Классом Локетта называют такой класс Фиттинга $\mathfrak{F}$, для которого имеет место $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$, где $\mathfrak{F}^*$– наименьший (по включению) класс Фиттинга, содержащий класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ и такой, что для любых групп G и H справедливо равенство

$$(G \times H)_{\mathfrak{F}^*} = G_{\mathfrak{F}^*} \times H_{\mathfrak{F}^*}.$$

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – σ-локальный класс Фиттинга, $\Pi = \sigma(\mathfrak{F}), m$ – такая H_σ-функция, что $m(\sigma_i) = fit(F^{\sigma_i}(G) \mid G \in \mathfrak{F})$ для всех $\sigma_i \in \Pi$ и $m(\sigma_i) = \emptyset$ для всех $\sigma_i \in \Pi'$. Тогда*

(1) $\mathfrak{F} = LR_\sigma(m)$,

(2) $m(\sigma_i) \subseteq h(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}$ для каждой H_σ-функции h σ-локального класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ и для каждого $\sigma_i \in \sigma$.

Для описания построения решеточных объединений -локальных классов Фиттинга мы будем также использовать результат Н.Т. Воробьёва, Го Вэньбиня и Ли Цаня [5], который приведен ниже в качестве леммы.

Лемма 2. [5, теорема 1.1] *Каждый -локальный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ может быть определен единственной полной внутренней H_σ-функцией F, которая имеет вид $F(\sigma_i) = F(\sigma_i)\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{F}$ и $F(\sigma_i)$ – класс Локетта для всех $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$.*

Основной результат работы – следующая

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}_j = LR_\sigma(f_j)$, где f_j – внутренняя H_σ-функция $\mathfrak{F}_j$, $j = 1,2$. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \vee_\sigma \mathfrak{F}_2 = LR_\sigma(f)$, где $f = f_1 \vee f_2$ – внутренняя H_σ-функция.*

Заключение. В работе решена задача построения решеточных объединений -локальных классов Фиттинга посредством σ-локальных функций Хартли, где σ – некоторое разбиение множества всех простых чисел.

1. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin ; New York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
2. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. // – Минск : Беларуская навука, 1997. – 240 с.
3. Мазуров, В.Д. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. – 17-е изд., доп., включающее Архив решенных задач / В.Д. Мазуров, Е.И. Хухро // Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН – Новосибирск : изд-во Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 2010. – 219 с.
4. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков // М. : Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит., 1978. – 272 с. – (Соврем. алгебра).
5. W. Guo, Li Zhang, N.T. Vorob'ev, On σ-local Fitting classes, Journal of Algebra 542 (2020) 116 – 129.

АВТОМОРФИЗМЫ ЧЕТЫРЕХМЕРНОЙ АЛГЕБРЫ ЛИ IV ТИПА БИАНКИ

Иванова Е.А.,

студентка 3 курса ВГУ имени П.М. Машерова, г. Витебск, Республика Беларусь

Научный руководитель – Подоксёнов М.Н., канд. физ.-мат. наук, доцент

В работе [1] выписан общий вид автоморфизмов четырехмерной алгебры Ли IV типа Бианки. Цель данной работы: привести подробное доказательство этого факта. При этом мы докажем одну интересную лемму, касающуюся линейных операторов.

Материал и методы. Рассматривается четырёхмерная алгебра Ли IV типа Бианки. Используются методы линейной алгебры.

Результаты и их обсуждение. Четырёхмерную алгебру Ли IV типа Бианки можно представить, как прямую сумму двух некоммутативных двумерных алгебр Ли: $\mathcal{G}_4 = \mathcal{A}(1) \oplus \mathcal{A}(1)$ ($\mathcal{A}(1)$ – алгебра Ли группы аффинных преобразований прямой). В подходящем базисе (E_1, E_2, E_3, E_4) коммутационные задаются двумя равенствами: $[E_3, E_1] = E_1$, $[E_4, E_2] = E_2$, а остальные скобки равны нулевому вектору.

Такой базис будем называть каноническим. Линейная оболочка векторов E_1 и E_2 является производной алгеброй Ли $[\mathcal{G}_4, \mathcal{G}_4]$. Обозначим это подпространство $\mathcal{H}$ (рисунок 1). Оно является коммутативным идеалом и должно быть инвариантным относительно любого автоморфизма алгебры Ли. Линейные оболочки векторов E_1, E_3 и E_2, E_4 обозначим соответственно L_1 и L_2. Эти подпространства являются двумерными идеалами. Их можно рассматривать как результат вложения $A(1)$ в $\mathcal{G}_4$.

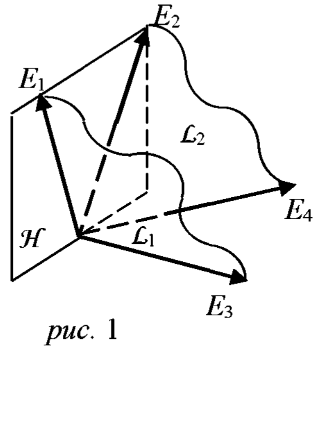

рис. 1

Каждый из векторов E_3, E_4 действует на $\mathcal{H}$ с помощью линейного преобразования $ad(E_3)$ или $ad(E_4)$. Особенность этих преобразований: оба имеют ранг 1, и ядро одного преобразования является одновременно образом другого.

Лемма. Пусть $A : L \to L$, $\mathcal{B} : L \to L$ – два линейных преобразования, ранга действующих в одном двумерном векторном пространстве L. Пусть ядро оператора $\mathcal{A}$ является одновременно образом оператора $\mathcal{B}$, и наоборот, ядро оператора $\mathcal{B}$ является одновременно образом оператора A. Тогда для любых действительных чисел $a \neq 0$ и $b \neq 0$ оператор $\mathcal{C} = a\mathcal{A} + b\mathcal{B}$ имеет ранг 2.

Доказательство. Пусть E_1, E_2 – ненулевые векторы, принадлежащие ядрам операторов $\mathcal{B}$ и $\mathcal{A}$ соответственно. Тогда по условию они являются собственными векторами операторов A и $\mathcal{B}$ соответственно, так что соответствующие собственные числа λ_1 и λ_2 не равны нулю: $\mathcal{A}E_1 = \lambda_1 E_1$, $\mathcal{B}E_2 = \lambda_2 E_2$. Пусть $\mathcal{C} = a\mathcal{A} + b\mathcal{B}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Предположим противное: его ранг оператора $\mathcal{C}$ равен 1. Тогда существует ненулевой вектор $X = \alpha E_1 + \beta E_2$, принадлежащий его ядру. Имеем:

$$\mathcal{C}X = (a\mathcal{A} + b\mathcal{B})(\alpha E_1 + \beta E_2) = a\alpha\lambda_1 E_1 + b\beta\lambda_2 E_2 = 0\,.$$

Поскольку векторы E_1 и E_2 линейно независимы, то должно выполняться

$$a\alpha\lambda_1 = 0,\ b\beta\lambda_2 = 0.$$

Отсюда следует, что $\alpha = \beta = 0$. Значит, вектор X нулевой.

Теорема. *Полная группа автоморфизмов алгебры Ли $\mathcal{G}_4$ состоит из преобразований, которые задаются в каноническом базисе одной из следующих матриц*

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & \beta & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & \gamma \\ \beta & 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

при $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$.

Доказательство. Пусть в алгебре Ли $\mathcal{G}_4$ выбран канонический базис. Умножение векторов E_1, E_2 на ненулевые числа α и β, не меняет операцию скобки. Пусть вектор E_3 заменяется произвольным вектором $E_3' = aE_3 + bE_4 + \gamma E_1 + \gamma_1 E_2$, $a \neq 0$, $b \neq 0$. Тогда

$$ad(E_3') = a \cdot ad(E_3) + b \cdot ad(E_4)\,.$$

Этот оператор оставляет инвариантным идеал $\mathcal{H}$. Согласно лемме он имеет ранг 2. Следовательно, рассматриваемая замена базиса сохраняет коммутационные соотношения, только если $a = 0$ или $b = 0$. При этом, если $b = 0$, то $a = 1$, и тогда новые базисные векторы E_1', E_2' коллинеарны старым E_1, E_2; если $a = 0$, то $b = 1$, и тогда $E_1' || E_2$, $E_2' || E_1$.

Прибавим к вектору E_3 линейную комбинацию векторов E_1 и E_2, т.е. рассмотрим новый базисный вектор $E_3' = E_3 + \gamma E_1 + \delta E_2$. Тогда

$$[E_3', E_1] = [E_3 + \gamma E_1 + \gamma_1 E_2, E_1] = E_1;\ \ [E_3', E_2] = [E_3 + \gamma E_1 + \gamma_1 E_2, E_2] = E_2.$$

Аналогично, замена $E_4' = E_4 + \delta_1 E_1 + \delta E_2$ не приводит к изменению коммутационных соотношений этого вектора с E_1 и E_2. Однако,

$$[E_3',\ E_4'] = [E_3 + \gamma E_1 + \gamma_1 E_2, E_4 + \delta_1 E_1 + \delta E_2] = \delta_1 E_1 - \gamma_1 E_2.$$

Следовательно, коммутационные соотношения сохраняются, только если $\delta_1 = \gamma_1 = 0$.

Автоморфизмы алгебры Ли $\mathcal{G}_4$ делятся на два класса. Автоморфизмы первого класса каждый из идеалов $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ оставляют на месте, а второго класса меняют местами эти идеалы. Соответственно они задаются первой или второй из матриц (1).

Следствие. *Алгебра $\mathcal{G}_4$ не содержит других двумерных некоммутативных идеалов, кроме $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$. Тем самым при любом вложении f: $\mathcal{A}(1) \to \mathcal{G}_4$, сохраняющем операцию скобки, образом могут быть только идеалы $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$.*

Заключение. В данной работе мы доказали, что любой автоморфизм четырёхмерной алгебры Ли IV типа Бианки задаётся одной из матриц (1). В работе [1] найдены все автоморфизмы, которые сохраняют евклидово скалярное произведение, заданное на рассматриваемой алгебре Ли. Цель дальнейших исследований: найти автоморфизмы, которые сохраняют лоренцево скалярное произведение. Можно выдвинуть гипотезу, что среди автоморфизмов не существует подобий относительно любого невырожденного скалярного произведения. Этим свойством алгебра Ли IV типа Бианки сильно отличается от алгебр Ли VI типа Бианки, два подтипа которых изучались в [2] и [3].

1. Подоксёнов М.Н. Автоизометрии четырехмерной алгебры ли IV типа Бианки / М.Н. Подоксёнов, А.К. Гуц // Наука – образованию, производству, экономике: материалы 73-й Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 11 марта 2020 г. Витебск : ВГУ им. П.М. Машерова, 2021. С. 48-50.
2. Подоксёнов М.Н., Автоизометрии и автоподобия алгебры Ли $\mathcal{A}(1)\oplus\mathcal{R}^2$ / М.Н. Подоксёнов, В.В. Черных // Математические структуры и моделирование. – 2020. – № 1(53). – С. 25-30.
3. Подоксёнов М.Н., Автоподобия и автоизометрии одной четырехмерной алгебры ли VI типа Бианки/ М.Н. Подоксёнов, Ф.С.Гаджиева // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, № 4. –2019.– С.124-130.

INVARIANT SUBSPACES OF THE ONE-PARAMETRIC GROUP OF SIMILARITIES OF THE MINKOWSKI SPACE

Ivanova E.A.,

3rd year student of VSU named after P.M. Masherov, Vitebsk, Republic of Belarus

Scientific adviser - Podoksenov M.N., cand. phys.-mat. sciences, Associate Professor

Lorentzian manifold (M,g) is called self-similar if it admits an essential one-parameter similarity group. It was shown in [1] that in order to find all left-invariant metrics on Lie group $\mathcal{G}$ for which it is a self-similar manifold, we should find Lorentz scalar product in the corresponding Lie algebra $\mathcal{G}$ that admits a one-parameter group of autosimilarities of $\mathcal{G}$.

Suppose that Lie algebra G contains finite number of ideals with certain property (commutative or not commutative). Then these ideals must be invariant under the action of one-parameter similarity group $h(t)$. Therefore, the following problem is of interest: find all invariant subspaces of group $h(t)$. The purpose of this work is to find all two-dimensional invariant subspaces of one-parameter similarity group of the four-dimensional Minkowski space.

Material and methods. We consider a one-parameter group of similarities of the Minkowski space, which has more than one invariant isotropic direction and find its invariant two-dimensional subspaces. Methods of linear algebra and analytical geometry are used.

Results and its discussion. If one-parameter similarity group $h_1(t)$ of the Minkowski space has more than one invariant isotropic direction, then according to [2], it is defined in an appropriate basis (e_1, e_2, e_3, e_4) by the matrix $e^{\mu t}F_1(t)$, $\mu \geq 0$, where

$$F_1(t) = \begin{pmatrix} e^{\nu t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\nu t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{Q(t)}} \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix}, \quad t \in \boldsymbol{R},\ \nu > 0,$$

and $\mathrm{Q}(t)$ is an orthogonal matrix. In this case, the Gram matrix of the basis has the form

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

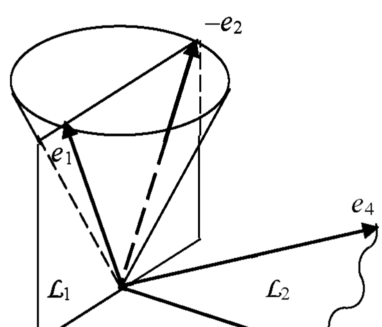

figure 1

Vectors e_1 and e_2 define invariant directions. The location of the basis vectors relative to the cone of isotropic vectors is shown in figure 1.

We should consider two cases: 1) the matrix $\mathrm{Q}(t)$ is not constant; 2) the matrix $\mathrm{Q}(t)$ is constant. In the first case, this matrix has the form

$$\mathrm{Q}(t) = \begin{pmatrix} \cos at & -\sin at \\ \sin at & \cos at \end{pmatrix}, \ a \neq 0, \qquad (1)$$

and in the second case, $\mathrm{Q}(t)$ is the unit matrix. Linear span of vectors x, y we denote $\langle x, y \rangle$.

***Theorem.* 1.** *Subspaces* $\mathcal{L}_1 = \langle e_1, e_2 \rangle$, $\mathcal{L}_2 = \langle e_3, e_4 \rangle$, *and only they are two-dimensional subspaces invariant under the action of the one-parameter group* $h_1(t)$, $t \in \boldsymbol{R}$, *if matrix* $\mathrm{Q}(t)$ *has form (1).*

2. *All two-dimensional subspaces contained in the three-dimensional subspaces* $\mathcal{H}_1 = \langle e_2, e_3, e_4 \rangle$ *and* $\mathcal{H}_2 = \langle e_1, e_3, e_4 \rangle$, *as well as the subspace* L_1, *and only they are invariant under the action of the one-parameter group* $h_1(t)$, $t \in \boldsymbol{R}$, *if* $\nu > 0$ *and* $\mathrm{Q}(t) = \mathrm{E}$.