

Proof. Consider one-parameter isometry group $f_1(t)$, which is given by the matrix $F_1(t)$. It has the same invariant subspaces as $h_1(t)$. Consider an arbitrary vector $X(x_1, x_2, x_3, x_4)$ and denote $X'(t) = f_1(t)X$, $X''(t) = f_1(t)X'(t)$. Vector X belongs to an invariant two-dimensional subspace if and only if the vectors $X, X'(t), X''(t)$ are linearly dependent for any $t \in \mathbf{R}$. The subspace invariant for all $t \in \mathbf{R}$, is invariant for each fixed value $t = t_0$.

Let matrix $Q(t)$ have form (1). It is required to prove that there are no other invariant subspaces except $\langle e_1, e_2 \rangle$ and $\langle e_3, e_4 \rangle$. We choose $t_0 = \frac{\pi}{2a}$ and denote $k = e^{v t_0} > 1$. Then

$$X'(t_0)(kx_1, k^{-1}x_2, -x_4, x_3), X''(t_0)(k^2x_1, k^{-2}x_2, -x_3, -x_4).$$

Let's compose a matrix from the coordinates of vectors $X, X'(t_0), X''(t_0)$ and then add the first row to the third row. We get matrix

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ kx_1 & k^{-1}x_2 & -x_4 & x_3 \\ (k^2+1)x_1 & (k^{-2}+1)x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

We calculate the minor of order 3, located in 1, 3 and 4 columns equate it to zero. We get

$$(k^2+1)x_1(x_3^2+x_4^2) = 0.$$

Hence, $x_1 = 0$ or $x_3^2+x_4^2 = 0$, and this holds regardless of the value of v . Analogously, calculating the minor located in 2, 3 and 4 columns, we get $x_2 = 0$ or $x_3^2+x_4^2 = 0$. As a result, we have only two invariant two-dimensional subspaces $\langle e_1, e_2 \rangle$ and $\langle e_3, e_4 \rangle$.

Now let the matrix $Q(t)$ be unit one and $v > 0$. Then

$$X'(t)(e^{vt}x_1, e^{-vt}x_2, x_3, x_4), X''(t)(e^{2vt}x_1, e^{-2vt}x_2, x_3, x_4).$$

Let's compose a matrix from the coordinates of vectors X, X', X'' , and then subtract the first row from the second and third ones. We get matrix

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ (e^{vt}-1)x_1 & (e^{-vt}-1)x_2 & 0 & 0 \\ (e^{2vt}-1)x_1 & (e^{-2vt}-1)x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Equating to zero the minor located in the first three columns, we obtain equation

$$(e^{-vt}-1)x_1x_2x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1x_2x_3 = 0.$$

Analogously, equating to zero the minor located in columns 1, 2, and 4, we get $x_1x_2x_4 = 0$. Therefore, either $x_3 = x_4 = 0$, or $x_1x_2 = 0$. The first equation defines subspace L_2 . Equation $x_1 = 0$ defines \mathcal{H}_1 , and equation $x_2 = 0$ defines \mathcal{H}_2 . This means that any two-dimensional subspace contained in \mathcal{H}_1 or \mathcal{H}_2 , is invariant under the action $f_1(t)$, $t \in \mathbf{R}$.

Corollary. Subspace $L_1 = \langle e_1, e_2 \rangle$ and only it is a two-dimensional subspace invariant under the action of the one-parameter group $f_1(t)$, $t \in \mathbf{R}$, on which the Lorentzian scalar product is induced.

Conclusion. The proved theorem essentially complements the results obtained in (5). It is used to find one-parameter groups of automorphisms of four-dimensional Lie algebras, which are similarities with respect to the Lorentz scalar product introduced in the Lie algebra.

1. Podoksonov, M.N. Podobiya i izometrii odnorodnogo mnogoobraziya gruppy Geyzenberga, snabzhonnoy levoinvariantnoy lorentsevoy metrikoy / M.N.Podoksonov // Vestnik Vitebskogo gosudarstvennogo universiteta im. P.M. Masherava.- 2011.- №5.- P.10-15.
2. Alekseevski, D. Self-similar Lorentzian manifolds / D.Alekseevski // Ann.of Global Anal.Geom.- 1985 - V.3, No.1, pp.59-84.

ИЕРАРХИЧЕСКАЯ КЛАСТЕРИЗАЦИЯ

Ильина Н.А.,

магистрант ВГУ имени П.М. Машерова, г. Витебск, Республика Беларусь

Научный руководитель – Ермоченко С.А., канд. физ.-мат. наук.

Очень часто в прикладных задачах встречаются случаи, когда нужно изучить структуру данных, найти какие-либо взаимосвязи и иерархию. Для этих целей можно использовать различные методы: методы понижения размерности, которые основаны на матричных разложениях и др. Такие методы позволяют сохранить старые данные на основе новых.

Цель данной работы показать алгоритмы кластеризации данных, с помощью которых можно искать группы схожих элементов. Также в этой работе будут разобраны методы кластеризации.

Материал и методы. Материалом в данной работе послужила архитектура desktop-приложения, спроектированная ранее. Основным методом исследования является объектно-ориентированный анализ и проектирование, а также общенаучные методы анализа, синтеза и обобщения.

Результаты и их обсуждение. Самая важная часть в работе с данными – это их подготовка, выбор и извлечение признаков. Именно исходя от того, какие признаки получатся в итоге, будет зависеть, найдутся ли в них закономерности, будут ли эти закономерности соответствовать ожидаемому результату и возможен ли этот «ожидаемый результат» вообще. Перед передачей данных на вход какому-нибудь алгоритму машинного обучения нужно иметь представление о каждом признаке, есть ли пропуски, к какому типу относится признак, какими свойствами обладает такой тип признака и что из себя представляет распределение значений в этом признаке. Также очень важно правильно выбрать алгоритм, с помощью которого будут обработаны имеющиеся данные.

Сам процесс кластеризации состоит из трех шагов:

1. Построение матрицы несходства – это, несомненно, самое важное решение при кластеризации. Все последующие шаги будут опираться на созданную вами матрицу несходства.

2. Выбор метода кластеризации.

3. Оценка кластеров.

Основой для кластеризации станет матрица несходства, которая в математических терминах описывает, насколько точки в наборе данных отличны (удалены) друг от друга. Она позволяет в дальнейшем объединить в группы те точки, которые находятся ближе всего друг к другу, или разделить наиболее удаленные друг от друга – в чем и состоит основная идея кластеризации.

Кластеризация может производиться по заранее заданному количеству кластеров (например, с помощью метода k -средних) или иерархическая, когда количество кластеров формируется в процессе кластеризации, и сами кластеры формируют иерархическую структуру, в которой более мелкие кластеры объединяются в более крупные. В этой работе мы сфокусируемся на методе иерархической кластеризации, так как он более гибкий и допускает различные подходы: можно выбрать либо агломеративный (снизу вверх), либо дивизионный (сверху вниз) алгоритм кластеризации.

Агломеративная кластеризация начинается с n кластеров, где n – число наблюдений: предполагается, что каждое из них представляет собой отдельный кластер. Затем алгоритм пытается найти и сгруппировать наиболее схожие между собой точки данных – так начинается формирование кластеров.

Дивизионная кластеризация выполняется противоположным образом – исходно предполагается, что все n точек данных, которые у нас есть, представляют собой один большой кластер, а далее наименее схожие из них разделяются на отдельные группы.

Принимая решение о том, какой из этих способов выбрать, всегда имеет смысл попробовать все варианты, однако в целом агломеративная кластеризация лучше подходит для выявления небольших кластеров и используется большинством компьютерных программ, а дивизионная кластеризация целесообразнее для выявления крупных кластеров.

Предложено множество методов и критериев оценки качества результатов кластеризации. Можно выделить несколько подходов к валидации кластеров:

– внешняя валидация, которая заключается в сравнении итогов кластерного анализа с заранее известным результатом (т.е. метки кластеров известны априори);

– относительная валидация, которая оценивает структуру кластеров, изменяя различные параметры одного и того же алгоритма (например, число групп k);

– внутренняя валидация, которая использует внутреннюю информацию процесса объединения в кластеры (если внешняя информация отсутствует);

– оценка стабильности объединения в кластеры (или специальная версия внутренней валидации), использующая методы ресэмплинга.

Закключение. В работе была разобрана теоретическая часть понимания иерархической кластеризации данных. Разобраны методы для ее организации, описаны методы валидации кластеризации.

1. Классификация, регрессия и другие алгоритмы DataMining с использованием R[Electronicresource], 2017. – Modeofaccess: <https://ranalytics.github.io/data-mining/index.html>– Dateofaccess: 24.03.2021
2. Курс: Агломеративная иерархическая кластеризация [Electronic resource] – Mode of access: https://ru.coursera.org/lecture/unsupervised-learning/aghlomerativnaia-iierarkhicheskaia-klasterizatsiia-STrfh?ranMID=40328&ranEAID=a1LgFw09t88&ranSiteID=a1LgFw09t88-Av114zhcjNbrA01Zn21EmQ&siteID=a1LgFw09t88-Av114zhcjNbrA01Zn21EmQ&utm_content=10&utm_medium=partners&utm_source=linkshare&utm_campaign=a1LgFw09t88 – Date of access: 24.03.2021

РАЗРАБОТКА РОБОТА-ПЛОТТЕРА НА ОСНОВЕ КОНСТРУКТОРА LEGO MINDSTORMS EV3

Китаров Д.А., Большакова П.Н.,

студенты 1 и 3 курсов, ВГУ имени П.М. Машерова, г. Витебск, Республика Беларусь

Научный руководитель – Мехович А.П., канд. физ.-мат. наук

Графопостроитель или плоттер – устройство, предназначенное для автоматического вычерчивания рисунков, схем, сложных чертежей, карт и другой графической информации на бумаге. Плоттер выполняет схожие функции с принтером, но специализируется на широкоформатной печати [1].

Целью данной работы является создание робота-плоттера на основе конструктора LEGO Mindstorms EV3.

В соответствии с целью были поставлены следующие задачи:

1. Исследовать виды современных плоттеров и функции, которые они выполняют.
2. Провести анализ имеющихся в сети интернет моделей роботов-плоттеров.
3. Создать робот на основе конструктора Mindstorms EV3.
4. Запрограммировать робота, который может писать предложения.

Материал и методы. В работе используются методы исследования экспериментально-теоретического уровня: анализ и синтез, изучение и обобщение, моделирование.

Результаты и их обсуждение. В сети интернет можно найти действующие модели Роботов-плоттеров (см. например [2–4]).

Недостаток таких Роботов-плоттеров в том, что они печатают на ленте, которая применяется для печати чеков в кассовых аппаратах (ширина ленты около 50 мм).

В основу создания «нашего» плоттера была положена идея робота собранного из деталей предыдущей версии LEGO – NXT 2.0, у которого детали не взаимозаменяемые с EV3. Выбор обусловлен тем, что для передачи крутящего момента шагового мотора, отвечающего за передвижение робота вперед-назад и мотора, отвечающего за поворот «держателя карандаша» используется червячная передача. А это, в свою очередь увеличивает передаточное число и тем самым, медленнее вращается ведомая шестерня, т.е. увеличивается точность движения механизма. Угол поворота «держателя карандаша» позволяет рисовать на бумаге шириной около 200 мм.

