По аналогии с работой [2] дадим следующее

Определение 2. Система (1) называется *ϑ-равномерно вполне управляемой* $(\vartheta \in \mathbb{N})$, если существуют величины $\alpha_i = \alpha_i(\vartheta) > 0,\ i = \overline{1,4}$, что для всех $\tau \in \mathbb{N}_0$ выполнены неравенства

$$W_{\tau+\vartheta,\tau} > 0,\ \ 0 < \alpha_1 \cdot E \le W^{-1}_{\tau+\vartheta,\tau} \le \alpha_2 \cdot E,$$

$$0 < \alpha_3 \cdot E \le X^{T}_{\tau+\vartheta,\tau} \cdot W^{-1}_{\tau+\vartheta,\tau} \cdot \mathrm{X}_{\tau+\vartheta,\tau} \le \alpha_4 \cdot E.$$

Система (1) называется *равномерно вполне управляемой*, если существует число $\vartheta > 0$ такое, что система (1) ϑ-равномерно вполне управляемая.

Замечание. В определении 2 неравенства понимаются в смысле квадратичных форм.

Теорема. *Линейная система с изменяющейся структурой* (*1*) *ϑ-равномерна вполне управляема тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) *матрица* $A_t,\ t \in \mathbb{N}_0$, *вполне ограничена;*

2) матрица $B_t,\ t \in \mathbb{N}_0$, *ограничена;*

3) существует число $l = l(\vartheta) > 0$ *такое, что для всяких числа* $\tau \in \mathbb{N}_0$ *и для вектора* $x^{(1)} \in \mathbb{R}^{n_{\tau+\vartheta}}$ *найдется управление* $u_t,\ t = \tau,\ldots,\tau+\vartheta-1$, *переводящее решение системы* (*1*) *из точки* $x_\tau = 0 \in \mathbb{R}^{n_\tau}$ *в точку* $x_{\tau+\vartheta} = x^{(1)}$, *причем для любого* $t \in \{\tau,\ldots,\tau+\vartheta-1\}$ *выполняется неравенство* $\| u_t \| \le l \cdot \| x^{(1)} \|$.

Заключение. Представленные результаты в дальнейшем позволят решать задачи управления асимптотическими характеристиками линейных дискретных динамических систем с изменяющейся структурой.

Работа выполнялась в рамках Государственной программы научных исследований «Конвергенция-2020» (подпрограмма 1, задание 1.2.01).

1. Гайшун, И.В. *Дискретные уравнения с изменяющейся структурой. Управляемость и наблюдаемость* / И.В. Гайшун // Дифференциальные уравнения. – 2000. – Т. 36, № 11. – С. 1544–1549.
2. Квакернаак, Х. *Линейные оптимальные системы управления* / Х. Квакернаак, Р. Сиван. – М.: Мир, 1977. – 650 с.
3. Kalman, R.E. *Contribution to the theory of optimal control* / R.E. Kalman // Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana. – 1960. – Vol. 5, № 1. – P. 102-119.
4. Зайцев, В.А. *О свойстве равномерной полной управляемости линейной управляемой системы с дискретным временем* / В.А. Зайцев, С.Н. Попова, Е.Л. Тонков // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2014. – Т. 24, № 4. – С. 53–63.

О СВОЙСТВАХ СТРОГО ПОЛОЖИТЕЛЬНО РЕГУЛЯРНЫХ МАТРИЦ

А.А. Козлов, К.Д. Калита, Л.А. Антоненко
Новополоцк, ПГУ

Целью данной работы является введение понятий строго положительно регулярных матриц и строго ρ-положительно регулярных матриц, а также описание свойств таких матриц.

Данная тематика исследований является актуальной, поскольку связана с численным моделированием динамических процессов и с бурно развивающейся сегодня математической теорией управления асимптотическими инвариантами линейных динамических систем.

Материалы и методы. В статье используются методы теории матриц и линейной алгебры.

Результаты и их обсуждение. Пусть R^n – n-мерное евклидово векторное пространство с нормой $\| x \| = \sqrt{x^T x}$ (символ T означает операцию транспонирования матрицы или вектора); $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – векторы (столбцы) канонического ортонормированного базиса пространства R^n $E = [e_1, \ldots, e_n]$ – единичная матрица; M_{mn} – пространство вещественных матриц размерности

$m\times n$ со спектральной (операторной) нормой $\|H\|=\max_{\|x\|=1}\|Hx\|$, т.е. нормой, индуцируемой на M_{mn} евклидовой нормой в пространствах R^m и R^n [1, с. 357]; $\mathrm{M}_n := \mathrm{M}_{nn}$.

Определение 1*.* Для всякого числа $k=\overline{1,n}$ и произвольной матрицы $H=\{h_{ij}\}_{i,j=1}^n\in\mathrm{M}_n$ через $(H)_k\in\mathrm{M}_k$ будем обозначать ее *ведущую главную подматрицу порядка* k [1, с. 30], т.е. $(H)_1=h_{11}$, $(H)_2=\begin{pmatrix}h_{11}&h_{12}\\h_{21}&h_{22}\end{pmatrix},\ldots,$ $(H)_n=H$. *Ведущими главными минорами* матрицы H назовем определители ведущих главных подматриц матрицы H.

Определение 2. Квадратную матрицу $H\in\mathrm{M}_n$ будем называть *строго регулярной* [2, с. 97], если при всех $i=\overline{1,n}$ выполняются неравенства $\det(H)_i\neq 0$.

Определение 3. Будем говорить, что квадратная матрица $H\in\mathrm{M}_n$ является *строго положительно регулярной*, если при каждом $i=\overline{1,n}$ справедливы соотношения $\det(H)_i>0$.

Определение 4. Зафиксируем произвольное числа $\rho>0$. Матрицу $H\in\mathrm{M}_n$ назовем *строго* ρ*-положительно регулярной*, если для любого фиксированного числа $\rho>0$ при каждом $i=\overline{1,n}$ выполняются неравенства $\det(H)_i>\rho$.

Теорема 1. *Пусть $U,L\in\mathrm{M}_n$ – соответственно верхне- и нижнетреугольная матрицы с положительными диагональными элементами. Тогда если матрица $H\in\mathrm{M}_n$ является строго положительно регулярной, то и матрица LHU также обладает данным свойством.*

Теорема 2. *Свойство строго положительной регулярности инвариантно относительно операции транспонирования.*

Замечание 1. Отметим, что свойство строго положительной регулярности в общем случае не инвариантно относительно операции взятия обратной матрицы.

Действительно, рассмотрим, напр., матрицу $A=\begin{pmatrix}1&-2\\2&-1\end{pmatrix}$, являющуюся строго положительно регулярной, ввиду очевидных соотношений $\det(A)_1=1>0$ и $\det(A)_2=\det A=3>0$.

Обратная к рассматриваемой матрице равна $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&2\\-2&1\end{pmatrix}$. Поскольку ее главный угловой минор первого порядка отрицателен, она, очевидно, не является строго положительно регулярной.

При этом заметим, что если строго положительно регулярная матрица принадлежит множеству ортогональных матриц, то обратная к ней матрица также обладает свойством строго положительной регулярности.

Теорема 3. *Для любых чисел $\alpha>0$ и $\beta>0$ и матрицы $H\in\mathrm{M}_n$, удовлетворяющей оценкам $\det H>\alpha$ и $\|H\|\le\beta$, найдутся такие матрица перестановок $P\in\mathrm{M}_n$ и величина $\rho_1=\rho_1(\rho)>0$, при которых для всех $i=\overline{1,n}$ выполняются неравенства $|\det(PH)_i|\ge\rho_1$.*

Теорема 4. *Для всякой матрицы перестановок $P\in\mathrm{M}_n$ найдется такая верхнетреугольная матрица $U\in\mathrm{M}_n$ с единицами на диагонали, при которой для каждого $i=\overline{1,n}$ выполняются неравенства $|\det(UP)_i|\ge 1$.*

Теорема 5. *Для любых числа $\rho>0$ и матрицы $G\in\mathrm{M}_n$, удовлетворяющей оценке $\det G>\rho>0$, найдется верхнетреугольная матрица $U\in\mathrm{M}_n$ с единицами на диагонали, что* *произведение UG представляется в виде $UG = H_1 E H_2$, где $H_1, H_2 \in \mathrm{M}_n$ – некоторые заданные строго положительно регулярные матрицы, а $E \in \mathrm{M}_n$ – матрица, полученная из единичной матрицы заменой некоторого четного количества диагональных элементов на -1.*

Для произвольного числа $\alpha \in [0, 2\pi)$ введем в рассмотрение матрицу

$$J_{kl}(\alpha) := \cos\alpha \cdot e_k e_k^T + \sin\alpha \cdot e_k e_l^T - \sin\alpha \cdot e_l e_k^T + \cos\alpha \cdot e_l e_l^T =$$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccccc} & & k & & l & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ k \\ \\ l \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & & \vdots \\ 0 & & \cos\alpha & & \sin\alpha & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & -\sin\alpha & & \cos\alpha & & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \in \mathrm{M}_n. \qquad \textbf{(1)}$$

Возьмем любое число $p \in \mathrm{R}$. $p \le \left[\dfrac{n}{2}\right]$, где $[\cdot]$ означают целую часть числа, и рассмотрим пары $(k_i, l_i) \in \mathrm{R} \times \mathrm{R}$ чисел, удовлетворяющих неравенствам $1 \le k_1 < l_1 < k_2 < l_2 < \ldots < k_p < l_p \le n$. Обозначим квадратную матрицу

$$J := E + \sum_{i=1}^{p} \left(J_{k_i l_i}\left(\frac{\pi}{3}\right) - e_{k_i} e_{k_i}^T - e_{l_i} e_{l_i}^T \right) \in \mathrm{M}_n.$$

Пусть, кроме того, $\overline{E} := E(k_1, l_1, k_2, l_2, \ldots, l_p)$ – квадратная матрица, полученная из единичной матрицы заменой диагональных элементов $e_{k_i k_i}$ и $e_{l_i l_i}$, $i = \overline{1, p}$, числом -1.

Теорема 6. *Для матрицы $J \in \mathrm{M}_n$ справедливы равенство $J^3 = \overline{E}$ и оценки* $\det(J)_i \ge \dfrac{1}{2}$, $i = \overline{1, n}$.

Теорема 7. *Для любых числа $\rho > 0$ и матрицы $G \in \mathrm{M}_n$, удовлетворяющей оценке $\det G > \rho > 0$, найдутся такие строго положительно регулярные матрицы $H_i \in \mathrm{M}_n$, $i = \overline{1, 6}$, что матрица G представляется в виде $G = \prod_{i=1}^{6} H_i$.*

По аналогии с матрицей (1) определим следующие матрицы

$$S_{kl}^{(1)} := 3 \cdot e_k e_k^T - 2 \cdot e_k e_l^T + 8 \cdot e_l e_k^T - 5 \cdot e_l e_l^T = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccccc} & & k & & l & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ k \\ \\ l \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & & \vdots \\ 0 & & 3 & & -2 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & 8 & & -5 & & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \in \mathrm{M}_n,$$

$$S_{kl}^{(1)} := 5\cdot e_k e_k^T + 2\cdot e_k e_l^T - 8\cdot e_l e_k^T - 3\cdot e_l e_l^T = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} & & k & & l & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ k \\ \\ l \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & & \vdots \\ 0 & & 5 & & 2 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & -8 & & -3 & & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \in \mathrm{M}_n,$$

Для ранее зафиксированных пар $(k_i, l_i) \in \mathrm{R}\times\mathrm{R}$ чисел, удовлетворяющих неравенствам $1 \le k_1 < l_1 < k_2 < l_2 < \ldots < k_p < l_p \le n$, обозначим через $S^{(1)} \in \mathrm{M}_n$ и $S^{(2)} \in \mathrm{M}_n$ матрицы

$$S^{(1)} := E + \sum_{i=1}^{p} S_{k_i l_i}^{(1)} - \sum_{i=1}^{p}(e_{k_i}e_{k_i}^T + e_{l_i}e_{l_i}^T) \text{ и } S^{(2)} := E + \sum_{i=1}^{p} S_{k_i l_i}^{(2)} - \sum_{i=1}^{p}(e_{k_i}e_{k_i}^T + e_{l_i}e_{l_i}^T).$$

Теорема 8. *Матрица $\overline{E} \in \mathrm{M}_n$ представляется в виде $\overline{E} = S^{(1)}\cdot S^{(2)}$.*

Теорема 9. *Для любых числа $\rho > 0$ и матрицы $G \in \mathrm{M}_n$, удовлетворяющей оценке $\det G > \rho > 0$, найдутся такие число $\rho_1 = \rho_1(\rho) > 0$ и строго ρ_1-положительно регулярные матрицы $H_i \in \mathrm{M}_n$, $i = \overline{1,5}$, при которых справедливо разложение $G = \prod_{i=1}^{5} H_i$.*

Следствие 3. *Для любых числа $\rho > 0$ и матрицы $G \in \mathrm{M}_n$, удовлетворяющей оценке $|\det G| > \rho > 0$, существуют такие строго регулярные матрицы $H_i \in \mathrm{M}_n$, $i = \overline{1,3}$, что выполняется соотношение $G = H_3 H_2 H_1$.*

Заключение. Полученные результаты в дальнейшем могут быть использованы при построении управляющих воздействий, обеспечивающих решения различных задач управляемости асимптотических инвариантов линейных динамических (дискретных и непрерывных) систем. Также установленные утверждения имеют и самостоятельную ценность и значимость, поскольку могут найти свое применение в таких разделах математики как теория матриц, вычислительные методы алгебры. Кроме того, отметим, что полученные результаты были промоделированы на языке Python и получена соответствующая компьютерная программа. Работа выполнялась в рамках Государственной программы научных исследований на 2020-2025 годы «Конвергенция - 2025».

1.Хорн, Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 655 с.
2. Тыртышников Е.Е., Методы численного анализа. - Москва, 2006. – 291 с.

НЕЧЕТКАЯ НЕЙРОННАЯ СЕТЬ ДЛЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ БИОЛОГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ НА ИЗОБРАЖЕНИЯХ

Е.А. Корчевская, Л.В. Маркова
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Большинство входных параметров, характеризующих контур рассматриваемых биологических объектов, по своей природе являются нечеткими. Например: "более вытянутый", "менее вытянутый", "более выпуклый", "менее выпуклый", "более некруглый", "менее некруглый" и т.д. Поэтому для идентификации биологических объектов по форме наиболее оптимальный результат может быть достигнут с помощью нечеткой нейронной сети. Модель нейрона нечеткой нейронной сети оперирует не значениями идентификационных параметров, характеризующих объекты, как предложено в работах [1; 2], а значениями функций принадлежности к определенной группе нечетких характеристик.