где

$$Q(\alpha,s)\equiv[Q_0(\alpha,s),Q_1(\alpha,s),\dots,Q_{n-1}(\alpha,s)],$$
$$Q_0(\alpha,s)\equiv B(\alpha,s),\ Q_1(\alpha,s)\equiv A(\alpha,s)B(\alpha,s)-\frac{d}{ds}\ B(\alpha,s),$$
$$Q_{\beta+1}(\alpha,s)\equiv A(\alpha,s)Q_\beta(\alpha,s)-\frac{d}{ds}\ Q_\beta(\alpha,s),$$
$$A(\alpha,s)\equiv\alpha_1A_1(\alpha_1s+t_1^0,\alpha_2s+t_2^0)+\alpha_2A_2(\alpha_1s+t_1^0,\alpha_2s+t_2^0),$$
$$B(\alpha,s)\equiv\alpha_1B_1(\alpha_1s+t_1^0,\alpha_2s+t_2^0)+\alpha_2B_2(\alpha_1s+t_1^0,\alpha_2s+t_2^0).$$

1. Храмцов, О.В. К управляемости стационарных систем Пфаффа / О.В. Храмцов // Дифференциальные уравнения, 1985. - Т.21. - № 11.- С. 1933 - 1939.
2. Гайшун, И.В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения / И.В. Гайшун. - Минск. Наука и техника, 1983.
3. Ли, Э.Б. Основы теории оптимального управления / Э.Б. Ли, Л. Маркус. - Москва. Наука, 1972.

МОДИФИКАЦИЯ ФОРМУЛ БЕРНУЛЛИ–ЭЙТКЕНА ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО НАХОЖДЕНИЯ КОРНЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

М.М. Чернявский
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

С начала XXI века возродился интерес к формулам и алгоритмам для приближенного нахождения всех корней алгебраических уравнений произвольных степеней, в частности к формулам Эйткена, которые являются обобщением алгоритма Бернулли [1]. В стандартном виде они практически не применялись на практике из-за сложности ручных вычислений и представляли чисто теоретический интерес. Развитие систем компьютерной математики позволило реализовывать многие теоретические алгоритмы, многие из которых в современных условиях оказались весьма эффективными.

Цель исследования – получить аналоги формул Эйткена в терминах коэффициентов ряда Тейлора для функции $1/P(z)$, где $P(z)$ – алгебраический полином степени n комплексного аргумента z.

Материал и методы. Материалом исследования являются алгебраические уравнения произвольной степени с комплексными коэффициентами. Методы исследования – методы математического анализа с использованием системы компьютерной математики *Maple* 2019.

Результаты и их обсуждение. Рассмотрим случай, когда алгебраическое уравнение

$$P(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_{n-1}z+a_n=0 \tag{1}$$

с комплексными коэффициентами имеет простые корни, причем

$$0<|z_1|<|z_2|<\ldots<|z_n|.$$

В этом случае ряд Тейлора функции $1/P(z)$ имеет следующий вид

$$1/P(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^k,$$

где

$$c_k=\frac{b_1}{z_1^k}+\frac{b_2}{z_2^k}+\ldots+\frac{b_n}{z_n^k},$$

$z_j\ (j=1,2,\ldots,n)$ – корни полинома $P(z)$; $b_j\ (j=1,2,\ldots,n)$ – некоторые константы. Это следует из разложения дроби $1/P(z)$ на простые, для каждой из которых коэффициенты разложения в ряд Тейлора несложно получить аналитически [2].

Составим отношение

$$\frac{c_m}{c_{m+1}}=\frac{\dfrac{b_1}{z_1^m}+\dfrac{b_2}{z_2^m}+\ldots+\dfrac{b_n}{z_n^m}}{\dfrac{b_1}{z_1^{m+1}}+\dfrac{b_2}{z_2^{m+1}}+\ldots+\dfrac{b_n}{z_n^{m+1}}}=\frac{z_1^{m+1}}{z_1^m}\cdot\frac{b_1+b_2\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^m+\ldots+b_n\left(\dfrac{z_1}{z_n}\right)^m}{b_1+b_2\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^{m+1}+\ldots+b_n\left(\dfrac{z_1}{z_n}\right)^{m+1}}.$$

Так как $|z_1|<|z_2|$, то все слагаемые в скобках последнего выражения стремятся к нулю при $m\to\infty$. Следовательно,

$$\lim_{m\to\infty}\frac{c_m}{c_{m+1}}=z_1.$$

Для выражения корня z_2 рассмотрим определители:

$$\begin{vmatrix}c_{m+8} & c_{m+7}\\ c_{m+7} & c_{m+6}\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}c_{m+7} & c_{m+6}\\ c_{m+6} & c_{m+5}\end{vmatrix}.$$

Учитывая, что величины b_j/z_j^k $(j=3,4,\ldots,n)$ имеют более высокий порядок малости по сравнению с величинами b_j/z_j^k $(j=1,2)$, для этих определителей считаем, что

$$c_k=\frac{b_1}{z_1^k}+\frac{b_2}{z_2^k},$$

тогда

$$\begin{vmatrix}c_{m+8} & c_{m+7}\\ c_{m+7} & c_{m+6}\end{vmatrix}=\frac{b_1b_2(z_1-z_2)^2}{z_1^8z_2^8\,z_1^mz_2^m},\quad \begin{vmatrix}c_{m+7} & c_{m+6}\\ c_{m+6} & c_{m+5}\end{vmatrix}=\frac{b_1b_2(z_1-z_2)^2}{z_1^7z_2^7\,z_1^mz_2^m}.$$

Таким образом, для полных (т. е. не урезанных) значений c_k получим

$$\frac{\begin{vmatrix}c_{m+7} & c_{m+6}\\ c_{m+6} & c_{m+5}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}c_{m+8} & c_{m+7}\\ c_{m+7} & c_{m+6}\end{vmatrix}}=\frac{\dfrac{b_1b_2(z_1-z_2)^2}{z_1^7z_2^7z_1^mz_2^m}+h_1}{\dfrac{b_1b_2(z_1-z_2)^2}{z_1^8z_2^8z_1^mz_2^m}+h_2},$$

где h_j $(j=1,2)$ – величины более высокого порядка малости по сравнению с величиной $z_1^{-m}z_2^{-m}$. Т. е.

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\begin{vmatrix}c_{m+7} & c_{m+6}\\ c_{m+6} & c_{m+5}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}c_{m+8} & c_{m+7}\\ c_{m+7} & c_{m+6}\end{vmatrix}}=\lim_{m\to\infty}\frac{\dfrac{b_1b_2(z_1-z_2)^2}{z_1^7z_2^7z_1^mz_2^m}+h_1}{\dfrac{b_1b_2(z_1-z_2)^2}{z_1^8z_2^8z_1^mz_2^m}+h_2}=z_1z_2 \qquad (2)$$

и

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\begin{vmatrix}c_{m+7} & c_{m+6}\\ c_{m+6} & c_{m+5}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}c_{m+8} & c_{m+7}\\ c_{m+7} & c_{m+6}\end{vmatrix}}:\lim_{m\to\infty}\frac{c_{m+7}}{c_{m+8}}=\frac{z_1z_2}{z_1}=z_2.$$

Далее для получения удобного значения определителя

$$\begin{vmatrix}c_{m+8} & c_{m+7} & c_{m+6}\\ c_{m+7} & c_{m+6} & c_{m+5}\\ c_{m+6} & c_{m+5} & c_{m+4}\end{vmatrix}=\frac{b_1b_2b_3(z_1-z_2)^2(z_1-z_3)^2(z_2-z_3)^2}{z_1^8z_2^8z_3^8\,z_1^mz_2^mz_3^m}$$

в формулах для c_k оставляем слагаемые, содержащие только $z_j\left(j=1,2,3\right)$.

Таким образом,

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\begin{vmatrix} c_{m+7} & c_{m+6} & c_{m+5} \\ c_{m+6} & c_{m+5} & c_{m+4} \\ c_{m+5} & c_{m+4} & c_{m+3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_{m+8} & c_{m+7} & c_{m+6} \\ c_{m+7} & c_{m+6} & c_{m+5} \\ c_{m+6} & c_{m+5} & c_{m+4} \end{vmatrix}}=z_1z_2z_3 \Rightarrow \lim_{m\to\infty}\frac{\begin{vmatrix} c_{m+7} & c_{m+6} & c_{m+5} \\ c_{m+6} & c_{m+5} & c_{m+4} \\ c_{m+5} & c_{m+4} & c_{m+3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_{m+8} & c_{m+7} & c_{m+6} \\ c_{m+7} & c_{m+6} & c_{m+5} \\ c_{m+6} & c_{m+5} & c_{m+4} \end{vmatrix}} : \lim_{m\to\infty}\frac{\begin{vmatrix} c_{m+7} & c_{m+6} \\ c_{m+6} & c_{m+5} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_{m+8} & c_{m+7} \\ c_{m+7} & c_{m+6} \end{vmatrix}}=z_3, \qquad (3)$$

и т.д.

Рассмотрим конкретный числовой пример:

$$f\left(z\right)=z^4+5z^3-20z^2-60z+144=\left(z-2\right)\left(z-3\right)\left(z+4\right)\left(z+6\right)=0.$$

При помощи системы компьютерной математики *Maple* 2019 разложим функцию $1/f\left(z\right)$ в ряд Тейлора, например, до 100 слагаемых. Тогда

$$z_1\approx c_{95}/c_{96}=1,9999999999999.$$

По формуле (2) $z_1z_2\approx 6,000000000287\Rightarrow z_2\approx 3,0000000001437$.

По формуле (3) $z_1z_2z_3\approx -24,0000000000000\Rightarrow z_3\approx -3,9999999998084$.

По теореме Виета произведение корней $z_1z_2z_3z_4=144$, откуда сразу следует значение корня z_4.

Заключение. Таким образом, в ходе исследования получены аналоги формул Эйткена в терминах коэффициентов ряда Тейлора для функции $1/P\left(z\right)$, где $P\left(z\right)$ – алгебраический полином степени n комплексного аргумента z, и на конкретных числовых примерах проверена их эффективность.

1. Aitken, A.C. On Bernulli's numerical solution of algebraic equations / A.C. Aitken // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 1927. – Vol. 46. – P. 289–305.

2. Трубников, Ю.В. Расходящиеся степенные ряды и формулы приближенного аналитического нахождения решений алгебраических уравнений / Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2018. – № 4(101). – С. 5–17.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТЕЙ СРЕДЫ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ MOODLE ДЛЯ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА ТЕСТОВ

А.А. Чиркина, Н.В. Булгакова
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

В настоящее время в связи с необходимостью более широкого применения информационно-коммуникационных технологий на всех этапах обучения, особое внимание уделяется тестовой форме контроля знаний. Тест является инструментом, с помощью которого можно оценить знания студентов, и для того, чтобы эффективно выполнять свои функции, он должен быть тщательно подготовлен. Для экспертизы качества тестовых заданий недостаточно формальной проверки таких требований, как правильность формулировки вопросов, количества дистракторов, формы представления тестового задания. Необходимо оценивать такие характеристики, как трудность, дискриминативность, надежность, которые можно получить только с помощью статистического анализа результатов пилотного прохождения тестов группой студентов [1]. Система дистанционного обучения Moodle имеет встроенные средства для получения полезной информации о статистических характеристиках тестовых заданий, которая позволяет выявить «проблемные» задания, не вдаваясь в технические сложности расчетов этих характеристик.