Сибирский математический журнал
Июль—август, 2021. Том 62, № 4

УДК 512.542

ОТДЕЛИМЫЕ РЕШЕТКИ КРАТНО σ–ЛОКАЛЬНЫХ ФОРМАЦИЙ

Н. Н. Воробьев, И. И. Стаселько, А. Ходжагулыев

Аннотация. Пусть $n > 0$ и $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ — некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$. Доказано, что решетка всех n-кратно σ-локальных формаций индуктивна и $\mathfrak{G}$-отделима.

DOI 10.33048/smzh.2021.62.402

Ключевые слова: конечная группа, формация групп, формационная σ-функция, n-кратно σ-локальная формация, решетка формаций, индуктивная решетка формаций, отделимая решетка формаций.

Введение

Все рассматриваемые группы конечны. Следуя Л. А. Шеметкову [1], символом σ будем обозначать некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, т. е. $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, где $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$. Если n — целое число, то символом $\pi(n)$ обозначается множество всех простых чисел, делящих n; $\sigma(n) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n) \neq \varnothing\}$; $\sigma(G) = \sigma(|G|)$; $\sigma(\mathfrak{F}) = \bigcup_{G \in \mathfrak{F}} \sigma(G)$.

Формацией называется класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Непустая совокупность формаций Θ называется *полной решеткой формаций* [2], если пересечение любой совокупности формаций из Θ снова принадлежит Θ и в множестве Θ имеется такая формация $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$ для всех формаций $\mathfrak{M} \in \Theta$.

В теории формаций особую роль играют так называемые локальные формации и их естественные обобщения (ω-локальные формации [3], ω-композиционные формации [4], σ-локальные формации [5] и Бэра-σ-локальные формации, введенные в [6]).

Напомним определение σ-локальной формации, введенной в [5] в ходе разработки методов изучения σ-свойств групп [7–9].

Пусть f — произвольная функция вида

$$f : \sigma \to \{\text{формации групп}\}, \tag{1}$$

называемая *формационной σ-функцией*. Следуя [5], функции f сопоставим класс групп

$$LF_\sigma(f) = (G \mid G = 1 \text{ или } G \neq 1 \text{ и } G/F_{\sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \text{ для всех } \sigma_i \in \sigma(G)).$$

Работа выполнена при поддержке Государственной программы научных исследований Республики Беларусь «Конвергенция-2025» (№ государственной регистрации 20210495).

В этом определении $F_{\sigma_i}(G)$ обозначает наибольшую нормальную σ_i'-замкнутую подгруппу группы G.

Если для некоторой формационной σ-функции f вида (1) имеет место $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, то $\mathfrak{F}$ называется *σ-локальной формацией* с *σ-локальным заданием* f (см. [5]). Формационная σ-функция называется *внутренней*, если $f(\sigma_i) \subseteq LF_\sigma(f)$ для всех i. Заметим, что ввиду [10, гл. IV, теорема 3.2] (см. также [11, гл. 2]) в случае, когда $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \dots\}$, формационная σ-функция и σ-локальная формация являются соответственно формационной функцией и локальной формацией в обычном смысле [10, гл. IV, определение 3.1]. При этом вместо символа $LF_\sigma(f)$ используют символ $LF(f)$ (см. [10, гл. IV, определение 3.1]).

Всякая формация считается 0-*кратно σ-локальной.* При $n \geq 1$ формация $\mathfrak{F}$ называется *n-кратно σ-локальной*, если либо $\mathfrak{F} = (1)$ совпадает с классом единичных групп, либо $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, где все значения f являются $(n-1)$-кратно σ-локальными формациями для всех $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$ (см. [5]). Следует отметить, что относительно включения $\subseteq$ множество всех n-кратно σ-локальных формаций l_n^σ образует полную решетку (см. [12, следствие 2.5]).

В [2, 11, 13–15] показано, что конструкции и результаты общей теории решеток являются полезным инструментом при изучении групп и формаций групп. В 1986 г. А. Н. Скибой [16] установлена модулярность решетки всех (локальных) формаций. В дальнейшем этот результат получил развитие в различных направлениях. Одно из таких направлений посвящено изучению решеточных свойств индуктивности и отделимости.

Для произвольной полной решетки формаций Θ символом Θ^{σ_l} обозначается совокупность всех таких формаций, которые обладают σ-локальным Θ-значным заданием, т. е. таким σ-локальным заданием, все непустые значения которого принадлежат Θ. Нетрудно показать, что Θ^{σ_l} — полная решетка формаций (см. замечание после леммы 1.1).

Пусть Θ — полная решетка формаций. Тогда верхняя грань произвольной совокупности $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\}$ элементов из Θ^{σ_l} обозначается через $\vee_{\Theta^{\sigma_l}}(\mathfrak{F}_j \mid j \in J)$. Решетка Θ^{σ_l} называется *индуктивной* [2, разд. 4.1], если для любого набора $\{\mathfrak{F}_j = LF_\sigma(f_j) \mid j \in J\}$ формаций $\mathfrak{F}_j \in \Theta^{\sigma_l}$ и для всякого набора $\{f_j \mid j \in J\}$ σ-локальных Θ-значных заданий f_j, где f_j — внутреннее σ-локальное задание формации $\mathfrak{F}_j$, имеет место

$$\vee_{\Theta^{\sigma_l}}(\mathfrak{F}_j \mid j \in J) = LF_\sigma(\vee_\Theta(f_j \mid j \in J)),$$

где символ $\vee_\Theta(f_j \mid j \in J)$ обозначает такое σ-локальное задание f, что $f(\sigma_i)$ является верхней гранью для $\{f_j(\sigma_i) \mid j \in J\}$ в Θ, если $\bigcup\limits_{j \in J} f_j(\sigma_i) \neq \varnothing$, и $f(\sigma_i) = \varnothing$ в противном случае. Заметим, что индуктивность решетки Θ^{σ_l} по существу означает, что исследование операции $\vee_{\Theta^{\sigma_l}}$ на множестве Θ^{σ_l} можно редуцировать к исследованию более простой операции $\vee_\Theta$ на множестве Θ.

Впервые индуктивные решетки начал изучать А. Н. Скиба (см. [2, гл. 4]), который доказал индуктивность решетки всех функторно замкнутых n-кратно локальных формаций [2, теорема 4.1.1]. В [17] была установлена индуктивность решетки всех функторно замкнутых тотально локальных формаций, что нашло приложение в работах В. Г. Сафонова [18, 19] при доказательстве модулярности и дистрибутивности решетки всех тотально локальных формаций. Впоследствии Н. Н. Воробьевым и А. А. Царевым [20, 21] и независимо П. А. Жизневским [22] была доказана индуктивность решетки всех функторно замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций. Этот результат позволил установить модулярность такой решетки [20, 22], а также сыграл ключевую роль в исследовании тождеств решеток формаций [23]. В [24] доказана индуктивность решетки всех τ-замкнутых тотально композиционных формаций. Индуктивность решетки всех τ-замкнутых тотально ω-локальных формаций установлена в [25]. Отметим, наконец, что свойство индуктивности решетки всех разрешимых тотально локальных формаций применялось Райфершейд в [26, предложение 3.3] при доказательстве дистрибутивности этой решетки.

Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторый непустой класс групп. Полная решетка формаций Θ называется *$\mathfrak{X}$-отделимой* [2, разд. 4.1], если для любого терма $\xi(x_1, \dots, x_m)$ сигнатуры $\{\cap, \vee_\Theta\}$, любых формаций $\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_m$ из Θ и любой группы $A \in \mathfrak{X} \cap \xi(\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_m)$ найдутся такие $\mathfrak{X}$-группы $A_1 \in \mathfrak{F}_1, \dots, A_m \in \mathfrak{F}_m$, что

$$A \in \xi(\Theta\,\mathrm{form}(A_1), \dots, \Theta\,\mathrm{form}(A_m)).$$

Будем использовать $\Theta\,\mathrm{form}(\mathfrak{X})$ для обозначения пересечения всех формаций из Θ, содержащих совокупность групп $\mathfrak{X}$, в частности, писать $\Theta\,\mathrm{form}(G)$ в случае, когда $\mathfrak{X} = \{G\}$.

Отделимые решетки формаций начали изучаться А. Н. Скибой [2]. В частности, в [2] установлено, что решетка всех функторно замкнутых n-кратно локальных формаций $\mathfrak{G}$-отделима, а решетка всех разрешимых тотально локальных формаций $\mathfrak{S}$-отделима (см. также [27]). В. Го и А. Н. Скиба [28] доказали $\mathfrak{G}$-отделимость решетки всех n-кратно ω-локальных формаций, а Л. А. Шеметков, А. Н. Скиба и Н. Н. Воробьев [29] — $\mathfrak{G}$-отделимость решетки τ-замкнутых n-кратно ω-локальных формаций. В дальнейшем В. Г. Сафоновым [30] была установлена $\mathfrak{G}$-отделимость решетки τ-замкнутых тотально локальных формаций. В [23] доказано, что решетка всех n-кратно ω-композиционных формаций $\mathfrak{G}$-отделима. В недавних работах [31, 32] установлена $\mathfrak{G}$-отделимость решетки всех тотально ω-локальных формаций, а также $\mathfrak{G}$-отделимость решетки функторно замкнутых тотально ω-локальных формаций. Н. Н. Воробьевым и А. А. Царевым [33] доказана $\mathfrak{G}$-отделимость решетки всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций.

Отметим, что в ряде работ В. А. Ведерникова и его учеников (см., например, [34–39]) аналогичные вопросы исследовались в рамках оригинальных теорий веерных и расслоенных формаций.

Основной целью данной работы является доказательство индуктивности и $\mathfrak{G}$-отделимости решетки всех n-кратно σ-локальных формаций l_n^σ.

Используются стандартная терминология и определения и обозначения, введенные в [5, 12, 40].

1. Предварительные сведения

Напомним, что *классом групп* называют всякое множество групп, содержащее вместе с каждой своей группой G и все группы, изоморфные G. Символами $\mathfrak{G}, \mathfrak{S}, \mathfrak{N}$ обозначают соответственно класс всех групп, класс всех разрешимых групп и класс всех нильпотентных групп.

Напомним несколько известных утверждений о σ-локальных формациях, которые потребуются для доказательства основных результатов.

Лемма 1.1 [12, лемма 2.2]. *Если $\mathfrak{F} = \bigcap_{j\in J} \mathfrak{F}_j$ и $\mathfrak{F}_j = LF_\sigma(f_j)$ для всех $j \in J$, то $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, где $f(\sigma_i) = \bigcap_{j\in J} f_j(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F}) = \bigcap_{j\in J} \sigma(\mathfrak{F}_j)$ и $f(\sigma_i) = \varnothing$*

для всех $\sigma_i \in \sigma\backslash\sigma(\mathfrak{F})$. Более того, если f_j — внутреннее σ-локальное задание формации $\mathfrak{F}_j$ для всех $j \in J$, то f также является внутренним σ-локальным заданием формации $\mathfrak{F}$.

Заметим, что Θ^{σ_l} — полная решетка формаций. Действительно, если $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\}$ — любой набор формаций $\mathfrak{F}_j \in \Theta^{\sigma_l}$ и $\{f_j \mid j \in J\}$ — соответствующий набор σ-локальных Θ-значных заданий, где f_j — σ-локальное Θ-значное задание $\mathfrak{F}_j$, то ввиду леммы 1.1 $\mathfrak{F} = \bigcap_{j\in J} \mathfrak{F}_j = LF_\sigma(f)$, где f — σ-локальное Θ-значное задание формации $\mathfrak{F}$ такое, что $f(\sigma_i) = \bigcap_{j\in J} f_j(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F}) = \bigcap_{j\in J} \sigma(\mathfrak{F}_j)$. Значит, $\mathfrak{F} \in \Theta^{\sigma_l}$. Пусть $\mathfrak{M}$ — Θ-формация такая, что для любой Θ-формации $\mathfrak{L}$ имеет место $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{M}$. Пусть f — σ-локальное Θ-значное задание такое, что $f(\sigma_i) = \mathfrak{M}$ для всех $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{M})$. Тогда $\mathfrak{M} = LF_\sigma(f) \in \Theta^{\sigma_l}$. Если $\mathfrak{H}$ — произвольная Θ^{σ_l}-формация, то, очевидно, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}$. Таким образом, Θ^{σ_l} — полная решетка формаций.

Лемма 1.2 [12, лемма 2.3]. *Если класс групп $\mathfrak{F}_j$ является n-кратно σ-локальной формацией для всех $j \in J$, то класс $\bigcap_{j\in J} \mathfrak{F}_j$ также является n-кратно σ-локальной формацией.*

Для любой совокупности групп $\mathfrak{X}$ символом $(\mathfrak{X})$ обозначается класс групп G таких, что $G \cong A$ для некоторой группы $A \in \mathfrak{X}$. Пусть $\mathfrak{X}$ — совокупность групп. Полагают $\mathfrak{X}(\sigma_i) = (G/F_{\sigma_i}(G) \mid G \in \mathfrak{X})$.

Формационная σ-функция f называется *l_n^σ-значной*, если $f(\sigma_i)$ является n-кратно σ-локальной формацией для каждого $\sigma_i \in \mathrm{Supp}(f)$. При этом запись $\mathrm{Supp}(f)$ обозначает множество $\{\sigma_i \in \sigma \mid f(\sigma_i) \neq \varnothing\}$. Пусть $\{f_j \mid j \in J\}$ — набор всех σ-локальных l_{n-1}^σ-значных заданий формации $\mathfrak{F}$. Ввиду лемм 1.1 и 1.2 $f = \bigcap_{j\in J} f_j$ — σ-локальное l_{n-1}^σ-значное задание формации $\mathfrak{F}$, называемое *наименьшим*. Следующая лемма дает способ построения наименьшего σ-локального l_{n-1}^σ-значного задания формации $\mathfrak{F} = l_n^\sigma\,\mathrm{form}(\mathfrak{X})$.

Лемма 1.3 [12, лемма 2.6]. *Пусть $\mathfrak{F} = l_n^\sigma\,\mathrm{form}(\mathfrak{X}) = LF_\sigma(f)$ — n-кратно σ-локальная формация, порожденная непустой совокупностью групп $\mathfrak{X}$, где f — σ-локальное l_{n-1}^σ-значное задание формации $\mathfrak{F}$, и пусть $\Pi = \sigma(\mathfrak{X})$. Пусть m — такая формационная σ-функция, что $m(\sigma_i) = l_{n-1}^\sigma\,\mathrm{form}(\mathfrak{X}(\sigma_i))$ для всех $\sigma_i \in \Pi$ и $m(\sigma_i) = \varnothing$ для всех $\sigma_i \in \Pi'$. Тогда*

1) *$\Pi = \sigma(\mathfrak{F})$,*

2) *m — σ-локальное l_{n-1}^σ-значное задание формации $\mathfrak{F}$,*

3) *$m(\sigma_i) \subseteq f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}$ для всех $\sigma_i \in \sigma$.*

Неединичная группа G называется *монолитической*, если в ней имеется лишь одна минимальная нормальная подгруппа (*монолит* группы G). Напомним, что *полуформацией* называется класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов (см. [13]). Пересечение всех тех полуформаций, которые содержат данную совокупность групп $\mathfrak{X}$, будем называть *полуформацией, порожденной* $\mathfrak{X}$.

Лемма 1.4 [2, следствие 1.2.26]. *Пусть $\mathfrak{X}$ — полуформация и $A \in \mathfrak{F} = \mathrm{form}\,\mathfrak{X}$. Тогда если A — монолитическая группа и $A \notin \mathfrak{X}$, то в $\mathfrak{F}$ найдется группа H с такими нормальными подгруппами $N, N_1, \dots, N_t; M, M_1, \dots, M_t$ $(t \geq 2)$, что выполняются следующие утверждения:*

1) *$H/N \cong A$, $M/N = \mathrm{Soc}(H/N)$;*

2) $N_1 \cap \cdots \cap N_t = 1$;

3) H/N_s — *монолитическая* $\mathfrak{X}$-*группа с монолитом* M_s/N_s, *который* H-*изоморфен* $M/N, s = 1, \ldots, t$;

4) $M_1 \cap \cdots \cap M_t \subseteq M$.

Если группа (подгруппа) принадлежит классу $\mathfrak{X}$, то она называется $\mathfrak{X}$-*группой* ($\mathfrak{X}$-*подгруппой*) (см. [1]). Согласно [1, 10] операции Q, R_0 на классах групп определяют следующим образом:

$H \in \mathrm{Q}\,\mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда H является гомоморфным образом некоторой $\mathfrak{X}$-группы;

$H \in \mathrm{R}_0\,\mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда H имеет нормальные подгруппы $N_1, \ldots, N_t$ $(t \geq 2)$ такие, что

$$\bigcap_{i=1}^{t} N_i = 1 \quad \text{и} \quad H/N_i \in \mathfrak{X},\ i = 1, \ldots, t.$$

Лемма 1.5 [2, лемма 1.2.22]. *Для любой совокупности групп* $\mathfrak{X}$ *справедливо равенство*

$$\mathrm{form}(\mathfrak{X}) = \mathrm{QR}_0(\mathfrak{X}).$$

Напомним, что группа G называется *σ-примарной*, если G — σ_i-группа для некоторого i.

Лемма 1.6. *Пусть* A — *монолитическая группа с монолитом* R, *причем* R *не σ-примарен. Пусть* $\mathfrak{M}$ — *некоторая полуформация и* $A \in l_n^\sigma \,\mathrm{form}\,\mathfrak{M}$, $n \geq 0$. *Тогда* $A \in \mathfrak{M}$.

Доказательство. Проведем индукцию по n. Пусть $n = 0$. Тогда

$$A \in l_0^\sigma \,\mathrm{form}\,\mathfrak{M} = \mathrm{form}\,\mathfrak{M}.$$

Пусть $A \notin \mathfrak{M}$. Тогда по лемме 1.4 в формации $\mathrm{form}\,\mathfrak{M}$ найдется группа H с такими нормальными подгруппами $N, N_1, \ldots, N_t$; $M, M_1, \ldots, M_t$ $(t \geq 2)$, что выполняются следующие утверждения:

1) $H/N \cong A$ и $M/N = \mathrm{Soc}(H/N)$;

2) H/N_s — монолитическая $\mathfrak{M}$-группа с монолитом M_s/N_s, который H-изоморфен M/N, $s = 1, \ldots, t$.

Поскольку монолит $R \cong M/N$ не σ-примарен, то $C_H(M/N) = N$. Кроме того, M_s/N_s H-изоморфен M/N. Значит, $N_s \subseteq N$. Поэтому

$$A \cong H/N \cong (H/N_s)/(N/N_s) \in \mathfrak{M};$$

противоречие. Итак, утверждение леммы верно при $n = 0$.

Пусть $n > 0$ и при $n - 1$ лемма верна. Пусть f — наименьшее σ-локальное l_{n-1}^σ-значное задание формации $\mathfrak{F} = l_n^\sigma \,\mathrm{form}\,\mathfrak{M}$. Так как R не σ-примарен, то

$$\bigcap_{\sigma_i \in \sigma(A)} F_{\sigma_i}(A) = 1.$$

Тогда найдется такое i, что $F_{\sigma_i}(A) = 1$ и по лемме 1.3

$$A \cong A/1 = A/F_{\sigma_i}(A) = A/\bigcap_{\sigma_i \in \sigma(A)} F_{\sigma_i}(A) \in f(\sigma_i) \subseteq l_{n-1}^\sigma \,\mathrm{form}\,\mathfrak{M}.$$

Следовательно, $A \in \mathfrak{M}$. Лемма доказана. □

Лемма 1.7. *Пусть $N_1 \times \cdots \times N_t = \mathrm{Soc}(G)$, где N_l — минимальная нормальная подгруппа группы G $(l = 1, \ldots, t), t > 1$ и $O_{\sigma_i}(G) = 1$. Пусть M_l — наибольшая нормальная в G подгруппа, содержащая $N_1 \times \cdots \times N_{l-1} \times N_{l+1} \times \cdots \times N_t$, но не содержащая N_l $(l = 1, \ldots, t)$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) для любого $l \in \{1, \ldots, t\}$ фактор-группа G/M_l монолитична, ее монолит $N_l M_l/M_l$ G-изоморфен N_l и $O_{\sigma_i}(G/M_l) = 1$;

2) $M_1 \cap \cdots \cap M_t = 1$.

Доказательство. Допустим, что группа G/M_l не монолитична и T/M_l — минимальная нормальная в G/M_l подгруппа, отличная от $N_l M_l/M_l$. Тогда $N_l \not\subseteq T$ и $N_1 \times \cdots \times N_{l-1} \times N_{l+1} \times \cdots \times N_t \subseteq M_l \subseteq T$. Значит, согласно определению подгруппы M_l имеет место $T \subseteq M_l$. Следовательно, $T = M_l$; противоречие. Итак, фактор-группа G/M_l монолитична и $N_l M_l/M_l = \mathrm{Soc}(G/M_l)$. Так как $N_l \cap M_l = 1$, имеет место G-изоморфизм:

$$N_l M_l/M_l \cong N_l/(N_l \cap M_l) = N_l/1 \cong N_l.$$

Из последнего, в частности, вытекает, что $O_{\sigma_i}(G/M_l) = 1$, поскольку по условию $O_{\sigma_i}(G) = 1$.

Покажем, что $M_1 \cap \cdots \cap M_t = 1$. Предположим противное. Пусть R — минимальная нормальная подгруппа группы G, входящая в $M_1 \cap \cdots \cap M_t$. Тогда, очевидно, $R \neq N_l$ при всех $l = 1, \ldots, t$. Понятно, что

$$\bigcap_{l=1}^{t} (N_1 \times \cdots \times N_{l-1} \times N_{l+1} \times \cdots \times N_t) = 1.$$

Значит, найдется такое $l \in \{1, \ldots, t\}$, что

$$R \not\subseteq K = N_1 \times \cdots \times N_{l-1} \times N_{l+1} \times \cdots \times N_t.$$

Следовательно, $RK = \mathrm{Soc}(G) \subseteq M_l$. Но тогда $N_l \subseteq M_l$. Полученное противоречие показывает, что $M_1 \cap \cdots \cap M_t = 1$. Лемма доказана. □

Пусть $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\}$ — непустая совокупность n-кратно σ-локальных формаций. Положим

$$\vee_n^\sigma(\mathfrak{F}_j \mid j \in J) = l_n^\sigma \operatorname{form}\Big(\bigcup_{j \in J} \mathfrak{F}_j\Big).$$

В частности,

$$\mathfrak{F}_1 \vee_n^\sigma \mathfrak{F}_2 = l_n^\sigma \operatorname{form}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2).$$

Пусть $\{f_j \mid j \in J\}$ — совокупность σ-локальных l_n^σ-значных функций, где f_j — некоторое σ-локальное задание формации $\mathfrak{F}_j$. Тогда символом $\vee_n^\sigma(f_j \mid j \in J)$ обозначается такое σ-локальное задание f, что

$$f(\sigma_i) = l_n^\sigma \operatorname{form}\Big(\bigcup_{j \in J} f_j(\sigma_i)\Big)$$

для всех i. В частности,

$$(f_1 \vee_n^\sigma f_2)(\sigma_i) = l_n^\sigma \operatorname{form}(f_1(\sigma_i) \cup f_2(\sigma_i)),$$

если по крайней мере одна из формаций $f_j(\sigma_i) \neq \varnothing$. Если $f_j(\sigma_i) = \varnothing$ для всех $j \in J$, то предполагают, что $f(\sigma_i) = \varnothing$.

Лемма 1.8. *Пусть f_j — наименьшее σ-локальное l_{n-1}^{σ}-значное задание формации $\mathfrak{F}_j$, где $j \in J$. Тогда $\vee_{n-1}^{\sigma}(f_j \mid j \in J)$ — наименьшее σ-локальное l_{n-1}^{σ}-значное задание формации $\mathfrak{F} = \vee_n^{\sigma}(\mathfrak{F}_j \mid j \in J)$.*

Доказательство. Пусть

$$\Pi = \sigma\Big(\bigcup_{j\in J}\mathfrak{F}_j\Big) = \bigcup_{j\in J}\sigma(\mathfrak{F}_j) = \sigma(\mathfrak{F}),$$

$f = \vee_{n-1}^{\sigma}(f_j \mid j \in J)$ и h — наименьшее σ-локальное l_{n-1}^{σ}-значное задание формации $\mathfrak{F}$. Покажем, что $f = h$.

Пусть $\sigma_i \in \sigma\backslash\Pi$ для некоторого i. Тогда для любого $j \in J$ имеет место $h(\sigma_i) = \varnothing$ и $f_j(\sigma_i) = \varnothing$. Значит, $f(\sigma_i) = \varnothing$.

Пусть $\sigma_i \in \Pi$. Тогда найдется такое $j \in J$, что $f_j(\sigma_i) \neq \varnothing$. Значит, согласно лемме 1.3

$$\begin{aligned} h(\sigma_i) &= l_{n-1}^{\sigma}\operatorname{form}\Big(G/F_{\sigma_i}(G) \mid G \in \bigcup_{j\in J}\mathfrak{F}_j\Big) \\ &= l_{n-1}^{\sigma}\operatorname{form}\Big(\bigcup_{j\in J} l_{n-1}^{\sigma}\operatorname{form}(G/F_{\sigma_i}(G) \mid G \in \mathfrak{F}_j)\Big) \\ &= l_{n-1}^{\sigma}\operatorname{form}\Big(\bigcup_{j\in J} f_j(\sigma_i)\Big) = \big(\vee_{n-1}^{\sigma}(f_j \mid j \in J)\big)(\sigma_i) = f(\sigma_i). \end{aligned}$$

Итак, $f = h$. Лемма доказана. □

Лемма 1.9 [12, лемма 2.1; 40, предложение 2.1]. *Пусть f и h — формационные σ-функции и $\Pi = \operatorname{Supp}(f)$. Предположим, что $\mathfrak{F} = LF_{\sigma}(f) = LF_{\sigma}(h)$.*

1) *Если $\sigma_i \in \Pi$, то $\mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}(h(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{F}$;*

2) *$\mathfrak{F} = LF_{\sigma}(F)$, где F — формационная σ-функция такая, что*

$$F(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}F(\sigma_i)$$

для всех $\sigma_i \in \Pi$.

Лемма 1.10 [40, следствие 2.1]. 1. *Для каждой формационной σ-функции f класс $LF_{\sigma}(f)$ является непустой насыщенной формацией.*

2. *Каждая σ-локальная формация $\mathfrak{F}$ имеет, причем лишь единственное, σ-локальное задание F такое, что для любого σ-локального задания f формации $\mathfrak{F}$ и для любого $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$ имеет место*

$$F(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}F(\sigma_i).$$

Формационная σ-функция f называется *внутренней*, если $f(\sigma_i) \subseteq LF_{\sigma}(f)$ для всех i, и *полной*, если $f(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}f(\sigma_i)$ для всех i.

В силу леммы 1.10 каждая σ-локальная формация $\mathfrak{F}$ имеет единственное внутреннее и полное σ-локальное задание F. Такая функция F называется *каноническим σ-локальным заданием* формации $\mathfrak{F}$ (см. [40]).

Лемма 1.11 [12, теорема 1.13]. *Множество $\mathscr{S}_n^{\sigma}$ всех n-кратно σ-локальных формаций образует подполугруппу полугруппы всех формаций $G\mathfrak{G}$.*

Лемма 1.12 [12, лемма 1.2.21]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — полуформация, порожденная совокупностью групп $\mathfrak{X}$. Тогда*

$$\mathfrak{F} = {}_{\mathrm{Q}}\,\mathfrak{X}.$$

Лемма 1.13 [14, лемма 4.7.5]. *Пусть $\mathfrak{R}_i$ — полуформация, порожденная $G_i, i = 1, 2$. Тогда $\mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2$ — полуформация, причем*

$$\mathfrak{R}_1 = (B_1, \dots, B_q) \quad \text{и} \quad \mathfrak{R}_2 = (C_1, \dots, C_r)$$

для некоторых $B_1, \dots, B_q \in \mathrm{Q}(G_1)$ и $C_1, \dots, C_r \in \mathrm{Q}(G_2)$.

Лемма 1.14. *Пусть $\mathfrak{M}$ — полуформация и $A \in l_n^\sigma \operatorname{form} \mathfrak{M}$, $n \geq 0$. Тогда если $O_{\sigma_i}(A) = 1$ и $\sigma_i \in \sigma$, то $A \in l_n^\sigma \operatorname{form} \mathfrak{M}_1$, где $\mathfrak{M}_1 = \{G/O_{\sigma_i}(G) \mid G \in \mathfrak{M}\}$.*

Доказательство. Если $A \in \mathfrak{M}$, то утверждение леммы очевидно, так как $A \cong A/O_{\sigma_i}(A) \in l_n^\sigma \operatorname{form} \mathfrak{M}_1$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $A \notin \mathfrak{M}$.

Сначала предположим, что A — монолитическая группа с монолитом R. Проведем индукцию по n.

Пусть $n = 0$. Поскольку $A \notin \mathfrak{M}$ и

$$A \in l_0^\sigma \operatorname{form} \mathfrak{M} = \operatorname{form} \mathfrak{M},$$

согласно лемме 1.4 в формации $\operatorname{form} \mathfrak{M}$ найдется группа H с такими нормальными подгруппами $N, N_1, \dots, N_t$; $M, M_1, \dots, M_t$ $(t \geq 2)$, что выполняются следующие утверждения:

1) $H/N \cong A$ и $M/N = \operatorname{Soc}(H/N)$;

2) $N_1 \cap \dots \cap N_t = 1$;

3) H/N_s — монолитическая $\mathfrak{M}$-группа с монолитом M_s/N_s, который H-изоморфен $M/N, s = 1, \dots, t$.

Так как $O_{\sigma_i}(A) = 1$, из условий 2 и 3 леммы 1.4 следует, что

$$H \in \mathrm{R}_0(H/N_1, \dots, H/N_t) \subseteq \mathrm{QR}_0\, \mathfrak{M}_1.$$

Отсюда ввиду условия 1 леммы 1.4 и леммы 1.5

$$A \cong H/N \in \mathrm{QR}_0(H/N_1, \dots, H/N_t) = \operatorname{form}(H/N_1, \dots, H/N_t) \subseteq \operatorname{form} \mathfrak{M}_1.$$

Пусть $n > 0$. Если R не σ-примарна, то по лемме 1.6 $A \in \mathfrak{M}$; противоречие. Значит, R — σ_j-группа, где $\sigma_j \in \sigma \backslash \{\sigma_i\}$. Следовательно, $F_{\sigma_j}(A) = O_{\sigma_j}(A)$ и $F_{\sigma_i}(A/R) = F_{\sigma_i}(A)/R$ для всех $j \neq i$.

Пусть $\mathfrak{F} = l_n^\sigma \operatorname{form} \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H} = l_n^\sigma \operatorname{form} \mathfrak{M}_1$, где $\mathfrak{M}_1 = \{G/O_{\sigma_i}(G) \mid G \in \mathfrak{M}\}$. Пусть f и h — наименьшие σ-локальные l_{n-1}^σ-значные задания формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ соответственно. Согласно лемме 1.3

$$f(\sigma_k) = l_{n-1}^\sigma \operatorname{form}(G/F_{\sigma_k}(G) \mid G \in \mathfrak{M}) \text{ для всех } \sigma_k \in \sigma(\mathfrak{M});$$

$$h(\sigma_k) = l_{n-1}^\sigma \operatorname{form}(G/F_{\sigma_k}(G) \mid G \in \mathfrak{M}_1) \text{ для всех } \sigma_k \in \sigma(\mathfrak{M}_1).$$

Поскольку для любой группы G имеет место

$$G/F_{\sigma_j}(G) \cong (G/O_{\sigma_i}(G))/(F_{\sigma_j}(G)/O_{\sigma_i}(G)) = (G/O_{\sigma_i}(G))/(F_{\sigma_j}(G/O_{\sigma_i}(G))),$$

по лемме 1.3 $f(\sigma_j) = h(\sigma_j)$. Значит, $A/O_{\sigma_j}(A) \in f(\sigma_j) = h(\sigma_j) \subseteq \mathfrak{H}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} A/F_{\sigma_r}(A) &\cong (A/O_{\sigma_j}(A))/(F_{\sigma_r}(A)/O_{\sigma_j}(A)) \\ &= (A/O_{\sigma_j}(A))/(F_{\sigma_r}(A/O_{\sigma_j}(A))) \in h(\sigma_r) \end{aligned}$$

для всех $\sigma_r \in \sigma(A)$. Значит, $A \in \mathfrak{H}$.

Рассмотрим случай, когда A не является монолитической группой, т. е. $\operatorname{Soc}(A) = N_1 \times \dots \times N_t$, где N_s — минимальная нормальная подгруппа группы

A и $t > 1$. Пусть M_s — наибольшая нормальная в A подгруппа, содержащая $N_1 \times \dots \times N_{s-1} \times N_{s+1} \times \dots \times N_t$, но не содержащая N_s, $s = 1, \dots, t$. Согласно лемме 1.7

$$A \in \mathrm{R}_0(A/M_1, \dots, A/M_t),$$

где A/M_s — монолитическая группа с монолитом $N_s M_s/M_s$ и $O_{\sigma_i}(A/M_s) = 1$. По условию $A \in l_n^\sigma \operatorname{form} \mathfrak{M}$. Следовательно, $A/M_s \in l_n^\sigma \operatorname{form} \mathfrak{M}$. Значит, согласно уже доказанному $A/M_s \in \mathfrak{H}$. Стало быть, $A \in \mathfrak{H}$. Лемма доказана. □

Лемма 1.15. *Если $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$ и $G/O_{\sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}$ для некоторого $\sigma_i \in \sigma$, то $G \in \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Прежде заметим, что так как $O_{\sigma_i}(G) \leq F_{\sigma_i}(G)$, то $G/F_{\sigma_i}(G) \in f(\sigma_i)$. Для всех $\sigma_j \in \sigma \backslash \{\sigma_i\}$ имеет место

$$G/F_{\sigma_j}(G) \cong (G/O_{\sigma_i}(G))/(F_{\sigma_j}(G)/O_{\sigma_i}(G)) = (G/O_{\sigma_i}(G))/(F_{\sigma_j}(G/O_{\sigma_i}(G))),$$

откуда $G/F_{\sigma_j}(G) \in f(\sigma_j)$. Значит, $G \in LF_\sigma(f)$. Лемма доказана. □

Если $\mathfrak{F}$ — непустая формация, то всякая группа G обладает наименьшей нормальной подгруппой, фактор-группа по которой принадлежит $\mathfrak{F}$, называемой *$\mathfrak{F}$-корадикалом* группы G и обозначаемой символом $G^{\mathfrak{F}}$.

Лемма 1.16. *Пусть $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f), G \notin \mathfrak{F}$. Тогда найдется такое $\sigma_i \in \sigma(G^{\mathfrak{F}})$, что $G/F_{\sigma_i}(G) \notin f(\sigma_i)$.*

Доказательство. Пусть $G/F_{\sigma_i}(G) \in f(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma(G^{\mathfrak{F}})$. Пусть $\sigma_i \in \sigma(G)\backslash\sigma(G^{\mathfrak{F}})$. Тогда $G^{\mathfrak{F}} \leq F_{\sigma_i}(G)$ и $F_{\sigma_i}(G/G^{\mathfrak{F}}) = F_{\sigma_i}(G)/G^{\mathfrak{F}}$. Значит, для всех $\sigma_i \in \sigma(G)$ имеет место $G/F_{\sigma_i}(G) \in f(\sigma_i)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}$; противоречие. Лемма доказана. □

2. Свойства индуктивности и отделимости решетки всех n-кратно σ-локальных формаций

Теорема 2.1. *Решетка всех n-кратно σ-локальных формаций l_n^σ индуктивна.*

Доказательство. Пусть $\{\mathfrak{F}_j = LF_\sigma(f_j) \mid j \in J\}$ — некоторый набор n-кратно σ-локальных формаций, где f_j — некоторое внутреннее σ-локальное l_{n-1}^σ-значное задание формации $\mathfrak{F}_j$. Пусть

$$\mathfrak{F} = \vee_n^\sigma(\mathfrak{F}_j \mid j \in J), \quad \mathfrak{M} = LF_\sigma\big(\vee_{n-1}^\sigma(f_j \mid j \in J)\big)$$

и h_j — наименьшее σ-локальное l_{n-1}^σ-значное задание формации $\mathfrak{F}_j$, $j \in J$. Тогда по лемме 1.8 $h = \vee_{n-1}^\sigma(h_j \mid j \in J)$ — наименьшее σ-локальное l_{n-1}^σ-значное задание формации $\mathfrak{F}$. Поскольку $h_j \leq f_j$ для любого $j \in J$, для каждого $\sigma_i \in \sigma$ имеет место включение

$$h(\sigma_i) = \vee_{n-1}^\sigma\big(h_j(\sigma_i) \mid j \in J\big) = l_{n-1}^\sigma \operatorname{form}\Big(\bigcup_{j \in J} h_j(\sigma_i)\Big)$$
$$\subseteq l_{n-1}^\sigma \operatorname{form}\Big(\bigcup_{j \in J} f_j(\sigma_i)\Big) = \vee_{n-1}^\sigma\big(f_j(\sigma_i) \mid j \in J\big) = f(\sigma_i).$$

Значит, $h \leq f = \vee_{n-1}^\sigma(f_j \mid j \in J)$. Следовательно, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$.

Докажем, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Согласно лемме 1.9 формация $\mathfrak{F}_j$ обладает каноническим σ-локальным l_{n-1}^σ-значным заданием F_j таким, что $F_j(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} h_j(\sigma_i)$

для любого $\sigma_i \in \sigma$. Кроме того, $f_j \leq F_j$ для любого $j \in J$. Следовательно, $f \leq \vee_{n-1}^{\sigma}(F_j \mid j \in J)$.

Действительно,

$$f(\sigma_i) = \vee_{n-1}^{\sigma}(f_j(\sigma_i) \mid j \in J) \subseteq \vee_{n-1}^{\sigma}(F_j(\sigma_i) \mid j \in J) = \vee_{n-1}^{\sigma}(F_j \mid j \in J)(\sigma_i)$$

для всех $\sigma_i \in \sigma$. Поэтому $f \leq \vee_{n-1}^{\sigma}(F_j \mid j \in J)$.

Покажем, что $\vee_{n-1}^{\sigma}(F_j \mid j \in J) \leq F$, где F — каноническое σ-локальное l_{n-1}^{σ}-значное задание формации $\mathfrak{F}$.

Ввиду того, что

$$F_j(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} h_j(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i}\big(\vee_{n-1}^{\sigma}(h_j(\sigma_i) \mid j \in J)\big) = F(\sigma_i),$$

имеем

$$\begin{aligned}\vee_{n-1}^{\sigma}\,(F_j(\sigma_i) \mid j \in J) &= \vee_{n-1}^{\sigma}(\mathfrak{G}_{\sigma_i} h_j(\sigma_i) \mid j \in J) \\ &= l_{n-1}^{\sigma}\operatorname{form}\Big(\bigcup_{j\in J} \mathfrak{G}_{\sigma_i} h_j(\sigma_i)\Big) \subseteq l_{n-1}^{\sigma}\operatorname{form}\big(\mathfrak{G}_{\sigma_i}\big(\vee_{n-1}^{\sigma}(h_j(\sigma_i) \mid j \in J)\big)\big).\end{aligned}$$

Кроме того, из леммы 1.11 получаем

$$l_{n-1}^{\sigma}\operatorname{form}\big(\mathfrak{G}_{\sigma_i}\big(\vee_{n-1}^{\sigma}(h_j(\sigma_i) \mid j \in J)\big)\big) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}\big(\vee_{n-1}^{\sigma}(h_j(\sigma_i) \mid j \in J)\big).$$

Следовательно,

$$\vee_{n-1}^{\sigma}(F_j(\sigma_i) \mid j \in J) \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i}\big(\vee_{n-1}^{\sigma}(h_j(\sigma_i) \mid j \in J)\big) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} h(\sigma_i) = F(\sigma_i)$$

для всех $\sigma_i \in \sigma$. Поэтому $\vee_{n-1}^{\sigma}(F_j \mid j \in J) \leq F$.

Таким образом,

$$f(\sigma_i) \subseteq \vee_{n-1}^{\sigma}(F_j(\sigma_i) \mid j \in J) \subseteq F(\sigma_i)$$

для всех $\sigma_i \in \sigma$.

Итак, $f(\sigma_i) \subseteq F(\sigma_i)$ для любого $\sigma_i \in \sigma$. Значит, $f \leq F$. Следовательно, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Теорема доказана. □

Заметим, что в классическом случае, когда $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\},\{3\},\dots\}$, из теоремы 2.1 вытекает

Следствие 2.2 [2, теорема 4.1.1]. *Решетка всех n-кратно локальных формаций l_n индуктивна.*

Если $\sigma = \sigma^1$ и $n = 1$, то из теоремы 2.1 вытекает

Следствие 2.3. *Решетка всех локальных формаций l_1 индуктивна.*

Лемма 2.4. *Пусть $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ — произвольные n-кратно σ-локальные формации и $A \in \mathfrak{F}_1 \vee_n^{\sigma} \mathfrak{F}_2$, $n \geq 0$. Тогда найдутся такие группы $A_s \in \mathfrak{F}_s$ $(s = 1, 2)$, что*

$$A \in \big(l_n^{\sigma}\operatorname{form}(A_1)\big) \vee_n^{\sigma} \big(l_n^{\sigma}\operatorname{form}(A_2)\big).$$

Доказательство. Проведем индукцию по n. Пусть $n = 0$. Тогда

$$A \in \mathfrak{F}_1 \vee_0^{\sigma} \mathfrak{F}_2 = l_0^{\sigma}\operatorname{form}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2) = \operatorname{form}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2).$$

Ввиду леммы 1.5

$$A \in \operatorname{form}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2) = \mathrm{QR}_0(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2).$$

Следовательно, $A \cong H/N$, где $H \in \mathrm{R}_0(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2)$. Значит, группа H имеет нормальные подгруппы $N_1, \ldots, N_t$ $(t \geq 2)$ такие, что

$$\bigcap_{s=1}^{t} N_s = 1 \quad \text{и} \quad H/N_s \in \mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2, \quad s = 1, \ldots, t.$$

Заметим, что $H^{\mathfrak{F}_1} \cap H^{\mathfrak{F}_2} = 1$. Значит, $H \in \mathrm{R}_0(H/H^{\mathfrak{F}_1}, H/H^{\mathfrak{F}_2})$. Отсюда, применяя лемму 1.5, получаем

$$\begin{aligned} A \cong H/N &\in \mathrm{QR}_0(H/H^{\mathfrak{F}_1}, H/H^{\mathfrak{F}_2}) \\ &= \mathrm{form}(H/H^{\mathfrak{F}_1}, H/H^{\mathfrak{F}_2}) = \mathrm{form}(H/H^{\mathfrak{F}_1}) \vee_0^\sigma \mathrm{form}(H/H^{\mathfrak{F}_2}) \subseteq \mathfrak{F}_1 \vee_0^\sigma \mathfrak{F}_2. \end{aligned}$$

Пусть $n > 0$, $\sigma(A) = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_t\}$ и $A \in \mathfrak{F}_1 \vee_n^\sigma \mathfrak{F}_2$. Ввиду лемм 1.3 и 1.8 можно считать

$$A/F_{\sigma_i}(A) \in f_1(\sigma_i) \vee_{n-1}^\sigma f_2(\sigma_i),$$

где f_j — наименьшее σ-локальное l_{n-1}^σ-значное задание $\mathfrak{F}_j$, $j = 1, 2$. По индукции найдутся такие группы $A_{i_1} \in f_1(\sigma_i)$ и $A_{i_2} \in f_2(\sigma_i)$, что

$$A/F_{\sigma_i}(A) \in \big(l_{n-1}^\sigma \,\mathrm{form}(A_{i_1})\big) \vee_{n-1}^\sigma \big(l_{n-1}^\sigma \,\mathrm{form}(A_{i_2})\big).$$

Заметим, что

$$l_{n-1}^\sigma \,\mathrm{form}(A_{i_1}, A_{i_2}) = \big(l_{n-1}^\sigma \,\mathrm{form}(A_{i_1})\big) \vee_{n-1}^\sigma \big(l_{n-1}^\sigma \,\mathrm{form}(A_{i_2})\big).$$

Итак, $A/F_{\sigma_i}(A) \in l_{n-1}^\sigma \,\mathrm{form}(A_{i_1}, A_{i_2})$.

Пусть $\mathfrak{M}_1$ — полуформация, порожденная группой A_{i_1}, $\mathfrak{M}_2$ — полуформация, порожденная группой A_{i_2}. По лемме 1.12 имеют место $\mathfrak{M}_1 = (U_1, \ldots, U_q)$ и $\mathfrak{M}_2 = (V_1, \ldots, V_r)$ для некоторых $U_1, \ldots, U_q \in \mathrm{Q}(A_{i_1})$ и $V_1, \ldots, V_r \in \mathrm{Q}(A_{i_2})$. Согласно лемме 1.13 $\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$ — полуформация и

$$\begin{aligned} A/F_{\sigma_i}(A) &\in l_{n-1}^\sigma \,\mathrm{form}(A_{i_1}, A_{i_2}) \\ &= l_{n-1}^\sigma \,\mathrm{form}(\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2) = l_{n-1}^\sigma \,\mathrm{form}(U_1, \ldots, U_q; V_1, \ldots, V_r). \end{aligned}$$

Значит, ввиду леммы 1.14 можем считать, что $O_{\sigma_i}(U_k) = O_{\sigma_i}(V_l) = 1$ для всех $k = 1, \ldots, q$ и $l = 1, \ldots, r$.

Пусть $D_{i_1} = U_1 \times \cdots \times U_q$ и $D_{i_2} = V_1 \times \cdots \times V_r$. Тогда $O_{\sigma_i}(D_{i_1}) = 1 = O_{\sigma_i}(D_{i_2})$.

Кроме того, понятно, что

$$A/F_{\sigma_i}(A) \in l_{n-1}^\sigma \,\mathrm{form}(D_{i_1}, D_{i_2}) \subseteq l_{n-1}^\sigma \,\mathrm{form}(A_{i_1}, A_{i_2}).$$

Пусть Z_i — неединичная σ_i-группа, $W_{i_1} = Z_i \wr D_{i_1}$, $W_{i_2} = Z_i \wr D_{i_2}$. Покажем, что $W_{i_1} \in \mathfrak{F}_1$. Пусть K — база регулярного сплетения W_{i_1}. Тогда $O_{\sigma_i'}(W_{i_1}) = 1$. Так как $O_{\sigma_i}(D_{i_1}) = 1$, то

$$F_{\sigma_i}(W_{i_1}) = O_{\sigma_i}(W_{i_1}) = K(O_{\sigma_i}(W_{i_1}) \cap D_{i_1}) = K.$$

Следовательно,

$$W_{i_1}/K = W_{i_1}/O_{\sigma_i}(W_{i_1}) \cong D_{i_1} \in f_1(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}_1,$$

где $\sigma_i \in \sigma(A)$. Значит, по лемме 1.15 $W_{i_1} \in \mathfrak{F}_1$. Аналогично доказывается, что $W_{i_2} \in \mathfrak{F}_2$.

Пусть $A_1 = W_{1_1} \times \cdots \times W_{t_1}$ и $A_2 = W_{1_2} \times \cdots \times W_{t_2}$. Тогда $A_1 \in \mathfrak{F}_1$ и $A_2 \in \mathfrak{F}_2$. Пусть

$$\mathfrak{F} = \big(l_n^\sigma \,\mathrm{form}(A_1)\big) \vee_n^\sigma \big(l_n^\sigma \,\mathrm{form}(A_2)\big).$$

Покажем, что $A \in \mathfrak{F}$. Для этого достаточно установить, что $A/F_{\sigma_i}(A) \in f(\sigma_i)$, где f — наименьшее σ-локальное l_{n-1}^{σ}-значное задание формации $\mathfrak{F}$. Ясно, что $W_{i_1} \in \mathfrak{F}$. Значит, $W_{i_1}/F_{\sigma_i}(W_{i_1}) \in f(\sigma_i)$. Поскольку $O_{\sigma_i}(D_{i_1}) = 1$, то $D_{i_1} \cong W_{i_1}/F_{\sigma_i}(W_{i_1}) \in f(\sigma_i)$, т. е. $D_{i_1} \in f(\sigma_i)$. Аналогично доказывается, что $D_{i_2} \in f(\sigma_i)$. Следовательно,

$$A/F_{\sigma_i}(A) \in l_{n-1}^{\sigma} \operatorname{form}(D_{i_1}, D_{i_2}) \subseteq f(\sigma_i).$$

Отсюда следует, что $A \in \mathfrak{F}$. Лемма доказана. □

Теорема 2.5. *Решетка всех n-кратно σ-локальных формаций l_n^{σ} $\mathfrak{G}$-отделима при любом неотрицательном n.*

Доказательство. Пусть $\xi(x_1, \dots, x_m)$ — терм сигнатуры $\{\cap, \vee_n^{\sigma}\}$, $\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_m$ — произвольные n-кратно σ-локальные формации и $A \in \xi(\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_m)$. Индукцией по числу r вхождений символов из $\{\cap, \vee_n^{\sigma}\}$ в терм ξ покажем, что найдутся такие группы $A_i \in \mathfrak{F}_i$ $(i = 1, \dots, m)$, что

$$A \in \xi\big(l_n^{\sigma} \operatorname{form}(A_1), \dots, l_n^{\sigma} \operatorname{form}(A_m)\big).$$

При $r = 0$ очевидно, что $A \in l_n^{\sigma} \operatorname{form}(A)$.

Докажем, что утверждение верно при $r = 1$. Существуют две возможности: либо $A \in \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2$, либо

$$A \in \mathfrak{F}_1 \vee_n^{\sigma} \mathfrak{F}_2 = l_n^{\sigma} \operatorname{form}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2).$$

В первом случае $A \in l_n^{\sigma} \operatorname{form}(A) \cap l_n^{\sigma} \operatorname{form}(A)$. Во втором случае по лемме 2.4 найдутся такие группы $A_i \in \mathfrak{F}_i$ $(i = 1, 2)$, что

$$A \in \big(l_n^{\sigma} \operatorname{form}(A_1)\big) \vee_n^{\sigma} \big(l_n^{\sigma} \operatorname{form}(A_2)\big).$$

Итак, при $r = 1$ утверждение доказано.

Пусть терм ξ имеет $r > 1$ вхождений символов из $\{\cap, \vee_n^{\sigma}\}$ и для термов с меньшим числом вхождений доказываемое утверждение верно.

Пусть терм ξ имеет вид

$$\xi_1(x_{i_1}, \dots, x_{i_a}) \Delta \xi_2(x_{j_1}, \dots, x_{j_b}),$$

где $\Delta \in \{\cap, \vee_n^{\sigma}\}$, и

$$\{x_{i_1}, \dots, x_{i_a}\} \cup \{x_{j_1}, \dots, x_{j_b}\} = \{x_1, \dots, x_m\}.$$

Обозначим через $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ соответственно формации $\xi_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{F}_{i_a})$, $\xi_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{F}_{j_b})$. Тогда найдутся такие группы $A_1 \in \mathfrak{H}_1$, $A_2 \in \mathfrak{H}_2$, что

$$A \in \big(l_n^{\sigma} \operatorname{form}(A_1)\big) \Delta \big(l_n^{\sigma} \operatorname{form}(A_2)\big).$$

С другой стороны, по индукции найдутся такие группы $B_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}, \dots, B_a \in \mathfrak{F}_{i_a}$, что

$$A_1 \in \xi_1\big(l_n^{\sigma} \operatorname{form}(B_1), \dots, l_n^{\sigma} \operatorname{form}(B_a)\big).$$

Аналогично найдутся такие группы $C_1 \in \mathfrak{F}_{j_1}, \dots, C_b \in \mathfrak{F}_{j_b}$, что

$$A_2 \in \xi_2\big(l_n^{\sigma} \operatorname{form}(C_1), \dots, l_n^{\sigma} \operatorname{form}(C_b)\big).$$

Пусть переменные $x_{i_1}, \dots, x_{i_t}$ не входят в слово ξ_2, а все переменные $x_{i_{t+1}}, \dots, x_{i_a}$ в это слово входят.

Пусть

$$D_{i_k} = \begin{cases} B_k, & \text{если } k < t+1, \\ B_k \times C_q, & \text{если } x_{i_k} = x_{j_q} \text{ для некоторого } q \in \{1, \dots, b\} \\ & \text{при всех } k \geq t+1. \end{cases}$$

Пусть $D_{j_k} = C_k$, если $x_{j_k} \notin \{x_{i_{t-1}}, \dots, x_{i_a}\}$. Обозначим через $\mathfrak{R}_p$ формацию $l_n^\sigma \operatorname{form}(D_{i_p})$, а через $\mathfrak{X}_c$ — формацию $l_n^\sigma \operatorname{form}(D_{j_c})$, $p = 1, \dots, a$; $c = 1, \dots, b$.

Таким образом,

$$A_1 \in \xi_1\big(l_n^\sigma \operatorname{form}(B_1), \dots, l_n^\sigma \operatorname{form}(B_a)\big) \subseteq \xi_1\big(l_n^\sigma \operatorname{form}(D_{i_1}), \dots, l_n^\sigma \operatorname{form}(D_{i_a})\big) = \xi_1(\mathfrak{R}_1, \dots, \mathfrak{R}_a),$$

$$A_2 \in \xi_2\big(l_n^\sigma \operatorname{form}(C_1), \dots, l_n^\sigma \operatorname{form}(C_b)\big) \subseteq \xi_2\big(l_n^\sigma \operatorname{form}(D_{j_1}), \dots, l_n^\sigma \operatorname{form}(D_{j_b})\big) = \xi_2(\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_b).$$

Следовательно, найдутся такие формации

$$\mathfrak{L}_1 = l_n^\sigma \operatorname{form}(L_1), \dots, \mathfrak{L}_m = l_n^\sigma \operatorname{form}(L_m),$$

что

$$A \in \xi_1(\mathfrak{L}_{i_1}, \dots, \mathfrak{L}_{i_a}) \Delta \xi_2(\mathfrak{L}_{j_1}, \dots, \mathfrak{L}_{j_b}) = \xi(\mathfrak{L}_1, \dots, \mathfrak{L}_m),$$

где $L_i \in \mathfrak{F}_i, i = 1, \dots, m$. Таким образом, решетка l_n^σ $\mathfrak{G}$-отделима. Теорема доказана. □

Если $\sigma = \sigma^1$, то из теоремы 2.5 вытекает

Следствие 2.6 [2, теорема 4.1.16; 13, лемма 9.16]. *Решетка всех n-кратно локальных формаций l_n $\mathfrak{G}$-отделима.*

Если $\sigma = \sigma^1$ и $n = 1$, то из теоремы 2.5 вытекает

Следствие 2.7. *Решетка всех локальных формаций l_1 $\mathfrak{G}$-отделима.*

Благодарность. В заключение авторы выражают глубокую благодарность рецензенту за внимательное прочтение рукописи, сделанные полезные замечания и советы, способствовавшие существенному улучшению окончательного варианта статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978. (Современная алгебра).
2. *Скиба А. Н.* Алгебра формаций. Минск: Беларуская навука, 1997.
3. *Скиба А. Н., Шеметков Л. А.* Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Мат. тр. 1999. Т. 2, № 2. С. 114–147.
4. *Скиба А. Н., Шеметков Л. А.* Кратно $\mathfrak{L}$-композиционные формации конечных групп // Укр. мат. журн. 2000. Т. 52, № 6. С. 783–797.
5. *Skiba A. N.* On one generalization of local formations // Проблемы физики, математики и техники. 2018. № 1. С. 79–82.
6. *Safonov V. G., Safonova I. N., Skiba A. N.* On Baer-σ-local formations of finite groups // Commun. Algebra. 2020. V. 48, N 9. P. 4002–4012.
7. *Skiba A. N.* On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups // J. Algebra. 2015. V. 436. P. 1–16.
8. *Skiba A. N.* Some characterizations of finite σ-soluble $P\sigma T$-groups // J. Algebra. 2018. V. 495. P. 114–129.

9. *Skiba A. N.* On sublattices of the subgroup lattice defined by formation Fitting sets // J. Algebra. 2020. V. 550. P. 69–85.

10. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter & Co., 1992. (De Gruyter Expo. Math.; V. 4).

11. *Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M.* Classes of finite groups. Dordrecht: Springer, 2006. (Math. Appl.; V. 584).

12. *Chi Z., Safonov V. G., Skiba A. N.* On n-multiply σ-local formations of finite groups // Commun. Algebra. 2019. V. 47, N 3. P. 957–968.

13. *Шеметков Л. А., Скиба А. Н.* Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989. (Современная алгебра).

14. *Воробьев Н. Н.* Алгебра классов конечных групп. Витебск: ВГУ имени П. М. Машерова, 2012.

15. *Guo Wenbin.* The theory of classes of groups. Beijin; New York; Dordrecht; Boston; London: Sci. Press; Kluwer Acad. Publ., 2000. (Math. Appl.; V. 505).

16. *Скиба А. Н.* О локальных формациях длины 5 // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп: труды Гомельского семинара. Минск: Наука и техника, 1986. С. 135–149.

17. *Воробьев Н. Н.* Об индуктивных решетках формаций и классов Фиттинга // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. 2000. Т. 44, № 3. С. 21–24.

18. *Safonov V. G.* On modularity of the lattice of totally saturated formations of finite groups // Commun. Algebra. 2007. V. 35, N 11. P. 3495–3502.

19. *Safonov V. G.* On a question of the theory of totally saturated formations of finite groups // Algebra Colloquium. 2008. V. 15, N 1. P. 119–128.

20. *Воробьев Н. Н., Царев А. А.* О модулярности решетки τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций // Укр. мат. журн. 2010. Т. 62, № 4. С. 453–463.

21. *Tsarev A. A., Vorob′ev N .N.* On a question of the theory of partially composition formations // Algebra Colloquium. 2014. V. 21, N 3. P. 437–447.

22. *Жизневский П. А.* О модулярности и индуктивности решетки всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций конечных групп // Изв. Гомел. гос. ун-та им. Ф. Скорины. 2010. № 1. С. 185–191.

23. *Воробьев Н. Н., Скиба А. Н., Царев А. А.* Тождества решеток частично композиционных формаций // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 5. С. 1011–1024.

24. *Tsarev A.* Inductive lattices of totally composition formations // Rev. Colomb. Mat. 2018. V. 52, N 2. P. 161–169.

25. *Щербина В. В., Сафонов В. Г.* О подрешетках решетки частично тотально насыщенных формаций конечных групп // Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика. 2019. Т. 51, № 1. С. 64–87.

26. *Reifferscheid S.* A note on subgroup-closed Fitting classes of finite soluble groups // J. Group Theory. 2003. V. 6, N 3. P. 331–345.

27. *Воробьев Н. Н., Скиба А. Н.* О дистрибутивности решетки разрешимых тотально локальных классов Фиттинга // Мат. заметки. 2000. Т. 67, № 5. С. 662–673.

28. *Го Вэньбинь, Скиба А. Н.* Два замечания о тождествах решеток ω-локальных и ω-композиционных формаций конечных групп // Изв. вузов. Математика. 2002. № 5. С. 14–22.

29. *Shemetkov L. A., Skiba A. N., Vorob'ev N. N.* On laws of lattices of partially saturated formations // Asian-European J. Math. 2009. V. 2, N 1. P. 155–169.

30. *Сафонов В. Г.* $\mathfrak{G}$-отделимость решетки τ-замкнутых тотально насыщенных формаций // Алгебра и логика. 2010. Т. 49, № 5. С. 690–702.

31. *Сафонов В. Г. Сафонова И. Н.* Отделимость решетки τ-замкнутых тотально ω-насыщенных формаций конечных групп // Проблемы физики, математики и техники. 2017. № 4. С. 76–83.

32. *Щербина В. В., Сафонов В. Г.* О некоторых свойствах решетки частично тотально насыщенных формаций конечных групп // Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика. 2019. Т. 51, № 2. С. 227–244.

33. *Vorob′ev N. N., Tsarev A. A.* Lattices of composition formations of finite groups and the laws // J. Algebra Appl. 2018. V. 17, N 5. Article ID 1850084. 17 p.

34. *Ведерников В. А., Сорокина М. М.* Ω-расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп // Дискретная математика. 2001. Т. 13, № 3. С. 125–144.

35. *Ведерников В. А., Сорокина М. М.* ω-Веерные формации и классы Фиттинга конечных групп // Мат. заметки. 2002. Т. 71, № 1. С. 43–60.

36. *Ведерников В. А., Демина Е. Н.* Ω-расслоенные формации мультиоператорных T-групп // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 5. С. 990–1009.

37. *Демина Е. Н.* Решетки n-кратно Ω_1-расслоенных τ-замкнутых формаций мультиоператорных T-групп // Дискретная математика. 2012. Т. 24, № 1. С. 3–25.

38. *Еловикова Ю. А.* Свойства решетки всех кратно Ω-канонических формаций // Дискретная математика. 2006. Т. 18, № 2. С. 146–158.

39. *Скачкова Ю. А.* Решетки Ω-расслоенных формаций // Дискретная математика. 2002. Т. 14, № 2. С. 85–94.

40. *Чи Ч., Скиба А. Н.* О Σ_t^σ-замкнутых классах конечных групп // Укр. мат. журн. 2019. Т. 70, № 12. С. 1707–1716.

Поступила в редакцию 4 сентября 2020 г.
После доработки 19 апреля 2021 г.
Принята к публикации 11 июня 2021 г.

Воробьев Николай Николаевич, Стаселько Игнат Игоревич,
Ходжагулыев Аганазар Одемырат оглы
Витебский государственный университет имени П. М. Машерова,
факультет математики и информационных технологий,
кафедра алгебры и методики преподавания математики,
Московский пр., 33, Витебск 210038, Беларусь
vornic2001@mail.ru, mars17906@mail.ru, nazar_96_nazar_96@mail.ru