О ДИСТРИБУТИВНОСТИ РЕШЕТКИ ЛОКАЛЬНО НОРМАЛЬНЫХ КЛАССОВ ФИТТИНГА

Н.Т. Воробьев, Е.Д. Ланцетова
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют $\mathfrak{X}$-*нормальным* или *локально нормальным* классом Фиттинга, если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ и для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ её $\mathfrak{F}$-радикал является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой группы G. Множество всех локально нормальных классов Фиттинга образует решетку по включению.

Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют *нормальным*, если для любой разрешимой группы G ее $\mathfrak{F}$-радикал является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой G. Множество всех нормальных классов Фиттинга с операциями пересечения и объединения по включению образует решетку.

Модулярной решеткой называется такая решетка L, что для любых x, y, $z \in L$ таких, что $x \leq y$, выполняется равенство

$$x \vee (y \wedge z) = y \wedge (x \vee z),$$

называемое модулярным законом.

Дистрибутивная решетка – такая модулярная решетка L, что для любых x, y, $z \in L$ выполняется равенство

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z),$$

называемое дистрибутивным законом.

Решетка всех нормальны классов Фиттинга является атомарной, полной и модулярной [1]. В связи с этим возникает вопрос о дистрибутивности решетки нормальных классов Фиттинга. Решение этого вопроса является основнай целью настоящей работы.

Материалы и методы. В работе используется терминология и методы абстрактной теории групп. В частности, методы теории классов Фиттинга.

Результаты и их обсуждения. Все рассматриваемые группы в настоящей работе конечны и разрешимы. В определениях и обозначениях следуем [2].

Класс групп $\mathfrak{F}$ называют *классом Фиттинга*, если он замкнут относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп.

Основной результат работы представляет следующая

Теорема. *Решетка локально нормальных классов Фиттинга не является дистрибутивной.*

Следствие 1. *Решетка всех нормальных классов Фиттинга не является дистрибутивной.*

Так как решетка всех нормальных классов Фиттинга является подрешеткой решетки всех классов Фиттинга, то справедливо

Следствие 2. *Решетка всех классов Фиттинга не является дистрибутивной.*

Заключение. В данной работе показано, что решетка всех локально нормальных классов Фиттинга не дистрибутивна.

1. Lausch, H. On normal Fitting classes / H. Lausch // Math. Z. – 1973. – Bd. 130, № 1. – S. 67–72.
2. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin ; New York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

О МИНИМАЛЬНЫХ σ-ФУНКЦИЯХ ХАРТЛИ σ-ЛОКАЛЬНЫХ ФИТТИНГОВЫХ МНОЖЕСТВ

Н.Н. Воробьев, И.И. Стаселько
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Все рассматриваемые группы конечны. Мы будем использовать терминологию из [1–3].

Основная цель настоящей работы – описание минимальных σ-функций Хартли σ-локальных фиттинговых множеств.

Материал и методы. В работе используются методы теории классов конечных групп. В частности, методы теории локальных формаций и теории классов Фиттинга.

Результаты и их обсуждение. Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел. Символом $\pi(n)$ обозначают множество всех различных простых делителей целого числа n. Следуя [2], σ – разбиение множества $\mathbb{P}$, т.е. $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, где $\mathbb{P} = \cup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$; $\sigma(n) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n) \neq \varnothing\}$, $\sigma(G) = \sigma(|G|)$. Множество $\mathscr{F}$ подгрупп группы G называется *фиттинговым множеством группы* G [1], если выполняются следующие условия: 1) если $T \lhd S \in \mathscr{F}$; 2) если S, $T \lhd ST$, то $ST \in \mathscr{F}$; 3) если $S \in \mathscr{F}$ и $x \in G$, то $S^x \in \mathscr{F}$. *Классом Фиттинга* называется класс групп $\mathfrak{F}$, который замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и произведений нормальных подгрупп из $\mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ – класс всех σ_i-групп и $\mathfrak{G}_{\sigma_i'}$ – класс всех σ_i'-групп.

Для фиттингова множества $\mathscr{F}$ группы G и класса Фиттинга $\mathfrak{X}$ множество $\{H \leq G \mid H/H_{\mathscr{F}} \in \mathfrak{X}\}$ подгрупп группы G называется *произведением* $\mathscr{F}$ *и* $\mathfrak{X}$ обозначается $\mathscr{F} \odot \mathfrak{X}$ [4].

Функция вида

$$f: \sigma \to \{\text{фиттинговы множества группы } G\}$$

называется *σ-функцией Хартли* (более кратко *H_σ-функцией*) группы G [3]. Для произвольной H_σ-функции f полагают

$$LFS_\sigma(f) = \{H \leq G \mid H = 1 \text{ либо } H \neq 1 \text{ и } H^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{G}_{\sigma_i'}} \in f(\sigma_i)$$
$$\text{для всех } \sigma_i \in \sigma(G)\}.$$

Пусть $\mathscr{F}$ – фиттингово множество группы G. Если найдется H_σ-функция f такая, что $\mathscr{F} = LFS_\sigma(f)$, то $\mathscr{F}$ называют σ-локальным и f – σ-локальным заданием $\mathscr{F}$ [3]. Относительно включения $\subseteq$ множество всех σ-локальных фиттинговых множеств группы G является полной решеткой.

Пусть Θ – полная решетка фиттинговых множеств группы G. Для произвольной совокупности фиттинговых множеств группы G из Θ $\{\mathscr{F}_i \mid i \in I\}$ полагают

$$\vee^{\Theta}(\mathscr{F}_i \mid i \in I) = \Theta\mathrm{Fitset}(\cup_{i \in I} \mathcal{F}_i),$$

в частности,

$$\mathscr{M} \vee^{\Theta} \mathscr{H} = \Theta\mathrm{Fitset}(\mathscr{M} \cup \mathscr{H}).$$

σ-Локальным Θ-значным заданием называется такое σ-локальное задание, все непустые значения которого принадлежат Θ.

Пусть $\{f_j \mid j \in J\}$ – совокупность σ-локальных Θ-значных заданий, где f_j – некоторое σ-локальное задание фиттингова множества $\mathcal{F}_j$ группы G. Тогда символом $\vee^{\Theta}(f_j \mid j \in J)$ обозначается такое σ-локальное задание f, что

$$f(\sigma_i) = \vee^{\Theta}\mathrm{Fitset}(\cup_{j \in J} f_j(\sigma_i))$$

для всех i. В частности,

$$(f_1 \vee_n^{\sigma} f_2)(\sigma_i) = \vee^{\Theta}\mathrm{Fitset}(f_1(\sigma_i) \cup f_2(\sigma_i)),$$

если по крайней мере одно из фиттинговых множеств группы G $f_j(\sigma_i) \neq \emptyset$. Если же $f_j(\sigma_i) = \emptyset$ для всех $j \in J$, то предполагают, что $f(\sigma_i) = \emptyset$.

Через $\mathscr{F}_\sigma$ обозначают полную решетку всех σ-локальных фиттинговых множеств группы G. Пусть $\mathfrak{X}$ – произвольная совокупность групп. Символом $\mathscr{F}_\sigma\mathrm{Fitset}(\mathfrak{X})$ обозначают наименьшее σ-локальное фиттингово множество группы G, содержащее $\mathfrak{X}$. В частности, $\mathrm{Fitset}(\mathfrak{X})$ – наименьшее фиттингово множество группы G, содержащее совокупность групп $\mathfrak{X}$.

Основной результат работы – следующая

Теорема. *Пусть h_i – минимальная $\mathscr{F}_\sigma$-значная H_σ-функция σ-локального фиттингова множества $\mathscr{F}_i$ группы G, $i \in I$. Тогда $\vee^{\mathcal{F}_\sigma}(h_i \mid i \in I)$ – минимальная $\mathscr{F}_\sigma$-значная H_σ-функция σ-локального фиттингова множества $\mathscr{F} = \vee^{\mathcal{F}_\sigma}(\mathscr{F}_i \mid i \in I)$ группы G.*

1. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p. – (De Gruyter Expo Math., Vol. 4).

2. Chi Z., Safonov V.G., Skiba A.N. On n-multiply σ-local formations of finite groups // Comm. Algebra. – 2019. – Vol. 47, № 3. – P. 957–968.

3. Vorob'ev, N.T. On σ-local Fitting sets / N.T. Vorob'ev, K. Lantsetova // XII International Algebraic Conf. in Ukraine : Book of Abstracts, Vinnytsia, July 02–06, 2019 / Institute of Mathematics of Ukrainian National Academy of Sciences, Kyiv Taras Shevchenko National University, Vasyl' Stus Donetsk National University ; Org. com.: R. Grynyuk (chairman) [and others]. Progr. com.: Yu. Drozd (chairman) [and others]. – Vinnytsia, 2019. – P. 128–129.

4. Yang, N. On $\mathscr{F}$-injectors of Fitting set of a finite group / N. Yang, W. Guo, N.T. Vorob'ev // Comm. Algebra. – 2018. – Vol. 46, N 1. – P. 217–229.