УДК 512.544

О ПРИЗНАКАХ МОДУЛЯРНОСТИ СЕМЕЙСТВ КЛАССОВ И МНОЖЕСТВ ФИТТИНГА

Н.Т. Воробьёв, С.Н. Воробьёв, Т.Д. Жук
Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»

В теории конечных групп важное место занимают исследования, связанные с изучением решеточных свойств систем подгрупп и их классов.

Цель статьи – описание семейств классов Фиттинга и фиттинговых множеств, для которых справедливо модулярное равенство.

Материал и методы. *Применяются методы исследования теории конечных групп.*

Результаты и их обсуждение. *Доказано, что если* $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3$ *– непустые σ-локальные классы Фиттинга, а* f_1, f_2, f_3 *– их минимальные* H_σ*-функции такие, что* $f_1(\sigma_i) \vee f_2(\sigma_i) = Sn\{G : G = G_{f_1(\sigma_i)} G_{f_2(\sigma_i)}\}$ *и* $f_1 \leq f_3$*, то* $(\mathfrak{F}_1 \vee_\sigma \mathfrak{F}_2) \cap \mathfrak{F}_3 = \mathfrak{F}_1 \vee_\sigma (\mathfrak{F}_2 \cap \mathfrak{F}_3)$*. Кроме того, для фиттинговых множеств* $\mathcal{F}$*,* $\mathcal{H}$ *и* $\mathcal{R}$ *группы* G *таких, что* $\mathcal{F} \vee \mathcal{H} = Sn\{R \leq G : R = R_{\mathcal{F}} R_{\mathcal{H}}\}$ *и* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{R}$*, справедливо модулярное равенство* $(\mathcal{F} \vee \mathcal{H}) \cap \mathcal{R} = \mathcal{F} \vee (\mathcal{H} \cap \mathcal{R})$*.*

Заключение. *В работе установлены признаки модулярности семейств обобщенно локальных классов Фиттинга и фиттинговых множеств.*

Ключевые слова: *класс Фиттинга, решетка классов Фиттинга, σ-локальный класс Фиттинга, множество Фиттинга, решетка множеств Фиттинга, модулярность решетки.*

ON PROPERTIES OF MODULARITY OF FITTING CLASSES AND FITTING SETS FAMILIES

N.T. Vorobyev, S.N. Vorobyev, T.D. Zhuk
Education Establishment "Vitebsk State P.M. Masherov University"

Research related to lattice properties of systems of subgroups and their classes has an important place in the finite group theory.

The purpose of the article is the description of families of Fitting classes and Fitting sets for which the modular equality is valid.

Material and methods. *The study methods of the theory of finite groups are applied.*

Findings and their discussion. *It is proved that if* $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3$ *are non-empty σ-local Fitting classes and* f_1, f_2, f_3 *are their minimal* H_σ*-functions such that* $f_1(\sigma_i) \vee f_2(\sigma_i) = \mathrm{Sn}\{G : G = G_{f_1(\sigma_i)} G_{f_2(\sigma_i)}\}$ *and* $f_1 \leq f_3$*, then* $(\mathfrak{F}_1 \vee_\sigma \mathfrak{F}_2) \cap \mathfrak{F}_3 = \mathfrak{F}_1 \vee_\sigma (\mathfrak{F}_2 \cap \mathfrak{F}_3)$*. Furthermore, forFfitting sets* $\mathcal{F}$*,* $\mathcal{H}$ *u* $\mathcal{R}$ *of group* G *such that* $\mathcal{F} \vee \mathcal{H} = \mathrm{Sn}\{R \leq G : R = R_{\mathcal{F}} R_{\mathcal{H}}\}$ *and* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{R}$*, the modular identity* $(\mathcal{F} \vee \mathcal{H}) \cap \mathcal{R} = \mathcal{F} \vee (\mathcal{H} \cap \mathcal{R})$ *is valid.*

Conclusion. *The article establishes properties of modularity of families of generalized local Fitting classes and Fitting sets.*

Key words: *Fitting class, Fitting classes lattice, σ-local Fitting class, Fitting set, Fitting sets lattice, lattice modularity.*

В работе рассматриваются только конечные группы. В определениях и обозначениях мы следуем [1]. Хорошо известно, что множество всех классов Фиттинга, частично упорядоченное включением, образует решетку относительно операций пересечения и решеточного объединения. В исследовании свойств решеток классов конечных групп значительный прогресс достигнут в теории формаций конечных групп, что подтверждает серия результатов о модулярности решеток формаций, полученных А.Н. Скибой [2], А. Баллестером-Болинше и Л.А. Шеметковым [3] и др. В теории классов Фиттинга известен результат Г. Лауша [4] о том, что множество всех разрешимых нормальных классов Фиттинга образует решетку по включению относительно операций $\wedge$ и $\vee$, которая является модулярной. Вместе с тем в теории классов Фиттинга до сих пор остается открытой проблема о том, модулярна ли решетка всех классов Фиттинга разрешимых групп [5]. Поиск решения данной проблемы приводит к задаче описания семейств классов Фиттинга, по возможности широких, для которых справедливо модулярное равенство. Реализация такой задачи для семейств обобщенно локальных классов Фиттинга и фиттинговых множеств – основная цель настоящей работы.

1. Предварительные сведения. Объектом исследования являются решеточные свойства σ-локальных классов Фиттинга и фиттинговых множеств группы. В работе используются методы абстрактной теории групп, в частности, методы теории классов групп и теории решеток. *Решеткой* [6] называется частично упорядоченное множество, в котором каждое двухэлементное подмножество обладает как точной верхней, так и точной нижней гранью. Решетка L называется *модулярной,* если для любых $x, y, z \in L$ таких, что $x \leq y$, выполняется равенство $x \vee (y \wedge z) = y \wedge (x \vee z)$, называемое *модулярным законом.*

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга*, если выполняются условия:

1) если $G \in \mathfrak{F}$ и $N \trianglelefteq G$, то $N \in \mathfrak{F}$;
2) если $M, N \in \mathfrak{F}$, $M \trianglelefteq G, N \trianglelefteq G$ и $G = MN$, то $G \in \mathfrak{F}$.

Следуя Л.А. Шеметкову [7], пусть σ – это разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, т.е. $\sigma = \{\sigma_i | i \in I\}$, $\mathbb{P} = \cup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$. Пусть n – некоторое число. Тогда $\pi(n)$ – множество всех простых делителей n. Символом $\pi(G) = \pi(|G|)$ обозначим множество всех простых делителей порядка группы G. Символом $\sigma(n)$ обозначим множество:

$$\sigma(n) = \{ \sigma_i : \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}, \sigma(G) = \sigma(|G|).$$

σ-Функцией Хартли (H_σ-функцией) [8] называется функция вида

$$f : \sigma \longrightarrow \{\text{классы Фиттинга}\}.$$

Для произвольной H_σ-функции f определяется класс

$$LR_\sigma(f) = \left(G : G = 1 \text{ или } G \neq 1 \text{ и } G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma'_i}} \in f(\sigma_i) \text{ для всех } \sigma_i \in \sigma(G)\right).$$

Если класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ таков, что $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$ для некоторой H_σ-функции f, то $\mathfrak{F}$ называют *σ-локальным классом Фиттинга с H_σ-функцией f.*

Пусть f — H_σ-функция. Тогда

$$Supp(f) = \{\sigma_i \in \sigma \mid f(\sigma_i) \neq \emptyset\}.$$

Следуя [7], для двух любых H_σ-функций f и φ σ-локального класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ можно задать отношение частичного порядка таким образом: $f \leq \varphi$, если $f(\sigma_i) \subseteq \varphi(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \Pi$, где $\Pi = Supp(f)$. Минимальный элемент множества всех H_σ-функций σ-локального класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется *минимальной H_σ-функцией* $\mathfrak{F}$.

Лемма 1.1 [8]. Пусть $\mathfrak{F}$ – σ-локальный класс Фиттинга. Тогда $\mathfrak{F}$ определяется единственной минимальной H_σ-функцией $\underline{f}$:

$$\underline{f}(\sigma_i) = \left(Fit\left(G : G \cong X^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}}, X \in \mathfrak{F}\right) \text{для всех } \sigma_i \in Supp(f)\right).$$

H_σ-функция f называется [8]:

1) внутренней или *приведенной*, если $f(\sigma_i) \subseteq LR_\sigma(f)$ для всех $\sigma_i \in \sigma$;

2) полной, если $f(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i} = f(\sigma_i)$ для всех $i \in I$;

3) полной внутренней, если она является полной и внутренней одновременно.

Классом Локетта [1] называют такой класс Фиттинга $\mathfrak{F}$, для которого имеет место $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$, где $\mathfrak{F}^*$– наименьший (по включению) класс Фиттинга, содержащий класс Фиттинга $\mathfrak{F}$, такой, что для любых групп G и H справедливо равенство

$$(G \times H)_{\mathfrak{F}^*} = G_{\mathfrak{F}^*} \times H_{\mathfrak{F}^*}.$$

Лемма 1.2 [8, теорема 1.1]. *Каждый σ-локальный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ определяется единственной полной внутренней H_σ-функцией F такой, что $F(\sigma_i) = F(\sigma_i)\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{F}$ и $F(\sigma_i)$ – класс Локетта для всех $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$.*

Функцию F называют *канонической H_σ-функцией* класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.

Если $\mathfrak{X}$ – некоторое множество групп, то символом $Fit(\mathfrak{X})$ обозначают пересечение всех классов Фиттинга, содержащих $\mathfrak{X}$.

Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга. Тогда

$$\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{H} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}, \mathfrak{F} \vee \mathfrak{H} = Fit(\mathfrak{F} \cup \mathfrak{H}).$$

Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторое множество групп. Символом $l_\sigma Fit(\mathfrak{X})$ обозначают пересечение всех тех σ-локальных классов Фиттинга, которые содержат $\mathfrak{X}$.

Операцию $\vee_\sigma$ определяют следующим образом:

$$\mathfrak{F}\vee_\sigma\mathfrak{H} = Fit(\mathfrak{F}\cup\mathfrak{H}),$$

где $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – σ-локальные классы Фиттинга.

Если $\{f_i : i \in I\}$ – множество H_σ-функций, символами $\vee_{i\in I} f_i$ и $\cap_{i\in I} f_i$ обозначим множества $\vee_{i\in I} f_i(\sigma_i)$ и $\cap_{i\in I} f_i(\sigma_i)$ для всех $i \in I$.

Символом $F^{\sigma_i}(G)$ обозначим корадикал группы G:

$$F^{\sigma_i}(G) = G^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{G}_{\sigma_i'}}.$$

Следуя [9], определим класс групп

$$\mathfrak{X}(F^{\sigma_i}) = \begin{cases} Fit(F^{\sigma_i}(G)|G \in \mathfrak{X}), \text{ если } \sigma_i \in \pi(\mathfrak{X}); \\ \emptyset, \qquad\qquad\qquad\quad \text{ если } \sigma_i \notin \pi(\mathfrak{X}), \end{cases}$$

где $\mathfrak{X}$ – произвольная совокупность групп.

Непустое множество подгрупп $\mathcal{F}$ группы G называется *множеством Фиттинга* группы G [1], если выполняются условия:

(1) если T – субнормальная подгруппа группы $S \in \mathcal{F}$, то $T \in \mathcal{F}$;

(2) если S, T такие подгруппы из $\mathcal{F}$, что $S, T \trianglelefteq ST$, то $ST \in \mathcal{F}$;

(3) если $S \in \mathcal{F}$ и $x \in G$, то $S^x \in \mathcal{F}$.

Определим операции $\wedge$ и $\vee$ для решетки множеств Фиттинга. Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{H}$ – множества Фиттинга, тогда

$$\mathcal{F}\wedge\mathcal{H} = \mathcal{F}\cap\mathcal{H}, \mathcal{F}\vee\mathcal{H} = Fitset(\mathcal{F}\cup\mathcal{H}),$$

где $Fitset(\mathcal{F}\cup\mathcal{H})$ – пересечение всех множеств Фиттинга, содержащих совокупность групп $\mathcal{F}\cup\mathcal{H}$.

Лемма 1.3 (тождество Дедекинда) [1]. *Если A, B и C подгруппы группы G и $A \leq C$, то $C\cap AB = A(C\cap B)$.*

Лемма 1.4 [8, предложение 7.3]. *Пересечение любого непустого множества σ-локальных классов Фиттинга является σ-локальным классом Фиттинга.*

Лемма 1.5 [10, теорема 2.1]. *Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ – классы Фиттинга такие, что $\mathcal{X} \vee \mathcal{Y} = Sn\{G : G = G_\mathcal{X} G_\mathcal{Y}\}$. Если $\mathcal{F}$ – класс Фиттинга и $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{F}$, то $(\mathcal{X} \vee \mathcal{Y}) \cap \mathcal{F} = \mathcal{X} \vee (\mathcal{Y} \cap \mathcal{F})$.*

2. Признак модулярности семейств σ-локальных классов Фиттинга.

Лемма 2.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – σ-локальный класс Фиттинга, $\Pi = \sigma(\mathfrak{F}), m$ – такая H_σ-функция, что $m(\sigma_i) = Fit(F^{\sigma_i}(G) : G \in \mathfrak{F})$ для всех $\sigma_i \in \Pi$ и $m(\sigma_i) = \emptyset$ для всех $\sigma_i \in \Pi'$. Тогда*

(1) $\mathfrak{F} = LR_\sigma(m)$;

(2) $m(\sigma_i) \subseteq h(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}$ для каждой H_σ-функции h σ-локального класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ и для каждого $\sigma_i \in \sigma$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $m(\sigma_i) = Fit(F^{\sigma_i}(G) \mid G \in \mathfrak{F})$ для всех $\sigma_i \in \Pi$ и $\mathfrak{M} = LR_\sigma(m)$. Тогда $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$. С другой стороны, $\mathfrak{F}(\sigma_i) \subseteq f(\sigma_i)$, и поэтому $m(\sigma_i) \subseteq h(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \Pi$. Кроме того, имеет место $m(\sigma_i) = \emptyset \subseteq f(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \Pi'$. Следовательно, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$, и поэтому $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Пусть $\mathfrak{F}_j = LR_\sigma(f_j)$, где f_j – внутренняя H_σ-функция $\mathfrak{F}_j$, $j = 1,2$. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \vee_\sigma \mathfrak{F}_2 = LR_\sigma(f)$, где $f = f_1 \vee f_2$ – внутренняя функция.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть h_j – минимальная H_σ-функция σ-локального класса Фиттинга $\mathfrak{F}_j$ и F_j – каноническая H_σ-функция σ-локального класса Фиттинга $\mathfrak{F}_j$, $j = 1,2$. Пусть h – минимальная H_σ-функция σ-локального класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Пусть F – каноническая H_σ-функция σ-локального класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, $j = 1,2$. Тогда для каждого $i \in I$ имеем $h_j(\sigma_i) \subseteq f_j(\sigma_i) \subseteq F_j(\sigma_i)$ по леммам 1.2 и 2.1. Более того, ввиду лемм 1.2 и 2.1 справедливы равенства

$$h(\sigma_i) = l_\sigma Fit\big((\mathfrak{F}_1\cup\mathfrak{F}_2)(\sigma_i)\big) = l_\sigma Fit\big(\mathfrak{F}_1(\sigma_i)\cup\mathfrak{F}_2(\sigma_i)\big) = l_\sigma Fit\big(h_1(\sigma_i)\cup h_2(\sigma_i)\big) \subseteq f_j(\sigma_i) \subseteq$$
$$\subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i} l_\sigma Fit\big(h_1(\sigma_i)\cup h_2(\sigma_i)\big) \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i} h(\sigma_i) = F(\sigma_i).$$

Следовательно, $h_j(\sigma_i) \subseteq f_j(\sigma_i) \subseteq F_j(\sigma_i)$ для всех $i \in I$. Таким образом, $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$. Лемма доказана.

Пусть $\mathfrak{X}$ — класс групп. Тогда

$$Sn\mathfrak{X} = (G : G - \text{субнормальная подгруппа группы } H \in \mathfrak{X}).$$

Теорема 2.3. *Пусть $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3$ – непустые σ-локальные классы Фиттинга и f_1, f_2, f_3 – их минимальные H_σ-функции такие, что $f_1(\sigma_j) \vee f_2(\sigma_j) = Sn\{G : G = G_{f_1(\sigma_i)}G_{f_2(\sigma_i)}\}$. Если $f_1 \leq f_3$, то*

$$(\mathfrak{F}_1 \vee_\sigma \mathfrak{F}_2) \cap \mathfrak{F}_3 = \mathfrak{F}_1 \vee_\sigma (\mathfrak{F}_2 \cap \mathfrak{F}_3).$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}_j = LR_\sigma(f_j)$ – σ-локальный класс Фиттинга, $j = 1, 2, 3$, где $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_3$ и f_j – минимальная H_σ-функция σ-локального класса Фиттинга $\mathfrak{F}_j$. Покажем, что справедливо равенство:

$$(\mathfrak{F}_1 \vee_\sigma \mathfrak{F}_2) \cap \mathfrak{F}_3 = \mathfrak{F}_1 \vee_\sigma (\mathfrak{F}_2 \cap \mathfrak{F}_3).$$

Заметим, что функции f_1, f_2, f_3 являются внутренними и $f_1(\sigma_i) \subseteq f_3(\sigma_i)$ для всех $i \in I$ по лемме 2.1. Тогда функция $f_1 \vee f_2$ также является внутренней и $\mathfrak{F}_1 \vee_\sigma \mathfrak{F}_2 = LR_\sigma(f_1 \vee f_2)$ по лемме 2.2. Следовательно,

$$(\mathfrak{F}_1 \vee_\sigma \mathfrak{F}_2) \cap \mathfrak{F}_3 = LR_\sigma((f_1 \vee f_2) \cap f_3)$$

по лемме 1.2. По аналогии можно показать, что

$$\mathfrak{F}_1 \vee_\sigma (\mathfrak{F}_2 \cap \mathfrak{F}_3) = LR_\sigma(f_1 \vee (f_2 \cap f_3)).$$

Поскольку для всех $i \in I$

$$(f_1(\sigma_i) \vee f_2(\sigma_i)) \cap f_3(\sigma_i) = f_1(\sigma_i) \vee (f_2(\sigma_i) \cap f_3(\sigma_i)),$$

$$(f_1 \vee f_2) \cap f_3 = f_1 \vee (f_2 \cap f_3).$$

Тогда, учитывая леммы 1.4, 1.5 и 2.2,

$$(\mathfrak{F}_1 \vee_\sigma \mathfrak{F}_2) \cap \mathfrak{F}_3 = \mathfrak{F}_1 \vee_\sigma (\mathfrak{F}_2 \cap \mathfrak{F}_3).$$

Теорема доказана.

3. Признак модулярности семейств множеств Фиттинга группы.

Теорема 3.1. *Если множества Фиттинга $\mathcal{F}$, $\mathcal{H}$ и $\mathcal{R}$ группы G таковы, что $\mathcal{F} \vee \mathcal{H} = Sn\{R \leq G : R = R_\mathcal{F} R_\mathcal{H}\}$ и $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{R}$, то справедливо модулярное равенство $(\mathcal{F} \vee \mathcal{H}) \cap \mathcal{R} = \mathcal{F} \vee (\mathcal{H} \cap \mathcal{R})$.*

Доказательство. По условию $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{R}$ и по определению пересечения $\mathcal{H} \cap \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}$. Значит, $\mathcal{F} \cup (\mathcal{H} \cap \mathcal{R}) \subseteq \mathcal{R}$. Тогда $\mathcal{F} \vee (\mathcal{H} \cap \mathcal{R}) \subseteq \mathcal{R}$ и $\mathcal{F} \vee (\mathcal{H} \cap \mathcal{R}) \subseteq \mathcal{F} \vee \mathcal{H}$. Из этого следует

$$\mathcal{F} \vee (\mathcal{H} \cap \mathcal{R}) \subseteq (\mathcal{F} \vee \mathcal{H}) \cap \mathcal{R} \quad (1)$$

Пусть $H \leq G$ и $H \in (\mathcal{F} \vee \mathcal{H}) \cap \mathcal{R}$. Тогда $H \in \mathcal{F} \vee \mathcal{H}$ и $H \in \mathcal{R}$. Так как по условию $\mathcal{F} \vee \mathcal{H} = Sn\{R \mid R = R_\mathcal{F} R_\mathcal{H}\}$, то существует группа $R = R_\mathcal{F} R_\mathcal{H}$ такая, что $H \lhd\lhd R_\mathcal{R}$. Поскольку $R_\mathcal{R} = R \cap R_\mathcal{R} = R_\mathcal{F} R_\mathcal{H} \cap R_\mathcal{R}$ и по условию $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{R}$, по тождеству Дедекинда (лемма 1.3) $R_\mathcal{F} R_\mathcal{H} \cap R_\mathcal{R} = R_\mathcal{F}(R_\mathcal{H} \cap R_\mathcal{R})$. Очевидно, $R_\mathcal{H} \cap R_\mathcal{R} = R_{\mathcal{H} \cap \mathcal{R}}$. Следовательно, $H \trianglelefteq\trianglelefteq R_\mathcal{R} = R_\mathcal{F} R_{\mathcal{H} \cap \mathcal{R}}$. По определению множества Фиттинга $H \in \mathcal{F}$ или $H \in \mathcal{H} \cap \mathcal{R}$. Таким образом, $H \in \mathcal{F} \vee (\mathcal{H} \cap \mathcal{R})$ и справедливо включение:

$$(\mathcal{F} \vee \mathcal{H}) \cap \mathcal{R} \subseteq \mathcal{F} \vee (\mathcal{H} \cap \mathcal{R}). \quad (2)$$

Из (1) и (2) следует равенство:

$$(\mathcal{F} \vee \mathcal{H}) \cap \mathcal{R} = \mathcal{F} \vee (\mathcal{H} \cap \mathcal{R}).$$

Теорема доказана.

Заключение. В данной работе найдены достаточные условия модулярности семейств обобщенно локальных классов Фиттинга, установлен признак модулярности семейств фиттинговых множеств конечной группы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
2. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск: Беларус. навука, 1997. – 240 с.
3. Ballester-Bolinches, A. On lattices of p-local formations of finite groups / A. Ballester-Bolinches, L.A. Shemetkov // Math. Nachr. – 1997. – Vol. 186. – P. 57–65.

4. Lausch, H. On normal Fitting classes / H. Lausch // Math. Z. – 1973. – Bd. 130, № 1. – S. 67–72.
5. Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь. – 17-е изд., доп., включающее Архив решенных задач / сост.: В.Д. Мазуров, Е.И. Хухро // Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН. – Новосибирск: Изд-во Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 2010. – 219 с.
6. Салий, В.Н. Решетки с единственными дополнениями / В.Н. Салий. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. – 128 с.
7. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит., 1978. – 272 с. – (Соврем. алгебра).
8. Vorob'ev, N.T. On σ-local Fitting classes / W. Guo, Li Zhang, N.T. Vorob'ev // J. Algebra and Appl. – 2020. – Vol. 542. – P. 116–129.
9. Скиба, А.Н. Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Матем. труды. – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 114–147.
10. Cusack, E. The join of two Fitting classes / E. Cusack // Math. Z. – 1979. – Bd. 167, № 1. – S. 37–47.

R E F E R E N C E S

1. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
2. Skiba A.N. *Algebra formatsii* [Algebra of Formations], Minsk: Belaruskaya navuka, 1997, 240 p.
3. Ballester-Bolinches, A. On lattices of p-local formations of finite groups / A. Ballester-Bolinches, L.A. Shemetkov // Math. Nachr. – 1997. – Vol. 186. – P. 57–65.
4. Lausch, H. On normal Fitting classes / H. Lausch // Math. Z. – 1973. – Bd. 130, № 1. – S. 67–72.
5. Mazurov V.D., Kukhro E.I. *Nereshennyye voprosu teorii grupp. Kourovskaya tetrad* [Unsolved Problems in Group Theory. Kourov Notebook], Novosibirsk: Sobolev Institute of Mathematics Press, 2018, 219 p.
6. Salii V.N. *Reshetki s yedinstvennymi dopolneniyami* [Lattices with Unique Complements], Moscow: Nauka, 1984, 128 p.
7. Shemetkov L.A. *Formatsii konenchnykh grupp* [Formations of Finite Groups], Moscow: Nauka, 1978, 272 p.
8. Vorobyev, N.T. On σ-local Fitting classes / W. Guo, Li Zhang, N.T. Vorob'ev // J. Algebra and Appl. – 2020. – Vol. 542. – P. 116–129.
9. Skiba A.N., Shemetkov L.A. *Matematicheskiye trudy* [Mathematic Works], 1999, 2(2), pp. 114–147.
10. Cusack, E. The join of two Fitting classes / E. Cusack // Math. Z. – 1979. – Bd. 167, № 1. – S. 37–47.

Поступила в редакцию 28.06.2021

Адрес для корреспонденции: e-mail: taisa.zhuk.m@gmail.com – Жук Т.Д.