О СВОЙСТВЕ РАДИКАЛА σ-ХОЛЛОВОЙ ПОДГРУППЫ

Е.А. Витько, Н.Т. Воробьев
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

В теории классов Фиттинга известен результат Бризона [1] об описании строения радикала холловой π-подгруппы разрешимой группы в терминах класса всех тех групп, холловы подгруппы которых принадлежат некоторому классу Фиттинга. Основная цель данной работы – расширение результата Бризона на случай σ-разрешимой группы.

Материал и методы. В работе используются терминология и методы доказательства абстрактной теории групп, в частности, методы теории классов Фиттинга конечных групп.

Результаты и их обсуждение.

В определениях и обозначениях мы следуем [2, 3].

Все рассматриваемые в работе группы конечны.

Обозначим $\pi(n)$ – множество всех простых делителей натурального числа n, $\pi(G) = \pi(|G|)$ – множество всех простых делителей порядка группы G.

Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbf{P}$ такое, что $\mathbf{P} = \cup_{i \in I}\sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$. Пусть Π – некоторое подмножество множества σ и $\Pi' = \sigma \setminus \Pi$.

Пусть $\sigma(n) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n) \neq \varnothing\}$, $\sigma(G) = \sigma(|G|)$.

Группу G называют

1) σ-примарной, если $G = 1$ или $|\sigma(G)| = 1$;

2) σ-бипримарной, если $|\sigma(G)| = 2$;

3) Π-группой, если $\sigma(G) \subseteq \Pi$.

Группу G называют σ-разрешимой, если каждый главный фактор группы G является σ-примарным.

Группу G называют Π-разрешимой, если каждый главный фактор группы G является Π'-группой или σ_i-группой для некоторого $\sigma_i \in \Pi$.

Обозначают S_σ – класс всех σ-разрешимых групп, S_Π – класс всех Π-разрешимых групп.

Подгруппу H группы G называют

1) холловой Π-подгруппой группы G, если H – Π-подгруппа и $|G : H|$ – Π'-число;

2) σ-холловой подгруппой группы G, если H холлова Π-подгруппа группы G для некоторого $\Pi \subseteq \sigma$.

Обозначим $\mathrm{Hall}_\sigma(G)$ – множество всех σ-холловых подгрупп группы G.

Напомним, что класс групп F называется классом Фиттинга, если F обладает следующими свойствами:

1) если $G \in \mathrm{F}$ и $N \trianglelefteq G$, то $N \in \mathrm{F}$;

2) если $N_1, N_2 \in \mathrm{F}$, $N_1 \trianglelefteq G$, $N_2 \trianglelefteq G$ и $G = N_1N_2$, то $G \in \mathrm{F}$.

Определение. Пусть F – класс Фиттинга. Определим класс групп $\mathrm{K}_\sigma(\mathrm{F})$ следующим образом

$$\mathrm{K}_\sigma(\mathrm{F}) = (G \in S_\sigma : \mathrm{Hall}_\sigma(G) \subseteq \mathrm{F}).$$

Если F – класс Фиттинга и π – некоторое множество простых чисел, то через $\mathrm{K}_\pi(\mathrm{F})$ обозначают класс всех тех π-разрешимых групп G, в которых холлова π-подгруппа является F-группой, т.е.

$$\mathrm{K}_\pi(\mathrm{F}) = (G \in S^\pi : G_\pi \in \mathrm{F}).$$

В работе [4] доказано, что класс $\mathrm{K}_\pi(\mathrm{F})$ является классом Фиттинга для любого класса Фиттинга F и получено описание строения радикала группы для класса Фиттинга всех π-разрешимых групп, холловы π-подгруппы которых принадлежат классу Фиттинга F.

Заметим, что класс $\mathrm{K}_\pi(\mathrm{F})$ является специальным случаем класса $\mathrm{K}_\sigma(\mathrm{F})$: если $\pi = \{p_1, \ldots, p_t\}$ и $\sigma = \{\{p_1\}, \ldots, \{p_t\}, \pi'\}$, то $\mathrm{K}_\sigma(\mathrm{F}) = \mathrm{K}_\pi(\mathrm{F})$. В связи с этим возникает задача описания радикала группы посредством класса $\mathrm{K}_\sigma(\mathrm{F})$.

Теорема. Пусть F – непустой класс Фиттинга, G – σ-разрешимая группа, H – её σ-холлова подгруппа, тогда

$$G_{\mathrm{K}_\sigma(\mathrm{F})} \cap H = H_\mathrm{F}.$$

Следствие [4]. Пусть F – непустой класс Фиттинга, G – π-разрешимая группа, H – её холлова π-подгруппа, тогда

$$G_{K_{\pi}(F)} \cap H = H_{F}.$$

1. Brison O.J. Hall operators for Fitting classes // Arch. Math. (Basel), 1979, Vol. 33. – Z. 1-9.
2. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
3. Скиба, А.Н. О σ-свойствах конечных групп II / А.Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 3(24). – С. 70–83.
4. Воробьев, Н.Т. О свойствах радикалов холловых подгрупп π-разрешимых групп / Н.Т. Воробьев, Е.А. Витько, Н.В. Иванова // Весн. Віцебскага дзярж. ун-та. – 2008. – №2 (48). – С. 125–129.

О ХАРАКТЕРИЗАЦИИ σ-ЛОКАЛЬНЫХ ФОРМАЦИЙ ФИШЕРА

С.Н. Воробьев, Н.Н. Воробьев
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

В теории классов конечных групп известна теорема Дерка-Хоукса о том, что разрешимая локальная формация является формацией Фишера тогда и только тогда, когда все значения ее канонического локального спутника – формации Фишера (см. [1, гл. IX, теорема 3.6]).

Основная цель настоящей работы – развитие и расширение теоремы Дерка-Хоукса: нахождение характеризации σ-локальных формаций Фишера произвольных конечных групп.

Материал и методы. В работе используются методы теории классов конечных групп. В частности, методы теории локальных формаций и теории классов Фиттинга.

Результаты и их обсуждение. *Формацией* называют класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *классом Фишера*, если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно нормальных подгрупп, произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп и произведений подгрупп вида PN, где P – силовская p-подгруппа группы $G \in \mathfrak{F}$ и N – нормальная подгруппа группы G.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *формацией Фишера*, если $\mathfrak{F}$ одновременно является формацией и классом Фишера.

Пусть σ – некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$. Символом $\sigma(n)$ обозначают множество $\{\sigma_i : \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}$, где σ_i – подмножества σ для всех $i \in I$ и $\pi(n)$ – множество всех простых делителей натурального числа n, символом $\sigma(G)$ – множество всех простых делителей порядка группы G.

Отображение f: $\sigma \to$ {формации} называют *σ-локальным спутником* [2]. Тогда множество $\mathrm{Supp}(f) = \{\sigma_i : f(\sigma_i) \neq \emptyset$ для всех $i \in I\}$ – носитель σ-локального спутника.

Пусть $\pi = \mathrm{Supp}(f)$. Формацию $\mathfrak{F}$ называют *σ-локальной*, если

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_{\pi} \cap \left(\bigcap_{p \in \pi} \mathfrak{E}_{\sigma_i'} \mathfrak{E}_{\sigma_i} f(\sigma_i)\right)$$

для некоторого σ-локального спутника f.

В работе [2] доказано, что любая σ-локальная формация определяется σ-локальным спутником F таким, что $F(\sigma_i) = \mathfrak{E}_{\sigma_i} F(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $\sigma_i \in \pi$.

Основной результат работы – следующая

Теорема. *σ-Локальная формация $\mathfrak{F}$ является формацией Фишера тогда и только тогда, когда все значения ее σ-локального спутника F являются формациями Фишера.*

Если σ – разбиение на одноэлементные множества, т.е. $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \dots\}$, то из теоремы вытекает

Следствие 1. *Локальная формация $\mathfrak{F}$ является формацией Фишера тогда и только тогда, когда все значения ее локального спутника F такого, что $\mathfrak{N}_p F(p) = F(p) \subseteq \mathfrak{F}$, являются формациями Фишера.*

Следствие 2 (теорема Дерка-Хоукса [1]). *Разрешимая локальная формация является формацией Фишера тогда и только тогда, когда все значения ее канонического локального спутника – формации Фишера.*

1. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p. – (De Gruyter Expo Math., Vol. 4).
2. Zhang, Chi. On multiply σ-local formations of finite groups / Chi Zhang, V.G. Safonov, A.N. Skiba // Comm. Algebra. – 2019. – Vol. 47, № 3. – P. 957–968.