Проблема № 4 – «Экспериментальный тур», на котором участники должны провести экспериментальное исследование, включающее проведение измерений, обработку их результатов, построение графиков и анализ полученных закономерностей. Причем, обработка экспериментальных результатов должна быть проведена с использованием метода наименьших квадратов или, например, нахождение каких-либо неизвестных физических параметров в нелинейных процессах – с использованием метода лианеризации функции. Основными трудностями этого тура являются: корректное трехкратное измерение необходимых физических характеристик не менее, чем по 10 точкам; корректное представление результатов экспериментальных измерений и вычислений в виде таблиц; правильное построение графиков; обработка экспериментальных результатов с использованием метода наименьших квадратов и нахождение каких-либо неизвестных физических параметров в нелинейных процессах с использованием метода лианеризации функции. Для тех, кто все-таки реально хочет разобраться с методом наименьших квадратов и методом лианеризации функции, автор рекомендует, например, книгу [4]. В главе, посвященной методу наименьших квадратов, помимо описания самого метода и примеров расчетов, приведены хорошие реальные физические примеры лианеризации нескольких экспериментальных зависимостей. По опыту использования можно утверждать, что школьники хорошо понимают приведенные в этой книге примеры. Конечно, основная дальнейшая трудность заключается в отработке навыков уже собственных исследований, проводимых при подготовке к олимпиаде.

Заключение. Таким образом, в результате проведенного анализа выявлены основные проблемы, возникающие при подготовке учащихся средних общеобразовательных учреждений – участников областного и республиканского этапов олимпиады по физике и предложены пути их решения.

1. Аксенович, Л.А. Физика в средней школе: теория, задания, тесты : учебное пособие для учреждений, обеспечивающих получение общего среднего образования / Л.А. Аксенович, Н.Н. Ракина, К.С. Фарино. – Минск: Адукацыя і выхаванне, 2004, 2011.
2. Бутиков, Е.И. Физика для углубленного изучения: в 3 т. : учеб.-метод. пособие для учащихся школ, гимназий, лицеев с углубл. изучен. физ.-мат. дисц. / Е.И. Бутиков, А.С. Кондратьев. – М.: Физматлит, 2018.
3. Библиотека видеоуроков школьной программы – Режим доступа: https://interneturok.ru. – Дата доступа: 28.01.2021.
4. Светозаров, В.В. Основы статистической обработки результатов измерений : учеб. пособ. / В.В. Светозаров. – М.: Изд. МИФИ, 2005. – 40 с.

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ НАХОЖДЕНИЯ КРАТНЫХ КОРНЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПЯТОЙ СТЕПЕНИ

Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Известно, что многие аналитические результаты, связанные с изучением дискриминантов полиномов, были получены классиками еще в начале XX века. Возможные попытки применения тех абстрактных конструкций к конкретным типам алгебраических уравнений не могли быть успешными, поскольку даже в простых случаях получались промежуточные громоздкие выражения, не пригодные для ручных вычислений.

Интерес к этой теме возродился в начале XXI века [1]. Этому способствовали развитие систем компьютерной алгебры и вычислительных возможностей компьютерной техники. Цель настоящей работы – на примере полинома пятой степени с заданными мультипликативными структурами получить точные формулы нахождения кратных корней в терминах дробно-рациональных функций от коэффициентов полинома. Из рассуждений, применяемых при выводе таких формул, видно, что аналогичные формулы могут быть получены для полиномов произвольной степени.

Материал и методы. Материалом исследования являются алгебраические полиномы пятой степени комплексного аргумента, имеющие кратные корни. Методы исследования – методы математического анализа с использованием системы компьютерной математики *Maple* 2019.

Результаты и их обсуждение. Рассмотрим алгебраическое уравнение пятой степени с комплексными коэффициентами b_i $\left(i=\overline{1,5}\right)$

$$P(z)=z^5+b_1z^4+b_2z^3+b_3z^2+b_4z+b_5=0. \tag{1}$$

Пусть уравнение (1) имеет один кратный корень z_1 кратности 2, то есть представимо в виде

$$\left(z-z_1\right)^2\left(z-z_2\right)\left(z-z_3\right)\left(z-z_4\right)=0,$$

тогда справедлива теорема 1.

Теорема 1. *Корень уравнения (1) z_1 кратности 2, если он единственный кратный корень, можно определить по формулам*

$$z_1=\frac{\partial G}{\partial b_j}:\frac{\partial G}{\partial b_{j+1}} \quad \left(j=\overline{1,4}\right), \tag{2}$$

где G – дискриминант уравнения (1).

Доказательство. Дискриминант уравнения (1) будет иметь вид [2]:

$$\begin{aligned}G={}&256b_1^5b_5^3-192b_1^4b_2b_4b_5^2-128b_1^4b_3^2b_5^2+144b_1^4b_3b_4^2b_5-27b_1^4b_4^4+144b_1^3b_2^2b_3b_5^2-\\&-6b_1^3b_2^2b_4^2b_5-80b_1^3b_2b_3^2b_4b_5+18b_1^3b_2b_3b_4^3+16b_1^3b_3^4b_5-4b_1^3b_3^3b_4^2-27b_1^2b_2^4b_5^2+18b_1^2b_2^3b_3b_4b_5-\\&-4b_1^2b_2^3b_4^3-4b_1^2b_2^2b_3^3b_5+b_1^2b_2^2b_3^2b_4^2-1600b_1^3b_2b_5^3+160b_1^3b_3b_4b_5^2-36b_1^3b_4^3b_5+1020b_1^2b_2^2b_4b_5^2+\\&+560b_1^2b_2b_3^2b_5^2-746b_1^2b_2b_3b_4^2b_5+144b_1^2b_2b_4^4+24b_1^2b_3^3b_4b_5-6b_1^2b_3^2b_4^3-630b_1b_2^3b_3b_5^2+\\&+24b_1b_2^3b_4^2b_5+356b_1b_2^2b_3^2b_4b_5-80b_1b_2^2b_3b_4^3-72b_1b_2b_3^4b_5+18b_1b_2b_3^3b_4^2+108b_2^5b_5^2-\\&-72b_2^4b_3b_4b_5+16b_2^4b_4^3+16b_2^3b_3^3b_5-4b_2^3b_3^2b_4^2+2000b_1^2b_3b_5^3-50b_1^2b_4^2b_5^2+2250b_1b_2^2b_5^3-\\&-2050b_1b_2b_3b_4b_5^2+160b_1b_2b_4^3b_5-900b_1b_3^3b_5^2+1020b_1b_3^2b_4^2b_5-192b_1b_3b_4^4-900b_2^3b_4b_5^2+\\&+825b_2^2b_3^2b_5^2+560b_2^2b_3b_4^2b_5-128b_2^2b_4^4-630b_2b_3^3b_4b_5+144b_2b_3^2b_4^3+108b_3^5b_5-27b_3^4b_4^2-\\&-2500b_1b_4b_5^3-3750b_2b_3b_5^3+2000b_2b_4^2b_5^2+2250b_3^2b_4b_5^2-1600b_3b_4^3b_5+256b_4^5+3125b_5^4.\end{aligned}$$

Найдем значения частных производных от дискриминанта по коэффициентам уравнения (1) $\partial G/\partial b_i$ $(i=\overline{1,5})$, а затем подставим в них значения коэффициентов b_i, выраженных с помощью соотношений Виета через корни z_i $(i=\overline{1,5})$. Тогда после преобразований получим

$$\partial G/\partial b_i=-4z_1^{5-i}\left(z_2-z_3\right)^2\left(z_2-z_4\right)^2\left(z_3-z_4\right)^2\left(z_1-z_2\right)^3\left(z_1-z_3\right)^3\left(z_1-z_4\right)^3 \quad \left(i=\overline{1,5}\right),$$

откуда сразу следует справедливость теоремы 1.

Теперь рассмотрим случай, когда уравнение (1) имеет один кратный корень z_1 кратности 3 и два простых корня, то есть оно представимо в виде

$$\left(z-z_1\right)^3\left(z-z_2\right)\left(z-z_3\right)=0.$$

Обозначим

$$g_1=\frac{\partial^2 G}{\partial b_1^2},\ g_2=\frac{\partial^2 G}{\partial b_1\partial b_2},\ g_3=\frac{\partial^2 G}{\partial b_2^2},\ g_4=\frac{\partial^2 G}{\partial b_2\partial b_3},\ \ldots,\ g_8=\frac{\partial^2 G}{\partial b_4\partial b_5},\ g_9=\frac{\partial^2 G}{\partial b_5^2}. \tag{3}$$

Тогда справедлива теорема 2.

Теорема 2. *Корень уравнения (1) z_1 кратности 3 при отсутствии других кратных корней находится по формулам*

$$z_1=g_k/g_{k+1} \quad \left(k=\overline{1,8}\right),$$

где g_j находятся по формулам (3).

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1. После вычисления всех g_k по формулам (3) и подстановки в них коэффициентов исходного уравнения, выраженных через корни, после преобразования получаем

$$g_j=-54z_1^{9-j}\left(z_2-z_3\right)^2\left(z_1-z_2\right)^4\left(z_1-z_3\right)^4 \quad \left(j=\overline{1,9}\right),$$

откуда сразу следует справедливость теоремы 2.

Заметим, что формулы (2) для нахождения значений корня кратности 3 не работают, поскольку в этом случае все первые производные от дискриминанта по коэффициентам уравнения равны нулю.

Теперь рассмотрим случай, когда уравнение (1) имеет один кратный корень z_1 кратности 4 и один простой корень, то есть оно представимо в виде

$$\left(z-z_1\right)^4\left(z-z_2\right)=0.$$

Обозначим

$$h_1=\frac{\partial^3 G}{\partial b_1^3},\ h_2=\frac{\partial^3 G}{\partial b_1^2\partial b_2},\ h_3=\frac{\partial^3 G}{\partial b_1\partial b_2^2},\ h_4=\frac{\partial^3 G}{\partial b_2^3},\ \ldots,\ h_{12}=\frac{\partial^3 G}{\partial b_4\partial b_5^2},\ h_{13}=\frac{\partial^3 G}{\partial b_5^3}. \quad (4)$$

Тогда справедлива теорема 3.

Теорема 3. *Корень уравнения (1)* z_1 *кратности 4 можно точно вычислить по формулам*

$$z_1=h_k\,/\,h_{k+1}\quad\left(k=\overline{1,12}\right), \quad (5)$$

где h_j *находятся по формулам (4).*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1. После соответствующих преобразований получаем, что частные производные третьего порядка от дискриминанта (4) имеют вид

$$h_j=1536z_1^{13-j}\left(z_1-z_2\right)^5\quad\left(j=\overline{1,13}\right).$$

Выражения (5) представляют собой дробно-рациональные выражения от коэффициентов уравнения (1). Например, отношение $h_{12}\,/\,h_{13}$ имеет вид:

$$z_1=-\left(96b_1^4b_2-80b_1^3b_3-510b_1^2b_2^2+50b_1^2b_4+1025b_1b_2b_3+450b_2^3+3750b_1b_5-2000b_2b_4-\right.$$
$$\left.-1125b_3^2\right)/\left(3\left(128b_1^5-800b_1^3b_2+1000b_1^2b_3+1125b_1b_2^2-1250b_1b_4-1875b_2b_3+6250b_5\right)\right).$$

Рассмотрим конкретный числовой пример. Пусть

$$x^5-23x^4+210x^3-950x^2+2125x-1875=\left(x-5\right)^4\left(x-3\right).$$

Убеждаемся, что все формулы (5) дают значение $x_1=5$.

Наконец, если уравнение (1) имеет вид $\left(z-z_1\right)^5=0,$ то справедлива

Теорема 4. *Корень уравнения (1)* z_1 *кратности 5 можно точно вычислить по формулам*

$$z_1=f_k\,/\,f_{k+1}\quad\left(k=\overline{1,15}\right), \quad (6)$$

где f_k *находятся по формулам*

$$f_1=\frac{\partial^4 G}{\partial b_1^4},\ f_2=\frac{\partial^4 G}{\partial b_1^3\partial b_2},\ f_3=\frac{\partial^4 G}{\partial b_1^2\partial b_2^2},\ f_4=\frac{\partial^4 G}{\partial b_1\partial b_2^3},\ \ldots,\ f_{15}=\frac{\partial^4 G}{\partial b_4\partial b_5^3},\ f_{16}=\frac{\partial^4 G}{\partial b_5^4}.$$

Среди всех формул из семейства (6) практический интерес представляет отношение $z_1=f_{15}\,/\,f_{16}=-b_1\,/\,5.$

Заключение. Таким образом, в ходе выполнения работы проведен анализ структур частных производных разных порядков от дискриминанта алгебраического уравнения по его коэффициентам. На основе это доказана справедливость семейства формул, выражающих значения кратных корней уравнения при их наличии.

1. Антипова, И.А. Рациональные выражения для кратных корней алгебраических уравнений / И.А. Антипова, Е.Н. Михалкин, А.К. Цих // Математический сборник. – 2018. – Т. 209, № 10. – С. 3–30.
2. Прасолов, В.В. Многочлены. / В.В. Прасолов. – 4-е изд., испр. – М.: МЦНМО, 2014. – 336 с.