МАТЭМАТЫКА

УДК 512.542

О СЮРЪЕКТИВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ РЕШЕТОК КЛАССОВ ФИТТИНГА

Е.Н. Залесская, Ю.В. Исаченко
Учреждение образования
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными.

В теории конечных групп важное место занимают исследования, связанные с классами Фиттинга.

Цель статьи – описание новых сюръективных отображений решетки секции Локетта, порожденной произвольными классами Фиттинга, в решетку секции Локетта, порожденной произведением ω-локальных классов Фиттинга.

Материал и методы. *В качестве материала использованы опубликованные работы по теме исследования. Применяются методы исследования теории конечных групп.*

Результаты и их обсуждение. *Доказана следующая*

Теорема. Пусть $\mathfrak{Y}$ – некоторый класс Фиттинга, $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{H}$ – ω-локальные классы Фиттинга, причем $\mathfrak{X}\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{Y}$ и $Char(\mathfrak{X}\mathfrak{H}) \subseteq \omega$, тогда отображение решетки Locksec($\mathfrak{Y}$) в решетку Locksec($\mathfrak{X}^*\mathfrak{H}$) сюръективно.

Заключение. *В данной статье определено достаточное условие для того, чтобы отображение решетки секции Локетта, порожденной произвольными классами Фиттинга, в решетку секции Локетта, порожденной произведением ω-локальных классов Фиттинга, было сюръективно.*

Ключевые слова: *класс Фиттинга, решетка классов Фиттинга, ω-локальный класс Фиттинга, класс Локетта, секция Локетта, гипотеза Локетта.*

ABOUT SURJECTIVE MAPPINGS OF FITTING CLASSES

E.N. Zalesskaya, Yu.V. Isachenko
Educational Establishment "Vitebsk State P.M. Masherov University"

This article deals only with finite groups.

In the theory of finite groups, studies related to Fitting classes occupy an important place.

The purpose of the article is a description of the new surjective mappings of the Lockett section lattice generated by arbitrary Fitting classes, into the lattice of the Lockett section generated by the product of ω-local Fitting classes.

Material and methods. *The published articles on the research topic are the material for the article. The methods of studying the theory of finite groups are applied.*

Findings and their discussion. *The following theorem is proved. Let $\mathfrak{Y}$ – be some Fitting class, $\mathfrak{X}$ and $\mathfrak{H}$ – be ω-local Fitting classes, while $\mathfrak{X}\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{Y}$ and $Char(\mathfrak{X}\mathfrak{H}) \subseteq \omega$, then mapping of the lattice Loscksec($\mathfrak{Y}$) into the lattice Loscksec($\mathfrak{X}^*\mathfrak{H}$) is surjective.*

Conclution. *This article defines a sufficient condition in order to display the lattice of the Lockett section generated by arbitrary Fitting classes, into the lattice of the Lockett section generated by the product of ω-local Fitting classes as surjective.*

Key words: *Fitting class, Fitting classes lattice, ω-local Fitting class, Lockett class, Lockett section, Lockett's hypothesis.*

Репозиторий ВГУ

Теория групп является одним из основных разделов современной алгебры.

Со второй половины 1960-х годов важное место в теории разрешимых групп стали занимать исследования, связанные с классами Фиттинга. Следует отметить, что термин «класс Фиттинга» возник исходя из долгосрочной программы структурного анализа конечных групп, предложенной в 1938 году Х. Фиттингом, в которой впервые систематически использовался нильпотентный радикал групп. В дальнейшем классы Фиттинга стали рассматриваться и как самостоятельные объекты изучения.

Фишер [1] в 1966 году впервые упоминает классы Фиттинга разрешимых групп. В данной работе классы Фиттинга были введены двойственным образом к формациям – классам групп, замкнутым относительно фактор-групп и относительно подпрямого произведения. Двойственность заключалась в том, что определение классов Фиттинга получалось из определения формаций заменой фактор-групп на нормальные подгруппы. В статье Фишера, Гашюца, Хартли [2] впервые рассматриваются классы Фиттинга конечных групп.

Напомним, что классом Фиттинга называется класс групп $\mathfrak{F}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) каждая нормальная подгруппа любой группы из $\mathfrak{F}$ также принадлежит $\mathfrak{F}$;

2) из того, что нормальные подгруппы *A* и *B* группы *G* принадлежат $\mathfrak{F}$, всегда следует, что их произведение *AB* также принадлежит $\mathfrak{F}$.

Заметим, что множества всех классов Фиттинга и формаций являются полными решетками по включению $\subseteq$.

Однако до настоящего времени нет достаточной информации о решетках классов Фиттинга. Например, если говорить про решетку разрешимых классов Фиттинга, то нельзя сказать, будет ли она модулярной. Модулярность решетки всех разрешимых нормальных классов Фиттинга доказал Лауш в [3]. Брайс и Косси [4] доказали модулярность и атомарность решетки классов Фиттинга из секции Локетта, тем самым расширив результат Лауша.

Напомним, что секцией Локетта класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, обозначаемой *Locksec*($\mathfrak{F}$) [5], называют совокупность всех таких классов Фиттинга $\mathfrak{H}$, для которых $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{H}^*$, где класс $\mathfrak{F}^*$ определяется как наименьший из классов Фиттинга, содержащий $\mathfrak{F}$ такой, что для всех групп G и H справедливо равенство $(G \times H)_{\mathfrak{F}^*} = G_{\mathfrak{F}^*} \times H_{\mathfrak{F}^*}$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют классом Локетта, если $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$.

Напомним также, что неединичный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется нормальным, если в любой группе G ее $\mathfrak{F}$-радикал $G_{\mathfrak{F}}$ является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой группы G.

Следуя [6], для пары классов Фиттинга $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ определим отображение

$$\mathfrak{X} \to \mathfrak{X} \cap \mathfrak{F}^* \tag{1}$$

из *Locksec*($\mathfrak{H}$) в *Locksec*($\mathfrak{F}$). Для $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{E}$, где $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{E}$ – класс всех конечных разрешимых и класс всех конечных групп соответственно, отображение (1) является сюръективным (см. [6, X, 6.1]); другими словами, секция Локетта $\mathfrak{S}$ определяется секцией Локетта $\mathfrak{E}$. В работе [5] Локетт поставил проблему: верно ли, что отображение (1) сюръективно всегда, когда $\mathfrak{H} = \mathfrak{S}$? Впоследствии эта проблема стала известна как «гипотеза Локетта» [5].

Оригинальный вопрос Локетта был расширен Дерком и Хоуксом [6, X, 6.1] следующим образом:

Обобщенная гипотеза Локетта [6, X, 6.1]. Пусть $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$ – классы Фиттинга, причем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ удовлетворяет гипотезе Локетта в $\mathfrak{H}$, если отображение (1) из *Locksec*($\mathfrak{H}$) в *Locksec*($\mathfrak{F}$) сюръективно.

В этом случае класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ будем называть $\mathfrak{L}_{\mathfrak{H}}$-классом. Если $\mathfrak{H} = \mathfrak{S}$, то $\mathfrak{L}_{\mathfrak{H}}$-класс назовем $\mathfrak{L}$-классом. Если же класс $\mathfrak{F}$ не является $\mathfrak{L}$-классом, то будем называть его $\overline{\mathfrak{L}}$-классом.

Ввиду результата Брайса и Косси [4], необходимым и достаточным условием для справедливости обобщенной гипотезы Локетта является выполнимость равенства

$$\mathfrak{F}_* = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{H}_* \tag{2}$$

(см., например, [6, X, 6.1]), где класс $\mathfrak{F}_*$ — пересечение всех таких классов Фиттинга $\mathfrak{X}$, для которых $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{F}^*$.

В 1996 году Галледжи [7] было построено сюръективное отображение решетки *Locksec*($\mathfrak{E}$) в решетку секции Локетта, порожденной произвольными локальными классами Фиттинга.

Репозиторий ВГУ

Е.Н. Залесской и Н.Н. Воробьёвым [8] в 2009 году было определено достаточное условие для того, чтобы отображение решетки секции Локетта, порожденной произвольными классами Фиттинга, в решетку секции Локетта, порожденной ω-локальным классом Фиттинга, было сюръективно.

Нами доказано, что отображение решетки *Locksec*($\mathfrak{Y}$) произвольного класса Фиттинга $\mathfrak{Y}$ в решетку *Locksec*($\mathfrak{X}^*\mathfrak{H}$), где $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{H}$ – ω-локальные классы Фиттинга, причем $\mathfrak{X}\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{Y}$ и $Char(\mathfrak{X}\mathfrak{H}) \subseteq \omega$, сюръективно и тем самым потверждена обобщенная гипотеза Локетта для произведения ω-локальных классов Фиттинга заданной характеристики.

Предварительные сведения. Все рассматриваемые группы конечны.

Пусть $\emptyset \neq \omega \subseteq \mathbb{P}$, где $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел.

Напомним, что отображение $f: \omega \cup \{\omega'\} \to \{$классы Фиттинга$\}$ называется ω-локальной функцией Хартли или ω-локальной *H*-функцией.

Пусть $LR_\omega(f) = \{G \mid G^\omega \in f(\omega')$ и $F^p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G)\}$, где $G^\omega = G^{\mathfrak{E}_\omega}$, $F^p(G) = G^{\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}}$ и $\mathfrak{E}_\omega$ – класс всех ω-групп.

Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется ω-локальным [9], если существует некоторая ω-локальная *H*-функция f такая, что $\mathfrak{F} = LR_\omega(f)$.

Если $\mathfrak{F} = LR_\omega(f)$, где f – ω-локальная *H*-функция, то согласно результатам А.Н. Скибы, Л.А. Шеметкова [9] и В.А. Ведерникова, М.М. Сорокиной [10] справедлива формула

$$\mathfrak{F} = (\cap_{p\in\pi_2} \mathfrak{E}_{p'}) \cap (\cap_{p\in\pi_1} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}) \cap f(\omega')\mathfrak{E}_\omega\,, \tag{3}$$

где $\pi_2 = \omega \backslash \pi_1$,

$\pi_1 = \omega \cap Supp(f)$ и

$Supp(f) = \{a \in \omega \cup \{\omega'\} \mid f(a) \neq \emptyset\}$.

Приведем в качестве лемм некоторые вспомогательные утверждения, которые необходимы для доказательства основного результата работы.

Лемма 1 [11]. *Если $\mathfrak{F}$ – некоторый класс Фиттинга и $\mathfrak{X}$ – насыщенный радикальный гомоморф, то* $(\mathfrak{F}\mathfrak{X})^* = \mathfrak{F}^*\mathfrak{X}$.

Лемма 2 [6]. *Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ – классы Фиттинга. Справедливы следующие утверждения:*

1) *если* $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Y}$, *то* $\mathfrak{X}^* \subseteq \mathfrak{Y}^*$ и $\mathfrak{X}_* \subseteq \mathfrak{Y}_*$;

2) $(\mathfrak{X}_*)_* = \mathfrak{X}_* = (\mathfrak{X}^*)_* \subseteq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}^* = (\mathfrak{X}_*)^* = (\mathfrak{X}^*)^*$;

3) $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}_*\mathfrak{A}$, *где $\mathfrak{A}$ – класс всех абелевых групп;*

4) *если $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ – множество непустых классов Фиттинга, то* $(\cap_{i\in I}\mathfrak{F}_i)^* = \cap_{i\in I}\mathfrak{F}_i{}^*$.

Лемма 3 [7]. *Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ – классы Фиттинга, причем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Если существует класс Фиттинга $\mathfrak{Y}$ такой, что* $(\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{p'} \cap \mathfrak{F}) \vee \mathfrak{Y}\mathfrak{E}_p = \mathfrak{F}$, *то* $\mathfrak{X}_* \cap \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{p'}$.

Лемма 4 [7]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга. Тогда если существует класс Фиттинга $\mathfrak{Y}$ такой, что* $\mathfrak{Y}\mathfrak{E}_p \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{Y}\mathfrak{E}_p\mathfrak{E}_{p'}$ *для всех* $p \in Char(\mathfrak{F})$, *то* $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}$.

Лемма 5 [9]. *Пусть $\mathfrak{Y}$ – класс Фиттинга. Тогда следующие условия равносильны:*

1) $\mathfrak{Y}(F^p)\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{Y}$ *для всех* $p \in \omega$;

2) $\mathfrak{Y} = LR_\omega(f)$, *где* $f(\omega') = \mathfrak{Y}$ *и* $f(p) = \mathfrak{Y}(F^p)\mathfrak{N}_p$ *для всех* $p \in \omega$;

3) *класс $\mathfrak{Y}$ ω-локален.*

Напомним, что если $\mathfrak{X}$ – произвольная совокупность групп и p – некоторое простое число , то

$$\mathfrak{X}(F^p) = \begin{cases} Fit(F^p(G) \mid G \in \mathfrak{X}), & p \in \pi(\mathfrak{X}); \\ \emptyset, & p \notin \pi(\mathfrak{X}). \end{cases}$$

Лемма 6 [8]. *Если $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ – классы Фиттинга, то*

$(\mathfrak{X}_* \cap \mathfrak{F}_*)_* = (\mathfrak{X} \cap \mathfrak{F})_*$.

Лемма 7 [12]. *Произведение ω-локальных классов Фиттинга является ω-локальным классом Фиттинга.*

В следующей лемме все рассматриваемые группы конечны и разрешимы.

Лемма 8 [8]. *Пусть классы Фиттинга $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ таковы, что отображение решетки всех нормальных классов Фиттинга в решетку секции Локетта, порожденной классом $\mathfrak{X}$, сюръективно, а $\mathfrak{Y}$ – насыщенная радикальная формация. Тогда если отображение решетки всех нормальных классов Фиттинга в решетку секции Локетта, порожденной классом $\mathfrak{X}^*\mathfrak{Y}$, сюръективно, то и отображе-*

Репозиторий ВГУ

ние решетки всех нормальных классов Фиттинга в решетку секции Локетта, порожденной классом $\mathfrak{X}_*\mathfrak{Y}$, сюръективно.

Результаты и их обсуждение. Все рассматриваемые группы конечны.

Для доказательства основного результата работы докажем следующее утверждение.

Лемма 9. *Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-локальный класс Фиттинга, причем $Char(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$, тогда $\mathfrak{F}$ является классом Локетта.*

Доказательство. Так как $\mathfrak{F}$ ω-локален, то по лемме 5 имеем $\mathfrak{F}(F^p)\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $p \in \omega$, и, значит, для каждого $p \in Char(\mathfrak{F})$.

Ввиду ω-локальности класс $\mathfrak{F}$ определяется с помощью ω-локальной *H*-функции f следующим образом:

$$\mathfrak{F} = (\bigcap_{p\in\pi_2} \mathfrak{E}_{p'}) \bigcap (\bigcap_{p\in\pi_1} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}) \bigcap f(\omega')\mathfrak{E}_\omega ,$$

где $\pi_1 = \omega \cap Supp(f)$,

$\pi_2 = \omega \backslash \pi_1$.

Таким образом, $\mathfrak{F} \subseteq f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$ для всех $p \in \pi_1$. Но по лемме 5 имеем $f(p) = \mathfrak{F}(F^p)\mathfrak{N}_p$ для всех $p \in \omega$ и получаем, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}(F^p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$ для всех $p \in Supp(f) \cap \omega$. При этом

$$\mathfrak{F}(F^p) = \begin{cases} Fit(F^p(G) \mid G \in \mathfrak{F}), & p \in \pi(\mathfrak{F}); \\ \emptyset, & p \notin \pi(\mathfrak{F}). \end{cases}$$

Ввиду того, что $Char(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$, для каждого $p \in Char(\mathfrak{F})$ справедливы включения

$$\mathfrak{F}(F^p)\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}(F^p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}.$$

Следовательно, по лемме 4 получаем, что $\mathfrak{F}$ – класс Локетта. Лемма доказана.

Следующая теорема определяет достаточное условие для того, чтобы отображение решетки секции Локетта, порожденной произвольными классами Фиттинга, в решетку секции Локетта, порожденной произведением ω-локальных классов Фиттинга, было сюръективно. Этот результат докажем также в классе всех конечных групп.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{Y}$ – некоторый класс Фиттинга, $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{H}$ – ω-локальные классы Фиттинга, причем $\mathfrak{X}\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{Y}$ и $Char(\mathfrak{X}\mathfrak{H}) \subseteq \omega$, тогда отображение решетки Locksec($\mathfrak{Y}$) в решетку Locksec($\mathfrak{X}^*\mathfrak{H}$) сюръективно.*

Доказательство. Ввиду [6, X, 1.19 и X, 6.1], для того, чтобы доказать сюръективность отображения решетки *Locksec*($\mathfrak{Y}$) в решетку *Locksec*($\mathfrak{X}^*\mathfrak{H}$), достаточно доказать, что класс Фиттинга $\mathfrak{X}^*\mathfrak{H}$ является $\mathfrak{L}_{\mathfrak{Y}}$-классом.

Покажем сначала, что класс Фиттинга $\mathfrak{X}\mathfrak{H}$ является $\mathfrak{L}_{\mathfrak{Y}}$-классом. Необходимым и достаточным условием для этого, ввиду результата Брайса–Косси [4], является справедливость равенства

$$(\mathfrak{X}\mathfrak{H})_* = (\mathfrak{X}\mathfrak{H})^* \cap \mathfrak{Y}_*. \quad (4)$$

Так как $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{H}$ – ω-локальные классы Фиттинга, то по лемме 7 произведение $\mathfrak{X}\mathfrak{H}$ также является ω-локальным классом Фиттинга. Обозначим $\mathfrak{X}\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Тогда по лемме 9 следует, что $\mathfrak{F}$ – класс Локетта.

Значит, ввиду [13, теорема 1] класс $\mathfrak{F}$ определяется наибольшей приведенной ω-локальной *H*-функцией *F*, причем $F(p)\mathfrak{N}_p = F(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $p \in \omega$.

Рассуждая аналогично, мы заключаем, что для всех $p \in Char(\mathfrak{F})$ справедливы включения

$$F(p)\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F} \subseteq F(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}.$$

Покажем теперь, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$.

В связи с тем, что $\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$ – насыщенная формация Фиттинга, то по лемме 1 имеем $(\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p)^* = (\mathfrak{F}_*)^*\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$. Но по утверждению 2) леммы 2 $(\mathfrak{F}_*)^* = \mathfrak{F}^*$. Следовательно, $(\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p)^* = \mathfrak{F}^*\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$. Так как классы $\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$ и $\mathfrak{F}\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$ локальны (см. [11, следствие 1]), то согласно [11, лемма 5] они являются классами Локетта. Следовательно, $(\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p)^* = \mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$. Так как $\mathfrak{F}$ – класс Локетта, то $\mathfrak{F}^*\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p = \mathfrak{F}\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$. Тогда $\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p = \mathfrak{F}\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$ и поэтому $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$.

Отсюда следует, что $G/G_{\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{p'}} \in \mathfrak{N}_p$ для всех групп $G \in \mathfrak{F}$.

Кроме того, из включения $\mathfrak{F} \subseteq F(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$ вытекает, что $G/G_{F(p)\mathfrak{N}_p} \in \mathfrak{E}_{p'}$ для всех групп $G \in \mathfrak{F}$.

Репозиторий ВГУ

Докажем теперь, что $\mathfrak{Y}_* \cap \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{p'}$ для всех $p \in Char(\mathfrak{F})$. Для этого установим первоначально, что

$$(\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{p'} \cap \mathfrak{F}) \vee F(p)\mathfrak{N}_p = \mathfrak{F}.$$

Так как $\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{p'} \cap \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}$ и $F(p)\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$, то включение

$$(\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{p'} \cap \mathfrak{F}) \vee F(p)\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$$

очевидно.

Докажем обратное включение.

Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $G/G_{\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{p'}} \in \mathfrak{N}_p$ и $G/G_{F(p)\mathfrak{N}_p} \in \mathfrak{E}_{p'}$.

Отсюда имеем, что

$$G/G_{F(p)\mathfrak{N}_p}G_{\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{p'}} \in \mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{E}_{p'} = (1).$$

Следовательно,

$$G = G_{F(p)\mathfrak{N}_p}G_{\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{p'}}.$$

Однако

$$G_{\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{p'}} = G_{\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{p'}} \cap G = G_{\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{p'}} \cap G_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{p'}\cap\mathfrak{F}}.$$

Итак, если $G \in \mathfrak{F}$, то

$$G = G_{F(p)\mathfrak{N}_p}G_{\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{p'}\cap\mathfrak{F}}.$$

Отсюда следует, что

$$G \in (\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{p'} \cap \mathfrak{F}) \vee F(p)\mathfrak{N}_p.$$

Таким образом,

$$\mathfrak{F} \subseteq (\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{p'} \cap \mathfrak{F}) \vee F(p)\mathfrak{N}_p.$$

Следовательно, установлено, что

$$\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{p'} \cap \mathfrak{F}) \vee F(p)\mathfrak{N}_p.$$

Значит, по лемме 3 имеем $\mathfrak{Y}_* \cap \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{p'}$ для всех $p \in Char(\mathfrak{F})$.

Остается выяснить, что если $\mathfrak{Y}_* \cap \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{p'}$ для всех $p \in Char(\mathfrak{F})$, то $\mathfrak{Y}_* \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{F}_*$.

Так как $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{Y}$, то по лемме 2 $\mathfrak{F}_* \subseteq \mathfrak{Y}_*$ и $\mathfrak{F}_* \subseteq \mathfrak{F}$.

Значит, $\mathfrak{F}_* \subseteq \mathfrak{Y}_* \cap \mathfrak{F}$.

Докажем обратное включение.

Пусть G – группа наименьшего порядка из класса $(\mathfrak{Y}_* \cap \mathfrak{F})\backslash\mathfrak{F}_*$. Тогда G имеет единственную максимальную нормальную подгруппу $M = G_{\mathfrak{F}_*}$. Составим фактор-группу G/M и пусть p – простой делитель порядка $|G/M|$.

Ввиду того, что $G \in \mathfrak{F}$, по утверждению 3) леммы 2 получаем, что $G/G_{\mathfrak{F}_*}$– абелева группа. Следовательно, G/M – композиционный фактор порядка p, т.е. $G/M \simeq Z_p \in \mathfrak{N}_p$. Отсюда $p \in Char(\mathfrak{F})$. Но по доказанному выше $G \in \mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{p'}$ и, значит, $G/M \in \mathfrak{E}_{p'}$.

Итак, $G/M \in \mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{E}_{p'} = (1)$ и $G = M \in \mathfrak{F}_*$, что противоречит предположению о том, что $G \notin \mathfrak{F}_*$. Таким образом, $\mathfrak{Y}_* \cap \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_*$. Следовательно, $\mathfrak{Y}_* \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{F}_*$. Так как $\mathfrak{F}$ является классом Локетта, то $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$. Поэтому $\mathfrak{F}$ – $\mathfrak{L}_{\mathfrak{Y}}$-класс, т.е. отображение решетки *Locksec*($\mathfrak{Y}$) в решетку *Locksec*($\mathfrak{X}\mathfrak{H}$) сюръективно. Так как $\mathfrak{X}$ является ω-локальным классом Фиттинга с $Char(\mathfrak{X}) \subseteq \omega$, то по лемме 9 $\mathfrak{X}$ – класс Локетта, т.е. $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^*$. Следовательно, отображение решетки *Locksec*($\mathfrak{Y}$) в решетку *Locksec*($\mathfrak{X}^*\mathfrak{H}$) сюръективно. Теорема доказана.

Заключение. В работе доказана сюръективность отображения решетки *Locksec*($\mathfrak{Y}$) в решетку *Locksec*($\mathfrak{X}^*\mathfrak{H}$), где $\mathfrak{Y}$ – некоторый класс Фиттинга, $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{H}$ – ω-локальные классы Фиттинга, причем $\mathfrak{X}\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{Y}$ и $Char(\mathfrak{X}\mathfrak{H}) \subseteq \omega$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fischer, B. Klassen konjugierter Untergruppen in endlichen auflösbaren Gruppen / B. Fischer. – Universität Frankfurt: Habilitationschrift, 1966.
2. Fischer, B. Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen / B. Fischer, W. Gaschütz, B. Hartley // Math. Z. – 1967. – Bd. 102, № 5. – S. 337–339.
3. Lausch, H. On normal Fitting classes / H. Lausch // Math. Z. – 1973. – Bd. 130, № 1. – S. 67–72.
4. Bryce, R.A. A problem in Theory of Normal Fitting classes / R.A. Bryce, J. Cossey // Math. Z. – 1975. – Vol. 141, № 2. – P. 99–100.
5. Lockett, P. The Fitting class $\mathfrak{F}^*$ / P. Lockett // Math. Z. – 1974. – Bd. 137, № 2. – S. 131–136.

Репозиторий ВГУ

6. Doerk, K. Finite solvable groups / K. Doerk, T. Hawkes. – New York–Berlin: Waltor de Gryeter, 1992. – 891 p.
7. Gallego, M.P. Fitting pairs from direct limits and the Lockett conjecture / I.M.P. Gallego // Comm. Algebra. – 1996. – Bd. 24, № 6. – S. 2011–2023.
8. Залесская, Е.Н. О решетках частично локальных классов Фиттинга / Е.Н. Залесская, Н.Н. Воробьёв // Сиб. матем. журн. – 2009. – Т. 50, № 6. – С. 1319–1327.
9. Скиба, А.Н. Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Математические труды. – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 114–147.
10. Ведерников, В.А. ω-веерные формации и классы Фиттинга конечных групп / В.А. Ведерников, М.М. Сорокина // Матем. заметки. – 2002. – Т. 71, вып. 1. – С. 43–60.
11. Воробьёв, Н.Т. О радикальных классах конечных групп с условием Локетта / Н.Т. Воробьёв // Мат. заметки. – 1988. – Т. 43, № 2. – С. 161–168.
12. Ведерников, В.А. Q-расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп / В.А. Ведерников, М.М. Сорокина // Дискретная математика. – 2001. – Т. 13, вып. 3. – С. 125–144.
13. Воробьёв, Н.Т. О наибольшей приведенной функции Хартли / Н.Т. Воробьёв // Изв. Гомельск. гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2000. – № 1. – С. 8–13.

REFERENCES

1. Fischer, B. Klassen konjugierter Untergruppen in endlichen auflösbaren Gruppen / B. Fischer. – Universität Frankfurt: Habilitationschrift, 1966.
2. Fischer, B. Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen / B. Fischer, W. Gaschutz, B. Hartley // Math. Z. – 1967. – Bd. 102, № 5. – S. 337–339.
3. Lausch, H. On normal Fitting classes / H. Lausch // Math. Z. – 1973. – Bd. 130, № 1. – S. 67–72.
4. Bryce R.A., Cossey J. A problem in Theory of Normal Fitting classes // Math. Z. – 1975. – Vol. 141, № 2. – P. 99–100.
5. Lockett P. The Fitting class $\mathfrak{F}^*$ // Math. Z. – 1974. – Bd. 137, № 2. – S. 131–136.
6. Doerk K., Hawkes T. Finite solvable groups // Waltor de Gryeter. – New York, Berlin, 1992. – 891 p.
7. Gallego M.P. Fitting pairs from direct limits and the Lockett conjecture // Comm. Algebra. – 1996. – Bd. 24, № 6. – S. 2011–2023.
8. Zalesskaya E.N., Vorobyev N.N. *Sib. matem. zhurn.* [Siberian Math. Journal], 50(6), 2009, pp. 1038–1044.
9. Skiba A.N., Shemetkov L.A. *Matematicheskiye trudy* [Mathematical Papers], 1999, 2(2), pp. 114–147.
10. Vedernikov V.A., Sorokina M.M. *Matematicheskiye zametki* [Math. Notes], 71(1), 2002, pp. 39–55.
11. Vorobyev N.T. *Matematicheskiye zametki* [Math. Notes], 43(2), 1988, pp. 161–168.
12. Vedernikov V.A., Sorokina M.M. *Diskretnaya matematika* [Discrete Mathematics], 2001, 13(3), pp. 125–144.
13. Vorobyev N.T. *Izv. Gomelsk. gos. un-ta* [News of Gomel State University], 2000, 1, pp. 8–13.

Поступила в редакцию 08.04.2021

Адрес для корреспонденции: e-mail: iulia.isachencko2017@yandex.by – Исаченко Ю.В.

Репозиторий ВГУ