МАТЭМАТЫКА

УДК 512.542

О СВОЙСТВЕ ПОРОЖДЕННЫХ σ-ЛОКАЛЬНЫХ ФОРМАЦИЙ

Н.Н. Воробьев, И.И. Стаселько, В.А. Степанов, А. Ходжагулыев
Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»

Все рассматриваемые группы конечны. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется формацией, если он замкнут относительно гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Напомним, что $l^\sigma\mathrm{form}\mathfrak{X}$ обозначает пересечение всех σ-локальных формаций, содержащих совокупность групп $\mathfrak{X}$.

Цель работы – доказательство теоремы о порожденных σ-локальных формациях.

***Материал и методы.** Использованы методы исследования теории конечных групп, а также теории формаций конечных групп.*

***Результаты и их обсуждение.** Пусть $\mathfrak{M}$ – полуформация и $A \in l^\sigma\mathrm{form}\mathfrak{M}$. Тогда если $O_{\sigma_i}(A) = 1$ и $\sigma_i \in \sigma$, то $A \in l^\sigma\mathrm{form}\mathfrak{M}_1$, где $\mathfrak{M}_1 = \{G/O_{\sigma_i}(G) \mid G \in \mathfrak{M}\}$.*

***Заключение.** Найдено новое свойство порожденных σ-локальных формаций.*

***Ключевые слова:** конечная группа, полуформация, формация, формационная σ-функция, σ-локальная формация, порожденная σ-локальная формация.*

ON THE PROPERTY OF GENERATED σ-LOCAL FORMATIONS

N.N. Vorob'ev, I.I. Staselko, V.A. Stepanov, A. Khojagulyyev
Education Establishment "Vitebsk State P.M. Masherov University"

All groups considered are finite. A class of groups $\mathfrak{F}$ is called a formation if it is closed with respect to homomorphic images and finite subdirect products. Recall that $l^\sigma\mathrm{form}\mathfrak{X}$ denotes the intersection of all σ-local formations containing a collection of groups $\mathfrak{X}$.

The purpose of the research is the proof of the theorem about generated σ-local formations.

***Material and methods.** Methods of the study of the finite group theory are used as well as methods of the theory of formations of finite groups.*

***Findings and their discussion.** Let $\mathfrak{M}$ be a semiformation and $A \in l^\sigma\mathrm{form}\mathfrak{M}$. It is proved if $O_{\sigma_i}(A) = 1$ and $\sigma_i \in \sigma$, then $A \in l^\sigma\mathrm{form}\mathfrak{M}_1$, where $\mathfrak{M}_1 = \{G/O_{\sigma_i}(G) \mid G \in \mathfrak{M}\}$.*

***Conclusion.** The new property of generated σ-local formations was found.*

***Key words:** finite group, semiformation, formation, formation σ-function, σ-local formation, generated σ-local formation.*

В работе рассматриваются только конечные группы. Используются стандартная терминология и определения и обозначения, введенные в [1–3]. Напомним, что класс групп $\mathfrak{F}$ называется формацией, если он замкнут относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений.

Следуя Л.А. Шеметкову [4], символом σ будем обозначать некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, т.е. $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, где $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$. Если n – целое число, то символом $\pi(n)$ обозначается множество всех различных простых чисел, делящих n; $\sigma(n) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}$; $\sigma(G) = \sigma(|G|)$; $\sigma(\mathfrak{F}) = \bigcup_{G \in \mathfrak{F}} \sigma(G)$.

Напомним определение σ-локальной формации, введенной в [3] в ходе разработки методов изучения σ-свойств групп [5–7].

Пусть f – произвольная функция вида

$$f : \sigma \rightarrow \{\text{формации групп}\}, \qquad (1)$$

называемая *формационной σ-функцией*. Следуя [3], функции f сопоставим класс групп

$$LF_\sigma(f) = (G \mid G = 1 \text{ или } G \neq 1 \text{ и } G/F_{\sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \text{ для всех } \sigma_i \in \sigma(G)).$$

В этом определении $F_{\sigma_i}(G)$ обозначает наибольшую нормальную σ_i'-замкнутую подгруппу группы G.

Если для некоторой формационной σ-функции f вида (1) имеет место $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, то $\mathfrak{F}$ называется *σ-локальной формацией* с *σ-локальным заданием* f (см. [3]). В случае, когда $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \ldots\}$, символ σ опускается и формация называется *локальной.*

Настоящая работа посвящена изучению порожденных σ-локальных формаций. Следующая теорема обобщает результаты, полученные А.Н. Скибой в теории формаций, связанные с доказательством индуктивности решетки всех функторно замкнутых n-кратно локальных формаций [8].

Цель данной работы – доказательство теоремы о порожденных σ-локальных формациях.

Материал и методы. Использованы методы исследования теории конечных групп, а также теории формаций конечных групп.

Результаты и их обсуждение. Основным результатом является

Теорема. *Пусть $\mathfrak{M}$ – полуформация и $A \in l^\sigma\mathrm{form}\mathfrak{M}$. Тогда если $O_{\sigma_i}(A) = 1$ и $\sigma_i \in \sigma$, то $A \in l^\sigma\mathrm{form}\mathfrak{M}_1$, где $\mathfrak{M}_1 = \{G/O_{\sigma_i}(G) \mid G \in \mathfrak{M}\}$.*

Для любой совокупности групп $\mathfrak{X}$ через $l^\sigma\mathrm{form}\mathfrak{X}$ обозначают пересечение всех таких σ-локальных формаций, которые содержат $\mathfrak{X}$.

Лемма 1 [1, предложение 2.2]. *Пусть $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$ – σ-локальная формация*, $\Pi = \sigma(\mathfrak{F})$, *$m$ – такая формационная σ-функция, что*

$$m(\sigma_i) = \mathrm{form}(G/F_{\sigma_i}(G) \mid G \in \mathfrak{F})$$

для всех $\sigma_i \in \Pi$ и $m(\sigma_i) = \emptyset$ для всех $\sigma_i \in \Pi'$. Тогда

1) $\mathfrak{F} = LF_\sigma(m)$;

2) $m(\sigma_i) \subseteq h(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}$ *для каждой формационной σ-функции h формации $\mathfrak{F}$ для каждого $\sigma_i \in \sigma$.*

Согласно лемме 1 σ-локальное задание m формации $\mathfrak{F}$ называется *наименьшим σ-локальным заданием* формации $\mathfrak{F}$.

Неединичная группа G называется *монолитической*, если в ней имеется лишь одна минимальная нормальная подгруппа (монолит группы G). *Полуформацией* называется класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов (см. [9]). Пересечение всех тех полуформаций, которые содержат данную совокупность групп $\mathfrak{X}$, называется *полуформацией*, *порожденной* $\mathfrak{X}$ [8].

Напомним, что через $\mathrm{Soc}(G)$ обозначают *цоколь группы G*, т.е. произведение всех минимальных нормальных подгрупп группы G.

Лемма 2 [8, следствие 1.2.26]. *Пусть $\mathfrak{X}$ – полуформация и* $A \in \mathfrak{F} = \mathrm{form}\mathfrak{X}$. *Тогда если A – монолитическая группа и $A \notin \mathfrak{X}$, то в $\mathfrak{F}$ найдется группа H с такими нормальными подгруппами $N, N_1, N_2, \ldots, N_t$; $M, M_1, M_2, \ldots, M_t$ ($t \geqslant 2$), что выполняются следующие утверждения*:

1) $H/N \cong A$ *и* $M/N = \mathrm{Soc}(H/N)$;
2) $N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_t = 1$;
3) *H/N_s – монолитическая $\mathfrak{X}$-группа с монолитом M_s/N_s, который H-изоморфен M/N*;
4) $M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_t \subseteq M$.

Лемма 3. *Пусть A – монолитическая группа с монолитом R, причем R не σ-примарен. Пусть $\mathfrak{M}$ – некоторая полуформация. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если* $A \in \mathrm{form}\mathfrak{M}$, *то* $A \in \mathfrak{M}$;

2) *если* $A \in l^{\sigma}\mathrm{form}\mathfrak{M}$, *то* $A \in \mathfrak{M}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $A \in \mathrm{form}\mathfrak{M}$. Предположим, что $A \notin \mathfrak{M}$. Тогда по лемме 2 в формации $\mathrm{form}\mathfrak{M}$ найдется группа H с такими нормальными подгруппами $N, N_1, N_2, \ldots, N_t$; $M, M_1, M_2, \ldots, M_t$ ($t \geqslant 2$), что выполняются следующие утверждения:

1) $H/N \cong A$ и $M/N = \mathrm{Soc}(H/N)$;

2) H/N_s – монолитическая $\mathfrak{M}$-группа с монолитом M_s/N_s, который H-изоморфен M/N, $s = 1, 2, \ldots, t$.

Поскольку монолит $R \cong M/N$ не σ-примарен, то $C_H(M/N) = N$. Кроме того, M_s/N_s H-изоморфен M/N. Значит, $N_s \subseteq N$. Поэтому $A \cong H/N \cong (H/N_s)/(N/N_s) \in \mathfrak{M}$; противоречие. Следовательно, $A \in \mathfrak{M}$.

Пусть теперь $A \in l^{\sigma}\mathrm{form}\mathfrak{M}$. Пусть f – наименьшее σ-локальное задание формации $\mathfrak{F} = l^{\sigma}\mathrm{form}\mathfrak{M}$. Так как R не σ-примарен, то $\bigcap_{\sigma_i \in \sigma(A)} F_{\sigma_i}(A) = 1$. Тогда найдется такое i, что $F_{\sigma_i}(A) = 1$ и по лемме 1

$$A \cong A/1 = A/F_{\sigma_i}(A) = A/\bigcap_{\sigma_i \in \sigma(A)} F_{\sigma_i}(A) \in f(\sigma_i) \subseteq \mathrm{form}\mathfrak{M}.$$

Следовательно, по доказанному выше $A \in \mathfrak{M}$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть $N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_t = \mathrm{Soc}(G)$, где N_l – минимальная нормальная подгруппа группы G ($l = 1, 2, \ldots, t$), $t > 1$ и $O_{\sigma_i}(G) = 1$. Пусть M_l – наибольшая нормальная в G подгруппа, содержащая $N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_{l-1} \times N_{l+1} \times \ldots \times N_t$, но не содержащая N_l ($l = 1, 2, \ldots, t$). Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *для любого $l \in \{1, 2, \ldots, t\}$ фактор-группа G/M_l монолитична и ее монолит N_lM_l/M_l G-изоморфен N_l и $O_{\sigma_i}(G/M_l) = 1$*;

2) $M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_t = 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что группа G/M_l не монолитична и T/M_l – минимальная нормальная в G/M_l подгруппа, отличная от N_lM_l/M_l. Тогда $N_l \nsubseteq T$ и $N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_{l-1} \times N_{l+1} \times \ldots \times N_t \subseteq M_l \subseteq T$. Значит, согласно определению подгруппы M_l имеет место $T \subseteq M_l$; противоречие.

Итак, фактор-группа G/M_l монолитична и $N_lM_l/M_l = \mathrm{Soc}(G/M_l)$. Так как $N_l \cap M_l = 1$, то имеет место G-изоморфизм:

$$N_lM_l/M_l \cong N_l/(N_l \cap M_l) = N_l/1 \cong N_l.$$

Из последнего, в частности, вытекает, что $O_{\sigma_i}(G/M_l) = 1$, поскольку по условию $O_{\sigma_i}(G) = 1$.

Покажем, что $M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_t = 1$. Предположим противное. Пусть R – минимальная нормальная подгруппа группы G, входящая в $M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_t$. Тогда, очевидно, $R \neq N_l$ при всех $l = 1, 2, \ldots, t$. Понятно, что

$$\bigcap_{l=1}^{t} (N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_{l-1} \times N_{l+1} \times \ldots \times N_t) = 1.$$

Значит, найдется такое $l \in \{1, 2, \ldots, t\}$, что

$$R \nsubseteq K = N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_{l-1} \times N_{l+1} \times \ldots \times N_t.$$

Следовательно, $RK = \mathrm{Soc}(G) \subseteq M_l$. Но тогда $N_l \subseteq M_l$. Полученное противоречие показывает, что $M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_t = 1$. Лемма доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы. Если $A \in \mathfrak{M}$, то утверждение леммы очевидно, так как $A \cong A/1 = A/O_{\sigma_i}(A) \in \mathrm{form}\mathfrak{M}_1$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $A \notin \mathfrak{M}$.

Сначала предположим, что A – монолитическая группа с монолитом R. Если R не σ-примарна, то по лемме 3 $A \in \mathfrak{M}$; противоречие. Значит, R – σ_j-группа, где $\sigma_j \in \sigma \backslash \{\sigma_i\}$. Следовательно, $F_{\sigma_j}(A) = O_{\sigma_j}(A)$ и $F_{\sigma_i}(A/R) = F_{\sigma_i}(A)/R$ для всех $j \neq i$.

Пусть $\mathfrak{F} = l^{\sigma}\mathrm{form}\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H} = l^{\sigma}\mathrm{form}\mathfrak{M}_1$, где $\mathfrak{M}_1 = \{G/O_{\sigma_i}(G) \mid G \in \mathfrak{M}\}$. Пусть f и h – наименьшие σ-локальные задания формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ соответственно. Согласно лемме 1

$$f(\sigma_k) = \mathrm{form}(G/F_{\sigma_k}(G) \mid G \in \mathfrak{M}) \text{ для всех } \sigma_k \in \sigma(\mathfrak{M});$$

$$h(\sigma_k) = \mathrm{form}(G/F_{\sigma_k}(G) \mid G \in \mathfrak{M}_1) \text{ для всех } \sigma_k \in \sigma(\mathfrak{M}_1).$$

Поскольку для любой группы G имеет место

$$G/F_{\sigma_j}(G) \cong (G/O_{\sigma_i}(G))/(F_{\sigma_j}(G)/O_{\sigma_i}(G)) = (G/O_{\sigma_i}(G))/F_{\sigma_j}(G/O_{\sigma_i}(G)),$$

то по лемме 1 $f(\sigma_j) = h(\sigma_j)$. Значит $A/O_{\sigma_j}(A) \in f(\sigma_j) = h(\sigma_j) \subseteq \mathfrak{H}$. Следовательно,

$A/F_{\sigma_r}(A) \cong (A/O_{\sigma_j}(A))/(F_{\sigma_r}(A)/O_{\sigma_j}(A)) = (A/O_{\sigma_j}(A))/F_{\sigma_r}(A/O_{\sigma_j}(A)) \in h(\sigma_r)$ для всех $\sigma_r \in \sigma(A)$. Значит, $A \in \mathfrak{H}$.

Рассмотрим случай, когда A не является монолитической группой, т.е. $\mathrm{Soc}(A) = N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_t$, где N_s – минимальная нормальная подгруппа группы A и $t > 1$. Пусть M_s – наибольшая нормальная в A подгруппа, содержащая $N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_{s-1} \times N_{s+1} \times \ldots \times N_t$, но не содержащая N_s, $s = 1, 2, \ldots, t$. Согласно лемме 4

$$A \in \mathrm{R}_0(A/M_1, A/M_2, \ldots, A/M_t),$$

где A/M_s – монолитическая группа с монолитом N_sM_s/M_s и $O_{\sigma_i}(A/M_s) = 1$. По условию $A \in l^{\sigma}\mathrm{form}\mathfrak{M}$. Следовательно, $A/M_s \in l^{\sigma}\mathrm{form}\mathfrak{M}$. Значит, согласно уже доказанному $A/M_s \in \mathfrak{H}$. Стало быть, $A \in \mathfrak{H}$. Теорема доказана.

В случае, когда $\sigma = \sigma^1$, то из теоремы вытекает

Следствие [8, лемма 4.1.5]. *Пусть* $\mathfrak{M}$ *– полуформация и* $A \in l\mathrm{form}\mathfrak{M}$. *Тогда если* $O_p(A) = 1$, *то* $A \in l\mathrm{form}\mathfrak{M}_1$, *где* $\mathfrak{M}_1 = \{G/O_p(G) \mid G \in \mathfrak{M}\}$.

Заключение. Найдено новое свойство порожденных σ-локальных формаций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чи, Ч. О Σ_t^{σ}-замкнутых классах конечных групп / Ч. Чи, А.Н. Скиба // Укр. мат. журн. – 2018. – Т. 70, № 12. – С. 1707–1716.
2. Chi, Z. On *n*-multiply *σ*-local formations of finite groups / Z. Chi, V.G. Safonov, A.N. Skiba // Comm. Algebra. – 2019. – Vol. 47, No. 3. – P. 957–968.
3. Skiba, A.N. On one generalization of local formations / A.N. Skiba // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – No. 1(34). – P. 79–82.
4. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука. Гл. ред. физ-матем. лит., 1978. – 272 с. – (Соврем. алгебра).
5. Skiba, A.N. On *σ*-subnormal and *σ*-permutable subgroups of finite group / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.
6. Skiba, A.N. Some characterizations of finite *σ*-soluble *PσT*-groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2018. – Vol. 495. – P. 114–129.
7. Skiba, A.N. On sublattices of the subgroup lattice defined by formation Fitting sets // J. Algebra. – 2020. – Vol. 550. – P. 69–85.
8. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск: Беларуская навука, 1997. – 240 с.
9. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит., 1989. – 256 с. – (Соврем. алгебра).

REFERENCES

1. Chi Z., Skiba A.N. On Σ_t^{σ}-closed classes of finite groups / Z. Chi, A.N. Skiba // *Ukr. Mat. Zhurn.* [Ukrainian Mathematical Journal], 2019, 70(12), pp. 1966–1977.
2. Chi Z., Safonov A. On *n*-multiply *σ*-local formations of finite groups / Z. Chi, V.G. Safonov, A.N. Skiba // Comm. Algebra. – 2019. – Vol. 47, No 3. – P. 957–968.
3. *Skiba A.N. Problemy fiziki, matematiki I tekhniki* [Problems of Physics, Mathematics and Technology], 2018, 1(34), pp. 79–82.
4. Shemetkov L.A. *Formatsii konechnykh grupp* [Formations of Finite Groups], Moscow: Nauka, 1978, 272 p. – (Sovremennaya algebra).
5. Skiba, A.N. On *σ*-subnormal and *σ*-permutable subgroups of finite group / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.
6. Skiba, A.N. Some characterizations of finite *σ*-soluble *PσT*-groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2018. – Vol. 495. – P. 114–129.
7. Skiba, A.N. On sublattices of the subgroup lattice defined by formation Fitting sets // J. Algebra. – 2020. – Vol. 550. – P. 69–85.
8. Skiba A.N. *Algebra formatsii* [Algebra of Formations], Minsk: Belaruskaya navuka, 1997, 240 p.
9. Shemetkov L.A., Skiba A.N. Formatsii algebraicheskikh system [Formations of Algebraic Systems], Moscow: Nauka, 1989, 256 p. – (Sovremennaya algebra).

Поступила в редакцию 24.05.2021

Адрес для корреспонденции: e-mail: vornic2001@mail.ru – Воробьев Н.Н.