**Т.Л. Сурин**
**Ж.В. Иванова**
**С.В. Шерегов**



# Методические рекомендации и задания к контрольным работам №1 и №2 по математическому анализу

**(для студентов I курса математического факультета заочного отделения )**

**Витебск 2012**

УДК 517 (075.8)
ББК 22.161.1я73
М 90

Авторы: доцент, кандидат физико-математических наук **Т.Л.Сурин,** доцент, кандидат физико-математических наук **Ж.В.Иванова,** старший преподаватель кафедры геометрии и математического анализа УО «ВГУ им. П.М. Машерова» **С.В.Шерегов**

Рецензент: доцент, кандидат физико-математических наук **С.А.Шлапаков**

Контрольные работы № 1 и №2 по математическому анализу предназначены для студентов 1 курса специальности «математика и информатика». Методические рекомендации содержат задания к контрольным работам, решение нулевого варианта, вопросы к экзамену по разделам математического анализа, изучаемым в нулевом и первом семестрах, а также список литературы для самостоятельного изучения.

# Содержание

# Введение

В данном методическом пособии приведены задания к контрольным работам № 1 и №2 по математическому анализу, которые необходимо выполнить студентам-заочникам первого курса, обучающимся по специальности «Математика. Информатика». Для оказания практической помощи студентам здесь же приведено подробное решение нулевых вариантов контрольных работ. В конце каждой контрольной работы даны вопросы к экзаменам за нулевой и первый семестры. Список литературы, указанный в конце пособия, поможет решить контрольные работы и успешно подготовиться к экзамену. Это пособие может быть также полезно для организации самостоятельной работы студентов дневного отделения, обучающихся по специальностям «Математика. Информатика», «Математика. Физика», «Прикладная математика»

### *Общие требования к оформлению контрольной работы*

1. *Выбор варианта задания.*

Вариант задания совпадает с номером, под которым студент числится в журнале преподавателя. Если этот номер больше 20, то нужно выполнять тот вариант, номер которого равен номеру по журналу минус 20 (например, если номер по журналу равен 25, то нужно выполнять вариант №5 (25 – 20 = 5)).

2. *Правила оформления контрольной работы.*

Контрольную работу выполняют в отдельной тонкой тетради. На обложке тетради следует написать номер контрольной работы, номер варианта, название дисциплины, указать свою группу, фамилию, инициалы и номер зачетной книжки.

Решение задач необходимо проводить в последовательности, указанной в контрольной работе. Перед решением каждой задачи полностью переписывают ее условие. В тетради обязательно оставляют поля.

Решение каждой задачи следует излагать подробно, давать необходимые пояснения по ходу решения со ссылкой на используемые формулы, вычисления проводить в строгом порядке. Решение каждой задачи необходимо доводить до ответа, требуемого условием. В конце контрольной работы указать использованную при выполнении контрольной работы литературу.

Студент не допускается к сдаче экзамена без предъявления тетради с зачтенной контрольной работой.

# Контрольная работа №1

## Задания к контрольной работе

**1.** ***Решите неравенство, исходя из определения модуля действительного числа, и геометрически.***

| вариант | | вариант | |
|---|---|---|---|
| 1. | $\lvert x-2\rvert \le \lvert x\rvert +1;$ | 11. | $\lvert x-5\rvert \le \lvert x\rvert -2;$ |
| 2. | $\lvert x^2-3x+2\rvert > x^2-3x+2;$ | 12. | $\lvert x(x+4)\rvert > 3;$ |
| 3. | $\lvert x(x-2)\rvert > 1;$ | 13. | $\lvert\lvert x\rvert -7\rvert \ge 7;$ |
| 4. | $\left\lvert\frac{1}{x}\right\rvert \le \frac{1}{x^2};$ | 14. | $\lvert 3x-1\rvert \ge \lvert x-4\rvert;$ |
| 5. | $\lvert x+4\rvert \ge \lvert 2x\rvert +1;$ | 15. | $\lvert x-5\rvert \le \lvert x\rvert;$ |
| 6. | $\lvert\lvert x\rvert -3\rvert \ge 3;$ | 16. | $\lvert x(x+4)\rvert > x;$ |
| 7. | $\sqrt{x^2+4x+4} > 4-x^2;$ | 17. | $\lvert\lvert x\rvert +5\rvert \ge 3;$ |
| 8. | $x^2-5\lvert x\rvert +6<0;$ | 18. | $\lvert x+5\rvert \ge \lvert 2x\rvert -1;$ |
| 9. | $\lvert x-3\rvert \ge \lvert 2x-1\rvert;$ | 19. | $\lvert x+6\rvert \ge \lvert 1-2x\rvert;$ |
| 10. | $\lvert\lvert x\rvert -2\rvert \le \lvert x\rvert;$ | 20. | $x^2-3\lvert x\rvert -4<0.$ |

**2.** ***Найти область определения функции $y = f(x)$.***

| вариант | | вариант | |
|---|---|---|---|
| 1. | $y=\sqrt{16-x^2}\,\log_2(x^2-5x+6);$ | 11. | $y=\arcsin\frac{x^2-2x+2}{x-2};$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2. | $y=\sqrt{\log_2(x^2-3)}$; | 12. | $y=\sqrt{\dfrac{16-16x+4x^2}{1-x}}+(x+4)^{-\frac{1}{6}}$; |
| 3. | $y=\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{\sqrt{4-3x-x^2}}$; | 13. | $y=\sqrt{\log_{0,5}\dfrac{x}{x^2-1}}$; |
| 4. | $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}$; | 14. | $y=\lg\sin x+\sqrt{16-x^2}$; |
| 5. | $y=\sqrt{3-x}+\arcsin\dfrac{3-2x}{x-2}$; | 15. | $y=\sqrt{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$ |
| 6. | $y=\lg(1-\lg(x^2-5x+16))$; | 16. | $y=\lg_{\sin x}x$; |
| 7. | $y=\dfrac{1}{\sqrt{\lvert x\rvert-x}}$; | 17. | $y=\arccos\dfrac{2}{2+\sin x}$; |
| 8. | $y=\dfrac{1}{\lg(1-x)}+\sqrt{x+2}$; | 18. | $y=\dfrac{3}{4-x^2}+\lg(x^3-x)$; |
| 9. | $y=\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$; | 19. | $y=\sqrt{\ln\left(2-\sqrt{x-1}\right)}$; |
| 10. | $y=\sqrt{\sin x-1}$; | 20. | $y=\dfrac{1}{\sqrt{\lvert x\rvert-2\lvert x-1\rvert}}$. |

**3.** ***Используя определение предела последовательности, определение бесконечно большой последовательности или определение предела функции, докажите, что*:**

| вариант | | вариант | |
|---|---|---|---|
| 1. | $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{2n^2-1}=\dfrac{1}{2}$; | 11. | $\lim\limits_{x\to 0}(5x-2)=-2$; |
| 2. | $\lim\limits_{x\to -1}(2x-3)=-5$; | 12. | $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n}{n-1}=5$; |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3. | $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^2 - 1}{n^2 + 3} = 1$ ; | 13. | $\lim\limits_{x \to 4} (3x - 8) = 4$; |
| 4. | $\lim\limits_{x \to 2} (7 - 2x) = 3$; | 14. | $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2n + 1}{n - 1} = 2$; |
| 5. | $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2n + 1}{3n - 2} = \dfrac{2}{3}$ ; | 15. | $\lim\limits_{x \to -1} (3x - 1) = -4$; |
| 6. | $\lim\limits_{x \to 3} (3x - 7) = 2$; | 16. | $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{5n - 1}{n + 2} = 5$; |
| 7. | $\lim\limits_{n \to \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1 \quad (a > 1)$; | 17. | $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(-1)^n}{2^n} = 0$; |
| 8. | $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^3}{1 + 2n^3} = \dfrac{1}{2}$ ; | 18. | $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^3 - 1}{n^2 + 1} = \infty$ ; |
| 9. | $\lim\limits_{x \to --2} (1 - 2x) = 5$; | 19. | $\lim\limits_{x \to 0} (5 - 2x) = 5$; |
| 10. | $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2n^3 - 1}{n^4} = 0$ ; | 20. | $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^2 - 1}{n^2 + 1} = 1$ . |

**4.** ***Найдите указанные пределы.***

| вариант | *a* | *b* | *c* |
|---|---|---|---|
| 1. | $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^5 - x^4 + 1}{x^5 - 1}$; | $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^5 - 1}{x^4 + 1}$; | $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - x}$; |
| 2. | $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x - x^3}{2x^3 - x^2 + 3}$ | $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(x^3 + 1)(x^3 - 1)}{1 - x^7}$ | $\lim\limits_{x \to \sqrt{3}} \dfrac{x^2 - 3}{x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 9}$; |
| 3. | $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(2x + 1)^2}{x^2 - 5}$; | $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1 - 3x^6}{(x^2 - 2)(x^2 + 2)}$; | $\lim\limits_{x \to 1/2} \dfrac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1}$; |
| 4. | $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{100 - 0{,}1x^{10}}{0{,}01x^{10} - 10}$; | $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(x^5 - 1)(x^5 + 1)}{(x^3 + 1)^3}$ ; | $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$; |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5. | $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2(x^3+5)}{5-x^5}$; | $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x-1)^3}{(x^2+1)(x^2+2)}$; | $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-4x^2+8}{x^2-3x+2}$; |
| 6. | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{3-2x}\right)^3$; | $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{100x^7-1}{1-x^8}$; | $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x(x-1)}-\frac{1}{x^2-3x+2}\right)$; |
| 7. | $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2}{1+(2x)^2}$; | $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{100x^{10}-1}{1-0{,}01x^{11}}$; | $\lim\limits_{x\to -2}\frac{2x^2-x-10}{x^3+8}$; |
| 8. | $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2}{3+\frac{x^2}{4}}$; | $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x^3-2)(x^5+1)}{(x^2-1)(x^4-1)}$; | $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{3x^2-x-2}$; |
| 9. | $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x-1)^3}{(2x^2-1)^2}$; | $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-100x^2+1}{100x^4+15x}$; | $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-5x^2+4}{x^2-4x+3}$; |
| 10. | $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x^3-x)^2}{3x^6+x}$; | $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^3-(x+2)^3}{(x+1)^3+(x-2)^3}$; | $\lim\limits_{x\to -3}\frac{2x^2+5x-3}{x^3+27}$; |
| 11. | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{5-x}\right)^4$; | $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+2x-1}}{x+2}$; | $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x+2}{x^2-5x+4}-\frac{x-4}{3x^2-5x+2}\right)$; |
| 12. | $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{10}-5x}{x^{20}-10x}$; | $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{10}-5x}{(x^2-1)^5}$; | $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^3-3x^2}{x^6-1}$; |
| 13. | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^3-2x+1}-\frac{1}{x^3+2x+1}\right)$ | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^3-2x+1}+\frac{1}{x^3+2x+1}\right)$ | $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-x^2+x-1}{x^4-1}$; |
| 14. | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-x^2}{1+2x^2}\right)^3$; | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^4}{x^3-1}-x\right)$; | $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-x-6}{x^3-8}$; |
| 15. | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^4-x^3-1}{x^3}-x\right)$; | $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}$; | $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^3+27}{2x^2+3x-9}$; |
| 16. | $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^4-3}}{x^2-1}$; | $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^{20}+(x+1)^{30}}{(x+1)^{50}}$; | $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+x^2+x+1}{1+x^3}$; |
| 17. | $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{100}-x^{10}+1}{x^{10}(x^{100}+1)}$; | $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^6-2}}{3x^3+1}$; | $\lim\limits_{x\to 5}\frac{125-x^3}{2x^2-9x-5}$; |
| 18. | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-\frac{x}{3}}{1+\frac{x}{2}}\right)^2$; | $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2\sqrt{x^2-1}}{x^2-1}$; | $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\frac{x^2-\frac{1}{9}}{3x^2-4x+1}$; |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 19. | $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}$; | $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^2-5}}{x+1}$; | $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^3-2x^2+x-1}{3x^2-x-2}$; |
| 20. | $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(1+x)^{20}-1}{(x^2+1)^{10}}$; | $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[4]{x^7-1}}{2x+3}$; | $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^3+2}{5x^2-x-6}$. |

**5.** ***Найдите пределы функций.***

| вариант | *a* | *b* |
|---|---|---|
| 1 | $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{8+x^2}-3}{\sqrt[3]{x}-1}$; | $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 6x}{x^2}$; |
| 2 | $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-25}$; | $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 2x}{x^2-x}$; |
| 3 | $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$; | $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{(1-\cos\alpha)}}$; |
| 4 | $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{1+x^3}-3}{\sqrt[3]{x+6}-2}$; | $\lim\limits_{x\to \pi/2} \left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg}x$; |
| 5 | $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{x}$; | $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x+\sin 5x}{x}$; |
| 6 | $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-1}$; | $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{\sin x-1}$; |
| 7 | $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$; | $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\cos x-\cos 7x}$; |
| 8 | $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$; | $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin 3x}{\pi-x}$; |
| 9 | $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x-3}-1}{\sqrt{2x+1}-3}$; | $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{\arcsin 3x}$; |
| 10 | $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^3+27}{\sqrt{x+4}-1}$; | $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 3x}{x\sin x}$; |

| | | |
|---|---|---|
| 11 | $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$; | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$; |
| 12 | $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)$; | $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1+\cos 3x}{\sin^2 7x}$; |
| 13 | $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$; | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 2x}{\text{x} \arcsin x}$; |
| 14 | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^3+2}-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{x^2+1}-1}$; | $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}$; |
| 15 | $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$; | $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$; |
| 16 | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$; | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin x}{1-\cos x}$; |
| 17 | $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{7+x}-3}{x^4-x^2-12}$; | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\operatorname{tg} x}$; |
| 18 | $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{2-\sqrt[3]{x+6}}$; | $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{1-\sin x}{\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)^2}$; |
| 19 | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{x^3-x}$; | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x+\sin 3x}{\sin 5x-\sin 3x}$; |
| 20 | $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$; | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\sin x+1}}{x\sin x}$. |

***6. Найдите пределы, используя второй замечательный предел***

| вариант | | вариант | |
|---|---|---|---|
| 1. | $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$; | 11. | $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)}$; |
| 2. | $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2-3x}{5-3x}\right)^{2x-1}$; | 12. | $\lim\limits_{x\to \infty}(x-1)[\ln(x+1)-\ln(x-1)]$; |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3. | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x^2}{x^2-x}\right)^{3x}$ ; | 13. | $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}$; |
| 4. | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{3x+x^2}\right)^{\frac{x}{2}}$; | 14. | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{3x+1}{3x+2}\right)^{1-x}$ ; |
| 5. | $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$; | 15. | $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)^{x}$ ; |
| 6. | $\lim\limits_{x\to 0}\ (\cos x)^{\frac{1}{x}}$; | 16. | $\lim\limits_{x\to\infty} 3x\,[\ln(x+2)-\ln(x+1)]$; |
| 7. | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$ ; | 17. | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-x+6}\right)^{x}$ ; |
| 8. | $\lim\limits_{x\to +\infty} x[\ln(x+1)-\ln(x-1)]$; | 18. | $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\mathrm{tg}^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2x}}$; |
| 9. | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$ ; | 19. | $\lim\limits_{x\to 0}\left(3-\dfrac{2x+7}{x+5}\right)^{3-x}$ ; |
| 10. | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^{x}$; | 20. | $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\left(\dfrac{3x+2}{3x-4}\right)^{(x+1)}}$ . |

**7.** ***Исследовать на непрерывность функцию в указанных точках. Определить вид точек разрыва.***

| вариант | *a* | *b* |
|---|---|---|
| 1. | $y=\dfrac{x-2}{x^2-4}$, $x_1=-2$, $x_2=2$, $x_3=5$; | $y=\ln\lvert x\rvert$, $x_1=0$, $x_2=-1$; |
| 2. | $y=\dfrac{x-1}{x^2-1}$, $x_1=-1$, $x_2=1$, $x_3=3$; | $y=e^{\frac{1}{x}}$, $x_1=0$, $x_2=2$; |
| 3. | $y=\dfrac{1+x}{\lvert x\rvert-1}$, $x_1=-1$, $x_2=1$, $x_3=4$; | $y=\mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{x}$, $x_1=0$, $x_2=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; |
| 4. | $y=\dfrac{x-2}{x^2-5x+6}$; $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=1$; | $y=\dfrac{1}{\cos x}$, $x_1=0$, $x_2=\dfrac{\pi}{2}$; |

| | | |
|---|---|---|
| 5. | $y=\frac{x^2-9}{(x-2)(x-3)}$; $x_1=-3$, $x_2=2$, $x_3=3$; | $y=\frac{1}{\sin x}$, $x_1=0$, $x_2=\frac{\pi}{2}$; |
| 6. | $y=\frac{x}{x^2+4x}$; $x_1=-4$, $x_2=0$, $x_3=1$; | $y=\operatorname{tg} x$, $x_1=\frac{\pi}{4}$, $x_2=\frac{\pi}{2}$; |
| 7. | $y=\frac{1-x}{\lvert x\rvert-1}$, $x_1=-1$, $x_2=1$, $x_3=4$; | $y=2^{\frac{1}{2-x}}$, $x_1=0$, $x_2=2$; |
| 8. | $y=\frac{x^3-27}{x^2-9}$, $x_1=3$, $x_2=-3$, $x_3=5$; | $y=\cos\frac{1}{x}$, $x_1=0$, $x_2=\frac{2}{\pi}$; |
| 9. | $y=\frac{x-1}{x^2-x}$, $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$; | $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\lvert x\rvert}}$, $x_1=0$, $x_2=1$; |
| 10. | $y=\frac{x-1}{x^2+x-2}$, $x_1=2$, $x_2=1$, $x_3=-2$ | $y=\operatorname{ctg} x$, $x_1=0$, $x_2=\frac{\pi}{2}$; |
| 11. | $y=\frac{1}{\ln\lvert x\rvert}$, $x_1=0$, $x_2=1$; $x_3=2$; | $y=\frac{x-1}{(x-2)^2}$, $x_1=1$; $x_2=2$; |
| 12. | $y=\frac{x^2-1}{x^2-4x+3}$, $x_1=-1$, $x_2=1$; $x_3=3$; | $y=\frac{\sin x}{x^2}$, $x_1=0$, $x_2=\frac{\pi}{4}$; |
| 13. | $y=\frac{x^3+1}{x^2-1}$, $x_1=1$, $x_2=0$; $x_3=-1$; | $y=\frac{1-\cos x}{x^2}$, $x_1=0$, $x_2=\frac{\pi}{2}$; |
| 14. | $y=\frac{x^2+4x+4}{x^2+x-2}$, $x_1=-2$, $x_2=0$; $x_3=1$; | $y=2^{-\frac{1}{\lvert x\rvert}}$, $x_1=0$, $x_2=1$; |
| 15. | $y=\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$, $x_1=-1$, $x_2=1$; $x_3=2$; | $y=\frac{1-\cos x}{x}$, $x_1=0$, $x_2=\frac{\pi}{2}$; |
| 16. | $y=\frac{\lvert x\rvert-2}{(x-2)(x-3)}$, $x_1=-2$, $x_2=2$, $x_3=3$; | $y=e^{-\frac{1}{x}}$, $x_1=0$, $x_2=2$; |
| 17. | $y=\frac{x(x^2-4)}{x^2+x-6}$, $x_1=-3$, $x_2=0$, $x_3=2$; | $y=\frac{\lvert\sin x\rvert}{x}$, $x_1=0$, $x_2=\frac{\pi}{2}$; |

| | | |
|---|---|---|
| 18. | $y=\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-1}$, $x_1=-1$, $x_2=1$, $x_3=2$; | $y=\operatorname{sgn}x$, $x_1=0$, $x_2=1$; |
| 19. | $y=\dfrac{x^2-3x}{x^2-x}$, $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=3$; | $y=e^{\frac{1}{1-x}}$, $x_1=0$, $x_2=1$; |
| 20. | $y=\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}$, $x_1=0$, $x_2=-3$, $x_3=3$; | $y=\dfrac{\arcsin x}{x(x-1)}$, $x_1=0$, $x_2=1$; |

**8.** ***Исследовать на непрерывность функцию. Указать вид точек разрыва. Схематически изобразить график функции.***

| вариант | | вариант | |
|---|---|---|---|
| 1. | $y=\begin{cases} x^2-1, \text{ при } x<1, \\ x-1, \text{ при } 1\le x\le\pi, \\ \sin x, \text{ при } x>\pi, \end{cases}$ | 11. | $y=\begin{cases} 1, \text{ при } x\le -1, \\ \lvert x\rvert, \text{ при } -1<x<1, \\ -1, \text{ при } x>1, \end{cases}$ |
| 2. | $y=\begin{cases} \cos x, \text{при } x\le 0, \\ 1-x, \text{при } 0<x\le 1, \\ x^2, \text{при } x>1, \end{cases}$ | 12. | $y=\begin{cases} 1-x^2, \text{ при } x<0, \\ x, \text{ при } 0\le x<1, \\ 0, \text{ при } x=1, \\ x^2, \text{ при } x>1, \end{cases}$ |
| 3. | $y=x\,[x]$ | 13. | $y=\lvert x-1\rvert+\lvert x-2\rvert+\lvert 2x-3\rvert$ |
| 4. | $y=\begin{cases} \cos\dfrac{\pi}{2}x, \text{ при } \lvert x\rvert\le 1, \\ \lvert x-1\rvert, \text{ при } \lvert x\rvert>1, \end{cases}$ | 14. | $y=\begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{x}, \text{при } x\ne 0, \\ 1, \text{при } x=0, \end{cases}$ |
| 5. | $y=\begin{cases} \ln\lvert x\rvert, \text{при } \lvert x\rvert\le 1, \\ 2-x, \text{при } \lvert x\rvert>1, \end{cases}$ | 15. | $y=\begin{cases} 2\lvert x\rvert, \text{ при } \lvert x\rvert\le 1, \\ 2-x^2, \text{ при } \lvert x\rvert>1, \end{cases}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 6. | $y=\begin{cases}1, \text{ при } x\le 0\\ \dfrac{\sin x}{x}, \text{ при } 0<x<\dfrac{\pi}{2},\\ x+2, \text{ при } x\ge\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$ | 16. | $y=\begin{cases}2, \text{ при } x<-\dfrac{\pi}{4},\\ \dfrac{\mathrm{tg}x}{x}, \text{ при } 0<\lvert x\rvert\le\dfrac{\pi}{4},\\ 1, \text{ при } x>\dfrac{\pi}{4},\end{cases}$ |
| 7. | $y=\begin{cases}2x^2, \text{ при } x\le 1,\\ 2-x, \text{ при } x>1,\end{cases}$ | 17. | $y=\dfrac{\lvert\sin x\rvert}{\sin x}$ |
| 8. | $y=\begin{cases}x^2, \text{при } x<0,\\ x, \text{при } 0\le x\le\dfrac{\pi}{2},\\ \sin x, \text{при } x>\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$ | 18. | $y=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x^2-4}, \text{ при } x\ne 2,\ x\ne -2,\\ 1, \text{ при } x=2,\\ 0, \text{ при } x=-2,\end{cases}$ |
| 9. | $y=\begin{cases}0, \text{ при } x<0,\\ \dfrac{x^2-1}{x-1}, \text{ при } x\ge 0,\ x\ne 1,\\ 3, \text{ при } x=1,\end{cases}$ | 19. | $y=\begin{cases}x^2, \text{ при } \lvert x\rvert>1,\\ \dfrac{\lvert x\rvert}{x}, \text{ при } 0<\lvert x\rvert\le 1,\end{cases}$ |
| 10. | $y=\begin{cases}x+1, \text{ при } x<0,\\ (x-1)^3, \text{ при } 0\le x\le 1,\\ 3, \text{ при } x>1,\end{cases}$ | 20. | $y=\begin{cases}1, \text{ при } x<-1,\\ 1-x^2, \text{ при } -1\le x\le 1,\\ 0, \text{ при } x>1.\end{cases}$ |

## Решение нулевого варианта

***Задание №1.***

***Решить неравенство*** $\lvert 2x+1\rvert\le 1+\lvert x-3\rvert$, ***исходя из определения модуля действительного числа и геометрически.***

***Решение.***

**I.** Найдем решение неравенства, исходя из определения модуля действительного числа.

Неравенство, содержащее знак модуля, решается, как правило, методом «перебора». Находим те значения $x$, при которых выражения под знаком модуля равны нулю. $2x+1=0$ при $x=-1/2$, $x-3=0$ при $x=3$. Точки $-1/2$ и 3 разбивают числовую ось на промежутки, на каждом из которых выражения под знаком модуля имеют постоянный, легко определяемый знак (рис. 1). Это позволяет на каждом из промежутков раскрыть модули, используя определение модуля (см. определение 1, п.1, [6]).

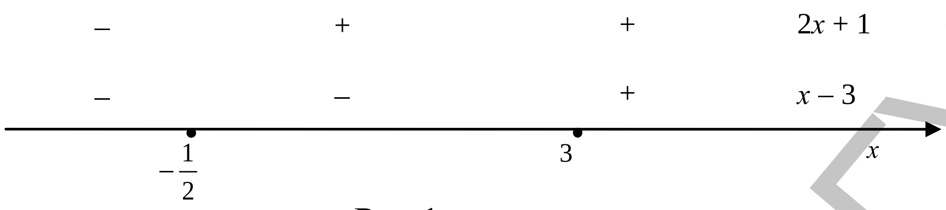


Рис.1.

1. Будем искать решение неравенства на промежутке $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$.

Здесь $2x + 1 \le 0$, значит, $|2x + 1| = -(2x + 1) = -2x - 1$; $x - 3 < 0$, следовательно, $|x - 3| = -(x - 3) = -x + 3$.

Неравенство примет вид

$$-2x - 1 \le 1 - x + 3,$$

откуда $x \ge -5$.

Получаем решение, являющееся пересечением промежутков $[-5, +\infty)$ и $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$, т.е. промежуток $\left[-5, -\frac{1}{2}\right]$.

2. Пусть $x \in \left(-\frac{1}{2},\ 3\right]$. Здесь $2x + 1 > 0$, $x - 3 \le 0$.

Неравенство имеет вид

$$2x + 1 \le 1 - x + 3,$$

откуда $x \le 1$. Так как $x \in \left(-\frac{1}{2},\ 3\right]$, то решением неравенства является пересечение промежутков $\left(-\frac{1}{2},\ 3\right]$ и $(-\infty,\ 1]$, т.е. промежуток $\left(-\frac{1}{2},\ 1\right]$.

3. Пусть $x \in (3, +\infty)$. На этом промежутке $2x + 1 > 0$, $x - 3 > 0$. Имеем неравенство $2x + 1 \le 1 + x - 3$, откуда $x \le -3$. На рассматриваемом промежутке таких значений $x$ нет.

Ответ мы получим, объединяя найденные решения:

$$\left[-5, -\frac{1}{2}\right] \cup \left(-\frac{1}{2},\ 1\right] = [-5,\ 1].$$

**II.** Найдем решение неравенства геометрически.

Геометрическое решение неравенства $|2x+1| \le 1+|x-3|$ получим, построив в одной и той же системе координат графики функций, образующих левую и правую части неравенства (рис. 2).

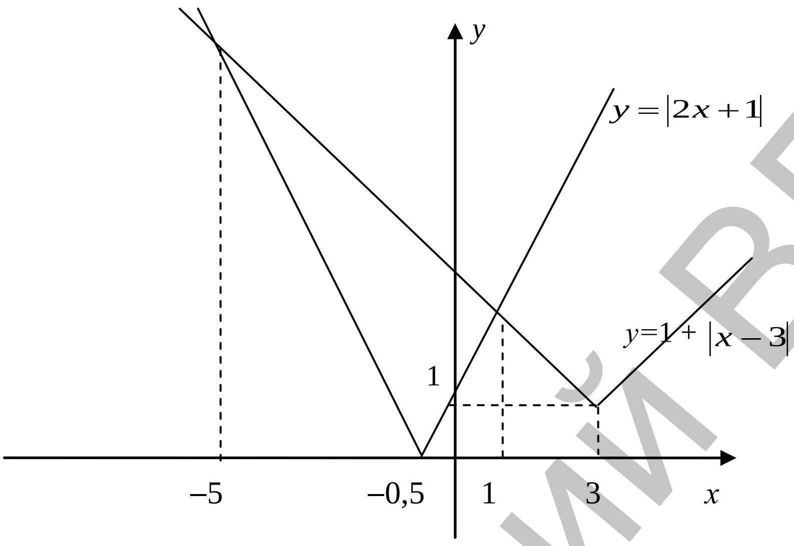


Рис. 2.

1. Построим график функции $y=|2x+1|$.

График этой функции можно получить из графика функции $y = 2x + 1$, отобразив лежащую под осью OX часть графика симметрично относительно оси OX.

2. Построим график функции $y=1+|x-3|$.

Для этого строим график функции $y = |x-3|$ подобно тому, как было указано выше, и поднимаем его на единицу вверх.

Из рисунка 2 видно, что графики пересекаются в точках –5 и 1 и на интервале (-5, 1) график функции $y = |2x+1|$ расположен ниже графика функции $y = 1+|x-3|$. Неравенство $|2x+1| \le 1+|x-3|$ выполняется на отрезке [-5, 1].

***Задание №2.***

***Найти область определения функции*** $y = \sqrt{\log_2 \sin x}$.

***Решение.***

Область определения функции определяется неравенством

$$\log_2 \sin x \ge 0.$$

Но, так как данное неравенство равносильно неравенству $\sin x \geq 1$, то единственно возможным будет случай $\sin x = 1$, т.е. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$. Таким образом, областью определения данной функции является множество

$$D(f) = \left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z\right\}.$$

### *Задание №3.*

***Используя определение предела последовательности, доказать, что*** $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1$**.**

### *Решение.*

Рассмотрим последовательность $\{x_n\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\}$. Докажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N = N(\varepsilon)$, что для всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon. \qquad (*)$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Рассмотрим неравенство $(*)$:

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

Решив неравенство относительно $n$, получим $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Положим $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right]$, тогда для всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|x_n - 1| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

Следовательно, по определению предела последовательности, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

### Задание №4.

***Найдите указанные пределы:***

$$a)\ \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - x^2 + 1}{2x^3 - 1}, \quad b)\ \lim_{x \to 1} \frac{x^4 - x^3 + x^2 - 1}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 1}.$$

### *Решение.*

*a*) Найдем $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x^2+1}{2x^3-1}$.

При $x\to\infty$ под знаком предела имеем неопределенность $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Для раскрытия этой неопределённости делим числитель и знаменатель дроби на старшую степень дроби, т.е. на $x^3$. Получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^2+1}{2x^3-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x^3-x^2+1}{x}}{\dfrac{2x^3-1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}}{2-\dfrac{1}{x^3}}=\frac{1}{2}.$$

*b*) Найдем $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-x^3+x^2-1}{x^4-2x^3+2x^2-1}$.

При $x=1$ числитель и знаменатель дроби, стоящей под знаком предела, равны нулю. Имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Чтобы раскрыть эту неопределенность, разложим числитель и знаменатель дроби на множители, затем сократим дробь:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-x^3+x^2-1}{x^4-2x^3+2x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^3+x+1)}{(x-1)(x^3-x^2+x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x+1}{x^3-x^2+x+1}=\frac{3}{2}.$$

**Задание №5.**

***Найдите пределы функций:***

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1},\quad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}.$$

***Решение.***

*a*) Найдем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$.

Под знаком предела имеем неопределённость вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Умножим числитель и знаменатель дроби, стоящей под знаком предела, на выражения $\sqrt{1-x}+1$ и $\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1$. Тогда, используя формулы сокращенного умножения, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1-x}-1)(\sqrt{1-x}+1)(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt[3]{x+1}-1)(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1)(\sqrt{1-x}+1)}$$

$$==\lim_{x\to 0}\frac{((1-x)-1)(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1)}{((x+1)-1)(\sqrt{1-x}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1)}{x(\sqrt{1-x}+1)}=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1)}{(\sqrt{1-x}+1)}=-\frac{3}{2}.$$

*b*) Найдем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

Имеем неопределённость вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Преобразуем выражение, стоящее под знаком предела, так чтобы можно было использовать первый замечательный предел. Учитываем, что $1-\cos x=2\sin^2\dfrac{x}{2}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}.$$

(Предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}$ является первым замечательным пределом, так как

обозначив $t=\dfrac{x}{2}$, $t\to 0$ при $x\to 0$, получим: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$).

### *Задание №6.*

***Используя второй замечательный предел, найдите предел функции*** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2-x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

***Решение.***

Имеем неопределенность вида $\left[1^{\infty}\right]$. Для раскрытия этой неопределённости используется второй замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2-x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\left(-\frac{2}{x}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-\frac{2}{x}}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-\frac{2}{x}}\right)^{-\frac{1}{2}}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

**Задание №7.**

**1.** ***Исследовать на непрерывность функцию*** $y=\dfrac{x+5}{x^2-25}$ ***в точках*** $x_1=3$, $x_2=5$, $x_3=-5$. ***Определить тип точек разрыва.***

***Решение.***

По определению, функция $y=f(x)$ является непрерывной в точке $x_0$, если она определена в этой точке и предел функции в точке $x_0$ равен значению функции в этой точке, т.е. выполняется равенство

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

Рассмотрим точку $x_1=3$. Функция $y=\dfrac{x+5}{x^2-25}$ определена в точке $x_1=3$ **и** $f(3)=-\dfrac{1}{2}$. Кроме того, $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+5}{x^2-25}=-\dfrac{1}{2}$. Значит, функция непрерывна в точке $x_1=3$.

Рассмотрим точки $x_2=5$ и $x_3=-5$. В этих точках функция не определена, т.е $x_{2,3}=\pm 5$ – точки разрыва функции. Определим вид точек разрыва.

Для определения характера точки разрыва $x_2=5$, найдем левый и правый пределы функции в данной точке.

$$\lim_{x\to 5-0}\frac{x+5}{x^2-25}=\lim_{x\to 5-0}\frac{1}{x-5}=-\infty;\quad \lim_{x\to 5+0}\frac{x+5}{x^2-25}=\lim_{x\to 5+0}\frac{1}{x-5}=+\infty.$$

Значит, $x_2=5$ – точка разрыва II рода.

В точке $x_3=-5$:

$$\lim_{x\to -5}\frac{x+5}{x^2-25}=\lim_{x\to -5}\frac{1}{x-5}=-\frac{1}{10}.$$

Поскольку существует $\lim\limits_{x\to -5} f(x)$, то точка $x_3=-5$ является точкой разрыва I рода, а именно, точкой устранимого разрыва.

График данной функции изображен на рисунке 3.

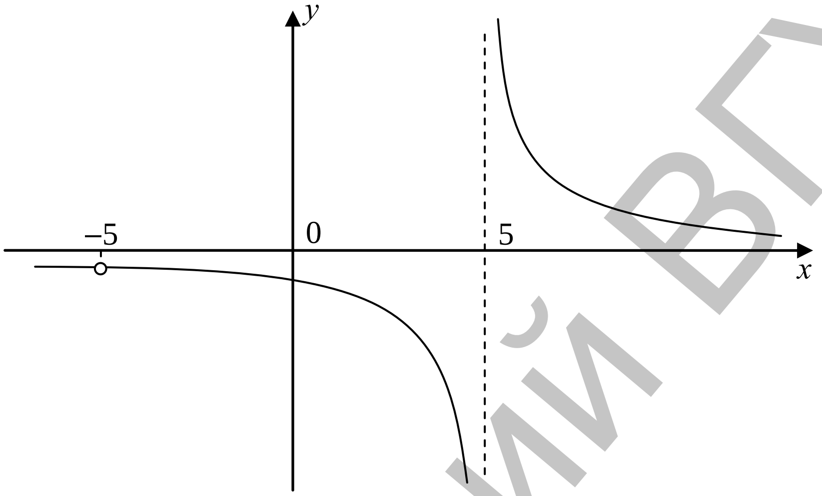


Рис. 3

***Замечание.*** Непрерывность функции $y=\dfrac{x+5}{x^2-25}$ в точке $x_1=3$ можно доказать также следующим образом.

Область определения функции:

$$D(f)=(-\infty,\ -5)\cup(-5,\ 5)\cup(5,\ +\infty).$$

Данная функция является дробно-рациональной, следовательно, элементарной. Значит, по свойству элементарных функций, она непрерывна на всей своей области определения. Точка принадлежит области определения функции, следовательно, функция непрерывна в этой точке.

**2**. ***Исследовать на непрерывность функцию*** $y=e^{\frac{1}{2-x}}$ ***в точках*** $x_1=2$, $x_2=3$. ***Определить вид точек разрыва***.

***Решение.***

Область определения данной функции:

$$D(f)=(-\infty,\ 2)\cup(2,\ +\infty).$$

Это сложная функция, являющаяся суперпозицией двух элементарных функций: $y = e^t$ и $t = \dfrac{1}{2-x}$, следовательно, функция $y = e^{\frac{1}{2-x}}$ также является элементарной, а, значит, непрерывной на промежутках $(-\infty, 2)$ и $(2, +\infty)$.

Рассмотрим точку $x_1 = 2$. В точке $x_1 = 2$ функция не определена, значит, это точка разрыва. Определим ее вид, для этого найдем односторонние пределы функции в точке $x_1 = 2$.

Так как $\lim\limits_{x \to 2-0} \dfrac{1}{2-x} = +\infty$, и функция $e^t \to +\infty$ при $t \to +\infty$, то $\lim\limits_{x \to 2-0} e^{\frac{1}{2-x}} = +\infty$.

Так как $\lim\limits_{x \to 2+0} \dfrac{1}{2-x} = -\infty$, и функция $e^t \to 0$ при $t \to -\infty$, то $\lim\limits_{x \to 2+0} e^{\frac{1}{2-x}} = 0$, т.е. точка $x_1 = 2$ – точка разрыва II рода.

Рассмотрим точку $x_2 = 3$. Так как точка $x_2 = 3$ принадлежит промежутку $(2, +\infty)$, то функция непрерывна в этой точке.

### *Задание №8*

***Исследовать на непрерывность функцию***

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-\frac{1}{x+1}}, & x \in (-\infty, \ -1) \\ |\operatorname{sgn} x|, & x \in [-1, \ +\infty) \end{cases}.$$

***Указать вид точек разрыва. Схематически изобразить график функции.***

### *Решение.*

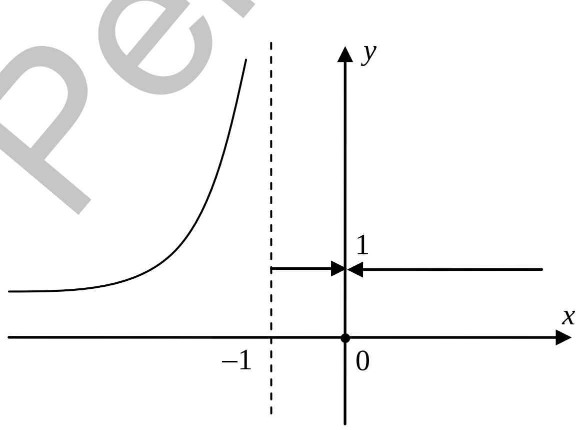


Рис. 4.

Преобразуем функцию, избавившись от знаков модуля и sgn:

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-\frac{1}{x+1}}, & x \in (-\infty, -1), \\ 1, & x \in [1, 0) \cup (0, +\infty), \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

На каждом из промежутков $(-\infty,1)$, $(-1,0)$, $(0,+\infty)$ данная функция является элементарной, а, значит, по свойству непрерывных функций она непрерывна. Исследуем точки стыка промежутков:

1) $x_1 = -1$: $\lim\limits_{x\to -1+0} f(x) = \lim 1 = 1$, $\lim\limits_{x\to -1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to -1-0} 2^{-\frac{1}{x+1}} = \infty$,

$f(-1) = 1$.

Так как левый предел функции в точке $x_1 = -1$ равен $+\infty$, то в этой точке функция имеет разрыв второго рода.

2) $x_2 = 0$: $\lim\limits_{x\to -0} f(x) = \lim\limits_{x\to +0} f(x) = 1$, $f(0) = 0$.

Так как оба односторонних предела существуют и равны между собой, то имеем точку устранимого разрыва.

График функции $f(x)$ изображен на рисунке 4.

## ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

1. Множества, основные операции над множествами.
2. Необходимость расширения множества рациональных чисел. Сечение Дедекинда на множестве рациональных чисел. Определение иррационального числа.
3. Представление действительных чисел десятичной дробью. Изображение действительных чисел на числовой прямой
4. Полнота множества действительных чисел. Теорема Дедекинда.
5. Границы числовых множеств. Теоремы о точных гранях числовых множеств.
6. Модуль действительного числа. Свойства модуля.
7. Числовые последовательности и их свойства.
8. Бесконечно большие и бесконечно малые числовые последовательности и их свойства.
9. Определение предела последовательности и его геометрический смысл.
10. Теорема о единственности предела последовательности.
11. Ограниченность сходящихся последовательностей.
12. Свойства пределов последовательностей.
13. Монотонные последовательности. Необходимый и достаточный признак сходимости монотонной последовательности (теорема Вейерштрасса).
14. Лемма о вложенных промежутках. Второй замечательный предел. Число e.
15. Лемма Больцано-Вейерштрасса.

16. Необходимый и достаточный признак сходимости числовой последовательности (критерий Коши).
17. Функции. Определение; свойства, способы задания; основные элементарные функции, их свойства и графики.
18. Определения предела функции
19. Свойства предела функции. Виды неопределенностей.
20. Бесконечно-большие и бесконечно-малые функции. Их свойства.
21. Первый и второй замечательные пределы.
22. Сравнение бесконечно малых функций. Эквивалентные бесконечно малые.
23. Определение непрерывности функции в точке и на отрезке. Арифметические операции над непрерывными функциями.
24. Непрерывность элементарных функций. Непрерывность сложной функции.
25. Классификация точек разрыва.
26. Теоремы о функциях, непрерывных на отрезке.
27. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора.

## Контрольная работа №2

## Задания к контрольной работе

1. ***Исходя из определения, найти производную функции.***

| вариант | | вариант | |
|---|---|---|---|
| 1. | $\sin(2x)$; | 11. | $\ln(7x\text{-}1)$; |
| 2. | $x^3–2x+1$; | 12. | $\sin\frac{x}{6}$; |
| 3. | $\cos\frac{x}{2}$; | 13. | $\cos(8x+2)$; |
| 4. | $\frac{3}{2x-1}$; | 14. | $\frac{1}{\sqrt[2]{x}}$; |
| 5. | $\ln(2x)$; | 15. | $\sin(5x)$; |
| 6. | $\sin\frac{x}{3}$; | 16. | $x^3+4x\text{-}2$; |
| 7. | $\cos(5x)$; | 17. | $\frac{1}{(2x-3)^2}$; |
| 8. | $(3-x)^2$; | 18. | $\frac{5}{x-1}$; |
| 9. | $\frac{1}{(x-1)^2}$; | 19. | $\cos\frac{x-1}{3}$; |
| 10. | $\frac{1}{\sqrt{x}}$; | 20. | $(4-2x)^2$. |

**2.** ***Составить уравнение касательной к графику функции f (x)***

| вариант | которая параллельна данной прямой | вариант | в точке с данной абсциссой |
|---|---|---|---|
| 1. | $f(x)=\ln\frac{x-1}{x^2}$, $y=0$; | 11. | $f(x) = x^2 - 7x + 3$, $x=4$; |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2. | $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$, $y = \frac{3}{4}x + 1$; | 12. | $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$, $x$=3; |
| 3. | $f(x)$=arctg$\sqrt{x}$, $y = \frac{1}{4}x - 2$; | 13. | $f(x) = x^3 + 3x + 2$, $x$=2; |
| 4. | $F(x) = x^2 - 2x$, $y = \frac{3-x}{2}$; | 14. | $f(x) = 3x^2 + 6x - 3$, $x$=1,5; |
| 5. | $f(x)$=tg $x$, 2$x$-$y$+3=0; | 15. | $f(x) = x^3 + x^2 + 1$, $x$=1; |
| 6. | $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$, $y$=5; | 16. | $f(x) = 3x^2 - 5x - 4$, $x$=2,3; |
| 7. | $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 1$, $x$+$y$+3=0; | 17. | $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - x$, $x$=2; |
| 8. | $f(x)$ = arcsin $x$, $2x - \sqrt{3}y + \sqrt{3} = 0$; | 18. | $f(x) = 2x^2 - 6x + 1$, $x$=2,4; |
| 9. | $f(x) = \frac{2x}{x-1}$, 2$x$ + $y$ = 5; | 19. | $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$, $x$=2; |
| 10. | $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$, $x$ – 2$y$+10 = 0; | 20. | $f(x) = 3x^3 + 2x^2$, $x$=1. |

**3.** ***Вычислить приближенное значение*** $\alpha$***, используя дифференциал:***

| вариант | | вариант | |
|---|---|---|---|
| 1. | $\alpha=(2{,}87)^5$; | 11. | $\alpha=\sqrt[5]{64}$; |
| 2. | $\alpha=\sqrt[3]{8{,}213}$; | 12. | $\alpha=\sqrt[3]{26{,}19}$; |
| 3. | $\alpha$=lg 99,9; | 13. | $\alpha=\sqrt[4]{16{,}64}$; |
| 4. | $\alpha=(1{,}91)^4$; | 14. | $\alpha=\sqrt{8{,}76}$; |
| 5. | $\alpha=\sqrt[4]{15{,}99}$; | 15. | $\alpha=(4{,}01)^{1{,}5}$; |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 6. | α=tg 46°; | 16. | α=cos 151°; |
| 7. | $\alpha = \sqrt{3{,}908}$ ; | 17. | α=cos 61°; |
| 8. | α=ctg 44°; | 18. | α=arctg 1,05°; |
| 9. | $\alpha = \sqrt{16{,}032}$ ; | 19. | $\alpha = \ln(e^2 + 0{,}2)$ ; |
| 10. | $\alpha = (3{,}018)^4$; | 20. | $\alpha = e^{0{,}25}$. |

### *3. Продифференцировать данные функции:*

| вариант | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1. | *a.* | $y = \sqrt[3]{3x^4 + 2x - 5} + \dfrac{4}{(x-2)^5}$; | *b.* | $y = \sin^3 2x \cdot \cos 8x^5$; |
| | *c.* | $y = \dfrac{e^{\arccos^3 x}}{\sqrt{x+5}}$; | *d.* | $y = (\mathrm{cth} 3x)^{\arcsin x}$; |
| 2. | *a.* | $y = \sqrt[3]{(x-3)^4} - \dfrac{3}{2x^3 - 3x + 1}$; | *b.* | $y = \cos^5 3x \cdot \mathrm{tg}(4x+1)^3$; |
| | *c.* | $y = \dfrac{(x-4)^2}{e^{\mathrm{arcctg} x}}$; | *d.* | $y = (\cos(x+2))^{\ln x}$; |
| 3. | *a.* | $y = \sqrt{(x-4)^5} + \dfrac{5}{(2x^2 + 4x - 1)^2}$; | *b.* | $y = \mathrm{tg}^4 x \cdot \arcsin 4x^5$; |
| | *c.* | $y = \dfrac{e^{-x^3}}{\sqrt{x^2 + 5x - 1}}$; | *d.* | $y = (\sin 3x)^{\arccos x}$; |
| 4. | *a.* | $y = \sqrt[5]{7x^2 - 3x + 5} - \dfrac{5}{(x-1)^3}$; | *b.* | $y = \arcsin^3 2x \cdot \mathrm{ctg} 7x^4$; |
| | *c.* | $y = \dfrac{e^{-\mathrm{ctg} 5x}}{(3x^2 - 4x + 2)}$; | *d.* | $y = (\mathrm{th}\ 5x)^{\arcsin(x+1)}$; |
| 5. | *a.* | $y = \sqrt[4]{3x^2 - x + 5} - \dfrac{3}{(x-5)^4}$; | *b.* | $y = \mathrm{ctg} 3x \cdot \arccos 3x^2$; |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | *c.* | $y=\dfrac{\sqrt{7x^3-5x+2}}{e^{\cos x}}$; | *d.* | $y=(\mathrm{sh}(x+2))^{\arcsin 2x}$; |
| 6. | *a.* | $y=\sqrt{3x^4-2x^3+x}-\dfrac{4}{(x+2)^3}$; | *b.* | $y=\arccos^2 4x\cdot\ln(x-3)$; |
| | *c.* | $y=\dfrac{e^{\mathrm{tg}3x}}{\sqrt{3x^2-x+4}}$; | *d.* | $y=(\cos 5x)^{\mathrm{arctg}\sqrt{x}}$; |
| 7. | *a.* | $y=\sqrt[3]{(x-7)^5}+\dfrac{5}{4x^2+3x-5}$; | *b.* | $y=\ln^5 x\cdot\mathrm{arctg}7x^4$; |
| | *c.* | $y=\dfrac{e^{\sin x}}{(x-5)^7}$; | *d.* | $y=(\sqrt{3x+2})^{\mathrm{arcctg}3x}$; |
| 8. | *a.* | $y=\sqrt[5]{(x+4)^6}-\dfrac{2}{2x^2-3x+7}$; | *b.* | $y=\mathrm{arctg}^3 4x\cdot 3^{\sin x}$; |
| | *c.* | $y=\dfrac{\sqrt[3]{2x^2-3x+1}}{e^{-x}}$; | *d.* | $y=(\ln(x+3))^{\sin\sqrt{x}}$; |
| 9. | *a.* | $y=\dfrac{3}{(x-4)^7}-\sqrt{5x^2-4x+3}$; | *b.* | $y=2^{\cos x}\cdot\mathrm{arcctg}5x^3$; |
| | *c.* | $y=\dfrac{\sqrt{x^3+4x-5}}{e^{x^3}}$; | *d.* | $y=(\log_2(x+4))^{\mathrm{ctg}7x}$; |
| 10. | *a.* | $y=\sqrt[3]{4x^2-3x-4}-\dfrac{2}{(x-3)^5}$; | *b.* | $y=4^{-x}\cdot\ln^5(x+2)$; |
| | *c.* | $y=\dfrac{e^{\mathrm{ctg}\,5x}}{(x+4)^3}$; | *d.* | $y=(\mathrm{sh}\,3x)^{\mathrm{arctg}\,(x+2)}$; |
| 11. | *a.* | $y=\dfrac{7}{(x-1)^3}+\sqrt{8x-3+x^2}$; | *b.* | $y=3^{\mathrm{tg}x}\cdot\arcsin 7x^4$; |
| | *c.* | $y=\dfrac{\sqrt{3+2x-x^2}}{e^x}$; | *d.* | $y=(\mathrm{ch}\,3x)^{\mathrm{ctg}\,1/x}$; |
| 12. | *a.* | $y=\sqrt[5]{3x^2+4x-5}-\dfrac{4}{(x-4)^4}$; | *b.* | $y=5^{x^2}\cdot\arccos 2x^5$; |
| | *c.* | $y=\dfrac{e^{3x}}{\sqrt{3x^2-4x-7}}$; | *d.* | $y=(\arcsin 5x)^{\mathrm{tg}\sqrt{x}}$; |
| 13. | *a.* | $y=\dfrac{7}{(x-1)^3}+\sqrt{8x-3+x^2}$; | *b.* | $y=\sin^4 3x\cdot\mathrm{arctg}2x^3$; |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | c. | $y=\frac{e^{-\sin 2x}}{(x+5)^4}$; | d. | $y=(\arccos 5x)^{\ln x}$; |
| 14. | a. | $y=\frac{3}{(x+2)^5}-\sqrt[7]{5x-7x^2-3}$; | b. | $y=\cos^3 4x\cdot \operatorname{arcctg}\sqrt{x}$; |
| | c. | $y=\frac{e^{\cos 5x}}{\sqrt{x^2-5x-2}}$; | d. | $y=(\operatorname{arctg} 2x)^{\sin x}$; |
| 15. | a. | $y=\sqrt[4]{(x-1)^5}-\frac{4}{7x^2-3x+2}$; | b. | $y=\operatorname{tg}^3 2x\cdot \arcsin x^5$; |
| | c | $y=\frac{(2x+5)^3}{e^{\operatorname{tg} x}}$; | d. | $y=(\ln(x+7))^{\operatorname{ctg} 2x}$; |
| 16. | a. | $y=\sqrt[5]{(x-2)^6}-\frac{3}{7x^3-x^2-4}$; | b. | $y=\operatorname{ctg}^7 x\cdot \arccos 2x^3$; |
| | c. | $y=\frac{e^{-\operatorname{tg} 3x}}{4x^2-3x+5}$; | d. | $y=(\operatorname{ctg}(7x+4))^{\sqrt{x+3}}$; |
| 17. | a. | $y=\frac{3}{(x+4)^2}-\sqrt[3]{4+3x-x^4}$; | b. | $y=e^{-\sin x}\operatorname{tg} 7x^6$; |
| | c. | $y=\frac{e^{-\sin 4x}}{(2x-5)^6}$; | d. | $y=(\operatorname{th}\sqrt{x+1})^{\operatorname{arctg} 2x}$; |
| 18. | a. | $y=\frac{2}{(x-1)^3}-\frac{8}{6x^2+3x-7}$; | b. | $y=e^{\cos x}\operatorname{ctg} 8x^3$; |
| | c. | $y=\frac{3x^2-5x+10}{e^{-x^4}}$; | d. | $y=\left(\operatorname{cth}\frac{1}{x}\right)^{\arcsin 7x}$; |
| 19. | a. | $y=\sqrt{1+5x-2x^2}+\frac{3}{(x-3)^4}$; | b. | $y=\cos^5 x\cdot \arccos 4x$; |
| | c. | $y=\frac{e^{-x}}{(2x^2-x+4)^2}$; | d | $y=(\cos(x+5))^{\arcsin 3x}$; |
| 20. | a. | $y=\sqrt[3]{5+4x-x^2}-\frac{5}{(x+1)^3}$; | b. | $y=\sin^3 7x\cdot \operatorname{arcctg} 5x^2$; |
| | c. | $y=\frac{e^{4x}}{(3x+5)^3}$; | d. | $y=(\sqrt{x+5})^{\arccos 3x}$. |

**4.** ***Найти*** $y'(x)$ ***и*** $y''(x)$***, если функция*** $y = f(x)$ ***задана a) неявно, b) параметрически.***

| вариант | *a* | *b* |
|---|---|---|
| 1 | $y^2 = 8x$; | $\begin{cases} x = (2t+3)\cos t, \\ y = 3t^3; \end{cases}$ |
| 2 | $x^2/5 + y^2/7 = 1$; | $\begin{cases} x = 2\cos^2 t, \\ y = 3\sin^2 t; \end{cases}$ |
| 3 | $y = x + \operatorname{arctg} y$; | $\begin{cases} x = 6\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t; \end{cases}$ |
| 4 | $x^2/5 + y^2/3 = 1$; | $\begin{cases} x = 1/(t+2), \\ y = (t/(t+2))^2; \end{cases}$ |
| 5 | $y^2 = 25x - 4$ | $\begin{cases} x = e^{-2t}, \\ y = e^{4t}; \end{cases}$ |
| 6 | $\operatorname{arcctg} y = 4x + 5y$; | $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \sqrt[5]{t}; \end{cases}$ |
| 7 | $y^2 - x = \cos y$; | $\begin{cases} x = 2t/(1+t^3), \\ y = t^2/(1+t^2); \end{cases}$ |
| 8 | $3x + \sin y = 5y$; | $\begin{cases} x = \sqrt{t^2-1}, \\ y = (t+1)/\sqrt{t^2-1}; \end{cases}$ |
| 9 | $\operatorname{tg} y = 3x + 5y$; | $\begin{cases} x = 4t + 2t^2, \\ y = 5t^3 - 3t^2; \end{cases}$ |
| 10 | $xy = \operatorname{ctg} y$; | $\begin{cases} x = (\ln t)/t, \\ y = t\ln t; \end{cases}$ |
| 11 | $y = e^y + 4x$; | $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t; \end{cases}$ |
| 12 | $\ln y - y/x = 7$; | $\begin{cases} x = t^4, \\ y = \ln t; \end{cases}$ |

| | | |
|---|---|---|
| 13 | $y^2 + x^2 = \sin y$; | $\begin{cases} x = 5\cos t, \\ y = 4\sin t; \end{cases}$ |
| 14 | $e^y = 4x - 7y$; | $\begin{cases} x = 5\cos^2 t, \\ y = 3\sin^2 t; \end{cases}$ |
| 15 | $4\sin^2(x+y) = x$; | $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \ln(1+t^2); \end{cases}$ |
| 16 | $\sin y = 7x + 3y$; | $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \sqrt{1-t^2}; \end{cases}$ |
| 17 | $\operatorname{tg} y = 4y - 5x$; | $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t); \end{cases}$ |
| 18 | $y = 7x - \operatorname{ctg} y$; | $\begin{cases} x = 3(\sin t - t\cos t), \\ y = 3(\cos t + t\sin t); \end{cases}$ |
| 19 | $xy - 6 = \cos y$; | $\begin{cases} x = \sin 2t, \\ y = \cos^2 t; \end{cases}$ |
| 20 | $3y = 7 + xy^3$; | $\begin{cases} x = e^{3t}, \\ y = e^{-3t}. \end{cases}$ |

**5.** ***Для данной функции*** $y = f(x)$ ***и аргумента*** $x_0$ ***вычислить*** $y'''(x_0)$.

| вариант | | вариант | |
|---|---|---|---|
| 1. | $y = \sin^2 x,\quad x_0 = \pi/2$; | 11. | $y = \arcsin x,\quad x_0 = 0$; |
| 2. | $y = \operatorname{arctg} x,\quad x_0 = 1$; | 12. | $y = (5x-4)^5,\quad x_0 = 2$; |
| 3. | $y = \ln(2+x^2),\quad x_0 = 0$; | 13. | $y = x\sin x,\quad x_0 = \pi/2$; |
| 4. | $y = e^x \cos x,\quad x_0 = 0$; | 14. | $y = x^2 \ln x,\quad x_0 = 1/3$; |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5. | $y = e^{x}\sin 2x,\quad x_0 = 0;$ | 15. | $y = x\sin 2x,\quad x_0 = -\pi/4;$ |
| 6. | $y = e^{-x}\cos x,\quad x_0 = 0;$ | 16. | $y = x\cos 2x,\quad x_0 = \pi/12;$ |
| 7. | $y = \sin 2x,\quad x_0 = \pi;$ | 17. | $y = x^4 \ln x,\quad x_0 = 1;$ |
| 8. | $y = (2x+1)^5,\quad x_0 = 1;$ | 18. | $y = x + \mathrm{arctg}x,\quad x_0 = 1;$ |
| 9. | $y = \ln(1+x),\quad x_0 = 2;$ | 19. | $y = \cos^2 x,\quad x_0 = \pi/4;$ |
| 10. | $y = \frac{1}{2}x^2 e^x,\quad x_0 = 0;$ | 20. | $y = \ln(x^2 - 4),\quad x_0 = 3.$ |

**6.** ***Решить следующие задачи.***

1. В равнобедренный треугольник с основанием 20 см и высотой 8 см вписан прямоугольник, одна из сторон которого лежит на основании треугольника. Какова должна быть высота прямоугольника, чтобы он имел наибольшую площадь?

2. Найти на оси Ох точку, сумма расстояний от которой до точек $M_1(1, 2)$ и $M_2(4, 3)$ имеет наименьшее значение.

3. В эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вписать прямоугольник наибольшей площади.

4. В данный конус, с радиусом основания *R* и высотой *H*, вписать цилиндр наибольшего объема.

5. Построить прямоугольный параллелепипед с квадратным основанием, который при заданной поверхности имел бы наибольший объем.

6. В данный шар радиуса *R* вписать конус наибольшего объема.

7. В данный шар радиуса *R* вписать цилиндр с наибольшей боковой поверхностью.

8. Проволоку длиной 1 согнуть в круговой сектор наибольшей площади.

9. Найти кратчайшее расстояние от точки $M_0(2,1)$ до кривой $y = 1 + \sqrt{2\ln x}$.

10. Найти размеры консервной банки объемом V с наименьшей поверхностью.

11. Найти наибольший объем конуса с данной образующей *l*.

12. Найти наименьший объем конуса, описанного около полушара радиуса *a*.

13. При каком наклоне боковых сторон равнобедренной трапеции ее площадь будет наибольшая, если меньшее основание трапеции равно *a*, а боковые стороны равны *b*.

14. Данное положительное число *a* разложить на два слагаемые так, чтобы их произведение было наибольшим.

15. Кусок проволоки данной длины *l* согнуть в виде прямоугольника так, чтобы площадь последнего была наибольшей.

16. Найти число, которое, будучи сложено со своим квадратом, дает наименьшую сумму.

17. Найти положительное число, которое, будучи сложено с обратным ему числом, дает наименьшую сумму.

18. Определить наибольшую площадь треугольника, вписанного в круг радиуса *a*.

19. Вырезанный из круга сектор с центральным углом $\alpha$ свернут в коническую поверхность. При каком значении угла $\alpha$ объем полученного конуса будет наибольшим?

20. Найти такое положительное число, чтобы разность между ним и его кубом была наибольшей.

### *7. Найти пределы с помощью правила Лопиталя*:

| вариант | *a* | *b* | *c* |
|---|---|---|---|
| 1. | $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{\ln x}$; | $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$; | $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\sin x)^{tgx}$; |
| 2. | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos x}{\cos x-1}$; | $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}-0}\left(tgx-\dfrac{1}{1-\sin x}\right)$; | $\lim\limits_{x\to +0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{tgx}$; |
| 3. | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$; | $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-ctg^2 x\right)$; | $\lim\limits_{x\to \infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}$; |
| 4. | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x-e^{-x}}$; | $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}6\left(\dfrac{x}{ctgx}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$; | $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{tgx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$; |
| 5. | $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{ctgx}{x}\right)$; | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$; | $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{1}{\ln\left(e^{-x}-1\right)}$; |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 6. | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\ln(1+x)}$; | $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$; | $\lim\limits_{x\to +0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$; |
| 7. | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x-\sin^{2}x}{x^{6}}$; | $\lim\limits_{x\to\infty}(\pi-2arctg\,x)\ln x$**;** | $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(tgx)^{ctgx}$**;** |
| 8. | $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2^{\ln x}-x}{\ln x}$; | $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-x^{2}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)$; | $\lim\limits_{x\to +0}(\cos x)^{x^{-1/2}}$; |
| 9. | $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{4x}-\dfrac{1}{2x\left(e^{x}+1\right)}\right)$<br>; | $\lim\limits_{x\to -1+0}\sqrt[3]{x+1}\,\ln^{2}(x+1)$; | $\lim\limits_{x\to +0}(\ln ctg\,x)^{tgx}$; |
| 10. | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-x}{x-\sin x}$**;** | $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x(x+1)}-\dfrac{\ln(1+x)}{x^{2}}\right)$<br>; | $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2^{\ln x}-x}{\ln x}$; |
| 11. | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x-2\arcsin}{x^{3}}$<br>**;** | $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{tg\,x}-\dfrac{1}{e^{x}-1}\right)$; | $\lim\limits_{x\to +0}(\ln ctgx)^{tgx}$**;** |
| 12. | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2x-\sin 2x}{x^{3}}$**;** | $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tg\,x+\dfrac{2}{2x-\pi}\right)$; | $\lim\limits_{x\to +\infty}(x+2^{x})^{\frac{1}{x}}$**;** |
| 13. | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^{3}}$**;** | $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\sin^{2}x}-\dfrac{1}{1-\cos x}\right)$<br>; | $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$**;** |
| 14. | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{chx-1}{1-\cos x}$**;** | $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{5}{x^{2}-x-6}\right)$<br>; | $\lim\limits_{x\to +0}(\ln ctg\,x)^{tg\,x}$**;** |
| 15. | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin 3x)}{\ln(\sin x)}$**;** | $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\,ctg\,x$; | $\lim\limits_{x\to 0}(ctgx)^{\sin x}$**;** |
| 16. | $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\sin\dfrac{\pi x}{2}}$**;** | $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\,tg\,\dfrac{\pi x}{2}$; | $\lim\limits_{x\to 0}(ctgx)^{\frac{1}{\ln x}}$**;** |
| 17. | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-arctgx}{x^{3}}$**;** | $\lim\limits_{x\to 0}\arcsin x\,ctg\,x$; | $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{tg\,x}$**;** |
| 18. | $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\left(e^{x-1}-1\right)}{\ln x}$**;** | $\lim\limits_{x\to +\infty}x^{n}e^{-x}$; | $\lim\limits_{x\to +\infty}(x)^{\frac{1}{x}}$**;** |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 19. | $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x - arctg\ x}{\ln(1+x^3)}$; | $\lim\limits_{x\to+\infty}(\pi - 2\,arc\ tg\ x)\ln x$; | $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$; |
| 20. | $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$; | $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(tg\ x - \sec x)$; | $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x}}$. |

**9.** ***Провести полное исследование и построить графики функций*:**

| вариант | *a* | *b* |
|---|---|---|
| 1 | $y=x^4-2x-3$; | $y=\dfrac{x-1}{x^2-2x}$; |
| 2 | $y=x^3(10-3x^2)$; | $y=x^2-\ln x$; |
| 3 | $y=\left(x^2-1\right)^3$; | $y=(x-1)\,e^{3x-1}$; |
| 4 | $y=(x^2-2x+3)^2$; | $y=x-\sqrt[3]{x^2}$; |
| 5 | $y=\left(x^2-4\right)^3$; | $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$; |
| 6 | $y=x-2\,x^4-1$; | $y=e^{2x-x^2}$; |
| 7 | $y=\left(x^3-1\right)^2$; | $y=\dfrac{x^2-x-1}{x^2-2x}$; |
| 8 | $y=3x^3-40x^2+240x$; | $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$; |
| 9 | $y=\dfrac{x^5+x^3}{5}+3x$; | $y=\dfrac{(x-3)^2}{4(x-1)}$; |
| 10 | $y=x^2(x^3-20)$; | $y=(x-5)\sqrt[3]{x^2}$; |

| | | |
|---|---|---|
| 11 | $y=(3x-5)^6$; | $y=x^2\ arctg\ x$; |
| 12 | $y=2x^4-x^2+1$; | $y = x \ln x$; |
| 13 | $y = 36\,x\,(x - 1)^3$; | $y = x^3\,e^{-4x}$; |
| 14 | $y = 32\,x^2\,(x^2 - 1)^3$; | $y = x^2\,e^{-x}$; |
| 15 | $y=x^2+\dfrac{1}{x^2}$; | $y=x^2e^{-x^2}$; |
| 16 | $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$; | $y=\ln\,(x^2+1)$; |
| 17 | $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$; | $y=x+\sin x$; |
| 18 | $y=\dfrac{x^3}{3-x^2}$; | $y = \ln\cos x$; |
| 19 | $y=\dfrac{x}{x^2-1}$; | $y = x\,e^{-x}$; |
| 20 | $y = x^3 - 3x^2$; | $y=x\sqrt{x+3}$. |

## Решение нулевого варианта

### Задание №1.

***Исходя из определения, найти производную функции $y = x\,(x^2 - 1)$.***

***Решение.***

Найдем приращение $\Delta f\,(x)$ функции при переходе из точки $x$ в точку $x+\Delta x$. Для этого найдем значения функции $f\,(x)$ в точках $x$ и $x+\Delta x$:

$$f(x) = x(x^2 - 1),\ f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)((x + \Delta x)^2 - 1),$$

тогда

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 - \Delta x + \Delta x^3.$$

Составим отношение $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x - 1 + \Delta x^2$.

По определению,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (3x^2 + 3x\Delta x - 1 + \Delta x^2) = 3x^2 - 1.$$

**Задание №2.**

***Составить уравнение той касательной к графику функции*** $y = x \ln x$, ***которая параллельна прямой*** $y = x - \dfrac{1}{2}$.

***Решение.***

Уравнение касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x_0$, имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

где $k = f'(x_0)$ – угловой коэффициент касательной. Так как искомая касательная параллельна прямой $y = x - \dfrac{1}{2}$, то угловые коэффициенты этих прямых равны. У данной прямой угловой коэффициент $k_1 = 1$, следовательно, угловой коэффициент касательной тоже равен 1. Получаем уравнение $f'(x_0) = 1$ из которого можем найти абсциссу $x_0$ точки касания.

Для этого находим производную функции $y = x \ln x$:

$$y' = (x \ln x)' = \ln x + 1,$$

следовательно,

$$f'(x_0) = \ln x_0 + 1.$$

Решаем уравнение $\ln x_0 + 1 = 1$ или $\ln x_0 = 0$, получаем, что $x_0 = 1$, $f(x_0) = 0$.

Подставляем полученные значения в уравнение касательной, тогда уравнение искомой касательной имеет вид $y = x - 1$.

**Задание №3.**

***Вычислить приближенно с помощью дифференциала*** $\alpha = (2,02)^5$.

***Решение.***

Подберем функцию $f(x)$ так, чтобы $\alpha$ было значением $f(x)$ в некоторой точке $x_1$: если $f(x) = x^5$, то $x_1 = 2{,}02$. Значение $f(x)$ легко найти в точке $x_0=2$.

Воспользуемся формулой приближенных вычислений:

$$f(x_1) \approx f(x_0) + d\,f(x_0),$$

тогда,

$$f(x_0) = 2^5 = 32, \quad d\,f(x) = f'(x)\,dx = 5x^4(x_1 - x_0),$$

$$d\,f(x_0)=5\cdot 2^4\cdot 0{,}02=1{,}6.$$

Таким образом, $\alpha \approx 32 + 1{,}6 = 33{,}6$.

**Задание № 4.**

***Продифференцировать данные функции:***

$а)\ y=\dfrac{3}{(x+5)^2}+\sqrt[3]{2x^3+5x+1}$, $б)\ y=\sin^4 5x\cdot\operatorname{arctg}(2x^3)$, $в)\ y=\dfrac{e^{\operatorname{tg}4x}}{(5x\text{-}8)^3}$.

***Решение.***

$а)\ y=\dfrac{3}{(x+5)^2}+\sqrt[3]{2x^3+5x+1}$.

Воспользуемся тем, что $(u+v)'=u'+v'$, $(f(u(x)))'=f'_u\cdot u'(x)$, а также формулой дифференцирования степенной функции $(u^\alpha)'=\alpha u^{\alpha-1}\cdot u'$. Тогда

$$y'=\left(\frac{3}{(x+5)^2}\right)'+\left(\sqrt[3]{2x^3+5x+1}\right)'=(3(x+5)^{-2})'+((2x^3+5x+1)^{1/3})'=$$

$$=-6(x+5)^{-3}(x+5)'+\frac{1}{3}(2x^3+5x+1)^{-2/3}(2x^3+5x+1)'=$$

$$=-\frac{6}{(x+5)^3}+\frac{6x^2+5}{3\sqrt[3]{(2x^3+5x+1)^2}}.$$

$б)\ y=\sin^4 5x\cdot\operatorname{arctg}(2x^3)$.

Воспользуемся формулой $(u\cdot v)'=u'v+uv'$. Тогда

$$y'=(\sin^4 5x\cdot\operatorname{arctg}(2x^3))'=(\sin^4 5x)'\operatorname{arctg}(2x^3)+\sin^4 5x(\operatorname{arctg}(2x^3))'=$$

$$=4\sin^3 5x(\sin 5x)'\operatorname{arctg}(2x^3)+\sin^4 5x\frac{1}{1+4x^6}(2x^3)'=$$

$$=20\sin^3 5x\cos 5x\operatorname{arctg}2x^3+\frac{6x^2\sin^4 5x}{1+4x^6}.$$

*в*) $y=\dfrac{e^{\operatorname{tg}4x}}{(5x\text{-}8)^3}$. Так как $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$, то

$$y'=\left(\frac{e^{\operatorname{tg}4x}}{(5x\text{-}8)^3}\right)' = \frac{(e^{\operatorname{tg}4x})'(5x-8)^3-e^{\operatorname{tg}4x}((5x-8)^3)'}{(5x\text{-}8)^6} =$$

$$=\frac{e^{\operatorname{tg}4x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 4x}\cdot 4(5x-8)^3-e^{\operatorname{tg}4x}\cdot 3(5x-8)^2\cdot 5}{(5x\text{-}8)^6} = \frac{e^{\operatorname{tg}4x}\left(\dfrac{4(5x-8)}{\cos^2 4x}-15\right)}{(5x\text{-}8)^4}.$$

## Задание № 5.

***а) Найти*** $y'(x)$ и $y''(x)$, ***если функция*** $y=f(x)$ ***задана неявно уравнением*** $x^4y^2+y^3=3x^2$,

### *Решение.*

Рассмотрим функцию, заданную неявно уравнением $x^4y^2+y^3=3x^2$. Продифференцируем обе части данного равенства, полагая, что $y=f(x)$ (в этом случае $(y^2)'=2yy'$, $(y^3)'=3y^2y'$).

Получаем $(x^4y^2)'+(y^3)'=3(x^2)'$, $4x^3y^2+2x^4yy'+3y^2y'=6x$. Выражаем $y'$: $y'=\dfrac{6x-4x^3y^2}{2x^4y+3y^2}$.

Теперь продифференцируем обе части предыдущего равенства:

$$12x^2y^2+8x^3yy'+8x^3yy'+2x^4(y')^2+2x^4yy''+6y(y')^2+3y^2y''=6.$$

Тогда

$$(2x^4y+3y^2)y''+(2x^4+6y)\cdot\left(\frac{6x-4x^3y^2}{2x^4y+3y^2}\right)^2+$$

$$+16x^3y\cdot\frac{6x-4x^3y^2}{2x^4y+3y^2}=6-12x^2y^2.$$

$$y''=\frac{6x-4x^3y^2}{2x^4y+3y^2}-\frac{(2x^4+6y)(6x-4x^3y^2)^2}{(2x^4y+3y^2)^3}-\frac{32x^4y(3-2x^2y^2)}{(2x^4y+3y^2)^2}.$$

***б) Найти*** $y'(x)$ и $y''(x)$, ***если функция*** $y=f(x)$ ***задана параметрически системой уравнений*** $\begin{cases}x=5t^3+1,\\ y=4t^2-1.\end{cases}$

### *Решение.*

Производная функции заданной параметрически системой уравнений $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$ находится по формуле $y'_x = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$.

В нашем случае $x'(t) = (5t^3 + 1)' = 15t^2$ , $y'(t) = (4t^2 - 1)' = 8t$, поэтому $y'_x = \dfrac{8t}{15t^2} = \dfrac{8}{15t}$.

$$y''_{x^2} = \left(\frac{8}{15t}\right)' = -\frac{8}{15}\cdot\frac{1}{t^2}\cdot t' = -\frac{8}{15t}\cdot\frac{1}{15t^2} = -\frac{8}{225t^4}.$$

### Задание № 6.

***Найти*** $y'''\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$, ***если*** $y = 5 - 4\cos^2 x$.

### *Решение.*

Последовательно находим первую и вторую производные функции $y = 5 - 4\cos^2 x$:

$$y' = 8\cos x \sin x = 4\sin 2x;$$

$$y'' = 8\cos 2x;$$

$$y''' = -16\sin 2x.$$

Находим значение второй производной функции в точке $x = \dfrac{\pi}{6}$:

$$y'''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -16\sin\frac{\pi}{3} = -16\frac{\sqrt{3}}{2} = -8\sqrt{3}.$$

### Задание №7.

***Найти высоту конуса наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса R.***

### *Решение.*

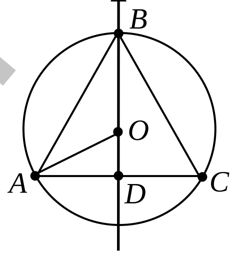


Рис. 5

Обозначим высоту конуса $BD$ через $x$ (рис. 5). Так как $OB = R$, то $OD = x - R$, $AD^2 = R^2 - (x - R)^2 = 2Rx - x^2$.

Объем конуса определяется по формуле $V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot AD^2 \cdot BD$, следовательно, получаем

$$V(x) = \frac{1}{3}\pi(2Rx - x^2)x = \frac{1}{3}\pi(2Rx^2 - x^3), \quad \text{где } 0 < x < 2R,$$

т.е. объем конуса является функцией, зависящей от переменной $x$. Задача сводится к нахождению наибольшего значения данной функции на интервале $(0, 2R)$.

Найдем производную функции $V(x)$:

$$V'(x) = \frac{1}{3}\pi(4Rx - 3x^2) = \frac{1}{3}\pi\, x(4R - 3x).$$

Так как $V'(x) = 0$ при $x = 0$ и $x = \frac{4R}{3}$, то $x = \frac{4R}{3}$ – критическая точка функции, принадлежащая интервалу $(0, 2R)$.

Так как $V(0) = 0$, $V(2R) = 0$, $V(\frac{4R}{3}) = \frac{32}{81}\pi R^3$, то наибольшее значение функции $V(x)$ достигается в точке $x = \frac{4R}{3}$.

Следовательно, высота конуса наибольшего объема, вписанного в шар радиуса $R$, равна $\frac{4R}{3}$.

**Задание №8.**

***Найти пределы, используя правило Лопиталя*:**

*а*) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to+0}\left(\frac{1}{tgx} - \frac{1}{x}\right)$; с) $\lim\limits_{x\to1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

***Решение.***

*а*) Рассмотрим $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}$. Так как под знаком предела имеет место неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, то для нахождения этого предела применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{\left(x^2\right)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(2x)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2} = +\infty.$$

*b*) ) Рассмотрим $\lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{1}{tgx}-\dfrac{1}{x}\right)$. Под знаком предела имеет место неопределенность $(\infty-\infty)$. Преобразуем ее к неопределенности вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, а затем применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{tgx}-\frac{1}{x}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to+0}\frac{x-tgx}{xtgx}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to+0}\frac{(x-tgx)'}{(xtgx)'}=$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{1-\dfrac{1}{\cos^2 x}}{tgx+\dfrac{x}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to+0}\frac{\cos^2 x-1}{\sin x\cdot\cos x+x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{(\cos^2 x-1)'}{(\sin x\cdot\cos x+x)'}=\lim_{x\to+0}\frac{-2\sin x\cdot\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x+1}=\frac{0}{2}=0.$$

*c*) Найдем предел $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}$. Под знаком предела стоит неопределенность вида $\left(1^{\infty}\right)$. Для раскрытия этой неопределенности обозначим данный предел: $a=\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}$. Найдем

$$\ln a=\ln\left(\lim_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}\right)=\lim_{x\to1}\ln x^{\frac{1}{1-x}}=$$

$$=\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}\ln x\right)=\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{1-x}==\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to1}\frac{(\ln x)'}{(1-x)'}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{-1}=-1.$$

Тогда $\ln a=-1$, следовательно, $a=e^{-1}$.

## Задание №9.

***Провести полное исследование и построить график функции:***

*a*) $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$, *b*) $y=\ln\dfrac{x}{x+5}-1$.

### *Решение.*

*a*) Проведем полное исследование и построим график функции $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$. Исследование функции будем проводить, придерживаясь схемы, изложенной в [7].

1. Функция определена, если $x + 1 \neq 0$, следовательно, область определения данной функции:

$$D(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty).$$

2. Так как область определения функции не симметрична относительно начала координат, то данная функция не может быть четной, нечетной и периодической. Поэтому исследование будем проводить на всей числовой прямой.

3. Функция $f(x)$ элементарная функция, следовательно, она непрерывна на всей области определения. Точка разрыва: $x = -1$.

4. Найдем пределы функции на концах области определения и исследуем функцию на наличие асимптот.

Исследуем поведение функции при $x \to \pm\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{(x^3)'}{(2(x+1)^2)'} = \lim_{x\to-\infty} \frac{6x^2}{4(x+1)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{12x}{4} = -\infty.$$

(Для нахождения этого предела мы воспользовались правилом Лопиталя).

Аналогично находится предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{2(x+1)^2} = +\infty$.

Найдем левый и правый пределы функции в точке разрыва $x = -1$:

$$\lim_{x\to-1-0} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty, \quad \lim_{x\to-1-0} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty.$$

Так как эти пределы бесконечны, то точка $x = -1$ – точка разрыва второго рода, а прямая $x = -1$ является вертикальной асимптотой.

График функции имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$, если существуют конечные пределы^ $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx)$.

Найдем эти пределы, раскрывая неопределенность $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ с помощью правила Лопиталя.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{2x(x+1)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{2(x+1)^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x^2)'}{(2(x+1)^2)'} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{4(x+1)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{(x+1)^2}-\frac{x}{2}\right)=.$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-x}{2(x+1)^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{(-2x^2-x)'}{(2(x+1)^2)'}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-4x-1}{4(x+1)}=$$

$$=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(-4x-1)'}{(4(x+1))'}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-4}{4}=1.$$

Следовательно, прямая $y= x/2 - 1$ является наклонной асимптотой графика функции.

5. Исследуем функцию с помощью первой производной.

$$y' = \frac{3x^2\cdot 2(x+1)^2 - x^3\cdot 4(x+1)}{4(x+1)^4}=\frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}.$$

Производная определена для всех значений переменной $x$ из области определения функции.

Так как $y' = 0$ при $x = -3$, и $x = 0$, то $x = -3$ и $x = 0$ – критические точки данной функции.

На числовой прямой отмечаем критические точки функции и точку разрыва $x = -1$, и определяем знаки производной на каждом из полученных интервалов. Результаты исследования записываем в таблицу.

| $x$ | $(-\infty, -3)$ | $-3$ | $(-3, -1)$ | $-1$ | $(-1, 0)$ | $0$ | $(0, +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | – | не существует | + | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | $-27/8$ max | ↘ | не существует | ↗ | 0 | ↗ |

6. Исследуем функцию с помощью второй производной.

$$y'' = \left(\frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}\right)' = \frac{3x}{(x+1)^4}.$$

Она определена для всех $x \in D(y)$.

Так как $y'' = 0$ при $x = 0$, то аналогично п.5 числовую прямую разбиваем точками $x = 0$ и $x = -1$ на интервалы, на которых определяем знаки второй производной функции. Результаты исследования записывают в таблицу.

| $x$ | $(-\infty, -1)$ | $-1$ | $(-1, 0)$ | $0$ | $(0, +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | – | не существует | – | 0 | + |
| $f(x)$ | График выпуклый | не существует | График выпуклый | 0 т. перегиба | График вогнутый |

График функции изображен на рисунке 6.

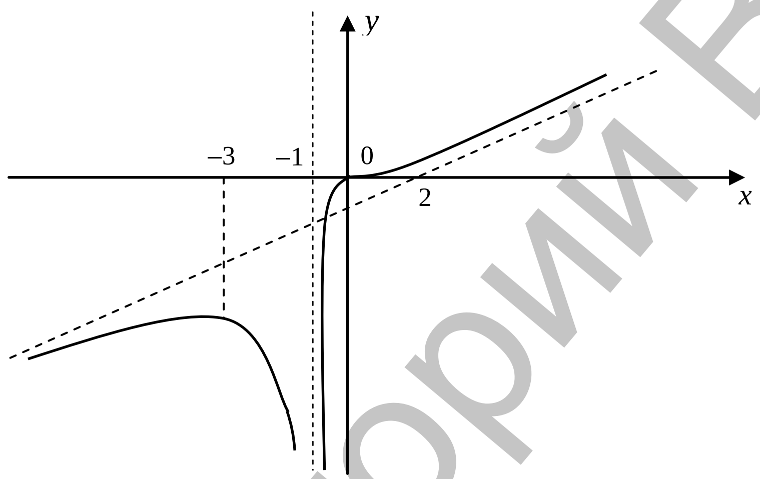


Рис. 6

*b*) $y = \ln\dfrac{x}{x+5} - 1.$

Исследование функции будем проводить, придерживаясь схемы аналогичной схеме из задачи *a*).

1. Найдем область существования функции D ($y$). Она определяется из неравенства $\dfrac{x}{x+5} > 0$, решением которого является объединение интервалов $(-\infty, -5) \cup (0, +\infty)$. Поэтому D ($y$) = $(-\infty, -5) \cup (0, +\infty)$.

2. Уже из 1 пункта видно, что функция не может быть ни четной, ни нечетной, ни периодической, поэтому исследование будем проводить во всей области существования.

3. Функция $f(x)$ непрерывна как элементарная на всей области определения D ($y$).

4. Найдем пределы функции на концах области определения и исследуем функцию на наличие асимптот.

$$\lim_{x \to +\infty}\left(\ln\frac{x}{x+5} - 1\right) = -1, \quad \lim_{x \to -\infty}\left(\ln\frac{x}{x+5} - 1\right) = -1.$$

Исследуем, есть ли у функции вертикальные асимптоты, для этого изучим поведение функции при $x \to -5-0$ и $x \to +0$.

$$\lim_{x \to +0}\left(\ln\frac{x}{x+5}-1\right)=-\infty, \quad \lim_{x \to -5-0}\left(\ln\frac{x}{x+5}-1\right)=+\infty.$$

Таким образом, прямые $x = -5$ и $x = 0$ являются вертикальными асимптотами графика функции.

Найдем наклонные асимптоты по формуле $y = kx + b$, где

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}, \quad b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx).$$

Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x+5}=1$, то

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\left(\ln\frac{x}{x+5}-1\right)=0, \quad b=\lim_{x\to\infty}\left(\ln\frac{x}{x+5}-1\right)=-1.$$

Следовательно, прямая $y=-1$ является наклонной (горизонтальной) асимптотой графика при $x\to\pm\infty$.

5. Исследуем функцию с помощью первой производной, т.е найдем промежутки монотонности функции и точки экстремума.

Производная функции: $f'(x)=\frac{5}{x(x+5)}$.

Так как производная не равна нулю для всех $x$ из области определения, то критических точек функция не имеет. Следовательно, функция не имеет точек экстремума.

На интервалах $(-\infty,-5)$ и $(0, +\infty)$ для производной функции выполняется неравенство $f'(x)>0$, значит, функция возрастает на этих интервалах.

6. Исследуем функцию с помощью второй производной. Найдем промежутки выпуклости, вогнутости и точки перегиба.

Для этого найдем вторую производную функции:

$$f''(x)=-\frac{5(2x+5)}{x^2(x+5)^2}.$$

Вторая производная равна нулю при $x_1=-\frac{5}{2}$ и не существует в точках $x_2 = 0$ и $x_3 = -5$. Ни одна из них не принадлежит области определения, поэтому точек перегиба функция не имеет.

На интервале $(-\infty, -5)$ вторая производная функции удовлетворяет неравенству $f''(x) > 0$, поэтому на данном интервале функция $f(x)$ вогнута.

На интервале $(0,+\infty)$ выполняется неравенство $f''(x)<0$, поэтому на данном интервале функция $f(x)$ выпукла.

7. Найдем точки пересечения графика с осями координат.

Так как точка $x=0$ не принадлежит области определения функции, то, график функции не пересекается с осью *ОУ*.

Пусть $y=0$, тогда $\ln\dfrac{x}{x+5}-1=0$, $\dfrac{x}{x+5}=e$, $x=-\dfrac{5e}{e-1}\approx-7{,}9$.

Следовательно, точка $M_1\left(-\dfrac{5e}{e-1},0\right)$ – точка пересечения с осью *ОХ*.

Для более точного построения графика функции найдем дополнительную точку в правой части графика.

Пусть $y=-2$, тогда $\ln\dfrac{x}{x+5}-1=-2$, $x=\dfrac{5}{e-1}\approx 2{,}9$, $M_2\left(\dfrac{5}{e-1},-2\right)$.

График функции изображен на рисунке 7.

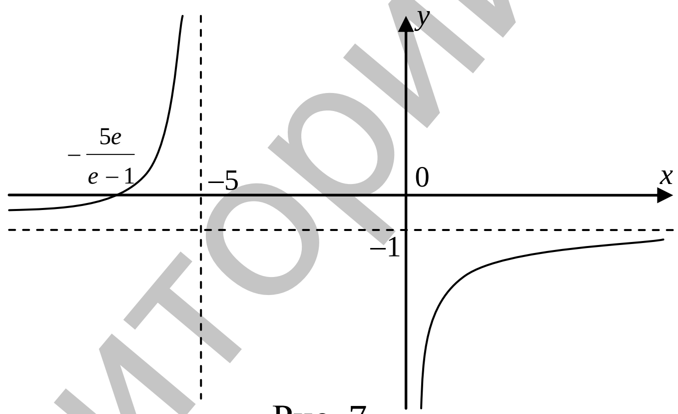


Рис. 7.

## ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

1.Задачи, приводящие к понятию производной. Определение производной, ее геометрический и физический смысл.

2. Связь производной функции с непрерывностью функции.

3. Правила нахождения производных.

4. Производные элементарных функций ($y=x^n$, $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\log_a x$.)

5. Понятие обратной функции и ее производной. Функции $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arctg} x$, $y=\operatorname{arcctg} x$. Производные этих функций.

6. Производная сложной функции. Логарифмическая производная функции. Производная функции $y=x^{\alpha}$.

7. Производная функции, заданной параметрически. Производная функции, заданной неявно.

8.Определение дифференцируемой функции. Связь дифференцируемости функции с существованием производной функции.

9. Дифференциал функции.

10. Производные и дифференциалы высших порядков. Физический смысл второй производной.

11. Теорема Ферма, ее геометрический смысл.

12. Теорема Ролля, ее геометрический смысл.

13. Теоремы Лагранжа и Коши.

14. Формула Тейлора для функции $y = f(x)$. Формы остаточного члена в формуле Тейлора. Формула Маклорена.

15. Разложение функций по формуле Маклорена. ($y = e^x$, $y = \ln(1+ x)$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = (1 + x)^{\alpha}$.)

16. Правило Лопиталя.

17. Условие постоянства и условие монотонности функции на интервале.

18. Экстремум функции. Необходимое условие экстремума. Достаточные условия экстремума функции.

19. Промежутки выпуклости, вогнутости графика функции. Достаточные условия выпуклости, вогнутости функции.

20. Асимптоты графика функции.

21. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

22. Исследование функции с помощью дифференциального исчисления.

# СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


**Основная литература**

1. Ильин В.А., Позняк Э.Т.. Основы математического анализа. Ч.1.–.М. Наука, 1982.
2. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов ВЛ. К. Математический анализ. Т.1.– М. Наука, 1979.
3. Никольский С.М. Курс математического анализа. Т.1. – М. Наука, 1990.
4. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.1.– М. Наука, 1989.
5. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т.1.– Физматгиз., 1960.
6. Иванова Ж.В., Сурин Т.Л., Шерегов С.В. Математический анализ. Введение в анализ. Производная. Из-во УО «ВГУ им. П.М. Машерова», 2008.
7. Иванова Ж.В., Сурин Т.Л., Шерегов С.В. Математический анализ. Применение дифференциального исчисления. Интегральное исчисление функций одной переменной. Из-во УО «ВГУ им. П.М. Машерова», 2009

**Дополнительная литература**

1. Гусак А.А., Гусак Г.М. Справочник по высшей математике. Мн. Навука і тэхніка, 1991.
2. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. М. Высшая школа, 1986.
3. Бутузов В.Ф. Математический анализ в вопросах и задачах. М. Физматгиз., 2001.
4. Учебно-методический комплекс по специальным дисциплинам для студентов математического факультета заочной формы обучения. Ч.1. Из-во УО «ВГУ им. П.М. Машерова», 2005.