Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра геометрии и математического анализа

**Ж.В. Иванова, М.Н. Подоксёнов,
Т.Л. Сурин**

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

***Методические рекомендации
к практическим занятиям***

*Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2021*

Репозиторий ВГУ

УДК 51(076.5)
ББК 22.1я73
И20

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 3 от 23.12.2020.

Авторы: доцент кафедры геометрии и математического анализа ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук, доцент **Ж.В. Иванова;** заведующий кафедрой геометрии и математического анализа ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук, доцент **М.Н. Подоксёнов;** доцент кафедры геометрии и математического анализа ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук, доцент **Т.Л. Сурин**

Р е ц е н з е н т :
заведующий кафедрой высшей математики
и информационных технологий УО «ВГТУ»,
кандидат физико-математических наук, доцент *Т.В. Никонова*

Иванова, Ж.В.

И20 Высшая математика : методические рекомендации к практическим занятиям / Ж.В. Иванова, М.Н. Подоксёнов, Т.Л. Сурин. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2021. – 50 с.

Данное издание подготовлено в соответствии с учебной программой по курсу «Высшая математика» для студентов факультета математики и информационных технологий, обучающихся по специальности «Управление информационными ресурсами». Содержит примеры решения задач и задания для практических занятий.

УДК 51(076.5)
ББК 22.1я73

© Иванова Ж.В., Подоксёнов М.Н., Сурин Т.Л., 2021
© ВГУ имени П.М. Машерова, 2021

Репозиторий ВГУ

СОДЕРЖАНИЕ

Репозиторий ВГУ

ВВЕДЕНИЕ

Данное издание предназначено для проведения практических занятий и организации самостоятельной работы студентов первого курса факультета математики и информационных технологий по предмету «Высшая математика», обучающихся по специальности «Управление информационными ресурсами».

Основное назначение методических рекомендаций – помочь студентам вышеназванной специальности в освоении курса «Высшая математика». По этой дисциплине существует ряд хороших задачников, список которых приведен в конце. Однако из-за слишком большого объема материала в них зачастую трудно ориентироваться и выбрать нужный материал для подготовки к экзамену. Кроме того, имеющиеся сборники задач не дают возможности индивидуализировать процесс обучения, поскольку не содержат достаточного количества однотипных задач.

Учебное издание охватывает темы, изучаемые в первом учебном семестре: матрицы и определители, системы линейных уравнений, основы аналитической геометрии, введение в математический анализ (последовательности и функции, производная функции одной переменной). Материал каждого параграфа разбит на два пункта. В пункте I – «Примеры решения задач» – разобраны наиболее типичные примеры, демонстрирующие применение на практике результатов теории. В пункте II – «Практические задания» – приведены задания для аудиторной и домашней работы.

Материал, приведенный в издании, соответствует учебной программе по «Высшей математике» специальности «Управление информационными ресурсами».

Методические рекомендации могут быть полезны для студентов других специальностей, изучающих высшую математику, в частности, для студентов специальности «Программное обеспечение информационных ресурсов».

Репозиторий ВГУ

1. МАТРИЦЫ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

1.1. *Примеры решения задач*

Определение. *Произведением матрицы* A *на число* α называется матрица C элементы которой $c_{ij} = \alpha a_{ij}$, где $\alpha \in \mathbf{R}$, a_{ij} – элементы матрицы A.

Суммой матриц $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$

называется матрица C размера $m \times n$, элементы которой $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = 1,\dots,m$ и $j = 1,\dots,n$.

***Пример* 1**. *Даны матрицы* $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & -2 \\ -5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 6 & 0 & 3 \\ 3 & 7 & -1 \end{pmatrix}$.

Найти $2A + 3B$.

Решение. $C = 2A + 3B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & -2 \\ -5 & 6 & 7 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 6 & 0 & 3 \\ 3 & 7 & -1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 6 & -8 \\ 0 & -2 & -4 \\ -10 & 12 & 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 & 6 & -3 \\ 18 & 0 & 9 \\ 9 & 21 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-9 & 6+6 & -8-3 \\ 0+18 & -2+0 & -4+9 \\ -10+9 & 12+21 & 14-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 12 & -11 \\ 18 & -2 & 5 \\ -1 & 33 & 11 \end{pmatrix}.$$

Определение. *Произведением матрицы* A размерности $m \times n$ на матрицу B размерности $n \times k$ называется матрица $C = A \cdot B$ размерности $m \times k$, элементы которой находятся по формуле:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}, \quad i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,k}.$$

Таким образом, элементы c_{ij} матрицы C равны сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы j-ого столбца матрицы B (при произведении $A \cdot B$ число столбцов матрицы A должно совпадать с числом строк матрицы B)

***Пример* 2.** *Найти произведение матриц*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем элементы матрицы $C = A \cdot B$:

$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} = 2 \cdot (-2) + 3 \cdot (-3) + (-1) \cdot 2 = -15$;

Репозиторий ВГУ

$c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = 1;$
$c_{13} = a_{11} \cdot b_{13} + a_{12} \cdot b_{23} + a_{13} \cdot b_{33} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-4) + (-1) \cdot (-1) = -9;$
$c_{21} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} = 0 \cdot (-2) + 4 \cdot (-3) + (-2) \cdot 2 = -16;$
$c_{22} = a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32} = 0 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 = 0;$
$c_{23} = a_{21} \cdot b_{13} + a_{22} \cdot b_{23} + a_{23} \cdot b_{33} = 0 \cdot 1 + 4 \cdot (-4) + (-2) \cdot (-1) = -14;$
$c_{31} = a_{31} \cdot b_{11} + a_{32} \cdot b_{21} + a_{33} \cdot b_{31} = (-3) \cdot (-2) + 1 \cdot (-3) + 5 \cdot 2 = 13;$
$c_{32} = a_{31} \cdot b_{12} + a_{32} \cdot b_{22} + a_{33} \cdot b_{32} = (-3) \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 11;$
$c_{33} = a_{31} \cdot b_{13} + a_{32} \cdot b_{23} + a_{33} \cdot b_{33} = (-3) \cdot 1 + 1 \cdot (-4) + 5 \cdot (-1) = -12.$

Следовательно, матрица C имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} -15 & 1 & -9 \\ -16 & 0 & -14 \\ 13 & 11 & -12 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Произведение матриц в общем случае не обладает свойством коммутативности, т.е. не всегда $A \cdot B = B \cdot A$.

Рассмотрим, например, матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) & 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) & 2 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично находим $B \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Если $A \cdot B = B \cdot A$, то говорят, что матрицы коммутируют.

1.2. *Практические задания*

1. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 4 & 3 & -8 \\ 2 & -2 & 52 \end{pmatrix}$. Найти матрицу X, удовлетворяющую уравнению $3A + 2X = E$.

2. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

1) Найти сумму $3A - 4B$.
2) Найти AB и BA.
3) Проверить, выполняется ли равенство $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

3. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. Выяснить, существуют ли произведения AB и BA, и, если они существуют, то найти их.

Репозиторий ВГУ

4. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 3\\ 4 & 1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}-2 & 5 & 1\\ 3 & 0 & -1\end{pmatrix}$. Выяснить, существуют ли произведения AB и BA, и, если они существуют, то найти их.

5. Вычислить $AB-BA$, если $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 3 & -2 & 4\\ -3 & 5 & -1\end{pmatrix}$.

6. Найти $f(A)$, если $f(X)=3X^2-2X+5E,\quad A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -4 & 1\\ 3 & -5 & 2\end{pmatrix}$.

7. Доказать, что матрица $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ является корнем многочлена $f(X)=X^3-3X^2+4E$.

8. Найти AB. Если $A=\begin{pmatrix}5 & 2 & 2\\ 6 & 4 & -3\\ 9 & 2 & -3\\ 7 & 6 & 4\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ -1 & -5 & 3\\ 16 & 24 & 8\end{pmatrix}$. Существует ли произведение BA, если да, то найдите его.

9. Найти AB. Если $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & -4\\ 3 & -2 & 4 & -3\\ 5 & -3 & -2 & 1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}7 & 8 & 6 & 9\\ 5 & 7 & 4 & 5\\ 3 & 4 & 5 & 6\\ 2 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$. Существует ли произведение BA, если да, то найдите его.

10. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Вычислить ABC.

2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И ИХ СВОЙСТВА

2.1. *Примеры решения задач*

Определитель второго порядка находим по формуле

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Репозиторий ВГУ

Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$. Пусть M_{ij} – это определитель матрицы, получающейся из матрицы A вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}. Этот определитель называется *минором, дополнительным к элементу* a_{ij}. *Алгебраическим дополнением A_{ij} к элементу* a_{ij} называется:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Например, определитель Δ третьего порядка раскладывается по элементам первой строки по формуле

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

***Пример* 3.** *Найти определитель* $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$, *разложив его по элементам первой строки.*

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}.$$

Тогда

$$\Delta = 1\cdot(5\cdot 9 - 6\cdot 8) - 2\cdot(4\cdot 9 - 6\cdot 7) + 3\cdot(4\cdot 8 - 5\cdot 7) = -3 + 12 - 9 = 0.$$

***Замечание* 1.** При нахождении определителя можно использовать следующие свойства:

1. *Общий множитель элементов одной строки (столбца) выносится за знак определителя.*

2. *Если к элементам одной строки (столбца) определителя прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), домноженные на некоторое число, то значение определителя не изменится.*

3. *Если в определителе одна строка или один столбец состоят из нулей, то он равен нулю. Если определитель содержит две одинаковые или пропорциональные строки (два одинаковых или пропорциональных столбца), то он равен нулю.*

Репозиторий ВГУ

В определителе Δ все элементы третьего столбца кратны трём. Вынесем множитель 3 за знак определителя и вычтем из второй и третьей строки определителя первую строку (сама первая строка при этом остается на своем месте без изменений):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 3\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 7 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \\ 6 & 6 & 2 \end{vmatrix}.$$

Мы получили две пропорциональные строки, следовательно, определитель равен нулю.

Замечание* 2.** Для нахождения определителя третьего порядка удобно пользоваться правилом, которое называется ***правилом треугольников. Согласно этому правилу первые три слагаемые в правой части вычисляются, как показано на рисунке 1. Они представляют собой сумму произведений элементов a_{11}, a_{22}, a_{33}, расположенных на главной диагонали определителя, а так же элементов, расположенных в вершинах треугольников у которых одна из сторон параллельна главной диагонали. Эти слагаемые берутся со знаком «+». Остальные три слагаемые правой части равенства вычисляются аналогично (рис. 2), только за основу берется побочная диагональ, образованная элементами a_{13}, a_{22}, a_{31}, и перед ними стоит знак «–».

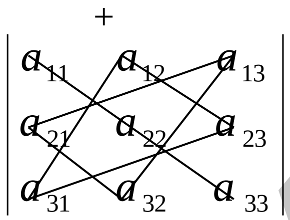


рис. 1

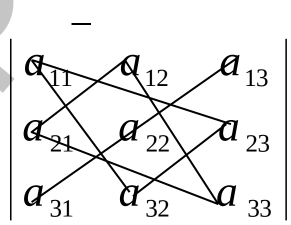


рис. 2

2.2. *Практические задания*

11. Найти определители второго порядка.

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$, 2) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$, 3) $\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$, 4) $\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$.

12. Найти определители третьего порядка.

1) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$, 2) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$, 3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$,

4) $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix}$, 5) $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & v & c+x \end{vmatrix}$,

Репозиторий ВГУ

6) $\begin{vmatrix} \cos\alpha\cdot\cos\beta & \sin\alpha\cdot\cos\beta & \sin\beta \\ -r\sin\alpha\cdot\cos\beta & r\cos\alpha\cdot\cos\beta & 0 \\ -r\cos\alpha\cdot\sin\beta & -r\sin\alpha\cdot\sin\beta & r\cos\beta \end{vmatrix}$.

13. Решить уравнения.

1) $\begin{vmatrix} x^2-4 & -1 \\ x-2 & x+2 \end{vmatrix}=0,$ 2) $\begin{vmatrix} 4\sin x & 1 \\ 1 & \cos x \end{vmatrix}=0,$ 3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3-x & 3 \\ 1 & 2 & 5+x \end{vmatrix}=0.$

14. Используя свойства определителей и метод разложения определителя по строке или столбцу, вычислить определители.

1) $\begin{vmatrix} 12\,314 & 16\,536 & 20\,537 \\ 6157 & 8\,268 & 10\,268 \\ 513 & 689 & 126 \end{vmatrix}$, 2) $\begin{vmatrix} 35\,436 & 46\,343 & 22\,429 \\ 17\,718 & 23171 & 11\,214 \\ 5\,906 & 7\,723 & 3\,737 \end{vmatrix}$,

3) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$, 4) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$.

3. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

3.1. *Примеры решения задач*

Пример 4. *Найти решение системы линейных уравнений*

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=5, \\ 3x_1-x_2+4x_3=1, \\ -x_1+5x_2-x_3=9 \end{cases}$$

с помощью обратной матрицы. Выполнить проверку.

Решение. Запишем матрицу данной системы и столбец свободных членов:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу, обратную матрице *A*. Для этого найдем алгебраические дополнения и определитель матрицы.

$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}=-19,$ $A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=-1,$ $A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}=14,$

Репозиторий ВГУ

$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 5 & -1\end{vmatrix}=-3,\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & -1\end{vmatrix}=-2,\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 5\end{vmatrix}=-7,$

$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 4\end{vmatrix}=7,\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-7,\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-7.$

$$\det\boldsymbol{A}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=1\cdot(-19)+2\cdot(-1)+(-1)\cdot 14=-35.$$

Матрица, обратная матрице A, находится по формуле

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{\det\boldsymbol{A}}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=-\frac{1}{35}\begin{pmatrix}-19 & -3 & 7\\ -1 & -2 & -7\\ 14 & -7 & -7\end{pmatrix}.$$

Найдем решение системы по формуле $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=-\frac{1}{35}\begin{pmatrix}-19 & -3 & 7\\ -1 & -2 & -7\\ 14 & -7 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\ 1\\ 9\end{pmatrix}=\frac{1}{35}\begin{pmatrix}-19\cdot 5-3\cdot 1+7\cdot 9\\ -1\cdot 5-2\cdot 1-7\cdot 9\\ 14\cdot 5-7\cdot 1-7\cdot 9\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{35}\begin{pmatrix}-35\\ -70\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 0\end{pmatrix}.$$

Т.е. $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 0\end{pmatrix}$. Решение системы: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=0$.

Проверка. Подставим решение в систему, получаем:
$1\cdot 1+2\cdot 2+0=5$ – верно, $3\cdot 1-1\cdot 2+0=1$ – верно, $-1\cdot 1+5\cdot 2-0=9$ – верно..

Ответ: $(1,2,0)$.

3.2. *Практические задания*

15.1. Найти матрицу, обратную матрице A, если

1) $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, 2) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, 3) $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$,

4) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$, 5) $A=\begin{pmatrix}3 & -4 & 5\\ 2 & -3 & 1\\ 2 & -5 & -1\end{pmatrix}$, 6) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

15.2. Найти неизвестную матрицу X из уравнения

1) $\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}4 & -6\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, 2) $X\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 4 & 3 & 2\\ 1 & -2 & 5\end{pmatrix}$.

Репозиторий ВГУ

16. Найти решение систем линейных уравнений матричным способом. Сделать проверку.

1) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 2, \\ 5x_1 - 9x_2 = 8, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x_1 - 11x_2 = 5, \\ 6x_1 - 5x_2 = -4, \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 10x_1 - 6x_2 = 14, \\ 7x_1 + 9x_2 = 1, \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1, \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ -4x_1 + 5x_2 - 2x_3 = -2, \\ 4x_1 + x_2 + 7x_3 = -6. \end{cases}$

7) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 8, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 9, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 6. \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -6, \\ 6x_1 + 11x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$ 9) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 5, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

4. ПРАВИЛО КРАМЕРА

4.1. *Примеры решения задач*

***Пример* 5.** *Найти решение системы уравнений*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

методом Крамера. Сделать проверку.

Решение. Запишем матрицу данной системы и столбец свободных членов: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Найдем определители $\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -6, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3,$$

где Δ_i – определитель, который получается из определителя Δ заменой i-го столбца на столбец B.

Следовательно, система имеет решение

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-3}{-3} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-6}{-3} = 2, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-3}{-3} = 1.$$

Проверка. Подставим решение в систему, получаем

Репозиторий ВГУ

$$\begin{cases} 1 + 2\cdot 2 + 1 = 6 - \text{верно}, \\ 3\cdot 1 + 1 - 3\cdot 1 = 2 - \text{верно}, \\ 2\cdot 1 + 2 - 1 = 3 - \text{верно}. \end{cases}$$

Ответ: (1, 2, 1).

4.2. *Практические задания*

17. Решить систему уравнений с помощью правила Крамера. Выполнить проверку.

1) $\begin{cases} 6x + 11y = 14, \\ 8x - 5y = -1. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 11x - 6y = 14, \\ 5x + 8y = 1. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 9x + 7y = 1, \\ 5x - 3y = 4. \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -8, \\ 2x_2 + 7x_3 = 17. \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 9, \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -5. \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -3, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 14, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 10. \end{cases}$ 9) $\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - x_3 = -7, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$

10) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 4. \end{cases}$ 11) $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18. \end{cases}$ 12) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$

13) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -8, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6. \end{cases}$

5. РАНГ МАТРИЦЫ. МЕТОД ГАУССА

5.1. *Примеры решения задач*

Пример 6. *Найти ранг матрицы* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. С помощью элементарных преобразований приведем матрицу к квазитреугольной форме. Для этого первую строку умножим на (–1) и сложим со второй, первую строку умножим на (–8) и сложим с третьей, а затем сложим первую и четвертую строки (наша цель преобразовать матрицу так, чтобы в первом столбце все элементы кроме первого были равны нулю). Получим

Репозиторий ВГУ

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 14 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Вторую строку складываем с третьей, получаем

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 18 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ранг последней матрицы равен трем, так как имеется отличный от нуля минор третьего порядка этой матрицы (данный минор обведен).

***Ответ*: r**$_{A}$ = 3.

Пример 7. *Найти общее решение однородной системы линейных уравнений.*

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 10x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - 6x_4 - 3x_5 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 - 14x_4 - 10x_5 = 0, \\ -2x_1 + x_2 + 6x_3 + 7x_4 - 7x_5 = 0. \end{cases}$$

Решение. Будем искать решение ***методом Гаусса***. Составим матрицу этой системы.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 & -10 & -5 \\ 1 & -1 & 0 & -6 & -3 \\ 3 & -6 & -1 & -14 & -10 \\ -2 & 1 & 6 & 7 & -7 \end{pmatrix}.$$

Для удобства поставим на первое место вторую строку, получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -6 & -3 \\ 2 & -3 & -1 & -10 & -5 \\ 3 & -6 & -1 & -14 & -10 \\ -2 & 1 & 6 & 7 & -7 \end{pmatrix}.$$

С помощью элементарных преобразований приведем матрицу к квазитреугольному виду.

Вначале преобразуем матрицу так, чтобы в первом столбце все элементы кроме первого были равны нулю Для этого ко второй строке прибавим первую, умноженную на (–2), к третьей – первую, умноженную на (–3), а к четвёртой – первую, умноженную на 2. При этом сама первая строка остаётся без изменений.

Репозиторий ВГУ

Затем получим нули во втором столбце кроме первых двух элементов, для этого вторую строку умножаем на (–3) и складываем с третьей, вторую строку умножаем на (–1) и складываем с четвертой. Далее вторую строку умножаем на (–1), третью делим на 2, а четвертую строку – на 7.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -6 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 6 & -5 & -13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -6 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 7 & -7 & -14 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -6 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

В последней матрице содержатся две одинаковые строки. Одну из них можем вычеркнуть. Получим матрицу вида

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -6 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Возьмем минор $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ в качестве базисного. Тогда базисными неизвестными являются x_1, x_2, x_3. Исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 6x_4 + 3x_5, \\ x_2 + x_3 = 2x_4 + x_5, \\ x_3 = x_4 + 2x_5. \end{cases}$$

Базисные неизвестные остаются в левой части, а свободные неизвестные переносим в правую часть. После этого свободным неизвестным придаём значения произвольных параметров $x_4 = \alpha_1$, $x_5 = \alpha_2$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \boldsymbol{R}$. Затем последовательно выражаем базисные неизвестные через параметры α_1, α_2:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + 6\alpha_1 + 3\alpha_2 = \alpha_1 - \alpha_2 + 6\alpha_1 + 3\alpha_2 = 7\alpha_1 + 2\alpha_2, \\ x_2 = -x_3 + 2\alpha_1 + \alpha_2 = -\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_1 - \alpha_2, \\ x_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2, \\ x_4 = \alpha_1, \\ x_5 = \alpha_2 \\ \alpha_1, \alpha_2 \in \boldsymbol{R}. \end{cases}$$

Ответ:

$X = (7\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \boldsymbol{R}$ – общее решение системы.

Репозиторий ВГУ

***Пример* 8.** *Найти общее решение неоднородной системы уравнений*

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+2x_3+2x_4+2x_5=2\,, \\ 3x_1+2x_2+3x_3+\ \ x_4-\ \ x_5=\ 1\,, \\ 6x_1+4x_2+3x_3+5x_4+7x_5=5\,, \\ 6x_1+4x_2+5x_3+3x_4+\ \ x_5=3\,. \end{cases}$$

Решение. Запишем матрицу системы A и расширенную матрицу системы $\overline{A}$

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 6 & 4 & 3 & 5 & 7 \\ 6 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \overline{A}=\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 6 & 4 & 3 & 5 & 7 & 5 \\ 6 & 4 & 5 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Применяя преобразования, аналогичные преобразованиям в примере 1, сведем матрицу $\overline{A}$ к виду

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -1 \end{array}\right).$$

Минор $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, отсюда, $r_{\overline{A}}=r_A$, следовательно, система совместна. Последней матрице соответствует следующая система:

$$\begin{cases} 2x_2+2x_3=2-3x_1-2x_4-2x_5\,, \\ \qquad\quad x_3=-1+x_4+3x_5\,. \end{cases}$$

В качестве базисных переменных возьмем x_2 и x_3. Тогда x_1, x_4 и x_5 – свободные неизвестные. Перенося их в правую часть, получаем

$$\begin{cases} 2x_2+2x_3=2-3a-2b-2c, \\ \qquad\quad x_3=-1+b+3c, \\ \qquad\quad x_1=a\,,\ x_4=b\,, \\ \qquad\quad x_5=c\,;\ a,b,c\in\boldsymbol{R}. \end{cases}$$

Подставляя значение x_3 в первое уравнение, находим x_1

$$x_2=\frac{1}{2}(-3a-2b-2c-2x_3)=\frac{1}{2}(2-3a-2b-2c+2-2b-6c)=$$

$$=\frac{1}{2}(4-3a-4b-8c)\,.$$

Ответ: $X=(a;\ 2-1{,}5a-2b-4c;\ -1+b+3c;\ b;\ c),\ a,b,c\in\boldsymbol{R}$.

5.2. *Практические задания*

18. Определить ранг матрицы.

Репозиторий ВГУ

$$1)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & -2 & 2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad 2)\begin{pmatrix} 7 & -3 & 1 & 6 & 5 \\ 2 & -6 & 3 & 8 & 0 \\ 4 & -5 & 9 & 1 & 2 \\ 4 & -12 & 6 & 16 & 0 \end{pmatrix}, \qquad 2)\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}.$$

19. Выяснить, совместны ли системы уравнений, и, если совместны, найти решение этих систем

$$1)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 5x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 10x_4 = 0, \\ -3x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 14x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 8x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ -2x_1 + x_3 - 3x_4 - x_5 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 10x_4 + 7x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 0. \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 - 5x_5 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 9x_4 - 13x_5 = 0, \\ -3x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 9x_4 + 7x_5 = 0, \\ -2x_1 - x_2 + 4x_4 - x_5 = 0. \end{cases} \qquad 4)\ \begin{cases} 2x_1 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_4 + 6x_5 = 0, \\ -4x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 10x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases}$$

$$5)\ \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 1, \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 7. \end{cases} \qquad 6)\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4. \end{cases}$$

$$7)\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 6x_3 + 3x_4 = -3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ 5x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 5. \end{cases} \qquad 8)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 15, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 7x_1 + 5x_2 - x_3 = 14. \end{cases}$$

$$9)\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3. \end{cases} \qquad 10)\ \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0. \end{cases}$$

6. ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

6.1. *Примеры решения задач*

***Пример* 9.** *На чертеже даны векторы* $\vec{\mathbf{a}}$ *и* $\vec{\mathbf{b}}$ (*рисунок* 3). *Постройте векторы*

а) $\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}$ *по правилу треугольника*;

б) $\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}$ *по правилу параллелограмма*;

в) $\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{b}}$;

г) $2\vec{\mathbf{a}}$; д) $-2\vec{\mathbf{b}}$.

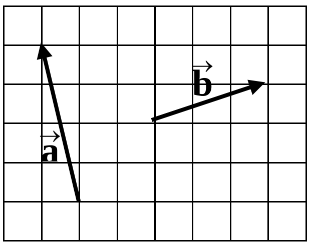


рис. 3

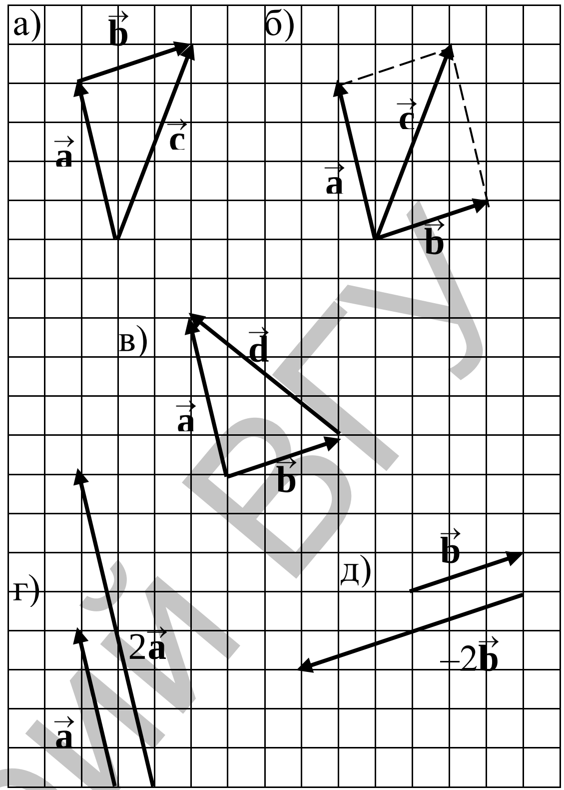
Репозиторий ВГУ

Решение. *а*) Отложим вектор $\vec{\mathbf{b}}$ из конца вектора $\vec{\mathbf{a}}$ и соединим начало $\vec{\mathbf{a}}$ с концом $\vec{\mathbf{b}}$. Получится вектор $\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$.

б) Отложим векторы $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ из одной точки. Достроим фигуру до параллелограмма. Диагональ, которая исходит из этой же точки задает сумму $\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$.

в) Отложим векторы $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ из одной точки. Проведем вектор из конца вектора $\vec{\mathbf{b}}$ в конец вектора $\vec{\mathbf{a}}$. Получится вектор $\vec{\mathbf{d}} = \vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}$.

г) и д) построены на чертеже без пояснений.



***Пример* 10.** *ABCD – произвольный четырёхугольник на плоскости, E и F – середины сторон DA и BC. Обозначим* $\vec{\mathbf{a}} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{\mathbf{b}} = \overrightarrow{DC}$ (*рисунок* 4). *Выразите вектор* $\overrightarrow{EF}$ *через векторы* $\vec{\mathbf{a}}$ *и* $\vec{\mathbf{b}}$.

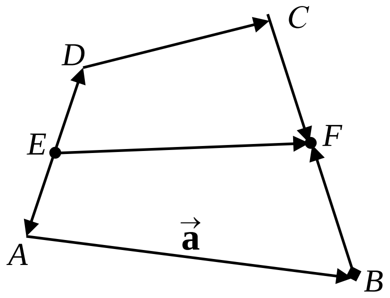


*рис.*4

Решение. Мы можем пройти из точки E в точку F напрямую, а можем через направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$.

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \vec{\mathbf{a}} + \overrightarrow{BF}\,;\ \ \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ED} + \vec{\mathbf{b}} + \overrightarrow{CF}\,.$$

Сложим эти равенства:

$$2\overrightarrow{EF} = (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{ED}) + \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} + (\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CF})\,.$$

В каждой из скобок стоят противоположные векторы. Их сумма равна нулевому вектору.

Ответ: $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}})$.

***Пример* 11.** *На направленных отрезках, представляющих векторы* $\vec{\mathbf{a}}$ *и* $\vec{\mathbf{b}}$, *отложенные из одной точки, построен треугольник* (*рисунок* 5). *Найдите длину медианы треугольника, исходящей из этой же точки, если* $|\vec{\mathbf{a}}| = 8$, $|\vec{\mathbf{b}}| = 5$, $\angle(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}) = 120°$.

Репозиторий ВГУ

Решение. Пусть $\vec{\mathbf{c}}$ – вектор, который задаёт медиану. Тогда, как было доказано на лекции, $\vec{\mathbf{c}} = \frac{1}{2}(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}})$. Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины. Поэтому

$$|\vec{\mathbf{c}}|^2 = \vec{\mathbf{c}}^2 = \frac{1}{4}(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}})^2 = \frac{1}{4}(\vec{\mathbf{a}}^2 + 2\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{b}}^2) = (\ast)$$

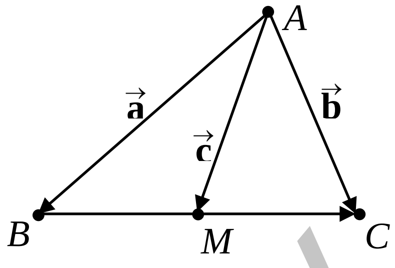


рис. 5

Обратите внимание, что точку в произведении $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}$ ставить обязательно. Продолжаем:

$$(\ast) = \frac{1}{4}(|\vec{\mathbf{a}}|^2 + 2|\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}|\cos\angle(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}) + |\vec{\mathbf{b}}|^2) =$$

$$= \frac{1}{4}(64 + 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ + 25) = \frac{49}{4}.$$

Ответ: $|\vec{\mathbf{c}}| = \frac{7}{2}$.

Пример 12. *Даны координаты векторов*: $\vec{\mathbf{a}}(1, -\sqrt{3})$, $\vec{\mathbf{b}}(1, \sqrt{3})$. *Найдите угол между ними*.

Решение. По отдельности найдём скалярное произведение векторов и их длины:

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = 1 \cdot 1 + (-\sqrt{3})\sqrt{3} = 1 - 3 = -2;$$

$$|\vec{\mathbf{a}}| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2; |\vec{\mathbf{b}}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2.$$

Подставляем всё найденное в формулу:

$$\cos\angle(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}) = \frac{\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}}{|\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}|} = \frac{-2}{2 \cdot 2} = -\frac{1}{2}.$$

По таблице косинусов находим, что $\angle(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}) = 120^\circ$.

Пример 13. *Дано*: $M(-3, 4)$, $N(12, 12)$. *Найдите расстояние между точками* M *и* N.

Решение. Найдём сначала координаты вектора $\vec{MN}$. Для этого из координат точки N вычитаем координаты точки M:

$$\vec{MN}(12 - (-3), 12 - 4); \ \vec{MN}(15, 8).$$

Затем находим его длину: $|\vec{MN}| = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} = 17$. Это и есть расстояние между точками M и N.

Репозиторий ВГУ

6.2. *Практические задания*

20. *На чертеже даны векторы* $\vec{\mathbf{a}}$ *и* $\vec{\mathbf{b}}$ (*рисунок* 6). *Постройте векторы*

а) $\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}$ *по правилу треугольника*;

б) $\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}$ *по правилу параллелограмма*;

в) $\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{b}}$;

г) $2\vec{\mathbf{a}}$; д) $-2\vec{\mathbf{b}}$.

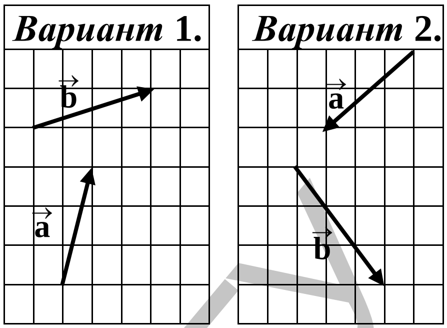


рис. 6

21. *ABCDEF* – правильный шестиугольник.

а) укажите три направленных отрезка, равных $\vec{\mathbf{a}}$,

б) укажите три направленных отрезка, равных $\vec{\mathbf{b}}$,

в) постройте $\vec{\mathbf{c}}=\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}$, *г*) постройте $\vec{\mathbf{d}}=\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{b}}$,

д) постройте $2\vec{\mathbf{a}}$, *е*) постройте $-2\vec{\mathbf{b}}$, если:

1) $\vec{\mathbf{a}}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{\mathbf{b}}=\overrightarrow{BC}$ (рисунок 7); 2) $\vec{\mathbf{a}}=\overrightarrow{OB}$, $\vec{\mathbf{b}}=\overrightarrow{DO}$ (рисунок 8);

3) $\vec{\mathbf{a}}=\overrightarrow{EO}$, $\vec{\mathbf{b}}=\overrightarrow{OC}$; 4) $\vec{\mathbf{a}}=\overrightarrow{AF}$, $\vec{\mathbf{b}}=\overrightarrow{AB}$; 5) $\vec{\mathbf{a}}=\overrightarrow{BO}$, $\vec{\mathbf{b}}=\overrightarrow{BA}$.

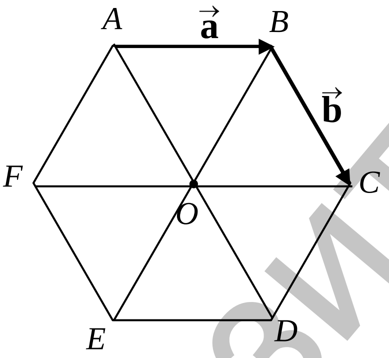


рис. 7

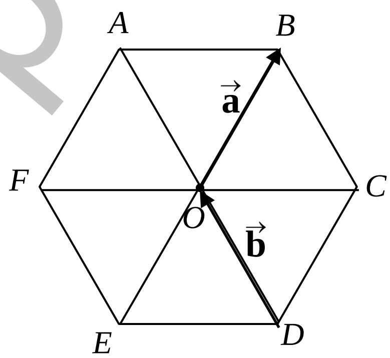


рис. 8

22. *ABCD* – произвольный четырёхугольник на плоскости, *E* и *F* – середины диагоналей *AC* и *BD*. Обозначим $\vec{\mathbf{a}}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{\mathbf{b}}=\overrightarrow{DC}$. Выразите вектор $\overrightarrow{EF}$ через векторы $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$.

23. *ABC* – произвольный треугольник, *AM*, *BN*, *CQ* – медианы, *O* – точка их пересечения (рисунок 9). Докажите, что

1) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{\mathbf{o}}$; 2) $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OQ}=\vec{\mathbf{o}}$

(используйте доказанный на лекциях факт, что $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}))$.

24. Пусть *A*, *B*, *C*, *D* – середины последовательных сторон произвольного четырёхугольника. Докажите, что $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{\mathbf{o}}$.

Репозиторий ВГУ

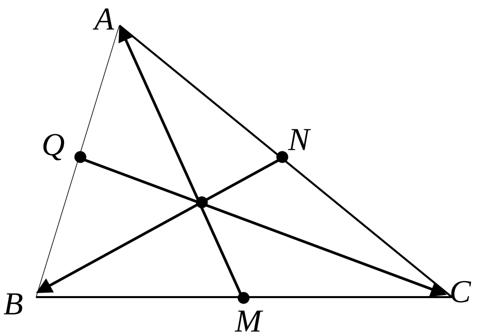


*рис.*9

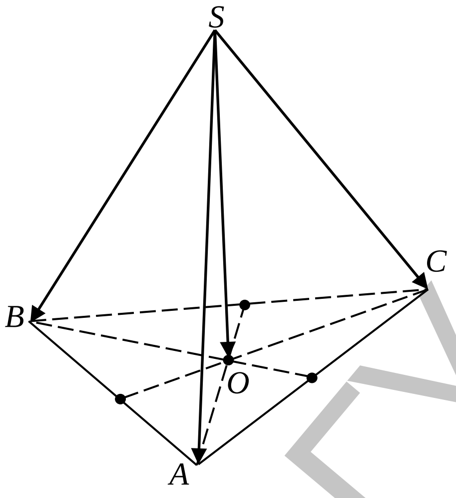


*рис.*10

25. $ABCS$ – произвольная треугольная пирамида, $\vec{\mathbf{a}} = \overrightarrow{SA}$, $\vec{\mathbf{b}} = \overrightarrow{SB}$, $\vec{\mathbf{c}} = \overrightarrow{SC}$, O – точка пересечения медиан основания (рисунок 10). Выразите вектор $\overrightarrow{SO}$ через векторы $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$, $\vec{\mathbf{c}}$. Будет ли верен ответ, если $ABCS$ – произвольный четырёхугольник на плоскости?

26. Пользуясь скалярным произведением векторов, найдите длины диагоналей параллелограмма, стороны которого определяют векторы $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$, такие что $|\vec{\mathbf{a}}| = 7$, $|\vec{\mathbf{b}}| = 3$, $\angle(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}) = 60°$.

27. Пользуясь скалярным произведением векторов, докажите что

а) диагонали ромба взаимно перпендикулярны; б) диагонали прямоугольника равны между собой.

28. Какой угол образуют единичные векторы $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$, если известно, что векторы $\vec{\mathbf{a}} + 2\vec{\mathbf{b}}$ и $5\vec{\mathbf{a}} - 4\vec{\mathbf{b}}$ взаимно перпендикулярны?

29. Вычислите угол между векторами

1) $\vec{\mathbf{a}}(2, 1)$ и $\vec{\mathbf{b}}(2, 6)$;

2) $\vec{\mathbf{a}}(1, 2, -2)$ и $\vec{\mathbf{b}}(-1, 3, 0)$.

30. Найдите расстояние между данными точками.

1) $M(-1, 3)$, $N(5, 11)$; 2) $M(3, -1)$, $N(8, -13)$;

3) $M(-1, 4, 2)$, $N(7, 8, 3)$.

7. ПРИЗНАК КОЛЛИНЕАРНОСТИ ВЕКТОРОВ. ДЕЛЕНИЕ ОТРЕЗКА В ЗАДАННОМ ОТНОШЕНИИ

7.1. *Примеры решения задач*

Теорема. (*Второй признак коллинеарности векторов*). *Ненулевые векторы* $\vec{\mathbf{a}}$ *и* $\vec{\mathbf{b}}$ *коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны*:

$$\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2) \,||\, \vec{\mathbf{b}}(b_1, b_2) \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \;\; (\vec{\mathbf{a}} \neq \vec{\mathbf{o}}, \vec{\mathbf{b}} \neq \vec{\mathbf{o}}).$$

Репозиторий ВГУ

***Пример* 14.** *Выясните, лежат ли три данные точки на одной прямой*:

1) $A(1,-2)$, $B(-2, 5)$, $C(-8, 19)$; 2) $A(2, 3)$, $B(-2, 10)$, $C(-8, 18)$.

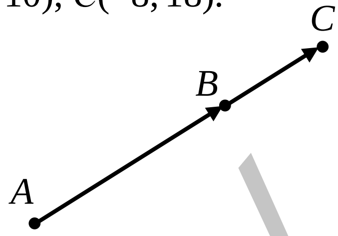


*рис.*11

Решение. 1) Точки A, B, C лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда векторы $\vec{AB}$ и $\vec{BC}$ коллинеарны (рисунок 11). Найдём координаты этих векторов. Для этого из координат конца вычитаем координаты начала:

$$\vec{AB}(-2-1, 5-(-2));\ \vec{AB}(-3, 7);$$

$$\vec{BC}(-8-(-2), 19-5);\ \vec{BC}(-6, 14).$$

Составляем пропорцию из координат векторов:

$$\frac{-3}{-6} = \frac{7}{14}.$$

Пропорция верная $\Rightarrow$ $\vec{AB} \,||\, \vec{BC}$ $\Rightarrow$ точки A, B, C лежат на одной прямой.

2) Рассмотрим векторы $\vec{AB}(-4, 7)$ и $\vec{BC}(-6, 8)$. Пропорция из координат:

$$\frac{-4}{-6} = \frac{7}{8}.$$

Пропорция неверная $\Rightarrow$ $\vec{AB}$ неколлинеарен $\vec{BC}$ $\Rightarrow$ точки A, B, C не лежат на одной прямой.

Пусть нам известны координаты концов отрезка: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. Тогда координаты точки $C(x, y)$, которая делит этот отрезок в отношении $\lambda_1 : \lambda_2$ находятся так:

$$x = \frac{\lambda_2 x_1 + \lambda_1 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2},\ y = \frac{\lambda_2 y_1 + \lambda_1 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2}. \qquad (1)$$

В частности, координаты середины отрезка есть среднее арифметическое от координат его концов.

***Пример* 15.** *Даны точки* $M(-3, 4)$ *и* $N(15, 10)$.

а) *Найдите координаты точки* C, *которая является серединой отрезка* MN;

б) *найдите координаты точек* D *и* E, *которые делят отрезок на три равные части* (*рисунок* 12).

рис. 12

Решение. *а*) Координаты середины отрезка MN находятся по формуле

$$C\left(\frac{x_M + x_N}{2}, \frac{y_M + y_N}{2}\right).$$

Следовательно, $C\left(\frac{-3+15}{2}, \frac{4+10}{2}\right)$, $C(6, 7)$.

Репозиторий ВГУ

б) Точка D делит отрезок в отношении 1:2, т.е. $\dfrac{|MD|}{|DN|} = \dfrac{1}{2}$; применим формулы (1):

$$x_D = \frac{2\cdot x_M + 1\cdot x_N}{1+2} = \frac{2\cdot(-3) + 1\cdot 15}{3} = 3,$$

$$y_D = \frac{2\cdot y_M + 1\cdot y_N}{1+2} = \frac{2\cdot 4 + 1\cdot 10}{3} = 6.$$

Значит, $D(3, 6)$.

Точка E делит отрезок в отношении 2:1, т.е. $\dfrac{|MD|}{|DN|} = \dfrac{2}{1}$; применим формулы (4):

$$x_E = \frac{2\cdot x_M + 1\cdot x_N}{1+2} = \frac{1\cdot(-3) + 2\cdot 15}{3} = 9,\ y_E = \frac{2\cdot y_M + 1\cdot y_N}{1+2} = \frac{1\cdot 4 + 2\cdot 10}{3} = 8.$$

Значит, $E(9, 8)$.

7.2. *Практические задания*

31. Выясните, лежат ли три данные точки на одной прямой.

1) $A(-1, 3)$, $B(5, -6)$, $C(9, 0)$; 2) $A(3, -1)$, $B(5, 3)$, $C(8, 9)$.

32. Докажите, что четырёхугольник с вершинами в точках $A(1, 2)$, $B(7, -6)$, $C(11, -3)$, $D(8, 1)$ является трапецией. Найдите величину $\angle DAB$.

33. Дан отрезок MN. Найдите: *а*) координаты середины отрезка MN, *б*) координаты точек, делящих отрезок на три равные части, если

1) $M(-1, 3)$, $N(11, 9)$; 2) $M(3, -1)$, $N(-9, -13)$.

34. Найдите координаты точки пересечения медиан треугольника, если известны координаты его вершин:

1) $A(4, 1)$, $B(10, 7)$, $C(1, 7)$; 2) $A(-2, 7)$, $B(5, -1)$, $C(3, 3)$.

8. ВЕКТОРНОЕ И СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

8.1. *Примеры решения задач*

***Пример* 16.** *Даны координаты вершин треугольной пирамиды $SABC$*: $A(4, 0, 1)$, $B(5, -1, 1)$, $C(4, 7, -5)$, $S(7, 5, 2)$. *Найдите объём пирамиды, площадь основания ABC и высоту с помощью векторного и смешанного произведений* (рисунок 13).

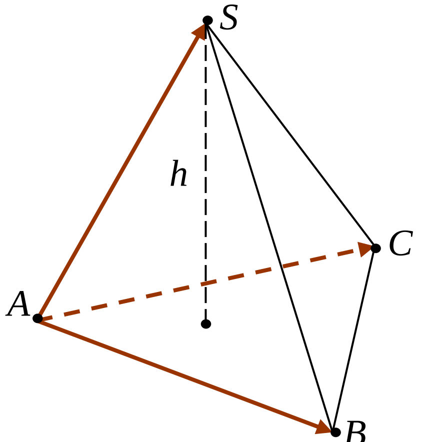


рис. 13

Решение. Находим координаты трёх векторов, лежащих на рёбрах пирамиды и исходящих из одной вершины:

$\overrightarrow{AB}(1, -1, 0)$, $\overrightarrow{AC}(0, 7, -6)$, $\overrightarrow{AS}(3, 5, 1)$.

Репозиторий ВГУ

Модуль смешанного произведения этих векторов равен объёму параллелепипеда, построенного на этих векторах. Объём же пирамиды составляет 1/6 от объёма параллелепипеда: $V = \frac{1}{6}|\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AS}\,|$.

Смешанное произведение можно вычислить, как определитель, составленный из координат векторов:

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AS} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & -6 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 55.$$

$$V = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AS}\,| = \frac{55}{6}.$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 7 & -6 \end{vmatrix}\vec{\mathbf{i}} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix}\vec{\mathbf{j}} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}\vec{\mathbf{k}} = 6\vec{\mathbf{i}} + 6\vec{\mathbf{j}} + 7\vec{\mathbf{k}}.$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\,| = \frac{1}{2}\sqrt{36+36+49} = \frac{11}{2}.$$

С другой стороны, $V = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot h$. Отсюда

$$h = \frac{3V}{S_{\Delta ABC}} = \frac{55}{2} : \frac{11}{2} = 5.$$

Ответ: $V = \frac{55}{6}$, $S_{\Delta ABC} = \frac{11}{2}$, $h = 5$.

8.2. *Практические задания*

35. Даны координаты вершин треугольной пирамиды $SABC$. Найдите объём пирамиды, площадь основания ABC и высоту с помощью векторного и смешанного произведений.

1) $A(-1,1,2)$, $B(-5,4,-2)$, $C(-1,2,3)$, $S(-8,-5,4)$;

2) $A(0,2,2)$, $B(0,4,3)$, $C(1,4,2)$, $S(7,-1,7)$.

36. Дано: $|\vec{\mathbf{a}}| = 3$, $|\vec{\mathbf{b}}| = 6$, $\angle(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}}) = 30°$. Найдите $|(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}})\times(\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{b}})|$.

37. Вычислите высоту параллелограмма, проведённую к стороне AB, если $\overrightarrow{AB}(6,\ 0,\ 2)$, $\overrightarrow{AC}(1{,}5;\ 2;\ 1)$. Найдите вектор, перпендикулярный векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

38. Выясните, компланарны ли следующие векторы. Если они не компланарны, то какую тройку (правую или левую) они образуют?

1) $\vec{\mathbf{a}}(1,1,1)$, $\vec{\mathbf{b}}(1,0,1)$, $\vec{\mathbf{c}}(0,1,1)$;

2) $\vec{\mathbf{a}}(13,\ 12,\ 11)$, $\vec{\mathbf{b}}(24,\ 23,\ 22)$, $\vec{\mathbf{c}}(35,\ 34,\ 33)$.

Репозиторий ВГУ

9. ПОЛЯРНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ

9.1. *Примеры решения задач*

***Пример* 17.** 1) *Даны полярные координаты точки*: $M\,(4,\ 120^\circ)$. *Постройте эту точку в полярной системе координат и найдите её декартовы координаты*.

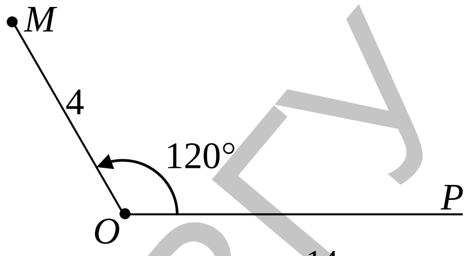


рис. 14

2) *Даны декартовы координаты точки* $N(2, -2\sqrt{3}\,)$. *Найдите её полярные координаты и изобразите точку в полярной системе координат..*

Решение. 1) Изобразим сначала полярную систему координат. Для этого надо нарисовать один луч OP. Отложим от этого луча угол 120° (рисунок 14). Затем на этом луче откладываем от начала координат отрезок, равный 4. Получим данную точку M.

Воспользуемся формулами

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Поскольку $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$, $\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то

$$x = 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -2,\ y = 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3},$$

Ответ: $M\,(-2, \sqrt{3})$, рисунок 14.

2) Воспользуемся формулами:

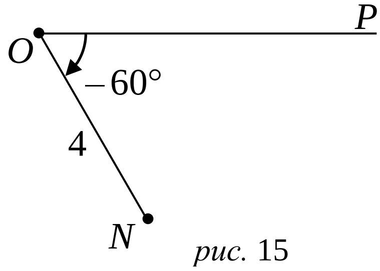


рис. 15

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} r = \sqrt{2^2+(-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = 4, \\ \cos\varphi = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2},\ \sin\varphi = \dfrac{-2\sqrt{3}}{4} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Поскольку у нас $\sin\varphi < 0$, $\cos\varphi > 0$, то $\varphi = -60^\circ$.

Ответ: $N(4, -60^\circ)$ (рисунок 15).

9.2. *Практические задания*

39. Условие см. в примере 17.

1) $M(6, 60^\circ)$, $N(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$; 2) $M(8, 135^\circ)$, $N(-4\sqrt{3}, 4)$.

Репозиторий ВГУ

40. Дан треугольник ABC. Вершина A помещается в полюсе, а две другие имеют заданные полярные координаты: 1) $C(1, \frac{\pi}{4})$, $B(2, \frac{5\pi}{12})$; 2) $C(3, \frac{\pi}{4})$, $B(2, \frac{7\pi}{12})$.

1) Изобразить треугольник ABC (сделать точный чертёж);
2) Вычислить площадь треугольника;
3) Найти длину стороны BC.

10. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ НА ПЛОСКОСТИ. РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ

10.1. *Примеры решения задач*

1. *Прямая, проходящая через точку* $M_o(x_o, y_o)$, *и имеющая направляющий вектор* $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2)$ (рисунок 16), *задается уравнением*

$$\frac{x-x_o}{a_1} = \frac{y-y_o}{a_2}, \qquad (2)$$

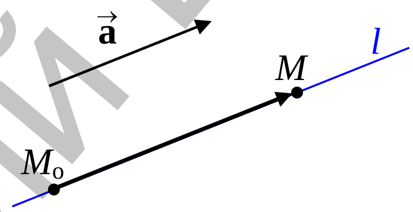


рис. 16

которое называется [*каноническим уравнением прямой*], *или уравнениями*

$$\begin{cases} x = x_o + a_1 t, \\ y = y_o + a_2 t, \ t \in \boldsymbol{R}, \end{cases} \qquad (3)$$

которые называются [*параметрическими уравнениями прямой.*]

2. *Прямая, проходящая через точку* $M_o(x_o, y_o)$, *и имеющая вектор нормали* $\vec{\mathbf{n}}(a, b)$, (рисунок 17) *задается в уравнением*

$$a(x-x_o) + b(y-y_o) = 0. \qquad (4)$$

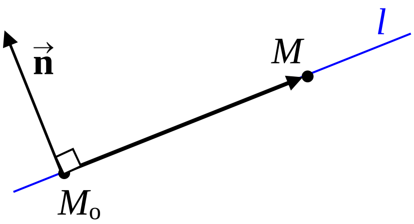


*рис.*17

Любая прямая на плоскости может быть задана уравнением вида

$$ax + by + c = 0, \qquad (5)$$

которое называется [*общим уравнением прямой*]. *И обратно, любое уравнение вида* (5), *где* $a^2 + b^2 \neq 0$, *на плоскости задает прямую; при этом геометрический смысл коэффициентов* a, b *в уравнении* (5) – *это координаты вектора нормали к прямой* $\vec{\mathbf{n}}(a, b)$.

Пусть прямая l *определяется общим уравнением* (5). *Тогда расстояние от точки* $M(x_1, y_1)$ *до прямой вычисляется по формуле*

$$h = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \qquad (6)$$

Репозиторий ВГУ

Пример 18. _Даны координаты вершин треугольника_: $A(-1, 3)$, $B(9, 12)$, $C(-3, 4)$. _Составьте каноническое уравнение медианы_ AM (_рисунок_ 18).

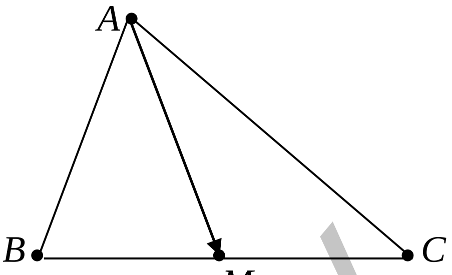


_рис._18

Решение. Точка M является серединой отрезка BC. Найдём её координаты:

$$M\left(\frac{9+(-3)}{2}, \frac{12+4}{2}\right), M(3, 8).$$

Затем найдём координаты вектора $\vec{AM}$: $\vec{AM}(3-(-1), 8-3), \vec{AM}(4, 5)$. Применим формулу (2), где вместо (x_0, y_0) мы подставляем координаты точки A, а вместо (a_1, a_2) – координаты вектора $\vec{AM}$:

$$\frac{x-(-1)}{4} = \frac{y-3}{5} \iff \frac{x+1}{4} = \frac{y-3}{5}.$$

Ответ: AM: $\frac{x+1}{4} = \frac{y-3}{5}$.

Пример 19. _Известны координаты вершин треугольника_: $A(-1, 3)$, $B(11, 0)$, $C(9, 9)$ (рисунок 19). _Составить общее уравнение высоты_ CD.

Решение. Вектор $\vec{AB}$ для прямой CD является вектором нормали. Находим координаты этого вектора:

$$\vec{AB}(11-(-1), 0-3), \vec{AB}(12, -3).$$

Применяем формулу (4). Вместо коэффициентов a, b подставляем координаты вектора $\vec{AB}$, а вместо x_0, y_0 подставляем координаты точки C:

$$12(x-9)-3(y-9) = 0.$$

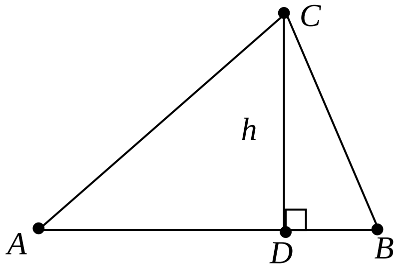


_рис._19

Прежде чем раскрывать скобки, разделим обе части уравнения на 3:

$$4(x-9)-(y-9) = 0 \iff 4x-y-27 = 0.$$

Ответ: CD: $4x-y-27 = 0$.

Пример 20. _Известны координаты вершин треугольника_: $A(-1, 3)$, $B(11, 0)$, $C(9, 9)$ (_рисунок_ 19). _Вычислить высоту_ $h = CD$.

Решение. Составим сначала уравнение прямой AB, а затем найдём расстояние от точки C до этой прямой. Это и будет высота.

Вектор $\vec{AB}(12, -3)$ является направляющим вектором для прямой AB. Применим уравнение (2):

Репозиторий ВГУ

$$\frac{x-(-1)}{12}=\frac{y-3}{-3} \quad \Leftrightarrow \quad -3(x+1)=12(y-3).$$

Прежде чем раскрывать скобки, разделим обе части уравнения на -3:

$$x+1=-4(y-3); \quad x+4y-11=0\,.$$

Теперь к этому уравнению применяем формулу (6), подставляя в неё координаты точки C:

$$h=\frac{|9+4\cdot 9-11|}{\sqrt{1^2+4^2}}=\frac{34}{\sqrt{17}}=\frac{34\sqrt{17}}{\sqrt{17}\sqrt{17}}=\frac{34\sqrt{17}}{17}=2\sqrt{17}.$$

Ответ: $h=2\sqrt{17}$.

10.2. *Практические задания*

41. Даны координаты вершин треугольника ABC.

а) Составьте каноническое уравнение медианы AM;

б) составьте общее уравнение высоты CD.

1) $A(-3, 1)$, $B(9, 5)$, $C(-2, 8)$;

2) $A(-2, -5)$, $B(1, 7)$, $C(8, 1)$.

42. Даны координаты вершин треугольника ABC. Найти длину высоты CD, проведенной к стороне AB

1) $A(-3, 1)$, $B(9, 5)$, $C(-2, 8)$; 2) $A(-2, -5)$, $B(1, 7)$, $C(8, 1)$.

43. В заданиях 41 и 42 вы составили общее уравнение высоты CD. Составьте уравнение стороны AB и найдите координаты точки D (рисунок 19).

44. Даны координаты двух вершин $A(1, 7)$, $B(6, 2)$ треугольника ABC и точки $H(3, 3)$ пересечения высот. Найти координаты вершины C (рисунок 20).

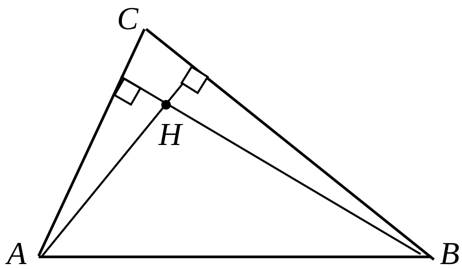


рис. 20

11. УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОСТИ И ПРЯМОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

11.1. *Примеры решения задач*

***Пример* 21.** *Даны координаты вершин треугольной пирамиды* $SABC$: $A(-3, 7, 1)$, $B(-1, 9, 2)$, $C(-3, 6, 6)$, $S(6, -5, -2)$ (*рисунок* 13).

а) Составить уравнение плоскости основания ABC;

б) вычислить высоту пирамиды, используя формулу расстояния от точки до плоскости;

в) составить уравнение прямой SH;

г) найти координаты точки H.

Репозиторий ВГУ

Решение. *а*) Найдём координаты двух векторов, параллельных плоскости основания $\pi = ABC$:

$$\vec{\mathbf{a}} = \overrightarrow{AB}(2,\ 1,\ 1),\ \vec{\mathbf{b}} = \overrightarrow{AC}(0, -1,\ 5).$$

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_o(x_o, y_o, z_o)$, параллельно двум неколлинеарным векторам $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{\mathbf{b}}(b_1, b_2, b_3)$, имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_o & y-y_o & z-z_o \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Подставляем в это уравнение наши данные:

$$\begin{vmatrix} x+3 & y-7 & z-1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрываем определитель по первой строке:

$$11(x-3) - 10(y-7) - 2(z-1) = 0,$$

$$11x - 10y - 2z + 105 = 0.$$

б) Вычисляем высоту, как расстояние от точки S до плоскости основания по формуле, аналогичной формуле (6), только с добавлением ещё координаты z:

$$h = \frac{|11\cdot 6 - 10\cdot(-5) - 2\cdot(-5) + 105|}{\sqrt{11^2 + (-10)^2 + (-2)^2}} = 15.$$

в) Из уравнения плоскости находим, что вектор $\vec{\mathbf{n}}(11, -10, -2)$ является вектором нормали к плоскости. Этот же вектор будет направляющим для прямой SH. Параметрическое уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_o(x_o, y_o, z_o)$ с направляющим вектором $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2, a_3)$, имеет вид

$$\begin{cases} x = x_o + a_1 t, \\ y = y_o + a_2 t, \\ z = z_o + a_3 t. \end{cases}$$

В нашем случае получаем уравнение:

$$SH\colon \begin{cases} x = 6 + 11t, \\ y = -5 - 10t, \\ z = -2 - 2t. \end{cases} \qquad (7)$$

г) Найдём основание перпендикуляра. Это точка пересечения прямой SH с плоскостью π. Для этого мы должны решить совместно уравнения SH и π. Подставляем x, y, z из уравнения l в уравнение π:

$$11(6+11t) - 10(-5-10t) - 2(-2-2t) + 105 = 0,$$

$$66 + 121t + 50 + 100t + 4 + 4t + 105 = 0,$$

$$225y = -225, \quad t_H = -1.$$

Репозиторий ВГУ

Мы так обозначили найденное значение параметра, потому что оно соответствует точке H. Это значение подставляем в уравнение (7) и находим координаты $H(-5, 5, 0)$.

Ответ: ABC: $11x - 10y - 2z + 105 = 0$, $\quad SH: \begin{cases} x = \ \ 6 + 11t, \\ y = -5 - 10t, \\ z = -2 - 2t. \end{cases}$

$H(-5, 5, 0)$, $h = 15$.

11.2. *Практические задания*

45. Дана координаты вершин треугольной пирамиды $SABC$:

1) $A(-2, 0, 1)$, $B(-1, 2, 1)$, $C(-3, 0, 4)$, $D(5, -3, 0)$;

2) $A(-6, 0, 1)$, $B(-6, -3, 5)$, $C(-5, 3, -3)$, $D(1, 10, -4)$.

Необходимо

а) составить уравнение плоскости основания ABC;

б) вычислить высоту пирамиды, используя формулу расстояния от точки до плоскости;

в) составить уравнение прямой SH;

г) найти координаты точки H.

12. ЭЛЛИПС, ГИПЕРБОЛА

12.1. *Примеры решения задач*

Канонические уравнения эллипса и гиперболы имеют соответственно вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad\qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

На следующих рисунках изображены эллипс и гипербола.

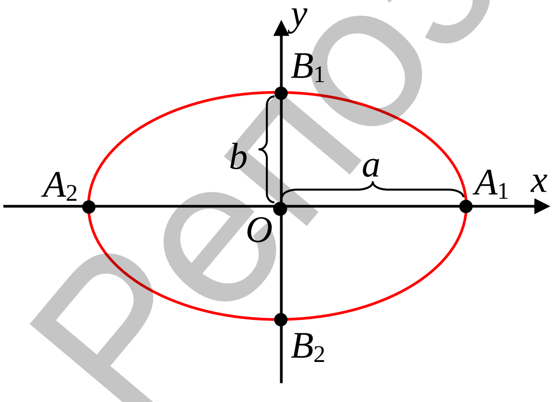


рис. 21

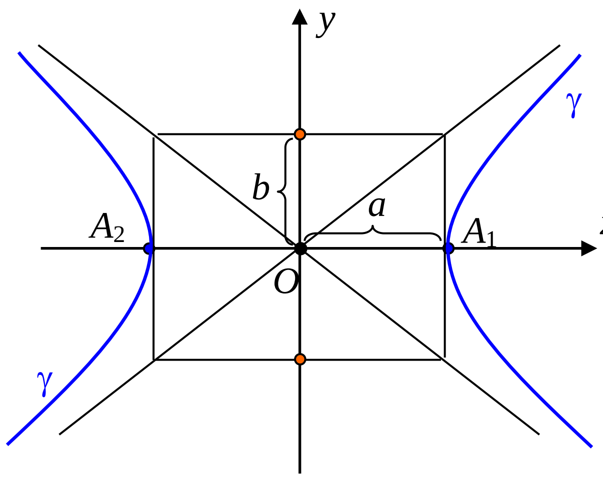


рис. 22

Числа a и b называются полуосями эллипса или гиперболы. Прямоугольник, который определяется неравенствами $|x| \le a$, $|y| \le b$, называется *фундаментальным, или основным, прямоугольником гиперболы*. Прямые, которые проходят через диагонали фундаментального прямоугольника называются *асимптотами*. Для построения гиперболы следует сначала изобразить этот прямоугольник, затем провести асимптоты. Гипербола касается прямоугольника в вершинах и на бесконечности приближается к асимптотам.

***Пример* 22.** *Дано уравнение гиперболы*: $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$. *Изобразите гиперболу.*

Решение. Имеем $a^2=36$, $b^2=64$. Поэтому полуоси: $a=6$, $b=8$.

1) Рисуем систему координат.

2) По оси Ox откладываем от начала координат вправо и влево отрезки OA_1 и OA_2, равные 6. По оси Oy откладываем от начала координат вверх и вниз отрезки OB_1 и OB_2, равные 8.

3) Через точки A_1, A_2, B_1, B_2 проводим прямые, параллельные координатным осям. Получится фундаментальный прямоугольник.

4) Проводим прямые, продолжающие диагонали этого прямоугольника.

5) Рисуем гиперболу: она должна касаться прямоугольника в точках A_1, A_2 и приближаться к асимптотам (рисунок 23).

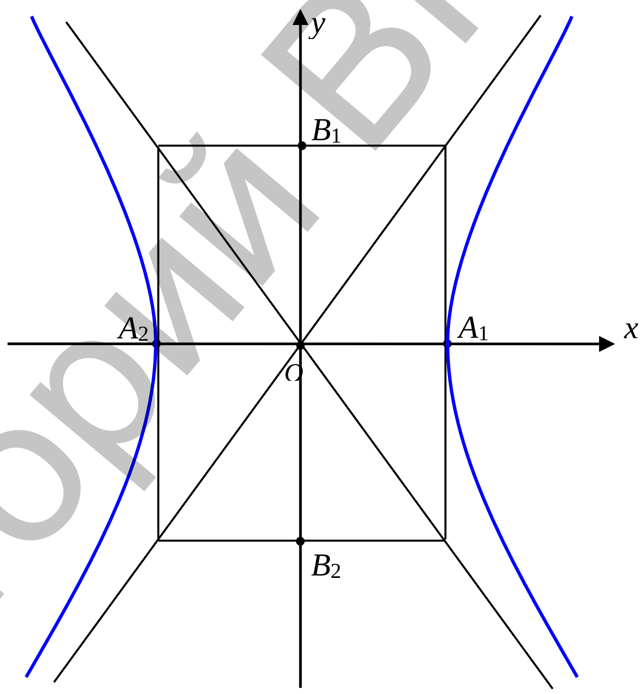


рис. 23

***Пример* 23.** *Кривая задана уравнением.*

$$x^2+3y^2-6x+6y=0.$$

Изобразите её в декартовой системе координат.

Решение. Выделяем полные квадраты по x и по y. Для этого группируем отдельно все слагаемые, содержащие x и все слагаемые, содержащие y. При этом, коэффициент перед квадратом выносим за скобку спереди скобки:

$$(x^2-6x)+3(y^2+2y)=0.$$

Затем мы должны добавить внутри каждой скобки такое число, чтобы получился полный квадрат. Для этого мы должны коэффициент, стоящий перед переменной в первой степени, разделить на 2 и возвести в квадрат. В первой скобке: $6/2=3$, $3^2=9$; во второй скобке: $2/2=1$, $1^2=1$. Итак, в пер-

Репозиторий ВГУ

вой скобке мы добавляем 9 и тут же вычитаем 9, во второй скобке мы добавляем 1 и тут же вычитаем 1:

$$(x^2-6x+9-9)+3(y^2+2y+1-1)=0.$$

Затем, сворачиваем полные квадраты и раскрываем скобки

$$(x-3)^2-9+3(y+1)^2+3\cdot(-1)=0.$$

Складываем числа, которые находятся вне скобок, и переносим вправо:

$$(x-3)^2+3(y+1)^2=12.$$

Делаем замену координат

$$\begin{cases} x' = x-3, \\ y' = y+1. \end{cases}$$

Она означает перенос начала координат в точку $O'(3,-1)$. Получившееся уравнение делим на 12:

$$\frac{x'^2}{12}+\frac{y'^2}{4}=1.$$

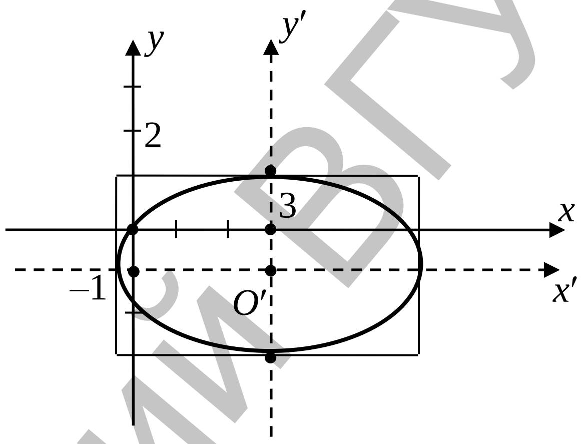


рис. 24

Это уравнение задает эллипс с полуосями

$$a=\sqrt{12}=2\sqrt{3}\approx 3{,}4;\ b=2.$$

Центр эллипса находится в точке $O'(3,-1)$ (рисунок 24). Через эту точку мы проводим вспомогательные оси координат, и на них от точки O' откладываем полуоси.

12.2. *Практические задания*

46. Определите тип кривых, заданных уравнениями

1) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{49}=1$, 2) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1$, 3) $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{9}=1$.

Изобразите эти кривые в декартовой системе координат.

47. Определите тип кривых, заданных уравнениями

1) $9x^2+4y^2-54x+16y-61=0$;

2) $9x^2+y^2-18x+8y+16=0$.

Изобразите эти кривые в декартовой системе координат.

13. ЧИСЛОВАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ. ТЕХНИКА НАХОЖДЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

13.1. *Примеры решения задач*

***Пример* 24.** *Для числовых последовательностей*

1) $\left\{\frac{1}{n}\right\}\equiv\ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ \dots, \frac{1}{n}, \dots$.

Репозиторий ВГУ

2) $\{ 1 + (-1)^n \} \equiv$ 0, 2, 0, 2, ...

3) $\{n\} \equiv 1, 2, 3, \ldots$.

определить, какие из этих последовательностей являются а) возрастающими, б) убывающими, в) ограниченными сверху, г) ограниченными снизу, д) ограниченными.

Решение. 1) Для последовательности $\left\{\frac{1}{n}\right\}$: $x_n = \frac{1}{n}$, $x_{n+1} = \frac{1}{n+1}$.

Так как для всех натуральных n выполняется неравенство $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$, то $x_n > x_{n+1}$. Следовательно, по определению убывающей последовательности, эта последовательность является убывающей.

Так как для любого элемента последовательности выполняются неравенства $x_n \le 1$, $x_n > 0$ ($x_n = 1$ при $n = 1$), то последовательность ограничена и сверху и снизу, следовательно, она ограничена. Последовательность имеет наибольший элемент $x_1 = 1$ и не имеет наименьшего.

2) Последовательность $\{1 + (-1)^n\}$ не является монотонной, так как для всех элементов последовательности выполняются неравенства $x_{2k-1} \le x_{2k}$, $x_{2k} \ge x_{2k+1}$. Последовательность ограничена.

3) Последовательность $\{n\}$ является возрастающей, так как для всех элементов последовательностей выполняется неравенство $x_n < x_{n+1}$.

Последовательность ограничена снизу, так как все элементы последовательности больше или равны 1 ($x_1 = 1$ – наименьший элемент последовательности). Последовательность неограниченна сверху, так как, очевидно, для любого наперед заданного числа A, всегда найдется такой элемент последовательности, который будет больше A.

***Пример* 25.** *Доказать, что последовательность* $\{a^n\}$ *является*:

а) *бесконечно большой, при* $|a| > 1$;

б) *бесконечно малой, при* $|a| < 1$.

Решение. *а*) Пусть $|a| > 1$. Докажем, что последовательность $\{a^n\}$ удовлетворяет определению бесконечно большой последовательности, т.е. для любого числа $A > 0$ найдется такой номер N, что при всех $n > N$ выполняется неравенство $|a|^n > A$.

Для $0 < A \le 1$, неравенство выполняется для любых n.

Зададим произвольное $A > 1$. Для отыскания номера N решим относительно n неравенство $|a|^n > A$. Получим $n > \log_{|a|} A$. Положим $N = [\log_{|a|} A]$. Тогда для любого $n > N$ выполняется неравенство $n > \log_{|a|} A$, а следовательно, и неравенство $|a|^n > A$. Что и требовалось доказать.

б) Пусть $|a| < 1$. Если $a = 0$, последовательность $\{a^n\} = \{0\}$ – бесконечно малая. Пусть $a \ne 0$. Представим a в виде $a = \frac{1}{k}$, где $|k| > 1$. Тогда

Репозиторий ВГУ

$a^n = \dfrac{1}{k^n}$. Так как $|k| > 1$, то последовательность $\{k^n\}$ является бесконечно большой, а последовательность $\left\{\dfrac{1}{k^n}\right\}$ – бесконечно малой. Таким образом, последовательность $\{a^n\}$ при $|a| < 1$ – бесконечно малая.

Пример 26. *Используя определение предела последовательности, доказать, что* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-1}{3n+5} = \dfrac{2}{3}$.

Решение. Рассмотрим последовательность $\{x_n\} = \left\{\dfrac{2n-1}{3n+5}\right\}$. Докажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N = N(\varepsilon)$, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $\left|x_n - \dfrac{2}{3}\right| = \left|\dfrac{2n-1}{3n+5} - \dfrac{2}{3}\right| < \varepsilon$.

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Рассмотрим

$$\left|\frac{2n-1}{3n+5} - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{-13}{3(3n+5)}\right| = \frac{13}{3(3n+5)}.$$

$$\frac{13}{3(3n+5)} < \frac{13}{(3n+5)} < \frac{13}{n} < \varepsilon.$$

Решив неравенство относительно n, получим $n > \dfrac{13}{\varepsilon}$. Положим $N = \max\left\{1, \left[\dfrac{13}{\varepsilon}\right]\right\}$, тогда для всех $n > N$ выполняется неравенство $\left|x_n - \dfrac{2}{3}\right| < \dfrac{13}{n} < \dfrac{13}{N} < \varepsilon$. Следовательно, по определению предела последовательности, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-1}{3n+5} = \dfrac{2}{3}$.

Пример 27 **.** *Найти* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+3n+1}{n^2+1}$.

Решение. При $n \to \infty$, числитель и знаменатель дроби также стремятся к бесконечности. Получим неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Чтобы ее раскрыть, разделим числитель и знаменатель дроби, стоящей под знаком предела, на n^2:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n+1}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}} = 2.$$

Репозиторий ВГУ

(Здесь принимается во внимание, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$).

***Пример* 28.** *Найти* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$.

Решение. В данном случае имеет место неопределенность типа **(∞ – ∞).** Для раскрытия этой неопределенности умножим и разделим выражение, стоящее под знаком предела, на сопряженное ему выражение $\sqrt{n^2+n}+n$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+n}\right)^2-(n)^2}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}.$$

Разделим числитель и знаменатель дроби на n:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}}{\frac{\sqrt{n^2+n}+n}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{n}{n^2}}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{2}.$$

13.2. *Практические задания*

48. Даны следующие последовательности:

1) $1,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{3},\ 1,\ \frac{1}{4},\ \ldots$;

2) 1, 2, 3, 4, 5, … ;

3) $\{(-1)^n n\}$;

4) $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \ldots$;

5) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$;

6) $\left\{\dfrac{n}{2^n}\right\}$.

Ответить на вопросы:

а) является ли последовательность ограниченной сверху, ограниченной снизу, ограниченной;

б) имеет ли последовательность наибольший или наименьший элементы;

в) является ли последовательность монотонной?

49. Используя определение бесконечно малой последовательности, доказать что последовательности: 1) $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$, 2) $\left\{\dfrac{(-1)^n}{2n+1}\right\}$, 3) $\left\{\dfrac{n}{n^2+1}\right\}$, 4) $\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$ – являются бесконечно малыми.

Репозиторий ВГУ

50. Используя определение бесконечно большой последовательности, доказать что последовательности: 1) $\{n\}$, 2) $\{2^n\}$, 3) $\{\ln n\}$, 4) $\left\{\frac{n^2+1}{n}\right\}$ – являются бесконечно большими.

51. Используя определение предела последовательности, доказать что: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n+3}=2$, 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2-2}=1$, 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos n}{n}=0$.

52. Найти следующие пределы:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(5n^3-n^2)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^3+3n^2-6n+7}{n^3-5}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^4+n^3+2n^2-3n+1}{5n^4-4n^2+1}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-4n+5}{n^3+1}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^4-2n^2+8}{2n^3-1}$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-1)^{20}(n-5)^{50}}{(2n-3)^{70}}$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^4-3n^2-6n+7}-1}{n^2-5}$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-n+1}-n}{n+1}$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-2n+1}-\sqrt{n^2-n+1}\right)$;

10) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}-5\cdot 2^{n+1}}{2\cdot 3^n+2^n}$;

11) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right)$;

12) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n+a^{n-1}+\ldots+a+1}{b^n+b^{n-1}+\ldots+b+1}$, где $a>1,\ b>1$.

14. ФУНКЦИИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО. СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

14.1. *Примеры решения задач*

***Пример* 29.** *Найти область определения функции* $y=\sqrt{\log_2\sin x}$.

Решение. Область определения функции задается неравенством $\log_2\sin x\ge 0$. Но так как данное неравенство равносильно неравенству $\sin x\ge 1$, то единственно возможным будет случай $\sin x=1$, т.е. $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$. Таким образом, областью определения данной функции является множество $D(f)=\left\{\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z\right\}$.

***Пример* 30.** *Доказать, что функция* $y=\frac{x^3}{x^2+1}$ *является нечетной.*

Решение. Область определения данной функции является симметричным относительно начала координат множеством. Проверим выполнение условия $y(-x) = -y(x)$. Получаем $y(-x) = \dfrac{(-x)^3}{(-x)^2+1} = -\dfrac{x^3}{x^2+1} = -y(x)$, следовательно, данная функция является нечетной.

14.2. *Практические задания*

53. Дана функция $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-5x+6}$. Найти: 1) $f(5)$; 2) $f(-t)$; 3) $f(t+2)$; 4) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$; 5) $\dfrac{1}{f(x)}$. Найти точки, в которых функция не определена.

54. Найти область определения функции:

1) $y=\sqrt{4-x^2}$; 2) $y=\sqrt{3-2x-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}}$;

3) $y=\sqrt{\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+x-6}}$; 4) $y=\dfrac{x^2-1}{\sqrt[4]{x}-2}$; 5) $y=\sqrt{x\sqrt{x+1}}$;

6) $y=\arccos\dfrac{1}{x^3}$; 7) $y=\arcsin\dfrac{x^2-2}{x}$; 8) $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}} x-1}$;

9) $y=\log_x\left(\dfrac{2}{x}-x\right)$; 10) $y=\lg\cos x$; 11) $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{9-x^2}$.

55. Дана функция $y=\begin{cases} -1, & \text{если } x\le -1, \\ x^2, & \text{если } -1<x\le 1, \\ \lg x, & \text{если } x>1. \end{cases}$ Найти значения функции в точках $x_1 = -7$, $x_2 = \dfrac{1}{2}$, $x_3 = 100$. Нарисовать график этой функции.

56. Нарисовать график функции:

1) $y=\sqrt{1-2x+x^2}+\sqrt{1+2x+x^2}$; 2) $y=\sqrt{\dfrac{x^2}{4}+x+1}+\sqrt{x^2-2x+1}$;

3) $y=\begin{cases} (1/2)^x, & \text{если } x\le 0, \\ 2, & \text{если } 0<x\le \pi, \\ \sin x, & \text{если } x>\pi. \end{cases}$

57. Какие из данных функций являются тождественными?

Репозиторий ВГУ

1) $f(x) = x$; 2) $f(x) = |x|$; 3) $f(x) = \sqrt{x^2}$; 4) $f(x) = \lg 10^x$; 5) $f(x) = 10^{\lg x}$;
6) $f(x) = \dfrac{1}{2}\lg x^2$; 7) $f(x) = \lg x$; 8) $f(x) = \lg|x|$.

58. Исследовать функции на четность, нечетность:

1) $y = x^2,\ x \in [-3; 5]$; 2) $y = \dfrac{2^x + 2^{-x}}{x}$; 3) $y = x^3 \sin x$;

4) $y = \dfrac{2^x + 1}{2^x - 1}$; 5) $y = |2x + \operatorname{tg} x|$; 6) $y = \ln\dfrac{1-x}{1+x}$.

59. Найти основной период функции:

1) $y = \operatorname{tg}\pi x$; 2) $y = \cos^2 x$;

3) $y = 3\cos 2x + 5\sin 2x + 4$; 4) $y = \{2x - 1\}$.

60. Функция $f(x)$ имеет период $T = 2$ и, для $x \in [0; 2]$, задана формулой $y = 2x - x^2$. Построить график функции. Найти $f(2019)$.

61. Построить графики функций:

1) $y = \cos \arccos x$; 2) $y = \arccos \cos x$; 3) $y = [x^2]$;

4) $y = \{\sqrt{x}\}$; 5) $y = \operatorname{sgn} \log_2|x|$; 6) $y = \operatorname{sgn} \cos x$.

15. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

15.1. *Примеры решения задач*

***Пример* 31.** *Используя определение предела функции, доказать, что*

1) $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{11 - x} = 3$; 2) $\lim\limits_{x \to 0} x \sin\dfrac{1}{x} = 0$.

Решение. 1) Используем определение предела функции по Коши. Выберем произвольным образом $\varepsilon > 0$. Найдем такое $\delta > 0$ (δ зависит от ε), чтобы для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - 2| < \delta$, выполнялось неравенство

$$|\sqrt{11 - x} - 3| < \varepsilon. \qquad (1)$$

По определению модуля:

$$|\sqrt{11 - x} - 3| < \varepsilon \iff -\varepsilon < \sqrt{11 - x} - 3 < \varepsilon \iff$$
$$\iff 3 - \varepsilon < \sqrt{11 - x} < 3 + \varepsilon.$$

Так как все части данного неравенства при достаточно малом ε являются положительными, то неравенство можно возвести в квадрат:

$$(3 - \varepsilon)^2 < 11 - x < (3 + \varepsilon)^2.$$
$$-(6\varepsilon + \varepsilon^2) < x - 2 < 6\varepsilon - \varepsilon^2 \qquad (2)$$

Репозиторий ВГУ

Выберем в качестве $\delta(\varepsilon)$ число $\delta = 6\varepsilon - \varepsilon^2$. Очевидно, что при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x-2| < \delta$, выполняется неравенство (2), а, следовательно, и неравенство (1). Следовательно, $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{11-x} = 3$.

2) Воспользуемся определением предела функции по Гейне. Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\} \to 0$ $(x_n \neq 0)$ и, соответствующую ей последовательность значений функции $\{x_n \cdot \sin\dfrac{1}{x_n}\}$. Эта последовательность является бесконечно малой ($\{x_n\}$ – бесконечно малая, $\{\sin\dfrac{1}{x_n}\}$ – ограниченная). Следовательно, по определению предела функции по Гейне, $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot \sin\dfrac{1}{x} = 0$.

***Пример* 32.** *Доказать, что* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1} = \infty$.

Решение. По определению $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, если для любого $M > 0$ можно найти $\delta > 0$, так, что для всех значений $x \neq a$, удовлетворяющих условию $|x-a| < \delta$, будет выполняться неравенство $|f(x)| > M$. В нашем случае по заданному $M > 0$ будем подбирать δ из условия $|f(x)| = \dfrac{1}{|x-1|} > M$, или $|x-1| < \dfrac{1}{M}$. Следовательно, положив $\delta = \dfrac{1}{M}$, получим, что для всех значений x, удовлетворяющих условию $|x-1| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > M$. Значит, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \infty$.

***Пример* 33.** *Найти следующие пределы*:

1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-2x-3}{x^2+3x+3}$;   2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x-3}{x^2-3x+2}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x^2-3}{3x^3+2x^2+x}$;   4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$;   6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2-x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Решение. 1) Знаменателем дроби является функция $g(x) = x^2 + 3x + 3$. Так как $g(3) = 3^2 + 3\cdot 3 + 3 = 21 \neq 0$, то можно применить теорему о пределе частного:

Репозиторий ВГУ

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-2x-3}{x^2+3x+3}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}(x^3-2x-3)}{\lim\limits_{x\to 3}(x^2+3x+3)}=\frac{18}{21}=\frac{6}{7}.$$

2) Числителем дроби является функция $f(x) = x^3 - 2x - 3$, знаменателем дроби – функция $g(x) = x^2 - 3x + 2$. Так как $f(2) = 1$, а $g(2) = 0$, то теорему о пределе частного применять нельзя. Но, так как функция $g(x) = x^2 - 3x + 2$ – бесконечно малая при $x \to 2$ функция, а $f(x) = x^3 - 2x - 3$ – ограниченная функция, отделенная от нуля при $x \to 2$, получим:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x-3}{x^2-3x+2}=\left(\frac{1}{0}\right)=\infty.$$

3) Учитывая, что $\frac{1}{x}\to 0$ при $x\to\infty$, получим $\lim\limits_{n\to\infty}(2x^3-x^2-3)=\lim\limits_{n\to\infty}x^3(2-\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3})=\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(3x^3+2x^2+x)=\infty$, следовательно, имеет место неопределенность $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, для раскрытия которой в числителе и знаменателе дроби вынесем за скобки x^3:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2x^3-x^2-6}{3x^3+2x^2+x}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^3(2-\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3})}{x^3(3-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2})}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3}}{3-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{2}{3}.$$

4) Так как $f(2) = 2^2 - 5\cdot 2 + 6 = 0$, $g(2) = 2^2 - 4 = 0$, то имеет место неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$. Для раскрытия этой неопределенности разложим на множители числитель и знаменатель дроби:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-3)}{(x+2)}=\frac{-1}{4}=-\frac{1}{4}.$$

5) Под знаком предела имеем неопределённость вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Умножим числитель и знаменатель на выражение сопряжённое выражению $\sqrt{1-x}-1$ и выражение, дополняющее $\sqrt[3]{x+1}-1$ до формулы разности кубов. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1-x}-1)(\sqrt{1-x}+1)(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt[3]{x+1}-1)(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1)(\sqrt{1-x}+1)}=$$

Репозиторий ВГУ

$$= \lim_{x\to 0} \frac{((1-x)-1)(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1)}{((x+1)-1)(\sqrt{1-x}+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x\,(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1)}{x\,(\sqrt{1-x}+1)} =$$

$$= -\lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1)}{(\sqrt{1-x}+1)} = -\frac{3}{2}.$$

6) Под знаком предела имеет место неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$, раскроем ее с помощью первого замечательного предела.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{7\sin 7x}{7x} = |7x = t,\ t\to 0| = \lim_{t\to 0} \frac{7\sin t}{t} = 7.$$

7) Имеем неопределенность (1^{∞}). Для раскрытия этой неопределённости используется второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2-x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\left(-\frac{2}{x}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)} =$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-\frac{2}{x}}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-\frac{2}{x}}\right)^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

15.2. *Практические задания*

62. Докажите, пользуясь определением предела функции в точке и на бесконечности, что:

1) $\lim\limits_{x\to 2}(1-2x) = -3$; 2) $\lim\limits_{x\to 3}(3x-5) = 4$; 3) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-x) = 0$;

4) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{1}{2x-8} = \infty$; 5) $\lim\limits_{x\to +0}\ln x = -\infty$; 6) $\lim\limits_{x\to -\infty} 2^x = 0$;

7) $\lim\limits_{x\to +\infty} 2^x = +\infty$.

63. Найти:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+3}{7x^2+2x-3}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-x-x^2}{3-2x-3x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-x+1}{10x^2+2x-3}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+x+1}{1+x^3}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3-2x^2+x-1}{10x^4+2x^3-3x+2}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-1}{\sqrt{4x^6+x+1}}$;

Репозиторий ВГУ

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+1}-\sqrt[3]{x^2-x}}{\sqrt[4]{x^4+x}-\sqrt[5]{x^4+1}}$;

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt[3]{2x^3-1}}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+2x^2-2}-\sqrt{x^4-2x^2-2}\right)$;

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^4+2x^2-1}-3x^2\right)$;

11) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4-x^2}{3x^2-5x-2}$;

12) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-x^2+x+6}{x^2-6x+9}$;

13) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{1+8x^3}{20x^2+8x-1}$

14) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2}{2x-x^2}+\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)$;

15) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^3-3}{x^3+x^2-x-1}$;

16) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x+1}{x^2-1}$;

17) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{6-x}-1}{x^2-25}$;

18) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{2-x}-1}$;

19) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3-x}-1}{\sqrt{x+2}-2}$;

20) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{4+x}-3}{\sqrt{x-1}-2}$;

21) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt[3]{x+6}-2}$;

22) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}-1}{x^2-4}$;

23) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}$;

24) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$;

25) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{4x^2}$;

26) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 2x}$;

27) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 4x-\sin^2 2x}{x^2}$;

28) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x+\sin 3x}{x}$;

29) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{x}$;

30) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1-\sin\frac{x}{2}}{(x-\pi)^2}$;

31) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin 3\pi x}{1-x^2}$;

32) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin^2 3x}{1+\cos 3x}$;

33) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{3x-\pi}{1-2\cos x}$;

34) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin \pi x}{\sqrt{2-x}-1}$;

35) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-3x^3\right)^{\frac{1}{2x^3}}$;

36) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x-3}\right)^{5x}$;

37) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{x-2}\right)^{x^2}$;

38) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{3x+1}\right)^{x^2}$;

39) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-3x}{2-3x}\right)^{2x}$;

40) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x^2-2}\right)^{x^2}$;

Репозиторий ВГУ

41) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+1)(\ln(3x+1)-\ln(3x-2))$; 42) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{\ln(x-1)}$.

16. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

16.1. *Примеры решения задач*

***Пример* 34.** *Исходя из определения, найти производную функции* $y = x(x^2-1)$.

Решение. Найдем приращение $\Delta f(x)$ функции при переходе из точки x в точку $x+\Delta x$. Так как $f(x) = x(x^2-1)$, то

$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)((x+\Delta x)^2-1).$$

Тогда $\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 - \Delta x + (\Delta x)^3$.

Составим отношение

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{3x^2\cdot\Delta x + 3x\cdot\Delta x^2 + \Delta x^3 - \Delta x}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x - 1 + \Delta x^2.$$

По определению:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(3x^2 + 3x\Delta x - 1 + \Delta x^2) = 3x^2-1.$$

***Пример* 35**. *Найти производные следующих функций*:

1) $y = 3x^2 + 2\sqrt{x^3} + \dfrac{1}{x} - 5$; 2) $y = x\cdot\sin x$; 3) $y = \dfrac{2^{x+1} - 3^{x+2}}{x^2}$.

Решение. 1) Воспользуемся тем, что $(Cu)' = Cu'$, $(u+v)' = u'+v'$, тогда

$$y' = \left(3x^2 + 2\sqrt{x^3} + \frac{1}{x} - 5\right)' = 3(x^2)' + 2(x^{\frac{3}{2}})' + (x^{-1})' - (5)' =$$

$$= 6x + 3(x)^{\frac{1}{2}} - x^{-2} + 0 = 6x + 3\sqrt{x} - \frac{1}{x^2}.$$

2) Воспользуемся формулой производной произведения

$$(u\cdot v)' = u'\cdot v + v'\cdot u.$$

$$y' = (x\cdot\sin x)' = x'\cdot\sin x + x\cdot(\sin x)' = \sin x + x\cdot\cos x.$$

3) Воспользуемся формулой производной частного $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$.

$$y' = \left(\frac{2^{x+1}}{x^2}\right)' = \left(\frac{2\cdot 2^x}{x^2}\right)' = 2\left(\frac{2^x}{x^2}\right)' = 2\,\frac{(2^x)'\cdot x^2 - (x^2)'(2^x)}{x^4} =$$

$$= 2\,\frac{2^x\ln 2\cdot x^2 - 2x\cdot 2^x}{x^4} = \frac{2\cdot 2^x\, x(x\cdot\ln 2 - 2)}{x^4} = \frac{2^{x+1}(x\cdot\ln 2 - 2)}{x^3}.$$

Репозиторий ВГУ

***Пример* 36**. *Составить уравнение касательной к графику функции* $y = x\cdot\ln x$, *которая параллельна прямой* $y = x - \frac{1}{2}$.

Решение. Угловые коэффициенты параллельных прямых равны. У данной прямой $k_1 = 1$, следовательно, угловой коэффициент искомой касательной $k_2 = 1$. Из геометрического смысла производной следует, что $k_2 = y'(x_0) = (x\cdot\ln x)'\big|_{x=x_0} = \ln(x_0) + 1$. Следовательно, $k_2 = \ln(x_0) + 1 = 1$, где x_0 – абсцисса точки касания. Решая уравнение, получим $x_0 = 1$. Тогда $y_0 = y(1) = 0$.

Зная точку касания $M_0(1, 0)$ и угловой коэффициент касательной, запишем уравнение касательной по формуле

$$y - y_0 = k(x - x_0), \quad \text{т.е.} \quad y = x - 1.$$

16.2. *Практические задания*

64. Пользуясь определением производной, найдите производную функции в указанной точке:

1) $y = x^2 - 4x + 2$ в точке $x_0 = 1$; 2) $y = x^3 - 5x$ в точке x_0;

3) $y = \sqrt{x}$ в точке $x_0 = 9$; 4) $y = \ln x$ в точке $x_0 = 1$;

5) $y = e^x$ в точке $x_0 = 0$; 6) $y = \sin 2x$ в точке x_0.

65. Пользуясь таблицей производных и общими правилами нахождения производных, найти производные данных функций:

1) $y = x^3 + 5x^2 + \frac{1}{x} + \sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}$; 2) $y = \frac{1+x^2}{1-x^3}$;

3) $y = x^2(x + 3\sqrt{x})$; 4) $y = \frac{x - 5x^3}{6x\sqrt{x}+1}$;

5) $y = \frac{\ln x^2 + \ln 5}{x^2}$; 6) $y = \frac{\sqrt[3]{x^2}\sin x}{2^x}$;

7) $y = \frac{\operatorname{tg} x + ctg\ x}{\sin x \cdot \cos x}$; 8) $y = \operatorname{arctg} x(\arcsin x + \operatorname{arcos} x)$.

66. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0, если

1) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$; 2) $f(x) = x^2 + 3x$, $x_0 = 1$;

3) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 1$; 4) $f(x) = arctgx$, $x_0 = 1$.

67. В каких точках касательная к параболе $y = -x^2 + 2x - 3$ наклонена к оси Ox под углом: *а*) $0°$; *б*) $30°$; *в*) $45°$?

68. В какой точке касательная к кривой $y = \ln x$ параллельна прямой: 1) $y = x + 2$; 2) $y = 2x - 5$.

Репозиторий ВГУ

69. Найти точки, в которых касательные к кривым $y = x^3 - x - 1$ и $y = 3x^2 - 4x + 1$ параллельны.

70. Написать уравнение прямой, проходящей через точку (2; -1) и касающейся параболы $y = x^2 - 1$.

71. Тело движется прямолинейно по закону $s = 1 + 3t + 4t^2$. Определить его скорость в момент времени $t = 2$.

72. Расстояние *s*, пройденное телом за *t с* определяется по формуле $s = t^3 + 3t^2 - 1$. Найти скорость и ускорение при $t = 4$.

17. ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ. ДИФФЕРЕНЦИАЛ

17.1. *Примеры решения задач*

***Пример* 37.** *Найти производные следующих функций*:

1) $y = \dfrac{3}{(x+5)^2} - \sqrt[3]{2x^3 + 5x + 1}$; 2) $y = \sin^4 5x \cdot \operatorname{arctg} 2x^3$; 3) $y = \dfrac{e^{tg\,4x}}{(5x-8)}$.

Решение. 1) Воспользуемся тем, что $(f(u(x)))' = f'_u \cdot u'(x)$, а также формулой дифференцирования $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$. Тогда

$$y' = \left(\frac{3}{(x+5)^2}\right)' + (\sqrt[3]{2x^3 + 5x + 1})' = (3(x+5)^{-2})' + ((2x^3 + 5x + 1)^{1/3})' =$$

$$= -6(x+5)^{-3}(x+5)' + \frac{1}{3}(2x^3 + 5x + 1)^{-2/3}(2x^3 + 5x + 1)' =$$

$$= -\frac{6}{(x+5)^3} + \frac{6x^2 + 5}{3\sqrt[3]{(2x^3 + 5x + 1)^2}}.$$

2) $y' = (\sin^4 5x \cdot \operatorname{arctg} 2x^3)' = (\sin^4 5x)' \cdot \operatorname{arctg} 2x^3 + \sin^4 5x \cdot (\operatorname{arctg} 2x^3)' =$

$$= 4\sin^3 5x \cdot (\sin 5x)' \cdot \operatorname{arctg} 2x^3 + \sin^4 5x \cdot \frac{1}{1 + 4x^6} \cdot (2x^3)' =$$

$$= 20\sin^3 5x \cdot \cos 5x \cdot \operatorname{arctg} 2x^3 + \frac{6x^2 \cdot \sin^4 5x}{1 + 4x^6}.$$

3) $y' = \left(\dfrac{e^{\operatorname{tg} 4x}}{(5x-8)^3}\right)' = \dfrac{(e^{\operatorname{tg} 4x})'(5x-8)^3 - e^{\operatorname{tg} 4x}((5x-8)^3)'}{(5x-8)^6} =$

$$= \frac{e^{\operatorname{tg} 4x} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 4x} \cdot 4(5x-8)^3 - e^{\operatorname{tg} 4x} \cdot 3(5x-8)^2 \cdot 5}{(5x-8)^6} = \frac{e^{tg\,4x}(4(5x-8) - 15\cos^2 4x)}{\cos^2 x\,(5x-8)^4}.$$

***Пример* 38.** *Найти производную функции*

$$y = (\sin x)^x. \qquad (8)$$

Репозиторий ВГУ

Решение. Прологарифмируем равенство (8): $\ln y = x\ln(\sin x)$, и найдем производные от обеих частей полученного равенства:

$$(\ln y)' = (x \ln \sin x)', \quad \text{или} \quad \frac{y'}{y} = \ln(\sin x) + x\frac{\cos x}{\sin x}.$$

Тогда $y' = (\sin x)^x \left(\ln(\sin x) + x\frac{\cos x}{\sin x} \right)$.

***Пример* 39.** *Найти дифференциал функции* $y = \cos(\ln x)$.

Решение. Дифференциал функции равен: $dy = y'dx$. Значит,

$$dy = (\cos(\ln x))'dx = -\sin(\ln x) \cdot (\ln x)'\, dx = -\frac{\sin(\ln x)}{x}dx.$$

17.2. *Практические задания*

73. Пользуясь общими правилами дифференцирования, найти производные следующих функций:

1. $y = (1 + 2x^3)^5$;
2. $y = \sqrt{2x^2 - 5x + 1}$;
3. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(4x+3)^2}}$;
4. $y = \sin 4x$;
5. $y = \cos^2 2x$;
6. $y = x \cdot \mathrm{tg}^3\, 6x$;
7. $y = \dfrac{tg\ x^2}{\sqrt{x^3+1}}$;
8. $y = \sqrt{\sin^2 3x + 1}$;
9. $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 4})$;
10. $y = \cos x^2 \cdot \ln^2(1 + 2x)$;
11. $y = e^{2x} \ln^3(4x - 1)$;
12. $y = \dfrac{x^2 - 1}{2^{3x^2}}$;
13. $y = \ln(\ln(\ln x))$;
14. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$;
15. $y = \ln^3 \sin^2(5x + 1)$;
16. $y = \ln\dfrac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}$;
17. $y = \sin^3 x^3 - e^{x^2} \cos x$;
18. $y = 10^{\cos 3x} \cdot \mathrm{arcctg}(5x^3 - 2x + 1)$;
19. $y = xe^{arctg \sqrt[3]{2x+3}}$;
20. $y = \arccos^3(2x^5 + 7) \cdot \mathrm{ctg} 7x^4$;
21. $y = x^x$;
22. $y = (x^2 + 1)^{2x}$;
23. $y = x^{\sin x}$;
24. $y = x^{x^x}$;
25. $y = (\sin x)^{\frac{1}{x}}$;
26. $y = (x + 1)^{\frac{1}{\sin x}}$;

74. Найти дифференциалы следующих функций:

Репозиторий ВГУ

1) $y = \dfrac{x+1}{2\sqrt{x}}$; 2) $y = \dfrac{\sqrt{x}+1}{x^3+2}$;

3) $y = (x^2 + x + 3)\ \mathrm{tg}^2 x$; 4) $y = \sin 3x + \sqrt[3]{2x+1}$;

5) $y = x\cdot \ln \sin^3(\pi - x)$; 6) $y = 5^{\sqrt{\sin x^2}}$;

7) $y = \dfrac{\arcsin x}{\ln(1-x^2)}$; 8) $y = (\sin x)^x$;

9) $y = x^{\cos x}$; 10) $y = (\mathrm{tg}\, x)^{\ln x}$.

18. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

18.1. *Примеры решения задач*

***Пример* 40.** *Найти* $y'''\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$, *если* $y = 5 - 4\cos^2 x$.

***Решение*.** Последовательно находим:

$y' = 8\cos x \cdot \sin x = 4\sin 2x$; $y'' = 8\cos 2x$; $y''' = -16\sin 2x$.

Тогда: $y'''\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -16\sin\dfrac{\pi}{3} = -16\dfrac{\sqrt{3}}{2} = -8\sqrt{3}$.

***Пример* 41.** *Пользуясь формулой Лейбница, найти пятую производную от функции* $y = x^5 e^{2x}$.

***Решение*:** Формула Лейбница имеет вид

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot u^{(k)} \cdot v^{(n-k)}.$$

Пусть $u = x^5$, $v = e^{2x}$, тогда $(x^5 e^{2x})^{(5)} = \sum\limits_{k=0}^{5} C_5^k (x^5)^{(k)} \cdot (e^{2x})^{(5-k)}$.

Найдём: $u' = 5x^4$, $u'' = 20x^3$, $u''' = 60x^2$, $u^{(4)} = 120x$, $u^{(5)} = 120$.

$v' = 2e^{2x}$, $v'' = 4e^{2x}$, $v''' = 8e^{2x}$, $v^{(4)} = 16e^{2x}$, $v^{(5)} = 32e^{2x}$.

Подставим в формулу Лейбница, получим

$$y^{(5)} = uv^{(5)} + 5u'v^{(4)} + 10u''v''' + 10u'''v'' + 5u^{(4)}v' + u^{(5)}v =$$

$$= 32x^5\cdot e^{2x} + 25x^4\cdot 16e^{2x} + 10\cdot 20x^3\cdot 8e^{2x} + 10\cdot 60x^2\cdot 4e^{2x} + 5\cdot 120x\cdot 2e^{2x} +$$

$$+ 120e^{2x} = e^{2x}(32x^5 + 400x^4 + 1600x^3 + 2400x^2 + 1200x + 120).$$

***Пример* 42.** *Найти дифференциалы* dy *и* d^2y *от функции* $y = xe^{-2x}$.

Решение. Пусть x – независимая переменная, тогда $dy = y'dx$,

$$dy = (xe^{-2x})'dx = (e^{-2x} - 2xe^{-2x})dx = (1-2x)e^{-2x}dx;$$

$$d^2y = y''dx^2;$$

Репозиторий ВГУ

$$y'' = ((1-2x)e^{-2x})' = -2e^{-2x} - 2(1-2x)e^{-2x} = (4x-4)e^{-2x};$$
$$d^2y = (4x-4)e^{-2x}\,dx^2.$$

18.2. *Практические задания*

75. Найти производную второго порядка:

1) $y = x^2 + 13x + 1$; 2) $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$;

3) $y = \cos^2 x$; 4) $y = \mathrm{arctg}\,(x + \sqrt{x^2+1})$.

76. Найти производные указанного порядка:

1) $(e^{-x^2})^{(3)}$; 2) $\left(\dfrac{x^2}{x-1}\right)^{(6)}$; 3) $\left(\sqrt{x+1}\right)^{(10)}$;

4) $(x\,e^{5x})^{(10)}$; 5) $(x^2 \sin 2x)^{(10)}$; 6) $(x^2 \cos 3x)^{(15)}$.

77. Найдите $y^{(n)}$, если:

1) $y = \sqrt{2x-3}$; 2) $y = (1+x)^n$; 3) $y = x^3 + 2x + e^{2x}$;

4) $y = \ln(3x-1)$; 5) $y = \cos x$; 6) $y = \sin^2 x$.

78. Определить, удовлетворяет ли функция $y = y(x)$ заданному уравнению:

функция	уравнение
1) $y = 1 + \cos(e^x) + \sin(e^x)$;	$y'' - y' + e^{2x}y = 0$;
2) $y = e^{10\arcsin x}$;	$(1-x^2)y'' - xy' - 100y = 0$;
3) $y = C_1\cos x + C_2\sin x$;	$y'' + y = 0$.

79. Найти дифференциалы указанного порядка от следующих функций в точке x_0:

1) $y = \sqrt[3]{x^2+4}$, найти $d^2y(2)$; 2) $y = \sin^3 2x$, найти $d^2y\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$;

3) $y = \ln(x + \sqrt{x^2+3})$, найти $d^3y(1)$; 4) $y = \sin 3x$, найти $d^5y\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.

Репозиторий ВГУ

ЛИТЕРАТУРА

1. Баврин, И.И. Высшая математика / И.И. Баврин, В.А. Матросов. – М.: Академия, 2000.
2. Гусак, А.А. Высшая математика. Т. I, Т. II / А.А. Гусак. – Минск: ТетраСистемс, 1998, 2007.
3. Лурье, Л.И. Основы высшей математики / Л.И. Лурье. – М.: «Дашков и Ко», 2003
4. Феденко, А.С. Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии / А.С. Феденко, А.А. Бурдун, Е.А. Мурашко, М.М. Толкачев. – Минск: Университетское, 1989, 1999.
5. Гусак, А.А. Задачи и упражнения по высшей математике: в 2 ч. / А.А. Гусак. – Минск: Вышэйшая школа, 1988. – Ч. 1.
6. Гусак, А.А. Задачи и упражнения по высшей математике: в 2 ч. / А.А. Гусак. – Минск: Выш. шк., 1988. – Ч. 2.
7. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевников. – М.: Высш. шк., 1986.
8. Подоксёнов, М.Н. Аналитическая геометрия и преобразования плоскости / М.Н. Подоксенов. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2016. – 286 с.
9. Ильин В.А. Основы математического анализа / В.А. Ильин, Э.Т. Позняк. – М.: Наука, 1982. – Ч. 1.
10. Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа / Г.М. Фихтенгольц. – Физматгиз, 1960. – Т. 1.
11. Подоксёнов, М.Н. Сборник индивидуальных заданий по аналитической геометрии и линейной алгебре с примерами решения задач / М.Н. Подоксёнов, С.А. Прохожий. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2016. – 49 с.
12. Иванова, Ж.В. Математический анализ. Введение в анализ. Производная: курс лекций / Ж.В. Иванова, Т.Л. Сурин, С.В. Шерегов. – Витебск: Изд-во УО «ВГУ им. П.М. Машерова», 2008.

Репозиторий ВГУ

Учебное издание

ИВАНОВА Жанна Викторовна
ПОДОКСЁНОВ Михаил Николаевич
СУРИН Татьяна Леонидовна

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации к практическим занятиям

Технический редактор *Г.В. Разбоева*
Компьютерный дизайн *Л.Р. Жигунова*

Подписано в печать 30.03.2021. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 2,91. Уч.-изд. л. 1,91. Тираж 50 экз. Заказ 44.

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Свидетельство о государственной регистрации в качестве издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/255 от 31.03.2014.

Отпечатано на ризографе учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».
210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.

Репозиторий ВГУ