ЗАДАЧА ТИПА КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ОБЩЕГО ВИДА ДРОБНОГО ПОРЯДКА

С.А. Шлапаков
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

В работе объектом исследования является задача типа Коши. Постановка задачи производится для дифференциального уравнения общего вида дробного порядка, в качестве производной выступает дробная производная Адамара [2]. Естественно возникает проблема интегрирования такого уравнения с учётом начальных условий. Настоящая работа посвящена этому аспекту. Цель данного исследования состоит в получении интегрального уравнения второго рода, которое будет эквивалентным поставленной задаче.

Материал и методы. Материалом исследования является операция дробного дифференцирования Адамара применительно к интегрированию дифференциального уравнения дробного порядка. В работе используется аппарат функционального анализа в сочетании с методами дифференциального и интегрального исчислений.

Результаты и их обсуждение. В [1] рассматривалась задача типа Коши для дифференциального уравнения дробного порядка вида

$$\left(D_{0+}^{\alpha}y\right)(x)=f(x,y(x)),\; n-1<\alpha\le n,\; n\in N,\; n=-[-\alpha] \tag{1}$$

при начальных условиях

$$\left(D_{0+}^{\alpha-k}y\right)(0+)=b_k,\; k=1,2,\ldots,n, \tag{2}$$

где D_{0+}^{α} – дробная производная Римана-Лиувилля [1], $f(x,y)$ – заданная функция в некоторой области $D\subset R^2$, $\alpha, b_1, b_2, \ldots, b_n$ – постоянные вещественные числа. Введём в рассмотрение множество $R_n\subset D$:

$$R_n=\left\{(x,y)\in D: 0<x\le h, \left|x^{n-\alpha}y(x)-\frac{b_n}{\Gamma(\alpha-n+1)}\right|\le a\right\},$$
$$a>\sum_{k=0}^{n-1}\frac{h^{n-k}b_k}{\Gamma(\alpha-k+1)}, \tag{3}$$

где $a, h, b_0\in R$.

Теорема 1. Пусть $f(x,y)$ является вещественнозначной и непрерывной в области D функцией, причём она удовлетворяет по переменной y условию Липшица

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2|,\quad L>0$$

и ограничению

$$\sup_{(x,y)\in D}|f(x,y)|=b_0<+\infty.$$

Тогда решение задачи (1) - (2) для $n=1,2,\ldots$ в (3) существует, является непрерывным и единственным.

В ходе доказательства этого утверждения было показано, что задача типа Коши (1) - (2) эквивалентна уравнению

$$y(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{\Gamma(\alpha-k+1)}x^{\alpha-k}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}f(t,y(t))dt.$$

Этот факт согласуется с тем, что дифференциальное уравнение

$$\frac{d^n u}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}+a_2(x)\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}}+\cdots+a_n(x)u=F(x),\; x>0$$

с начальными условиями при $x=0$

$$u(0)=c_0,\; u'(0)=c_1,\; u''(0)=c_2,\;\ldots,\; u^{(n-1)}(0)=c_{n-1}$$

эквивалентно интегральному уравнению Вольтерра [3]

$$\varphi(x)+\int_0^x K(x,s)\varphi(s)ds=f(x),$$

где

$$K(x,s)=\sum_{k=1}^{n}a_k(x)\frac{(x-s)^{k-1}}{(k-1)!},$$

$$f(x)=F(x)-c_{n-1}a_1(x)-(c_{n-1}x+c_{n-2})a_2(x)-\ldots-\left(c_{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots\cdots+c_1x+c_0\right)a_n(x).$$

Дробная производная Адамара порядка $\alpha>0$ [2] определяется конструкцией вида

$$\left(D_{a+}^{\alpha}f\right)(x)=\delta^n\left(\Im_{a+}^{n-\alpha}f\right)(x),\quad \delta=x\frac{d}{dx},\quad \alpha>0,\quad n=[\alpha]+1,$$

что можно понимать и так

$$\left(D_{a+}^{\alpha}f\right)(x)=\delta^n\left(\Im_{a+}^{n-\alpha}f\right)(x)=\delta^n\left(D_{a+}^{\alpha-n}f\right)(x),$$

где

$$\left(\Im_{a+}^{\alpha}f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\frac{f(t)}{\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{1-\alpha}}\frac{dt}{t},\quad \alpha>0,\quad 0<a<x$$

является дробным интегралом Адамара порядка $\alpha>0$.

Естественным видится постановка задачи типа Коши для дифференциального уравнения с дробной производной Адамара:

$$\left(D_{a+}^{\alpha}y\right)(x)=f(x,y(x)),\ n-1<\alpha\le n,\ n\in N,\ a>0 \tag{4}$$

при начальных условиях

$$\left(D_{a+}^{\alpha-k}y\right)(a+)=b_k,\ k=1,2,\ldots,n=-[-\alpha], \tag{5}$$

Задачу (4)–(5) будем рассматривать в пространстве регулярных функций

$$L_{\delta}^{\alpha}(a,b)=\left\{y\in L(a,b)\,\middle|\,D_{a+}^{\alpha}y\in L(a,b)\right\},\ 0<a<b<+\infty. \qquad 6)$$

Интегрируя по Адамару уравнение дробного порядка (4), получаем следующее утверждение.

Теорема 2. Задача (4) – (5) в пространстве (6) равносильна интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$y(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{\Gamma(\alpha-k+1)}\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha-k}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}f(t,y(t))\frac{dt}{t},\ x>a.$$

Заключение. В приложениях часто возникает необходимость решать аналоги задач Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка. К тому же при интегрировании некоторых классов дифференциальных уравнений целого порядка приходится обращаться к теории дробного дифференцирования и теории дифференциальных уравнений дробного порядка. В работе получено интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода, эквивалентное задаче типа Коши для дифференциального уравнения дробного порядка с дробной производной Адамара.

1. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Мн.: Наука и техника, 1987. – 688 с.

2. Шлапаков, С.А. Операторы дробного интегродифференцирования по Адамару / С.А. Шлапаков // Наука – образованию, производству, экономи- ке: материалы XVI (63) Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов (Витебск, 16–17 марта 2011г.) – 2011. Т. 1. С. 71-73.

3. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. –5-ое изд. – М: Наука, 1966. –576 с.