъ опредѣляться лишь посредствомъ понятія безконечности, но, разумѣется, посредствомъ правильнаго понятія безконечности, каковое, какъ и всякое истинное понятіе безконечности, есть лишь понятіе возможности. Впрочемъ, если хотимъ дать опытную характеристику непрерывности, то должны опредѣлять ее не въ отношеніи къ непротяженнымъ точкамъ, а всегда въ отношеніи къ элементамъ того или другого размѣра.

4. Если обратиться къ другому способу выраженія, что величина возрастаетъ ступенями, меньшими всякой данной величины, то и здѣсь мы наталкиваемся на противорѣчіе, подобное отмѣченному. Только форма эта еще замысловатѣе. Въ самомъ дѣлѣ, непрерывное возрастаніе нельзя представлять себѣ точнѣе, т.-е. въ его отдѣльныхъ станціяхъ, если непроизвольно не мыслить, что оно происходитъ путемъ дискретнаго наращенія опредѣленныхъ малыхъ элементовъ. Въ такомъ случаѣ не заботятся о томъ, имѣетъ ли еще мѣсто и какъ нарастаніе внутри каждаго малаго приращенія, или о томъ, какъ представлять себѣ таковое. Пока оставляютъ это безъ изслѣдованія. Но какъ скоро встрѣчается надобность изслѣдовать самыя эти малыя наращенія, разсматривая ихъ какъ величины, возникшія въ свою очередь путемъ наращенія, то съ чисто математической точки зрѣнія ничто не мѣшаетъ мыслить ихъ составленными изъ еще меньшихъ элементовъ, и т. д. безъ всякихъ ограниченій. Конечно, если обратиться къ дѣйствительности физическаго міра, то могутъ и должны существовать извѣстныя границы; въ области же математическихъ понятій прежде всего насъ касается лишь консеквентность ихъ и отсутствіе въ нихъ всякихъ противорѣчій. Здѣсь мы видимъ, что величины, мыслимыя какъ величины непрерывныя, и возрастаютъ именно непрерывно, а не ступенями. О ступеняхъ и о градаціи умѣстна рѣчь только тамъ, гдѣ мы сами ихъ ставимъ, а поскольку

это имѣетъ мѣсто и основаніе, постольку уже и нѣтъ никакой непрерывности въ томъ смыслѣ, въ какомъ мы разумѣемъ строго геометрическую непрерывность. Итакъ, непрерывныя величины сами по себѣ нарастаютъ отнюдь не ступенями, равно какъ нельзя ихъ мыслить и конструированными изъ элементовъ, которые можно бы было указать и которые существовали бы сами по себѣ. Мы дѣлимъ ихъ на части и различаемъ въ нихъ отрѣзки, но самихъ по себѣ этихъ границъ въ нихъ нѣтъ. Скорѣе, эти отрѣзки дѣлаетъ въ нихъ просто нашъ произволъ. Отсюда видно, что понятіе непрерывности, слѣдовательно, на первомъ мѣстѣ, понятіе о непрерывности геометрическихъ протяженій, есть понятіе безконечности, но если схватить его правильно,—лишь такое понятіе, которое обнимаетъ возможность неограниченной постановки предѣловъ, а никакъ не существованіе безконечнаго множества такихъ предѣловъ и точекъ.

Задача чистой математики въ разсматриваемомъ здѣсь вопросѣ ограничивается только тѣмъ, чтобы въ этихъ ею самою воздвигнутыхъ понятіяхъ избѣжать всякихъ противорѣчій. Для этого она должна только остерегаться разумѣть подъ этими понятіями нѣчто большее, чѣмъ требуется. Такимъ образомъ, вся критическая работа касательно этихъ сбивчивыхъ понятій сводится къ тому, чтобы очистить ихъ отъ ложныхъ вымысловъ, или же прямо на мѣсто вполнѣ ошибочныхъ понятій поставить раціональныя концепціи. На дѣлѣ, послѣ такой критической работы, отъ метафизическаго безконечно-малаго, въ сущности, не остается ничего; ибо мысли, что изъ нѣкоторой математически мыслимой величины можно сдѣлать двѣ части, а изъ каждой изъ этихъ частей опять двѣ и т. д. неограниченно,—мысли о неограниченной дѣлимости на куски или части, которые въ каждомъ частномъ случаѣ можно бы было сдѣлать еще меньше, чѣмъ всякая заданная для этого случая малая величина, идеи этой нельзя же выдавать за концепцію безконечно малаго, которая въ ходу цѣлыя столѣтія! Въ самомъ дѣлѣ, при этомъ предположеніи, метафизическаго овеществленія уже не существовало бы; было бы лишь понятіе о неограниченности уменьшенія, какъ, съ другой стороны, имѣется понятіе о неограниченности увеличенія.

Если позитивно установить согласныя съ законами разума понятія, если они окажутся при этомъ и достаточными, а равно надежными и удобными для выполненія при ихъ помощи всѣхъ математическихъ операцій самихъ по себѣ и для постановки на практикѣ всѣхъ физическихъ изслѣдованій, то наука будетъ обладать не только болѣе правильными понятіями, но будетъ имѣть въ нихъ нѣчто большее, чѣмъ давала ей когда-либо обманная смѣсь прежнихъ половинчатыхъ понятій. Такимъ образомъ, касательно безконечно-малаго нужно начать съ того, что на мѣсто его поставить величину, которая въ данной совокупности вычисленій могла бы, а при случаѣ и должна бы была представлять всякую степень малости. Если, напр., рѣчь идетъ о линейномъ протяженіи, то эта величина, смотря по обстоятельствамъ, можетъ быть милліонною частью миллиметра, а то и разстояніемъ отъ земли до солнца. Существенно только то, чтобы эти случайныя опредѣленія, которыя въ представленіи нашемъ мы прямо имѣемъ въ виду, составляли бы не главное дѣло, а чтобы главное дѣло составляли мысль, что на мѣсто этихъ величинъ, въ данной совокупности вычисленій выбранныхъ относительно малыми по сравненію съ другими величинами, могли бы выступить еще меньшія, и притомъ такъ, что этой малости ни данною комбинаціей вычисленій, ни природою задачи не ставилось бы никакихъ границъ. Если нѣкоторая малая длина, въ силу произвольно поставленнаго условія — въ чистой математикѣ, не должна быть, или, по свойству задачи—въ физикѣ, не можетъ быть меньше милліонной доли миллиметра, то родъ величинъ, къ которому она принадлежитъ, напр. нѣкоторое разстояніе, которое мы заставляемъ измѣняться, было бы неспособно къ неограниченному уменьшенію. Вмѣстѣ съ тѣмъ, эта,—я прямо говорю—конечная величина, лишена свойства, въ силу котораго она, слѣдуя обычному жаргону, но въ нашемъ раціональномъ смыслѣ, могла бы называться безконечно-малою. Мы же пока, чтобы различныя мысли оттѣнять различными словами, лучше назовемъ ее неограченно-малою. Неограниченно-малое, представляющее, слѣдовательно, согласное съ законами разума понятіе на мѣсто понятія безконечно-малаго, этимъ законамъ противорѣчащаго, есть опредѣленная конечная величина, которой существенно свойство уменьшаться безпредѣльно. Но это—отнюдь не перемѣнная величина, какъ ложно опредѣляютъ безконечно-малое еще и теперь; ибо она всегда представляетъ совершенно опредѣленную степень малости, которая въ данной комбинаціи выкладокъ должна удерживаться консеквентно и неизмѣнно. Конечно, можно выбрать и другую степень малости; но, разъ сдѣлавъ выборъ, нужно держаться этой степени малости во всей системѣ зависящихъ отъ нея операцій. Итакъ, если вообразить, что такая-то величина составлена изъ безконечно-малыхъ равныхъ частей, то это значитъ, что произвольно выбраны весьма малые элементы нѣкоторой опредѣленной степени малости, и что при этомъ не должно забывать, что выборъ этой малости относительно нуля ничѣмъ не былъ ограниченъ, и что его можно бы было спустить на иную, еще меньшую степень малости. Такую замѣну можно дѣлать въ каждое любое мгновенiе, измѣняя, такъ сказать, базисъ, на которомъ основывается все остальное въ данныхъ операцiяхъ, и это должно имѣть мѣсто сплошь для всѣхъ дальнѣйшихъ зависимостей.

Уже то обстоятельство, что неограниченно малое приращенiе дѣлаютъ постояннымъ, не есть что-либо необходимое, но есть слѣдствiе опредѣленнаго выбора арранжемента, слѣдуя которому хотятъ представлять себѣ составъ или ростъ величины. Малость выбраннаго элемента, каковой имѣютъ въ виду какъ послѣднiй элементъ величины, произвольна, но въ представленiи лица, мыслящаго ясно, это не есть нѣчто колеблющееся въ туманѣ, а нѣчто совершенно опредѣленное. Итакъ, неограниченно-малое есть прежде всего малое вообще, но обладающее свойствомъ, что по отношенiю къ его малости сравнительно съ нулемъ открытъ неограниченный просторъ. Всегда это величина измѣримая; но оперируя съ нею, всегда должно помнить, что мы можемъ представить себѣ еще меньшую величину и что эта малость по отношенiю къ 0 неограниченна, но только это еще меньшее значенiе должно въ такомъ разѣ удерживать во всей комбинацiи выкладокъ. Слѣдовательно, неограниченность эта не воплощается какъ-либо въ *этой* малой величинѣ, изображаемой знакомъ dx или малымъ отрѣзкомъ линiи, но есть мысль, сопутствующая этой измѣримой, даже, можно сказать, конечной величинѣ. Мысль эта состоитъ не въ иномъ чемъ, какъ въ томъ, что эта малая величина должна быть представительницею не только своей собственной, но и всякой степени малости. Итакъ, дифференцiалы суть малыя разности, которыхъ малости по отношенiю къ нулю нельзя и не должно ставить никакихъ предѣловъ. Но такъ называемыми конечными разностями или, лучше сказать, ограниченными разностями, въ точномъ смыслѣ слова, могутъ быть лишь такія, уменьшенію которыхъ поставленъ опредѣленный предѣлъ. Строгою противоположностью неограниченно малому служитъ ограниченно малое. Но обыкновенно подъ именемъ конечныхъ разностей, съ той ли, съ другой ли стороны, относительно ли малаго, или относительно большого, разумѣютъ строго-опредѣленныя величины. Но при такомъ воззрѣніи тѣмъ комичнѣе выглядитъ, когда такъ называемую конечную разность Δx дѣлаютъ все меньше и меньше, чтобы подконецъ прямо у нуля, въ царствѣ исчезновенія величинъ, въ области количественнаго тумана, на безконечно-маломъ dx скомандовать „стой", и въ этой бездонной пучинѣ бросить, наконецъ, дифференціальный якорь. Само собою понятно, что если что разумно, то только одно—съ самаго начала взять въ разсмотрѣніе произвольную малую разность и обозначить ее буквами dx, но при этомъ указать, что такой способъ нотаціи долженъ обозначать, что выборъ или постановка малости этой разности по отношенію къ нулю не подлежитъ никакому ограниченію.

5. Здѣсь мы тотчасъ же должны предупредить, что дифференціальное исчисленіе по нашему раціональному понятію о неограниченно-маломъ есть вычисленіе приблизительное, но при этомъ надо замѣтить, вычисленіе не просто приблизительное въ обыкновенномъ смыслѣ, а съ неограниченнымъ приближеніемъ. Всякое вычисленіе съ неограниченно-малымъ имѣетъ ту особенность, что его отношенія и результаты суть вообще не просто функціи малаго, но неограниченно-малаго. Сообразно этому, тамъ, гдѣ вмѣсто неограниченнаго приближенія къ нулю имѣютъ въ виду самый нуль, тамъ къ этому дѣйствительному и

настоящему предѣльному случаю даетъ оно не просто приближенія вообще, а неограниченныя приближенія. Въ этой-то связи различныхъ неограниченныхъ приближеній съ случаемъ, гдѣ базисъ операцій вслѣдъ затѣмъ замѣняется нулемъ, лежитъ сущность исчисленія безконечно-малыхъ. Этотъ нулевой случай есть норма, которою измѣряются уклоненія, и малость этихъ уклоненій неограниченна.

Но если этотъ случай нуля совсѣмъ оставить въ сторонѣ, то можно бы было также сказать, что величины неограниченной малости во всѣхъ функціяхъ, т.-е. во всѣхъ зависимостяхъ, въ которыя онѣ могутъ входить, могутъ вносить съ собою величины соотвѣтствующаго свойства, и что это именно соотвѣтствующее свойство и есть то, надъ чѣмъ непосредственно ведется вычисленіе. Обходъ при посредствѣ случая нуля, т.-е. вычисленіе съ настоящими предѣлами, сдѣланъ у Лагранжа канономъ, но въ силу только этогс не долженъ быть канонизированъ безъ всякой оглядки. Въ самомъ дѣлѣ, на практикѣ случай нуля выступаетъ лишь тогда, когда дѣленіемъ одной неограниченно-малой величины на другую получается величина, уже не принадлежащая къ роду величинъ, служащихъ вспомогательными средствами. Впрочемъ, это дифференціальное частное по большей части не есть чисто такая главная величина, но въ качествѣ придаточной примѣси содержитъ еще нѣкоторую неограниченно-малую величину. Но послѣдняя въ чистомъ предѣльномъ случаѣ отпадаетъ, да и вообще, какъ не важная для всей совокупности вычисленія, въ отдѣльности въ расчетъ не принимается. Въ традиціонномъ обычномъ дифференціальномъ исчисленіи обѣ эти составныя части дифференціальнаго частнаго смѣшивали, ибо ихъ не знали, такъ какъ туманы безконечно - малаго не допускали подобныхъ строгихъ различеній.

Лагранжево i, т.-е. приращеніе х-са, есть ничто иное какъ неограниченно-малое въ принятомъ нами раціональномъ смыслѣ. Но Лагранжу никогда не приходило въ голову — не приписывать dx-су никакого иного смысла, кромѣ того, какой онъ придавалъ своему i, и недостатокъ этотъ объясняется тѣмъ, что великій аналистъ рядомъ съ неограниченно - малымъ допускалъ еще гипотезу обыкновеннаго безконечно-малаго, и его умъ никогда не могъ освободится отъ этого тумана. Если бы онъ усмотрѣлъ полное совпаденіе своихъ приращеній i и o съ раціонально мыслимыми неограниченно-малыми разностями dx и dy, то и свою нотацію производныхъ функцій онъ ввелъ бы лишь какъ дополнительное вспомогательное средство, и вмѣсто $\frac{dy}{dx}$ только тамъ писалъ бы $f'(x)$, гдѣ дѣйствительно должна была идти рѣчь о различеніи случая нуля отъ случая неограниченно малыхъ величинъ. Чтобы понятія и знаки Лагранжевой Теоріи функцій и его Функціоннаго исчисленія ввести на практикѣ въ приложенія къ геометріи, механикѣ и физикѣ, нужно съ этими i и o, равно какъ и со многими подобными, вновь введенными вспомогательными величинами поступать и вести вычисленія подобнымъ же образомъ, какъ поступаютъ съ dx или dy или другими отдѣльными, т.-е не связанными въ видѣ частнаго, дифференціалами въ обыкновенномъ Исчисленіи безконечно-малыхъ.

Устранить вычисленія съ количественными элементами, малость которыхъ полагается неограниченою, по предыдущему, невозможно. Но отодвинуть ихъ на задній планъ и выдвинуть впередъ исчисленіе съ настоящими предѣльными функціями, отвѣчающими случаю нуля, опять-таки возможно не прежде, какъ когда уже добыты будутъ извѣстные результаты и понятія разработкою этихъ неограниченно-малыхъ вспомогательныхъ величинъ. При дѣйствительномъ расчлененіи разсматриваемыхъ предметовъ всегда нужно начинать съ этихъ малыхъ вспомогательныхъ величинъ, и можно бросить ихъ не раньше, какъ онѣ сослужили свою службу. Какъ сказано, у Лагранжа приращенія *i* и *o* и суть эти неограниченно-малыя вспомогательныя величины, и онѣ фигурируютъ и во всѣхъ приложеніяхъ къ геометріи и механикѣ. Это настоящія неограниченно-малыя, и жаль, что они тотчасъ же не замѣнены другою нотаціей и не введены въ качествѣ элементарныхъ разностей произвольно возрастающей степени малости. Основаніе этого, рѣшительно говорю,—недостатка уже указано.

Приближенное исчисленіе съ неограниченною степенью приближенія,—а это и есть дифференціальное исчисленіе,—остается неизбѣжною формою изслѣдованія и вычисленія; ибо отнюдь нельзя, въ какомъ бы ни было родѣ отношеній, покинуть область настоящихъ величинъ, и вмѣсто того чтобы вести вычисленія надъ количествами, производить ихъ надъ нулями. Величины этого рода всегда исчезаютъ, обращаясь въ нуль, а гдѣ нѣтъ ничего, тамъ нечего и искать. Если, не смотря на то, ариѳметическая форма $\frac{0}{0}$ все-таки имѣетъ смыслъ, то смыслъ этотъ отнюдь не есть что-либо непосредственно очевидное, а устанавливается посредственно. Раскрытіе этого смысла требуетъ, чтобы были взяты въ помощь тѣ величины, которыя въ этомъ частномъ превратились въ нули. Каждая изъ этихъ величинъ на дѣлѣ и имѣетъ такой составъ, что ее можно разложить на постоянный коэффиціентъ и нѣкоторую вспомогательную величину. Когда эти вспомогательныя величины дѣлаютъ нулями, то это значитъ, что отъ нихъ отвлекаются, и въ результатѣ остается понятная для насъ дробь, составленная изъ сказанныхъ коэффиціентовъ. Она только тогда обратится въ ничего не говорящую форму $\frac{0}{0}$, когда мы дѣйствительно каждый коэффиціентъ умножимъ на его нуль, и скрывъ такимъ образомъ потребное расчлененіе, мы и получимъ неопредѣленное частное нулей. Но всѣ дифференціальныя частныя принимаютъ форму $\frac{0}{0}$, какъ скоро способныя къ неограниченному уменьшенію разности исчезнутъ изъ виду и будетъ сдѣланъ скачокъ къ настоящему предѣльному случаю. Если всмотрѣться въ дѣло ближе, то этотъ скачокъ состоитъ въ томъ, что дѣленіемъ и отбрасываніемъ частей малую величину не только неограниченно уменьшаютъ, такъ чтобы всетаки оставался отъ нея нѣкоторый остатокъ, но подконецъ, такъ сказать, въ послѣднемъ актѣ, и этотъ самый остатокъ также отбрасываютъ. Я намѣренно называю это скачкомъ; ибо въ одномъ случаѣ мы остаемся при неограниченно-маломъ, тогда какъ въ другомъ мы отъ существующей величины въ настоящемъ смыслѣ слова перескакиваемъ въ количественное ничто.

6. Очевидно, причиною того, что и математики новаго времени плохо строили свои заключенія при помощи ли, или какъ отчасти Лагранжъ, безъ помощи абсурдной фикціи безконечно малаго, причиною этого были логически несостоятельные аллюры того метода, который у древнихъ назывался исчерпываніемъ (exhaustion) величинъ. Уже самое названіе «исчерпываніе величинъ» неправильно; ибо

на дѣлѣ никакая величина не можетъ быть исчерпана, если отъ каждаго остатка всякій разъ отбрасывать только часть, никогда не откидывая разомъ всего остатка. Каковъ бы ни былъ законъ умаленія величины, указаннымъ путемъ можно достичь только приближенія (Convergenz) къ всегда остающемуся по ту сторону нулю, но никогда не дойдемъ до самаго нуля. Но лишь въ послѣднемъ случаѣ величина была бы исчерпана дѣйствительно, т.-е. вполнѣ. По меньшей мѣрѣ, мы погрѣшили бы противъ языка и лежащихъ въ основѣ его здравыхъ понятій, если бы захотѣли утверждать, что сосудъ исчерпанъ, когда въ немъ еще кое-что осталось. Поэтому понятіе исчерпыванья, если и не вполнѣ, то все же почти настолько же ложно, какъ и понятіе безконечно-малаго. Это почти то же, что измѣреніе величинъ единицами и частями единицы, съ которыми эти величины несоизмѣримы. Измѣряютъ и хотятъ довести измѣреніе до конца; но этого сдѣлать нельзя. Малый остатокъ снова и снова берутъ за мѣру, измѣряютъ имъ то, что прежде было мѣрою, и такимъ образомъ получаютъ никогда не кончающуюся, непрерывную дробь. Это—результатъ стремленія несоизмѣримую съ единицею величину все-таки измѣрить частями этой единицы. Неизбѣжность остатковъ здѣсь законъ; ибо если бы они кончались, то величины не были-бы одна съ другой несоизмѣримы. Рѣшительно типичнымъ приложеніемъ такъ называемаго исчерпыванья и есть случай несоизмѣримости. Данная величина, конечно, будетъ измѣрена, но непремѣнно за исключеніемъ нѣкотораго остатка. Этотъ остатокъ неограниченнымъ повтореніемъ операціи можно всегда сдѣлать меньше нѣкоторой, напередъ заданной, величины. При всякомъ заданіи этой величины нѣтъ никакихъ ограниченій. Въ ней можно осуществить всякую степень малости, и съ остаткомъ пойти еще дальше. Это значитъ, что и самый остатокъ можно сдѣлать неограниченно-малымъ или, слѣдуя языку ходячаго недоразумѣнія, меньше всякой данной величины. А именно, какую бы величину ни взять за норму, т.-е. какую бы степень малости ни выбрать въ частномъ случаѣ, всегда надлежащимъ числомъ повтореній операціи дѣленія или измѣренія, а ариѳметически—продолженіемъ непрерывной дроби, можно сдѣлать остатокъ еще меньше. Предразсудокъ же представляетъ себѣ такую вещь, которая была бы меньше всякой данной величины и находилась бы налицо какъ цѣль, такъ сказать, за этими операціями. Эта невозможная вещь получила въ новое время имя безконечно-малого.

Остановимся нѣсколько на этой погрѣшности античнаго понятія исчерпыванья. Ошибка эта—въ томъ, что неограниченное приближеніе фигурируетъ въ качествѣ исчерпыванія. Прежде всего болѣе неумѣстно имя и образъ, нежели самая эта вещь. Самъ Архимедъ не погрѣшаетъ этими неточностями, и только позднѣе приписанный ему пріемъ, а именно требуемый скачокъ отъ неограниченнаго приближенія къ точному количеству, ошибоченъ. (О заключеніи къ точной величинѣ у насъ рѣчь ведется въ главѣ о методѣ значностей; ибо заключеніе это главнѣе всего основывается не на понятіи о малости, но о противоположности опредѣленной величины, имѣющей только одно значеніе, другимъ различно выбираемымъ значеніямъ.) И методъ доказательства у Архимеда основывается, по обыкновенію, на включеніи между двумя невозможными уклоненіями въ сторону перевышки и недостачи. А именно, обыкновенно доказывается, что разсматриваемая величина не можетъ быть ни на іоту ни меньше, ни больше, чѣмъ требуетъ утвержденіе.

Вмѣсто исчерпыванья слѣдовало бы говорить о неограниченно приближенномъ исчерпываньи. Исчерпываніе имѣетъ мѣсто до неограниченно-малой величины, но послѣдняя остается неисчерпанною. Въ этомъ же смыслѣ для несоизмѣримыхъ величинъ не имѣетъ мѣста измѣреніе одной другою, но имѣетъ мѣсто приблизительное измѣреніе, и вообще не просто приблизительное, а съ неограниченнымъ приближеніемъ. Но тамъ, гдѣ предстоитъ только уменьшить величину, приближая ее къ нулю, и ничего болѣе, т.-е. гдѣ не предлежитъ никакого особаго закона, который предписывалъ бы вести это умаленіе такимъ-то образомъ, а не инымъ, тамъ нѣтъ и никакого основанія при извѣстныхъ обстоятельствахъ прямо не отбросить и этотъ послѣдній остатокъ, такъ точно какъ прежде откидывали отдѣльные остатки. Иногда даже просто комично видѣть, что сперва исполняются промежуточныя стадіи уменьшенія по кусочкамъ, вмѣсто того чтобы сразу всю величину отнять отъ самой себя или, другими словами, тотчасъ замѣнить нулемъ. Въ переходѣ отъ нѣкотораго пункта величины, напр., линіи, къ другому ея пункту содержится такой же точно скачокъ, какъ если бы этотъ переходъ былъ послѣднимъ, т.-е. велъ бы къ крайней точкѣ, которою величина оканчивается, непосредственно, слѣд. безъ вставки промежуточныхъ операцій. Если гдѣ-либо на линіи можно отнять частичку ея, то можно отнять и конечный кусочекъ, или отнять сразу всю линію. При одной операціи не требуется чего-либо иного, чѣмъ при другой. Такимъ образомъ, переходъ отъ неограниченно-малой величины къ нулю можно совершить подобнымъ же путемъ, какъ и переходъ отъ нѣкоторой стадіи малости къ станціи еще большей малости. Если чѣмъ оба случая различаются существенно, то это— результатомъ, а не шагомъ, который къ нему ведетъ. Случай нуля отличается отъ всѣхъ другихъ не столько величиною, сколько свойствомъ. Случай этотъ есть нѣчто иное по качеству, и всѣ понятія, которыя, говоря языкомъ математическимъ, суть функціи отъ него, равнымъ образомъ обнаруживаютъ, что это измѣненіе свойства—вещь прямо существенная. Однако, если какія-либо соображенія или какой-либо законъ вынуждаютъ насъ оставаться въ сферѣ настоящихъ величинъ, а не перескакивать къ отрицанію величины, или, иначе, къ нулю, лишенному всякаго количественнаго значенія, то достаточно оставаться на одной стадіи малости, и только не забывать, что эта малость, не будучи ничѣмъ ограничена, не есть, поэтому, малость опредѣленная, а потому допускаетъ замѣну другими значеніями, число которыхъ ничѣмъ не ограничено. Эту замѣну можно даже повести не только въ сторону усиленія малости, но и въ противоположную сторону,—обстоятельство, которое, конечно, вполнѣ противорѣчитъ предразсудку безконечно-малаго. Въ самомъ дѣлѣ, всегда имѣется извѣстная амплитуда, иначе говоря, арена, внутри которой должно выбирать ступени для представленія неограниченно-малаго, т.-е. тѣ величины, о неограниченной умаляемости которыхъ должна быть рѣчь. Однако же, изслѣдованіе этого обстоятельства, если бы мы захотѣли уже здѣсь войти по этому предмету въ ближайшія подробности, повело бы къ изслѣдованію, какъ далеко простирается непрерывность функцій, и къ указанію тѣхъ пунктовъ, гдѣ частные законы измѣненія величинъ сами испытываютъ измѣненіе.

7. Неограниченно умалимое не вполнѣ то же самое, что и неограниченно-малое; ибо всякая стадія перемѣннаго количества, которому въ его измѣненіи къ нулю не поставлено никакого предѣла, неограниченна въ направленіи къ малому. Но послѣдняго недостаточно; отсюда мы выво-

димъ лишь понятіе о неограниченномъ въ опредѣленную сторону, а не понятіе о маломъ, которое такъ же существенно для самаго дифференціальнаго исчисленія. Впрочемъ, можно бы было замѣнить его методами, не включающими понятія о маломъ, по крайней мѣрѣ, не включающими его съ самаго начала и прямо, а лишь постольку, поскольку оно уже содержится въ представленіи о повторномъ умаленіи данной величины. Наше Wertigkeitsrechnung даетъ средство установить заключенія о безпримѣсныхъ дифференціальныхъ коэффиціентахъ или, какъ назвалъ ихъ Лагранжъ, о производныхъ функціяхъ, безъ вспомогательныхъ величинъ, которыя должны быть какъ угодно малы. Между тѣмъ, въ практикѣ приложеній сразу введенное понятіе малаго, прямо какъ таковое фигурирующее понятіе, есть рѣшительное вспомогательное средство; ибо безъ этого нельзя непосредственно видѣть, какія побочныя примѣси, какъ, напр., лишь крайне незначительно уклоняющаяся отъ прямой кривизна кусочка кривой, могутъ быть какъ неважныя оставлены безъ вниманія. Безъ посредства этого понятія о маломъ, относящемся къ цѣлому какъ ничтожная частичка, нельзя было бы примѣнить Пиѳагоровой теоремы къ характеристичному элементарному треугольнику, образующему неизбѣжный исходный пунктъ ректификаціи кривыхъ, сторонами котораго въ дифференціальномъ исчисленіи прямо служатъ неограниченно-малыя величины dx, dy и ds. Приэтомъ, слѣдуя нашему раціональному понятію, ds есть кусочекъ линіи съ неограниченно-малою кривизною, т.-е. линія, ходъ которой неограниченно-мало уклоняется отъ прямой. Слово «неограниченно», естественно, намекаетъ на нѣчто соотвѣтствующее, въ отношеніи къ чему оно только и имѣетъ смыслъ. Именно, если выборъ малости линейнаго отрѣзка оставимъ неограниченнымъ, то и кривизна, т.-е. размѣръ уклоненія конечной касательной отъ начальной, измѣряемый какъ линейное разстояніе, будетъ неограниченно-мала относительно длины самой линіи. Вмѣстѣ съ тѣмъ, мы имѣемъ здѣсь также простѣйшій и важнѣйшій примѣръ сложной или двойственной неограниченности, т.-е. примѣръ неограниченно-малаго второго порядка. Впрочемъ, здѣсь важно не это, а то обстоятельство, что незначительность кривизны обнаруживается только на относительно-маломъ протяженіи. Протяженіе это могло бы быть и размѣровъ солнечной орбиты, если только цѣлый кругъ или иная кривая образовала бы почтенныхъ размѣровъ кратное его, слѣдовательно, по сравненію съ нимъ было бы велико.

Малое и большое суть понятія, безъ которыхъ, несмотря на обширность ихъ арены и извѣстную дозу неопредѣленности, каковая имъ присуща,—даже отчасти прямо въ силу этой широты,—въ математикѣ обойтись нельзя. Если противопоставить малое или, точнѣе говоря, малую составную часть цѣлому, т.-е. суммѣ или кратному такихъ составныхъ частей, то на практикѣ бываетъ важно знать, какъ формируются различныя функціи этого малаго, и какъ относятся онѣ къ результату нѣкоторыхъ заключеній, имѣющему характеръ цѣлаго. Можно также съ самаго начала ввести опредѣленную степень малости или базисъ малости и затѣмъ смотрѣть, какую степень малости могутъ имѣть также малыя составныя части результата заключеній. Изъ этого можно создать цѣлое исчисленіе незначительныхъ частей, на практикѣ малозначащихъ уклоненій и погрѣшностей, причемъ посредствующимъ понятіемъ будетъ понятіе величины, до которой нѣтъ дѣла во время вычисленія, такъ какъ различныя ея функціи въ концѣ концовъ дадутъ въ результатѣ также величину, о которой, какъ о составной части результата, по причинѣ ея относительной малости, фактически нѣтъ дѣла.

Въ вычисленіи съ малыми величинами путеводителями служатъ уже самыя наши чувства. Это — естественные представители абстракціи. Чувства не замѣчаютъ того, что̀ въ маломъ второстепенно, ибо они этого уже не воспринимаютъ. Они по праву игнорируютъ кривизну, которая имъ уже не замѣтна. Если бы ихъ можно было изощрять неограниченно, чего, впрочемъ, нельзя смѣшивать съ абсолютною остротою, то для каждой, еще высшей, степени остроты дѣло было бы все такъ же. Всегда можно взять такой кусочекъ окружности, что будетъ замѣтна только его длина, но уже не кривизна. Такой кусочекъ будетъ сочтенъ за прямую и таковымъ будетъ и для чувствъ, ибо на чертежѣ кривизна линіи, представляющейся чувствамъ линіею съ нѣкоторою толщиною, утратится. Однако и для соразмѣрнаго законамъ разума чувственнаго воспріятія, которое выдаетъ себя за нѣчто абсолютное, поскольку оно, руководясь понятіемъ разума, стремится различать вещи и въ сферѣ неограниченнаго, —и для такого воспріятія имѣетъ силу фактъ, что эти незначительныя величины вторгаются въ такой мѣрѣ, въ какой допускаютъ это чувства. Слѣдовательно, чувства суть нѣчто весьма мудрое и, можно сказать, устроены логически. Они показываютъ сразу то, что̀ рефлектирующій и расчленяющій разумъ выводитъ лишь позднѣе, а затѣмъ, конечно, сводитъ на свою почву, преслѣдуя предметъ не только въ сферѣ неограниченнаго, но и, такъ сказать, за предѣлами этого неограниченнаго, вплоть до абсолютной границы. Конечно, соразмѣрное законамъ разума чувственное представленіе не должно быть мыслимо наподобіе того гермафродита, который былъ выдвинутъ такимъ затхлымъ и двусмысленнымъ метафизикомъ какъ

Кантъ, чтобы избѣжать серьезнаго устраненія дѣйствительныхъ трудностей. Мы поступаемъ не такъ; для насъ чувственное представленіе ни противорѣчиво въ себѣ, ни измѣняется въ своей сущности и въ силу абстракціи разума, отвлекающаго отъ того матеріала, который преподноситъ ему ограниченное въ своей остротѣ чувственное представленіе. Для чувственнаго представленія, даже если мыслить его идеально, есть только малое, а не неограниченно-малое. Неограниченность основывается на понятіи возможнаго повторенія, поэтому она есть понятіе разума, и сверхъ того, отнюдь не понятіе фактичности, а просто лишь возможности. Затѣмъ, она имѣетъ силу не просто для нашего оперированія, - это значило бы ограничивать его областью субъективистическою,—но и для природы, которая могла бы всякую величину, слѣд., напр., нѣкоторое разстояніе, дѣлить неограниченно, но вмѣстѣ съ тѣмъ никогда не можетъ явить безконечнаго числа частей. Безсмыслицы безконечной раздѣленности допустить нельзя. И движеніе ея не осуществляетъ; ибо движеніе, понятно, есть не что иное, какъ понятіе о томъ, что та же самая вещь сперва находится въ одномъ мѣстѣ, а потомъ въ другомъ. Чувства показываютъ слѣдъ этого измѣненія, схватывая разомъ нѣсколько положеній. Но разумъ находитъ каждый разъ лишь фактъ, именно различныя положенія. Какимъ образомъ доходитъ дѣло до этихъ различныхъ положеній, по внутренней сущности вещей, объ этомъ разумъ вѣдаетъ ровно столько же, какъ и о всякомъ измѣненіи или даже твореніи, т.-е. о замѣнѣ одного понятія другимъ, содержащимъ новую, прежде не бывшую въ наличности, составную часть. Несмотря на то, позиція логики вещей стоитъ твердо, т.-е. безъ всякихъ противорѣчій, если только неограниченная дѣлимость пространства мыслится и съ точки зрѣнія природы какъ чистая возможность операціи, а отнюдь не какъ завершившаяся фактичность. Такимъ образомъ, и по отношенію къ движенію мы не должны вмѣсто дѣятельностей природы подсовывать какія-либо безсмыслицы, и не предполагать о нихъ, чтобы онѣ могли неограниченное множество завершать въ данное безконечное количество различныхъ пространственныхъ частей. Подобныхъ понятій допускать мы не должны; ибо вмѣстѣ съ ними возродился бы въ болѣе утонченной формѣ лишь общій предразсудокъ безконечности. Да и нѣтъ основанія отдаваться подобнымъ безсмысленнымъ фантазіямъ; ибо переходъ изъ одного положенія въ другое есть достаточно ясное понятіе, и съ нимъ можно обойтись и въ математикѣ, не имѣя нужды, то, что лежитъ между ними, наполнять для видимости шарлатанскими выдумками псевдо-философіи. Истинная мудрость состоитъ въ томъ, чтобы оставаться при простомъ понятіи перехода отъ одной точки къ другой и ничего больше не требовать, кромѣ наличности основанія безпрепятственно, когда встрѣтится надобность, вставлять промежуточныя положенія и такимъ образомъ представлять себѣ этотъ переходъ, по произволу, составленнымъ изъ опредѣленнаго числа частныхъ переходовъ.

8. При точномъ обоснованіи дифференціальнаго исчисленія прежде всего нужно задать себѣ вопросъ о томъ, каково основаніе для откидыванія такъ называемыхъ безконечно-малыхъ въ сравненіи съ конечными величинами, а также безконечно-малыхъ второго порядка, какъ слагаемыхъ, предъ безконечно-малыми перваго порядка и т. д. Понятно, что раціональный отвѣтъ на этотъ старый вопросъ можетъ быть данъ только въ уже раціонализированномъ дифференціальномъ исчисленіи. Иначе могутъ являться на свѣтъ только чувственные рефлексы малости,

туманныя приблизительныя представленія или же извороты суевѣрія. Въ благопріятнѣйшемъ случаѣ, какъ у Лагранжа, самая вещь будетъ очищена на иномъ пути, прямой путь будетъ обойденъ и какъ бы укрѣпленъ провѣркою, что туманныя фикціи безконечно-малаго и обычай сказаннаго откидыванія отнюдь не приводятъ къ ложнымъ выводамъ. Само по себѣ и внутренне дѣло этимъ не оправдывается и оправдано быть не можетъ, пока хоть гдѣ-нибудь еще остались слѣды метафизики, т.-е. алхиміи и суевѣрія безконечно-малаго. Это и было причиною, почему у Карно, современника Лагранжа, несмотря на его достойныя всякаго уваженія старанія дать себѣ лучшій отчетъ о предметѣ и не взирая на кое-какіе полезные вклады въ этомъ направленіи, тѣмъ не менѣе, все оставлено въ шатко-неопредѣленномъ видѣ, и почему ему не удалось подняться до высоты хотя и односторонней, но твердой и свободной отъ всякаго тумана, позиціи Лагранжа. Напримѣръ, Карно еще колебался, слѣдуетъ ли, какъ это дѣлалъ Эйлеръ, или нѣтъ, разсматривать дифференціальное частное какъ частное нулей и даже дифференціалы считать нулями. Правда, представленіе Карно о несовершенныхъ или,—сказали бы мы лучше,—неточныхъ уравненіяхъ было близко къ истинѣ, однако оно миновало истинное представленіе, не коснувшись его, и даже потеряло всякую цѣнность, ибо ему недоставало натуральнаго, простого и строгаго понятія о неограниченно-маломъ. Это нерѣшительное колебаніе туда и сюда между нулемъ и безконечно-малымъ скрывало въ себѣ цѣлую пропасть ошибочныхъ представленій. Между нулемъ и разсматриваемыми величинами, если понимать ихъ раціонально, зіяетъ бездна, которая поглотитъ всякій разумъ и всякую логику у того, кто думаетъ, что надъ нею можно какъ угодно танцовать, какъ будто бы и по ту и по другую сторону этой бездны рѣчь шла почти объ одномъ и томъ же. Чудовищность этой бездны можетъ быть превзойдена только чудовищностью отношенія тѣхъ, кто ее не замѣчаетъ.

Когда говорятъ: «откинемъ то-то», или еще (тоже правильно): «пренебрежемъ такою-то величиною», тогда говорятъ о преднамѣренной неточности. Но эти неточности прямо желательны, и постольку суть отвлеченія отъ второстепенныхъ и незначащихъ величинъ. Мы уже говорили, что дифференціальное исчисленіе является исчисленіемъ приближеннымъ, но что сущность его въ томъ, что оно— исчисленіе съ неограниченнымъ приближеніемъ. Нѣтъ иного средства оправдать основательность алгориѳма опущеній, какъ просто сознаться, что мы оперируемъ съ уравненіями, въ которыхъ нѣтъ извѣстныхъ членовъ, но что при этомъ въ урѣзанной формѣ ихъ можно подразумѣвать, не имѣя надобности чего-либо существенно измѣнять въ дальнѣйшей обработкѣ. Если вмѣсто ряда членовъ представить себѣ вообще одну величину или функцію, которая неограниченно-мала, какъ единственное слагаемое рядомъ съ конечными членами, то ясно, что можно доказать, что алгебраическая и функціональная обработка всего этого совокупнаго выраженія всегда будетъ опять давать члены, которые суть функціи того неограниченно-малаго и даже имѣютъ свойство быть неограниченно-малыми. Поэтому, если въ результатѣ безконечно-малое рядомъ съ конечными величинами значенія не имѣетъ, то и нѣтъ надобности все снова задавать себѣ трудъ на дѣлѣ разыскивать эти незначащія второстепенныя функціи. Напередъ и вообще извѣстно, что онѣ должны имѣть характеръ неограниченно-малаго, и этого довольно. Поэтому незачѣмъ надсаживаться въ выполненіи этихъ второстепенныхъ вычисленій, ибо то, что давало бы къ нимъ поводъ, тотчасъ же откидывается. Впрочемъ, дѣйствительное выполненіе этихъ вспомогательныхъ вычисленій въ частномъ случаѣ есть единственное наглядное доказательство ихъ ненужности. Но если сдѣлать отвлеченіе отъ частнаго случая и показать на немъ, выставляя на видъ существенное и всѣмъ случаямъ общее, что всякое такое побочное вычисленіе вовсе ненужно, то этимъ и дано будетъ оправданіе урѣзанному алгориѳму. Эти побочныя вычисленія дали бы лишь то, что, какъ вещь неважная, въ самомъ результатѣ оказывается ненужнымъ, и даже обыкновенно отбрасывается, если бы даже и могло быть безъ всякаго труда найдено.

Вычисленіе съ количествами въ себѣ малыми, т.-е. безъ привнесенія понятія неограниченности, допускаетъ также урѣзки. Функціи, о которыхъ здѣсь шла рѣчь, суть функціи относительно-малаго, и всегда имѣется опредѣленная сфера погрѣшностей, на которую вниманія не обращается, и на нее и въ результатѣ можно бы было не обращать вниманія, и притомъ не обращать вниманія въ двоякомъ смыслѣ слова. Ее прямо можно бы было сдѣлать вещью ненужною, т.-е. взвѣсить, а затѣмъ въ результатѣ, какъ вещью неважною, пренебречь. Подобный пріемъ для такихъ естественно-научныхъ приложеній, гдѣ малость хотя и предполагается въ высокой степени, но не неограниченна, имѣетъ рѣшительное значеніе. Тамъ это есть единственный путь сдѣлать дифференціальное исчисленіе раціонально, т.-е. безъ лжевымысла несуществующей неограниченности, примѣнимымъ въ свободномъ отъ всякаго тумана и отъ всякихъ логическихъ противорѣчій родѣ. Но здѣсь мы имѣемъ дѣло еще съ настоящимъ дифференціальнымъ исчисленіемъ и съ приспособленными къ нему примѣненіями. Сообразно этому, здѣсь рѣшительный путь основывается на неограниченности малаго. А именно, малое, которое отбрасывается какъ слагаемое, можно неограниченно приближать къ нулю. Всѣ зависящія отъ него функціи, которыя сами становятся неограниченно-малыми, имѣютъ то же самое свойство неограниченной сходимости къ нулю. И въ послѣднемъ результатѣ въ роли слагаемаго это опять будетъ величина, способность которой приближаться къ нулю неограниченна.

Первыя уклоненія, возникающія благодаря этимъ откидываніямъ, и дальнѣйшія и послѣднія уклоненія, возникающія какъ результатъ первыхъ, всѣ способны къ неограниченному умаленію, и потому, несмотря на всякія урѣзки, всегда мы будемъ увѣрены, что въ точности приближаемся неограниченно къ абсолютно точному предѣлу. Это положеніе, въ которомъ мы имѣемъ дѣло съ приближеннымъ вычисленіемъ, съ характеромъ неограниченнаго приближенія, нисколько не измѣняется благодаря этимъ урѣзкамъ; и это-то рѣшающее обстоятельство и есть то, о чемъ вообще только и можетъ быть рѣчь въ вычисленіи съ неограниченнымъ приближеніемъ. Это соображеніе и даетъ то естественное основаніе, которое, хотя и прикрытое туманомъ, выступало уже въ историческихъ процедурахъ. Въ самомъ дѣлѣ, на первыхъ порахъ малыя величины откидывались просто потому, что видѣли, что въ непосредственно предлежащемъ уравненіи онѣ для отношенія главныхъ величинъ никакого значенія не имѣли. Таковъ былъ первый шагъ, и по образцу его сдѣланы были и дальнѣйшіе шаги, пока наконецъ не увидали вообще, что пренебреженіе такими крайне малыми величинами какъ слагаемыми, могло повести за собою и въ послѣднемъ заключительномъ результатѣ всегда лишь крайне малыя неточности. Малыя второго порядка весьма натурально возникли изъ понятія объ относительно маломъ и при посредствѣ функцій, дававшихъ къ тому поводъ, и едва ли былъ нуженъ особый шагъ, чтобы такимъ же образомъ видѣть, что слагаемое малое по сравненію съ малою по себѣ величиною нужно трактовать подобнымъ же образомъ, какъ будто бы оно по отношенію къ этой другой величинѣ было просто мало. Сложная малость или, точнѣе говоря, малость въ сложномъ отношеніи есть понятіе естественное, и такъ же естественна незначительность сложнаго малаго по сравненію съ просто-малымъ. Функціонально-малое, слѣдовательно, малое, котораго малость по отношенію къ базису или аргументу самостоятельной и простой малости опредѣляется закономъ данной функціи, представляется какъ ближайшее обобщеніе. Если къ этимъ малостямъ, представляемымъ малыми величинами или соотвѣтственными знаками, присоединить понятіе неограниченности, то получится чисто раціональный путь въ противоположность тому историческому пути, который скоро свернулъ на ложную дорогу суевѣрія, а именно благодаря двусмысленнымъ и даже двуязычнымъ метафизикамъ въ родѣ Лейбница, у которыхъ эти малыя величины двусмысленно, туманно и обманно превратились въ ихъ безконечно-малыя. Такимъ образомъ здравая природа мысли, по крайней мѣрѣ инстинктивно продолжавшая жить въ лучшихъ умахъ, погибла на безсодержательной и лживой почвѣ метафизики.

9. Главныя величины, получаемыя при помощи отношеній между вспомогательными величинами, даютъ истинные предѣлы, разумѣя это слово въ смыслѣ понятія, какое придается ему во всякой геометріи, слѣдовательно и въ античной. Предѣлъ есть величина нѣкотораго иного рода, поскольку она иного измѣренія, чѣмъ эти вспомогательныя величины. Впрочемъ, объ этомъ мимоходомъ. Что для

насъ важно, это — помнить, что каковы бы ни были эти главныя величины, будутъ ли это дифференціальные коэффиціенты или интегралы, т.-е. понятія суммарныя, на нихъ обращали вниманіе и тамъ, гдѣ непосредственно можно было сравнивать между собою только дифференціалы и, какъ напр., въ случаѣ ректификаціи, составлять изъ нихъ уравненія. Но если всегда имѣлось въ виду соотношеніе между этими главными величинами какъ послѣдняя норма, то невольно держались его какъ цѣли, въ виду которой понятія о приближеніи и о точности или объ урѣзкахъ только и могли имѣть опредѣленный и ясный смыслъ. Слѣдовательно, когда чѣмъ-либо пренебрегали, то поступали такъ потому, что были твердо увѣрены, что подобная урѣзка ничего не измѣняла въ существенно-важномъ, т.-е. въ тѣхъ соотношеніяхъ, изъ коихъ выводились эти главныя величины. При каждомъ шагѣ, который дѣлали въ преобразованіяхъ сказаннаго уравненія, въ его дальнѣйшей переработкѣ, должно было тотчасъ же подвергать обсужденію, что̀ могла такая-то урѣзка измѣнить въ ближайшихъ слѣдствіяхъ уравненія. При этомъ, нормою сужденія было соображеніе о томъ, измѣнялись или нѣтъ соотношенія, выражаемыя главными величинами. Потому-то главная величина была первымъ понятіемъ, которое въ исторіи само собою, хотя и не надѣленное особымъ именемъ, предшествовало понятію настоящаго предѣла, какъ мы его понимаемъ. Очевидно, такимъ образомъ и создавался всякій алгориѳмъ со вспомогательными величинами чрезвычайной малости, какъ онъ въ разныхъ формахъ, и не у одного Фермата, предшествовалъ такъ называемому открытію болѣе совершеннаго дифференціальнаго исчисленія, и уже пустилъ кое-какіе корни и въ методѣ приближеннаго исчерпыванія древнихъ.

Примѣняя наше строгое понятіе о неограниченно-маломъ, можно урѣзанное уравненіе, если случайно оно не есть совершенно точное, понимать какъ неограниченно приблизительное уравненіе или, что то же, какъ неограниченно-малое неравенство. Эту точку зрѣнія можно даже тотчасъ же представить символически знакомъ равенства, и чтобы придать ей наглядность, вмѣсто простого знака равенства поставить иной, напр., съ буквою v вверху. Вообще, угломъ съ вершиною, обращенною внизъ или, въ печати, буквою v, поставленною передъ или надъ величиною, можно обозначать неограниченность этой величины, если, какъ это часто случается, дифференціальная нотація становится недостаточною, или, въ частности, если она ложно примѣшиваетъ несоотвѣтственное побочное понятіе разности. При этомъ сказанный знакъ должно сочетать не только съ величинами, но и съ понятіями, слѣд. въ нашемъ случаѣ съ понятіемъ приравниванія. Этимъ самымъ отношенію двухъ величинъ, въ силу котораго онѣ мало и притомъ неограниченно-мало одна отъ другой отличаются, мы придаемъ особое абстрактное выраженіе. Такъ какъ подобное отношеніе играетъ роль уже и въ античномъ, такъ называемомъ, исчерпываніи величинъ, то его насколько возможно абстрактное, краткое и наглядное выраженіе кое-гдѣ еще полезнѣе, чѣмъ въ вопросѣ, насъ въ данную минуту занимающемъ. Здѣсь, т.-е. въ уравненіяхъ, связывающихъ дифференціалы, нѣтъ нужды вмѣсто уравненій сплошь писать неограниченно-приближенныя уравненія или, что то же, все неограниченно-малыя уклоненія и вмѣсто законовъ обращенія съ уравненіями выводить на сцену, впрочемъ, имъ аналогичные, законы обращенія съ неограниченно-малыми неравенствами. Конечно, въ сужденіяхъ, основанныхъ на законахъ равенствъ, можно взять за руководство новое посредствующее понятіе. Но отъ этого оно не должно вмѣсто перехода отъ уравненія къ уравненію становиться исключительно понятіемъ перехода отъ неравенства къ неравенству. А именно, нужно всегда держать въ умѣ открыто стоящую альтернативу; ибо, смотря по обстоятельствамъ, результатомъ этихъ урѣзокъ можетъ быть либо строгое уравненіе, либо уравненіе приблизительное.

Если дѣлать урѣзки, т.-е. опускать и отбрасывать величины второстепенныя, послѣдовательно и въ обѣихъ частяхъ во всѣхъ членахъ, гдѣ только возможно, то каждый разъ будемъ получать строгія уравненія. Но обыкновенно этого не дѣлается, да и нельзя этого дѣлать: этому мѣшаетъ частію недостаточность, частію несоотвѣтствіе цѣли и двусмысленность Лейбницевской дифференціальной нотаціи. Такимъ образомъ получаются, такъ сказать, хромыя уравненія, въ которыхъ фигурируютъ дифференціалы, и именно дифференціальныя частныя въ своей непосредственной неурѣзанной формѣ, тогда какъ спеціально выведенныя значенія, имъ приравниваемыя, являются въ урѣзанномъ видѣ. Въ случаѣ независимыхъ дифференціаловъ, а также дифференціаловъ, связанныхъ просто линейной зависимостью, въ этомъ отношеніи разницы никакой нѣтъ; но при всякомъ иномъ зависимомъ дифференціалѣ необходимо различать его урѣзанное значеніе отъ полнаго или, можно еще сказать, чистое его значеніе отъ смѣшаннаго. Урѣзанное или чистое значеніе его всегда есть линейная функція независимаго дифференціала, тогда какъ смѣшанное, т.-е. полное значеніе его опредѣляется по независимому дифференціалу полною главною функціей, а не ея производною. Эта двойственность всего непосредственнѣе видна на дифференціальныхъ частныхъ; въ силу нотаціи, это суть обыкновенно величины смѣшанныя, чистое же, отъ вспомогательныхъ величинъ независимое ядро ихъ указывается только Лагранжевскою нотаціей, которая и оттѣняетъ таковое особымъ знакомъ. Впрочемъ, самъ Лагранжъ не дѣлалъ строгаго различія между $\frac{dy}{dx}$ и $f'(x)$, настолько, чтобы раскрыть двоякій смыслъ знака $\frac{dy}{dx}$. Этому мѣшало удержанное имъ, по крайней мѣрѣ въ видѣ гипотезы, понятіе безконечно-малаго. Съ нашей же послѣдовательной точки зрѣнія $\frac{dy}{dx}$ имѣетъ два существенно различныя значенія, смотря по тому, разсматривать ли dx просто какъ неограниченно-малое, или же принимать его за нуль. Послѣднее значеніе никоимъ образомъ не относится къ дифференціальному исчисленію собственно, т.-е. къ исчисленію съ неограниченно-малыми величинами.

Если въ дифференціальной нотаціи не дѣлать никакихъ измѣненій, которыя указывали бы на случай нуля, то она будетъ совершенно неспособна выражать строгія и опредѣленныя отношенія. Впрочемъ, и такое измѣненіе могло бы быть лишь чѣмъ-то половинчатымъ и противорѣчивымъ, если бы захотѣли удержать при этомъ безъ всякаго измѣненія первоначальныя вспомогательныя величины. Чтобы вмѣсто смѣшаннаго значенія dy выразить его чистое значеніе $f'(x)$. dx, нужно бы было вмѣсто dy писать y съ какими-нибудь другимъ D, другого начертанія. При этой уловкѣ все-таки оставались бы еще въ области вспомогательныхъ величинъ, но старыя вспомогательныя величины, за исключеніемъ независимыхъ дифференціаловъ, были бы замѣнены новыми. Но это было бы совершенно ненужною промежуточною стадіею въ анализѣ. Разъ первоначальныя вспомогательныя величины сослужили свою службу, давъ возможность находить опредѣленныя пунктуальныя отношенія, гдѣ уже нѣтъ слѣда этихъ малыхъ вспомогательныхъ количествъ, то уже ничто не мѣшаетъ, — развѣ лишь укоренившаяся привычка, — всякое вычисленіе вести просто какъ вычисленіе съ такими опредѣленными пунктуальными функціями. Тутъ мы уже вышли изъ рамокъ чувственной предварительной или вспомогательной стадіи, и намъ уже нечего больше дѣлать съ вспомогательными величинами, будутъ ли онѣ дифференціально двусмысленны или уже исправлены. Но, какъ выше замѣчено, этой предварительной стадіи вспомогательныхъ величинъ вообще избѣжать нельзя. Нѣтъ надобности, чтобы эти вспомогательныя величины были непремѣнно малыми; но ихъ малость прямо желательна и при фактическомъ изслѣдованіи она будетъ служить даже неизбѣжнымъ руководителемъ въ предварительномъ сужденіи объ опредѣляемыхъ отношеніяхъ главныхъ величинъ. Какъ бы, слѣдовательно, ни была недостаточна дифференціальная нотація въ ея фактическомъ употребленіи, тѣмъ не менѣе, для начала, т.-е. для первыхъ вспомогательныхъ операцій, она можетъ сослужить хорошую службу. Но внѣ этой подготовительной стадіи она уже, строго говоря, не имѣетъ смысла. Уже самая форма частныхъ отъ функцій, частныхъ, которыя сами по себѣ совсѣмъ не частныя, есть нѣчто въ эстетическомъ отношеніи отталкивающее. Это сложное и однообразное обозначеніе пригодно для случая величинъ, а не для случая нуля. Застрявши въ этихъ вспомогательныхъ величинахъ, все дифференціальное исчисленіе выглядитъ такъ, какъ выглядѣла бы геометрія, если бы она еще имѣла дѣло съ точками, имѣющими толщину, и съ линіями, имѣющими ширину, т.-е. если бы строгость этой науки еще недоразвилась бы до понятія о геометрическомъ предѣлѣ. У Евклида точка еще опредѣляется какъ нѣчто, не имѣющее частей, и это дрянное опредѣленіе, очевидно, есть еще остатокъ той стадіи, когда геометрическіе атомы и недѣлимыя линіи, какъ рефлексы непосредственно чувственнаго воспріятія физическихъ вещей, еще не представляли собою невозможности. Анализъ новаго времени еще не преодолѣлъ гермафродитной стадіи этого рода; иначе онъ ввелъ бы, если можно такъ выразиться, строго пунктуальныя значенія для всякаго рода величинъ какъ основное понятіе и провелъ бы его чрезъ всю систему такъ же точно, какъ это случилось, по крайней мѣрѣ, отчасти, съ непротяженною пространственною точкою еще въ древности, хотя это понятіе снова было испорчено гермафродитнымъ дифференціальнымъ анализомъ.

10. Уже ранѣе было замѣчено, что къ послѣдовательному проведенію вычисленія со сплошь пунктуальными функціями относится и образованіе новыхъ соотвѣтственныхъ реальныхъ понятій въ геометріи, механикѣ и физикѣ, и что поэтому направленіе этого рода для нѣкоторыхъ случаевъ гораздо менѣе удобопримѣнимо, чѣмъ традиціонная манера оставаться въ подобныхъ случаяхъ при вспомогательныхъ величинахъ. Небольшой кусочекъ кривой, котораго кривизна по отношенію къ его длинѣ точно такъ же мала, всегда представляетъ удобное понятіе, къ которому примыкаетъ понятіе интегрирующаго суммованія. Но если и здѣсь не захотятъ имѣть дѣла съ этой вспомогательной величиной, то потребуется подобное же реальное понятіе, какимъ для другого случая служитъ понятіе строго пунктуальной касательной, или, если обратиться къ движенію,—понятіе строго пунктуальной скорости. Соотвѣтствующую главную величину нужно вещественно выдвинуть, дать ей особое наименованіе, слѣдовательно чистый коэф-

фиціентъ, который начиная съ разсматриваемой точки производитъ касательную линію, сдѣлать самостоятельнымъ геометрическимъ образомъ подъ именемъ, напр., линейнаго фактора подобнаго длинѣ касательный, нормали, радіусу кривизны и т. п. Впрочемъ, частности исполненія здѣсь насъ пока не интересуютъ. Важно только то, что прежде еще должно выработать цѣлую систему строгихъ понятій, тогда только и исчезнетъ та неопредѣленность, которая связана со вспомогательными величинами даже тамъ, гдѣ онѣ еще доселѣ играютъ самую широкую роль, и по положенію развитія обычныхъ у математиковъ и физиковъ понятій и должны играть. Въ самомъ дѣлѣ, большая разница, въ какой стадіи освободиться отъ вспомогательныхъ величинъ. Это можетъ имѣть мѣсто или уже при самыхъ дифференціальныхъ отношеніяхъ, или же только при переходѣ къ интеграціямъ. Если еще нужна вспомогательная величина, чтобы какой-нибудь интегралъ, напр., длину кривой, вещественнымъ образомъ, т.-е. въ геометрическихъ случаяхъ, ясно мыслить на геометрическій манеръ, то послѣдній идеалъ возможной эмансипаціи отъ шаткихъ вспомогательныхъ величинъ еще не достигнутъ. Непосредственное отношеніе опредѣленнаго къ опредѣленному, слѣдовательно, главной величины къ главной, есть окончательная форма, которую хотятъ фиксировать въ умѣ, и къ которой какія-нибудь вспомогательныя величины, малыя ли или большія, образуютъ только мостъ. Разъ при помощи подобныхъ мостовъ на извѣстныхъ рѣшающихъ пунктахъ достигли твердой почвы главныхъ величинъ, то нѣтъ надобности все снова лазать по старымъ мосткамъ. Скорѣе, можно всѣ заключенія и вычисленія дѣлать непосредственно, т.-е. не прибѣгая къ тѣмъ предварительнымъ и вспомогательнымъ понятіямъ, которыя вначалѣ служили посредствующими ступенями. Въ этомъ смыслѣ возможно сдѣлать еще больше, чѣмъ уже сдѣлалъ Лагранжъ въ своихъ болѣе точныхъ твореніяхъ, въ Теоріи функцій и въ Лекціяхъ о функціонномъ исчисленіи.

Однако, скажемъ прямо, все это имѣетъ силу только въ случаѣ вспомогательныхъ величинъ собственно. Напротивъ того, если имѣемъ дѣло съ областью приложеній къ физикѣ, гдѣ малыя величины суть сами по себѣ существующія дѣйствительности, а не просто нами введенныя вспомогательныя средства раздѣленія, то съ ними, несокращеннымъ ли или сокращеннымъ способомъ, нужно вести вычисленія непосредственно, такъ чтобы здѣсь неограниченно имѣло силу все, что ранѣе сказано было о математической необходимости, все время оставаться внутри области этихъ малыхъ частичныхъ величинъ и оперировать непосредственно съ ними. Только тамъ, гдѣ въ физикѣ рѣчь идетъ исключительно опять объ общихъ эффектахъ, въ которыхъ эти составныя части какъ таковыя дѣлаются незначительными, можно и должно отъ этихъ малыхъ элементовъ отвлечься и придти къ величинамъ, которыя могутъ выражаться безъ нихъ. Здѣсь предлежитъ случай, гдѣ эти элементы, несмотря на то, что они конечны и примыкаютъ другъ къ другу не съ разрывами, а въ закономѣрной неразрывности, все-таки должны исчезнуть изъ вычисленія. Дифференціальное исчисленіе собственно, въ его теперешней формѣ, для этихъ задачъ неудобопримѣнимо; прежде еще нужно измѣнить или расширить его одностороннія и ограниченныя понятія.

Но до рѣшенія послѣдней задачи еще далеко; ибо пока еще не вполнѣ расчищены понятія дифференціальной непрерывности. Для этого не хватаетъ какъ основы ясно выдѣленнаго представленія о различіи между неограниченно-великимъ и просто безграничнымъ. Ихъ раздѣляетъ подобная же пропасть, какая лежитъ между неограниченно-малымъ и нулемъ. Обращаясь къ прежнему примѣру, вспомнимъ, что секансъ и тангенсъ угла, меньшаго 90^0 на неограниченно-малый уголъ, неограниченно-велики. Употребляя точный языкъ знаковъ, въ которомъ здѣсь мы такъ нуждаемся, мы это выразимъ такъ: $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - v\varphi\right) = At$.

Въ самомъ дѣлѣ, если вообще для всѣхъ значенiй φ, отсчитываемыхъ отъ верхней вертикальной полуоси вправо, $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = t$, то при неограниченномъ приближенiи это отношенiе вещей нельзя выразить иначе, какъ обозначая малость φ и неограниченность этой малости особымъ знакомъ. Поставленный впереди знакъ ($<$) довольно наглядно и цѣлесообразно указывалъ бы на неограниченность умаленiя какъ бы сближенiемъ двухъ сторонъ угла, а въ печати этотъ знакъ весьма удобно замѣнить буквою v. Знакомъ противоположнаго измѣненiя самъ собою навязывается внизъ направленный знакъ ($>$) и соотвѣственно этому въ печати греческая альфа.

Если вмѣсто неограниченно-малаго уклоненiя отъ 90^0 имѣемъ уклоненiе равное нулю, т.-е. если нѣтъ никакого уклоненiя, то не имѣется ни настоящаго секанса, ни настоящей линiи тангенса. Обѣ соотвѣтствующiя имъ линiи уже не пересѣкаются, тогда какъ иначе какой угодно неограниченной степени малости угловой разности соотвѣтствовала бы приличествующая неограниченная степень великости этихъ линiй. Въ случаѣ нуля, т.-е. здѣсь для 90^0, или, что было бы то же, для косеканса и котангенса 0^0, даже не существуетъ никакой величины, и въ томъ же самомъ смыслѣ какъ и для 0^0. Въ самомъ дѣлѣ, безграничность линіи не есть ея величина, напротивъ, это есть отсутствіе всякаго количественнаго опредѣленія. Такимъ образомъ, нулю на одной сторонѣ соотвѣтствуетъ на другой не имѣющая никакой величины безграничность. Кто же скажетъ, въ элементарной геометріи, напр., что линіи имѣютъ величину, если онѣ вводятся безъ опредѣленнаго ограниченія, а какъ линіи безграничныя? Утверждать тамъ что-нибудь подобное значило бы все поставить вверхъ дномъ, да такъ было бы и всюду, гдѣ такъ называемая безконечная величина играетъ роль какъ нѣчто, само по себѣ существующее. Въ понятіи естественномъ нѣтъ ничего противорѣчиваго. Отсутствіе ограниченія и ничѣмъ нестѣсненная протяженность—есть существующая въ себѣ возможность, но не есть что-либо въ себѣ законченное. Случай неограниченной великости отличается отъ случая безграничности тѣмъ, что возможность фигурируетъ какъ нѣчто не въ себѣ данное, а какъ нѣчто относящееся къ нашей дѣятельности. Сверхъ того, послѣдняя возможность всегда представляется зависящею отъ нѣкоторой другой, такъ что отъ неограниченнаго умаленія и его степени зависитъ неограниченное увеличеніе и каждый разъ соотвѣтствующая ему степень. Въ неограниченно-маломъ возможна арена разнообразія степеней малости, и къ этой аренѣ присоединяется аналогичная для неограниченно-большого, обнимающая неограниченное множество степеней великости. Но нуль никакой такой арены не содержитъ; это—нѣчто данное, готовое и законченное; таково же и безграничное въ избранномъ нами узкомъ смыслѣ этого слова.

11. Для отличія неограниченной величины отъ безконечности нуженъ новый знакъ; знакъ ∞ обыкновенно употребляется для обозначенія безконечности. Нужно, чтобы

нѣкоторый новый знакъ напоминалъ намъ о томъ, что здѣсь разумѣется отнюдь не шаткое, отнынѣ, въ силу нашего расчлененія, двусмысленное понятіе безконечнаго или безконечно-великаго, какъ бы его ни называли, а выступало бы рѣзкое различіе совершенно опредѣленнаго и рѣзко выдѣленнаго понятія безграничности (Illimitirtheit) отъ понятія неограниченно-великаго. Чтобы отучить отъ обычнаго смѣшенія этихъ понятій, можно ввести въ употребленіе нѣчто въ родѣ двухъ параллельныхъ штриховъ, не означающихъ, слѣдовательно, ни сходимости, ни расходимости, а въ печати можно пользоваться, напр., буквою П.

Чтобы еще болѣе убѣдиться, что переходъ отъ неограниченно-малаго къ нулю совершается скачкомъ, вспомнимъ о соотвѣтственномъ переходѣ и скачкѣ отъ неограниченно-большого къ безграничному или, употребляя наше ясное обозначеніе, отъ А-становленія къ П-становленію величины. Перейти отъ As къ Пs значитъ внутри этого рода перескочить къ нѣкоторому совершенно особому случаю, который уже не можетъ быть подведенъ подъ отношеніе того рода, которое лежало въ основѣ опредѣленія линіи секанса. Это опредѣленіе только до тѣхъ поръ имѣло смыслъ, пока было возможно дѣйствительное пересѣченіе, слѣдовательно, прямоугольный переугольникъ, а съ нимъ и Пиѳагорова теорема. Но при параллельности s и t все это отпадаетъ. Когда мы и этотъ особый случай положенія линій будемъ продолжать обозначать тѣмъ же знакомъ s, то этимъ мы будемъ въ то же время показывать, что и въ понятіи, по крайней мѣрѣ, формально можно образовать общій родъ линій, обнимающій вмѣстѣ этотъ особый случай и всѣ остальные случаи. Но этотъ родъ уже не есть родъ собственно секансовъ; ибо все, послѣднимъ специфически свойственное, должно, именно какъ специфическое, сдѣлаться въ общемъ понятіи безразличнымъ и какъ признакъ отпасть. Для этого представимъ себѣ всѣ линіи, происходящія вслѣдствіе продолженія подвижной стороны угла по отношенію къ неограниченной касательной оси. Отношеніе къ этой оси распадается на два вида, а именно—пересѣченія и непересѣченія. То обстоятельство, что отношеніе послѣдняго вида включаетъ только одинъ единственный случай параллелизма, не мѣшаетъ установленію особаго вида.

Если линіи s принять за абсциссы, а линіи t за прямоугольныя ординаты, то этимъ опредѣляется равносторонняя гипербола, какъ это показываетъ и уравненіе $s^2—t^2=r^2$. Здѣсь мы ясно видимъ, что s и t можно неограниченно увеличивать, но никоимъ образомъ нельзя достичь случая, соотвѣтствующаго безграничности въ нашемъ строгомъ смыслѣ слова. Какъ бы далеко ни продолжать гиперболу, никогда она не дастъ намъ величины s или t, которая въ кругѣ, подобно тригонометрическимъ линіямъ, соотвѣтствовала бы случаю 90^0. Поэтому, если въ нѣкоторомъ вещественномъ соотношеніи или въ выражающемъ его уравненіи переходить отъ неограниченновеликаго къ безграничному, то по отношенію къ неограниченно-малому и къ нулю это будетъ соотвѣтствовать той операціи, посредствомъ которой совершенно устраняютъ вспомогательныя величины, замѣняя, напр., dx всюду и сплошь, во всѣхъ зависящихъ отъ него величинахъ и понятіяхъ, нулемъ. Уравненіе $As^2—At^2=r^2$, аналогично уравненію въ неограниченно-малыхъ, можетъ быть урѣзано. Здѣсь будутъ отбрасываться конечныя слагаемыя, ибо конечная величина по отношенію къ неограниченно-большой трактуется какъ неограниченно-малое, такъ какъ она хотя сама по себѣ и не измѣняется, зато ея отношеніе къ той величинѣ неограниченно приближается къ нулю, когда послѣднюю неограниченно увеличиваютъ. Повторяемъ, тутъ соотвѣтствіе, но никакъ не то же самое. Въ самомъ дѣлѣ, громадная разница, будемъ ли мы въ прямоугольномъ треугольникѣ съ гипотенузою h и катетами b и l неограниченно уменьшать базисъ b, въ то время какъ h какъ постоянный векторъ поворачивается, стремясь принять перпендикулярное положеніе и, слѣдовательно, l стремится къ предѣлу h, или же оставляемъ постояннымъ b какъ радіусъ, а l и h заставляемъ неограниченно возрастать, При первомъ предположеніи, въ случаѣ нуля, треугольникъ превращается въ прямую линію H, въ которой содержатся h=l и замѣненное непротяженною точкою b равное нулю. Очевидно, считать эту прямую H за прямоугольный треугольникъ, котораго сторонами служатъ сравнявшіяся линіи h и l, а третья равна нулю,—есть чистая фикція, или, говоря попросту, натяжка. Но эта натяжка служитъ основаніемъ, почему говорится не только о косинусѣ $\frac{0}{h}$ прямого угла, но и о секансѣ $\frac{h}{0}$. Линія H и по положенію представляетъ не отвлеченный секансъ, а дѣйствительную линію секанса. И здѣсь она дѣйствительно совпадаетъ съ тангенсомъ, такъ какъ совершенно съ нимъ сливается; но не нужно забывать, что здѣсь и радіусъ b къ которому относятъ фиктивные секансы и тангенсы какъ къ единицѣ, обратился строго въ ноль. Слѣдовательно, такого круга, для котораго понятія секанса и тангенса имѣли бы еще смыслъ, фактически уже не существуетъ. Имѣется лишь такой кругъ, къ радіусу котораго еще можно отнести понятія косинуса и синуса, и потому здѣсь имѣется отчасти эта фикція, поскольку лишь уголъ-нуль еще разсматривается какъ уголъ или, лучше сказать, какъ quasi-уголъ. Поэтому и вычисленіе съ нулемъ вообще имѣетъ здѣсь непосредственно усматриваемый смыслъ, какъ и вездѣ, гдѣ нуль выступаетъ какъ слагаемое, вычитаемое или множимое при конечныхъ величинахъ, тогда какъ потребны еще посредствующія изслѣдованія, чтобы объяснить значеніе такихъ, здравому смыслу противныхъ, дробей какъ $\frac{h}{0}$. Подобное значеніе всегда нѣсколько подобно значенію мнимаго; ибо и въ томъ и въ другомъ случаѣ абсурдность, т.-е. внутренняя невозможность выполненія операціи, указаніемъ соотвѣтственной въ реальной области роли не устраняется, а подкрѣпляется. Именно потому, что въ вещественной области имѣется налицо та же невозможность, какъ и въ области аналитической, знаки невозможности имѣютъ и свое вещественное значеніе, какъ это установлено нами въ нашихъ новыхъ изслѣдованіяхъ объ отрицательномъ и мнимомъ.

12. Пока мы остаемся при неограниченно-маломъ, съ одной стороны, и неограниченно-великомъ, съ другой, оба упомянутые треугольника, треугольникъ съ неограниченно-малымъ катетомъ и тр-къ съ двумя неограниченно-большими сторонами, соотвѣтствуютъ одинъ другому въ такомъ родѣ, что въ каждой соотвѣтственной стадіи малости и великости, т.-е. для каждаго равнаго угла при вершинѣ, какъ это и должно быть, строго подобны другъ другу. Но какъ скоро сдѣланъ скачокъ къ случаю нуля, съ одной стороны, и къ случаю безграничности, съ другой, такъ остается лишь соотвѣтствіе, но уже нѣтъ подобія фигуръ. Постоянная линія b и двѣ параллели S и T, простирающіяся въ безграничное пространство, представляютъ иную дегенерацію неограниченно-большого

треугольника, нежели та прямая линія, въ которой сливаются всѣ три стороны другого треугольника, одна сторона котораго неограниченно умалена. Скачокъ къ фигурѣ иного рода въ случаѣ безграничности еще понятнѣе; ибо здѣсь никакая иллюзорная уловка не возбуждаетъ ложной видимости. Нуль такъ удобенъ къ тому, чтобы въ его «ничто» схоронить всякаго рода понятія или, лучше сказать, въ такой мѣрѣ являетъ собою точку приложенія видимости, какъ будто бы исчезнувшія вмѣстѣ съ нимъ понятія въ немъ еще содержались. Но на дѣлѣ понятія эти имъ вполнѣ отрицаются, или, говоря вещественнѣе, вмѣстѣ съ нимъ уничтожаются. Такимъ-то образомъ совершенно ясно, что въ случаяхъ нуля и безграничности зависящіе отъ нихъ образы испытываютъ не только количественное, но и качественное измѣненіе. Тождество понятій прекращается. Говоря абстрактно - аналитически, это значитъ, что соотвѣтствующая функція измѣняетъ свой законъ. Законъ этотъ всегда начертывается для случаевъ настоящихъ величинъ, а потому имѣетъ силу для всего теченія настоящихъ величинъ. Къ настоящимъ же величинамъ относятся какъ неограниченно-малое, такъ и неограниченно-большое. Но какъ скоро въ функцію вводятъ нуль и безграничность, то этимъ самымъ становятся въ противорѣчіе съ закономъ функціи. Слѣдовательно, самый законъ долженъ быть этимъ измѣненъ, т.-е. отчасти нарушенъ. Въ случаѣ нуля имѣетъ мѣсто какъ бы съуженіе, въ случаѣ безграничности—какъ бы разрывъ въ отношеніи закона, которому функція до того слѣдовала.

Всѣ встрѣчавшіеся намъ аналитическіе парадоксы отнынѣ объясняются совершенно легко тѣмъ обстоятельствомъ, что въ функцію, которая была получена изъ отношеній между значеніями настоящихъ величинъ, и потому имѣла силу только для теченія значеній этого рода, впослѣдствіи, противорѣчиво и искуственно введены были крайнія значенія, не имѣющія характера количествъ. Только между этими крайними значеніями, а никакъ не для нихъ самихъ, функція и является пригоднымъ выраженіемъ господствующихъ отношеній. Неудивительно, поэтому, что непригодность ея для этихъ особыхъ значеній тотчасъ же и выступаетъ на видъ, какъ только, руководясь ложнымъ понятіемъ непрерывности, мы налагаемъ на нее несуразное требованіе представлять и эти крайнія значенія, т.-е. случаи особенныхъ значеній, которыя къ тому же не суть значенія количественныя. Погрѣшность исправляется постольку, поскольку вставками измѣняютъ самое строеніе функціи, не нуждаясь больше ни въчемъ. Это всегда имѣетъ мѣсто въ случаѣ настоящаго нуля, тогда какъ случай безграничности трактуютъ аналитически обыкновенно окольнымъ путемъ дробей съ нулями въ знаменателѣ, но тѣмъ самымъ лишая его истинной его сущности. Такимъ образомъ, напр., вмѣсто большого треугольника, которымъ мы прежде пользовались, подсовываютъ малый, и слѣдовательно, вмѣсто рѣшенія вопроса преподносятъ просто увертку. На дѣлѣ, случай безграничности долженъ быть разрѣшаемъ самостоятельно, и аналитически это достижимо только тѣмъ, что непригодной формѣ функціи опущеніемъ элементовъ, уже потерявшихъ значеніе, даютъ форму, требуемую измѣненными отношеніями. Такъ, напр., уравненіе гиперболы $s^2-t^2=r^2$, которымъ мы только-что пользовались для нагляднаго показанія линій секанса и тангенса, въ случаѣ безграничныхъ S и T придаютъ форму, въ которой r^2 не только умаляется до нуля, но совсѣмъ отбрасывается. На дѣлѣ $S^2-T^2=0$ есть уравненіе ассимптотъ этой гиперболы, которая вмѣстѣ съ тѣмъ служитъ для этихъ ассимптотъ линіей безграничной въ нашемъ смыслѣ. Для ассимптотъ S и T равны съ самаго начала, и потому должны оставаться такими же и въ случаѣ безграничности. Такимъ же образомъ въ фигурѣ, возникающей изъ дегенераціи прямоугольнаго треугольника, S и T должны быть понятіями равнозначущими, ничѣмъ не отличающимися другъ отъ друга.

Если хотятъ за математикой сохранить логику, то не должно быть никакихъ ассимптотъ, касательныхъ къ кривой въ такъ называемой безконечности. Такія сумасбродства и вещи еще худшія, а также ложныя и спутанныя понятія непрерывности нашимъ различеніемъ неограниченно-большого и безграничнаго, какъ и вообще нашимъ расчлененіемъ суевѣрія безконечности, упраздняются. Напротивъ, основнымъ понятіямъ позитивно придана прочность, ясность и отчетливость, какой до того они не имѣли. Въ этой, отнынѣ уже ясной, области стали возможны даже новыя концепціи.