УПРАВЛЯЕМОСТЬ ВПОЛНЕ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ ПФАФФА

О.В. Храмцов, С.М. Бородич
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

В работе [1] найдено условие полной управляемости линейных стационарных систем Пфаффа. Цель данной работы: найти условие полной управляемости линейной нестационарной системы Пфаффа.

Материал и методы. Рассматривается вполне интегрируемая линейная нестационарная система Пфаффа, для которой находится условие полной управляемости. В исследовании применяются методы аналитической геометрии и линейной алгебры.

Результаты и их обсуждение.

Рассматривается процесс, описываемый вполне интегрируемой линейной нестационарной системой Пфаффа Θ:

$$dx = (A_1(t_1,t_2)x + B_1(t_1,t_2)u(t_1,t_2))dt_1 + (A_2(t_1,t_2)x + B_2(t_1,t_2)u(t_1,t_2))dt_2, \qquad (1)$$

где $t=(t_1,t_2)\in D\subset R^2$ – векторный аргумент, $D-$ связная односвязная выпуклая область, $x\in R^n$ – выход, состояние системы, $u\in R^r$ – вход, управление, непрерывно дифференцируемая вектор-функция, $r\le 2n$, $A_1(t),A_2(t),B_1(t),B_2(t)$, $t\in D$, – вещественные матрицы соответствующих размерностей с аналитическими элементами.

Для системы (1) выполняются условия полной интегрируемости [2, с.44], которые в данном случае имеют вид

$$\frac{\partial A_1(t)}{\partial t_2} + A_1(t)A_2(t) \equiv \frac{\partial A_2(t)}{\partial t_1} + A_2(t)A_1(t),\ t\in D. \qquad (2)$$

$$B_1(t)\frac{\partial u}{\partial t_2} - B_2(t)\frac{\partial u}{\partial t_1} = P(t)u,\ t\in D, \qquad (3)$$

где $P(t)\equiv A_2(t)B_1(t) - A_1(t)B_2(t) + \frac{\partial B_2(t)}{\partial t_1} - \frac{\partial B_1(t)}{\partial t_2}$.

Требования (2) и (3) должны выполняться тождественно, поэтому в качестве допустимых управлений u рассматриваются решения системы (3). Для разрешимости системы (3) необходимо и достаточно выполнение рангового условия (см. [1]): существует постоянный вещественный вектор $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$ такой, что имеет место следующее равенство рангов матриц:

$$rank[\alpha_1 B_1(t)+\alpha_2 B_2(t)] = rank[B_1(t),B_2(t)] = rank[B_1(t),B_2(t),P(t)] = m,$$

$t\in D,\quad m\le n.$

***Определение* 1**. *Система (1) называется вполне управляемой в окрестности D_0 регулярной точки t^0, если для произвольных состояний $x^0,x^1\in R^n$ существуют непрерывно дифференцируемое управление $u=u(t,x^0,x^1)$, $t\in D_0$, и точка $t^1=(t_1^1,t_2^1)$, $0<t_1^1,t_2^1<\infty$, такие, что система (1) вполне интегрируема и для частного решения системы (1) наряду с начальным условием $x(t^0)=x^0$ выполняется конечное условие*

$$x(t^1)=x^1.$$

Задача: указать условия для матриц системы (1), при которых эта система является вполне управляемой.

Основным результатом исследования является

Теорема 1. *Линейная нестационарная вполне интегрируемая система Пфаффа (1) с аналитическими элементами матриц вполне управляема в окрестности D_0 регулярной точки t^0, если существует вектор $\alpha\in R^2$ такой, что выполняется условие*

$$rank\, Q(\alpha,0)=n,$$

где

$$Q(\alpha,s)\equiv[Q_0(\alpha,s),Q_1(\alpha,s),\ldots,Q_{n-1}(\alpha,s)],$$

$$Q_0(\alpha,s)\equiv B(\alpha,s),\ Q_1(\alpha,s)\equiv A(\alpha,s)B(\alpha,s)-\frac{d}{ds}\ B(\alpha,s),$$

$$Q_{\beta+1}(\alpha,s)\equiv A(\alpha,s)Q_\beta(\alpha,s)-\frac{d}{ds}\ Q_\beta(\alpha,s),$$

$$A(\alpha,s)\equiv\alpha_1A_1(\alpha_1s+t_1^0,\alpha_2s+t_2^0)+\alpha_2A_2(\alpha_1s+t_1^0,\alpha_2s+t_2^0),$$

$$B(\alpha,s)\equiv\alpha_1B_1(\alpha_1s+t_1^0,\alpha_2s+t_2^0)+\alpha_2B_2(\alpha_1s+t_1^0,\alpha_2s+t_2^0).$$

1. Храмцов, О.В. К управляемости стационарных систем Пфаффа / О.В. Храмцов // Дифференциальные уравнения, 1985. - Т.21. - № 11.- С. 1933 - 1939.
2. Гайшун, И.В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения / И.В. Гайшун. - Минск. Наука и техника, 1983.
3. Ли, Э.Б. Основы теории оптимального управления / Э.Б. Ли, Л. Маркус. - Москва. Наука, 1972.

МОДИФИКАЦИЯ ФОРМУЛ БЕРНУЛЛИ–ЭЙТКЕНА ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО НАХОЖДЕНИЯ КОРНЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

М.М. Чернявский
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

С начала XXI века возродился интерес к формулам и алгоритмам для приближенного нахождения всех корней алгебраических уравнений произвольных степеней, в частности к формулам Эйткена, которые являются обобщением алгоритма Бернулли [1]. В стандартном виде они практически не применялись на практике из-за сложности ручных вычислений и представляли чисто теоретический интерес. Развитие систем компьютерной математики позволило реализовывать многие теоретические алгоритмы, многие из которых в современных условиях оказались весьма эффективными.

Цель исследования – получить аналоги формул Эйткена в терминах коэффициентов ряда Тейлора для функции $1/P(z)$, где $P(z)$ – алгебраический полином степени n комплексного аргумента z.

Материал и методы. Материалом исследования являются алгебраические уравнения произвольной степени с комплексными коэффициентами. Методы исследования – методы математического анализа с использованием системы компьютерной математики *Maple* 2019.

Результаты и их обсуждение. Рассмотрим случай, когда алгебраическое уравнение

$$P(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_{n-1}z+a_n=0 \qquad (1)$$

с комплексными коэффициентами имеет простые корни, причем

$$0<|z_1|<|z_2|<\ldots<|z_n|.$$

В этом случае ряд Тейлора функции $1/P(z)$ имеет следующий вид

$$1/P(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^k,$$

где

$$c_k=\frac{b_1}{z_1^k}+\frac{b_2}{z_2^k}+\ldots+\frac{b_n}{z_n^k},$$

$z_j\ (j=1,2,\ldots,n)$ – корни полинома $P(z)$; $b_j\ (j=1,2,\ldots,n)$ – некоторые константы. Это следует из разложения дроби $1/P(z)$ на простые, для каждой из которых коэффициенты разложения в ряд Тейлора несложно получить аналитически [2].