О СВОЙСТВЕ РАВНОМЕРНОЙ ПОЛНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ СТРУКТУРОЙ

А.А. Козлов[1], *Т.А. Александрович*[2]
[1]*Новополоцк, ПГУ*
[2]*Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова*

Одним из активно развивающихся разделов теории динамических систем на сегодняшний день является теория управления асимптотическими характеристиками линейных динамических (дискретных и непрерывных) систем [1].

Целью данной работы является получение критерия равномерной полной управляемости линейной дискретной динамической системы переменной размерности фазового пространства.

Материалы и методы. В данной работе объектом исследования являются линейные управляемые дискретные системы с изменяющейся структурой; субъектом исследования – свойство равномерной полной управляемости таких систем. В статье применяются методы матричного анализа, теории дискретных динамических систем, а также теории управления линейными динамическими системами.

Результаты и их обсуждение. Пусть $n_0,\dots,n_t,\dots$ и $r_0,\dots,r_t,\dots$ – последовательности натуральных чисел. Рассмотрим уравнение вида

$$x_{t+1} = A_t x_t + B_t u_t,\ t = 0,1,2,\dots, \tag{1}$$

в котором $\{A_t\}$ и $\{B_t\}$, $t = 0,1,\dots$ – последовательности действительных матриц размерностей соответственно $n_{t+1}\times n_t$ и $n_{t+1}\times r_t$, последовательность $\{u_t\}_{t=0}^{\infty}$ в каждый момент времени t принимает значения в пространстве $\mathbb{R}^{r_t}$ и играет роль входного (управляющего) воздействия. Уравнение вида (1) называют *линейным управляемым уравнением* (*или системой*) *с изменяющейся структурой* [1].

Определение 1. Матричную функцию $A_t \in M_{n_{t+1}n_t}$, $t = 0,1,\dots$ будем называть *вполне ограниченной,* если при любом $t\in\mathbb{N}_0$ и $n_t \ge n_{t+1}$ $(n_{t+1} > n_t)$ матрица $A_t^T A_t$ $(A_t A_t^T)$ невырожденная и найдется такое число $a > 0$, что при всех $\tau \in \mathbb{N}\cup\{0\} =: \mathbb{N}_0$ справедливо неравенство

$$\sup\|A_\tau\| + \sup_{n_\tau \ge n_{\tau+1}} \left\|(A_\tau A_\tau^T)^{-1}\right\| + \sup_{n_\tau < n_{\tau+1}} \left\|(A_\tau^T A_\tau)^{-1}\right\| \le a \tag{2}$$

(здесь и далее символ T означает операцию транспонирования матриц, а скобки $\|\ \|$ – операторную (спектральную) норму матрицы либо евклидову норму вектора).

Рассмотрим линейную однородную систему уравнений с изменяющейся структурой

$$x_{t+1} = A_t x_t,\quad t\in\mathbb{N}_0,\quad x\in\mathbb{R}^n. \tag{3}$$

Зафиксируем произвольное число $\tau\in\mathbb{N}_0$. Пусть E - единичная $(n_\tau\times n_\tau)$ – матрица. Для любого числа $t\in\mathbb{N}_0, t\ge\tau,$ определим $(n_t\times n_\tau)$ – матрицу

$$X_{t,\tau} = \begin{cases} A_{t-1}\cdot\ldots\cdot A_\tau, & \text{при } t>\tau,\\ E & \text{при } t=\tau,\end{cases}$$

являющуюся решением задачи Коши матричной дискретной динамической системы $X_{t+1} = A_t X_t$ с начальным условием $X_\tau = I.$ Эта матрица удовлетворяет [1] равенству $X_{t,\tau}X_{\tau,s} = X_{t,s}.$ для всяких $t\ge\tau\ge s;$ $t,\tau,s\in\mathbb{N}_0.$ Она называется *матрицей Коши* системы (3).

При всяком $t>\tau$ введем также в рассмотрение квадратную $(n_t\times n_t)$ -матрицу

$$W_{t,\tau} = \sum_{s=\tau}^{t-1} X_{t,s+1}B_s B_s^T X_{t,s+1}^T,$$

которую будем называть *матрицей управляемости* или *матрицей Калмана.*

По аналогии с работой [2] дадим следующее

Определение 2. Система (1) называется *ϑ-равномерно вполне управляемой* $(\vartheta \in \mathbb{N})$, если существуют величины $\alpha_i = \alpha_i(\vartheta) > 0,\ i = \overline{1,4}$, что для всех $\tau \in \mathbb{N}_0$ выполнены неравенства

$$W_{\tau+\vartheta,\tau} > 0,\ \ 0 < \alpha_1 \cdot E \le W^{-1}_{\tau+\vartheta,\tau} \le \alpha_2 \cdot E,$$

$$0 < \alpha_3 \cdot E \le X^T_{\tau+\vartheta,\tau} \cdot W^{-1}_{\tau+\vartheta,\tau} \cdot \mathrm{X}_{\tau+\vartheta,\tau} \le \alpha_4 \cdot E.$$

Система (1) называется *равномерно вполне управляемой*, если существует число $\vartheta > 0$ такое, что система (1) ϑ-равномерно вполне управляемая.

Замечание. В определении 2 неравенства понимаются в смысле квадратичных форм.

Теорема. *Линейная система с изменяющейся структурой (1) ϑ-равномерна вполне управляема тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) *матрица $A_t,\ t \in \mathbb{N}_0$, вполне ограничена;*

2) матрица $B_t,\ t \in \mathbb{N}_0$, ограничена;

3) существует число $l = l(\vartheta) > 0$ такое, что для всяких числа $\tau \in \mathbb{N}_0$ и для вектора $x^{(1)} \in \mathbb{R}^{n_{\tau+\vartheta}}$ найдется управление $u_t,\ t = \tau,\ldots,\tau+\vartheta-1$, переводящее решение системы (1) из точки $x_\tau = 0 \in \mathbb{R}^{n_\tau}$ в точку $x_{\tau+\vartheta} = x^{(1)}$, причем для любого $t \in \{\tau,\ldots,\tau+\vartheta-1\}$ выполняется неравенство $\| u_t \| \le l \cdot \| x^{(1)} \|$.

Заключение. Представленные результаты в дальнейшем позволят решать задачи управления асимптотическими характеристиками линейных дискретных динамических систем с изменяющейся структурой.

Работа выполнялась в рамках Государственной программы научных исследований «Конвергенция-2020» (подпрограмма 1, задание 1.2.01).

1. Гайшун, И.В. *Дискретные уравнения с изменяющейся структурой. Управляемость и наблюдаемость* / И.В. Гайшун // Дифференциальные уравнения. – 2000. – Т. 36, № 11. – С. 1544–1549.

2. Квакернаак, Х. *Линейные оптимальные системы управления* / Х. Квакернаак, Р. Сиван. – М.: Мир, 1977. – 650 с.

3. Kalman, R.E. *Contribution to the theory of optimal control* / R.E. Kalman // Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana. – 1960. – Vol. 5, № 1. – P. 102-119.

4. Зайцев, В.А. *О свойстве равномерной полной управляемости линейной управляемой системы с дискретным временем* / В.А. Зайцев, С.Н. Попова, Е.Л. Тонков // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2014. – Т. 24, № 4. – С. 53–63.

О СВОЙСТВАХ СТРОГО ПОЛОЖИТЕЛЬНО РЕГУЛЯРНЫХ МАТРИЦ

А.А. Козлов, К.Д. Калита, Л.А. Антоненко
Новополоцк, ПГУ

Целью данной работы является введение понятий строго положительно регулярных матриц и строго ρ-положительно регулярных матриц, а также описание свойств таких матриц.

Данная тематика исследований является актуальной, поскольку связана с численным моделированием динамических процессов и с бурно развивающейся сегодня математической теорией управления асимптотическими инвариантами линейных динамических систем.

Материалы и методы. В статье используются методы теории матриц и линейной алгебры.

Результаты и их обсуждение. Пусть R^n – n-мерное евклидово векторное пространство с нормой $\| x \| = \sqrt{x^T x}$ (символ T означает операцию транспонирования матрицы или вектора); $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – векторы (столбцы) канонического ортонормированного базиса пространства R^n $E = [e_1,\ldots,e_n]$ – единичная матрица; M_{mn} – пространство вещественных матриц размерности