

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра информационных технологий и управления бизнесом

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ

Курс лекций

*Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2021*

УДК 519.6(075.8)
ББК 22.19я73
В94

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 3 от 23.12.2020.

Составители: доцент кафедры информационных технологий и управления бизнесом ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук **Т.Г. Алейникова**; доцент кафедры информатики и методики преподавания информатики БГПУ имени Максима Танка, кандидат физико-математических наук **А.И. Шербаф**

Рецензенты:

доцент кафедры прикладного и системного программирования ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук, доцент *Е.А. Корчевская*;
заведующий отделом вычислительной математики Института математики НАН Беларуси, кандидат физико-математических наук *Г.Ф. Громыко*

В94 **Вычислительные методы** : курс лекций / сост.: Т.Г. Алейникова, А.И. Шербаф. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2021. – 82 с.

В учебном издании излагаются теоретические сведения об основных методах решения задач вычислительной математики. Представлены наиболее используемые методы численного решения уравнений и систем, приближения функций, алгоритмы приближенного дифференцирования и интегрирования, методы решения дифференциальных уравнений. Рассматриваются вопросы, связанные с математическим моделированием и вычислительным экспериментом.

Курс лекций предназначен для студентов физико-математического профиля.

УДК 519.6(075.8)
ББК 22.19я73

© ВГУ имени П.М. Машерова, 2021

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
Тема 1 Основы теории погрешности вычислений	7
1.1 Приближенные числа и погрешности	7
1.2 Вещественные числа и их округление в компьютере	8
1.3 Оценка погрешности функции	10
1.3.1 Метод границ	10
1.3.2 Дифференциальная оценка погрешности	11
Тема 2 Решение алгебраических и трансцендентных уравнений с одной переменной	12
2.1 Метод половинного деления	13
2.2 Метод простой итерации. Обоснование сходимости	15
2.3 Метод Ньютона (метод касательных)	19
2.4 Метод секущих	20
Тема 3 Решение систем линейных алгебраических уравнений	21
3.1 Метод Гаусса и его модификации	22
3.2 Метод квадратного корня	24
3.3 Обращение матриц	26
3.4 Метод итерации	26
3.4.1 Достаточное условие сходимости метода итераций	29
3.4.2 Оценка погрешности приближений процесса итерации	32
3.5 Метод Зейделя	33
Тема 4 Метод наименьших квадратов для обработки экспериментальных данных	34
4.1 Линейная и квадратичная функции	35
4.2 Приближение различными элементарными функциями	36
4.2.1 Степенная функция	36
4.2.2 Показательная функция	37
4.2.3 Логарифмическая функция	37
4.2.4 Обратно-пропорциональная функция	37
4.2.5 Дробно-линейная функция	38
4.2.6 Дробно-рациональная функция	38
4.3 Погрешность метода наименьших квадратов	39
Тема 5 Интерполирование функций	39
5.1 Интерполяционная формула Лагранжа	41
5.2 Схема Эйткена	42
5.3 Оценка погрешности интерполяционной формулы Лагранжа	43
5.4 Конечные разности различных порядков. Таблица разностей	44
5.5 Первая интерполяционная формула Ньютона	45
5.6 Вторая интерполяционная формула Ньютона	47
5.7 Оценки погрешностей интерполяционных формул Ньютона	48

Тема 6 Численное дифференцирование функций	49
6.1 Вычисление производных по двум/трем точкам	49
6.2 Численное дифференцирование на основе интерполяционных многочленов	51
6.2.1 Формулы численного дифференцирования, основанные на первой интерполяционной формуле Ньютона	52
6.2.2 Численное дифференцирование для равноотстоящих то- чек на основе интерполяционной формулы Лагранжа	53
Тема 7 Численное интегрирование	54
7.1 Квадратурные формулы Ньютона-Котеса	55
7.2 Формула трапеций и ее остаточный член. Общая формула трапе- ций (правило трапеций)	56
7.3 Формула Симпсона и ее остаточный член. Общая формула Симп- сона (параболическая формула)	58
7.4 Об оценке точности квадратурных формул	61
7.5 Метод Монте-Карло	62
Тема 8 Методы решения задачи Коши для обыкновенных дифферен- циальных уравнений	64
8.1 Метод ломаных Эйлера	66
8.2. Модификации метода Эйлера	67
8.3 Метод Рунге-Кутты	69
Тема 9 Компьютерное моделирование и вычислительные методы ...	70
9.1 Понятие модели и моделирования	71
9.2 Классификация моделей	72
9.3 Виды моделирования	74
9.4 Компьютерное и математическое моделирование	76
9.5 Вычислительный эксперимент	78
ЛИТЕРАТУРА	81

ВВЕДЕНИЕ

Бурное развитие компьютерных технологий стимулировало применение вычислительной математики, моделирования и программирования при решении практических инженерных и научных задач. Методы вычислительной математики используются для численного решения задач, возникающих в процессе компьютерного моделирования разнообразных объектов (предметов, процессов, явлений реального мира). Овладение вычислительными методами и компьютерным моделированием играет важную роль в системе профессиональной подготовки будущих специалистов во многих областях. Прогресс в развитии вычислительных методов способствует постоянному расширению сферы применения математики в других научных дисциплинах и прикладных разработках. Компьютерное моделирование является важной составной частью решения научно-практических задач, а также проведения вычислительных экспериментов. Знание алгоритмов вычислительной математики и умение осуществлять их компьютерную реализацию позволяет будущим специалистам быть конкурентоспособными и мобильными на современном рынке труда.

Математические модели представляют собой упрощенное описание исследуемого явления с помощью математических символов и операций над ними. Разрабатываемые модели должны быть корректны и адекватны по отношению к реальным процессам и, как правило, просты по технической реализации. Реализация математических моделей процессов и явлений окружающей среды способствует их исследованию и разработке методов управления ими.

Целью изучения вычислительных методов решения естественнонаучных задач является ознакомление студентов с фундаментальными понятиями, основными определениями и методами приближенных вычислений, овладение математическим аппаратом, являющимся базовым для дальнейшего обучения.

При изложении материала авторами учтен опыт чтения лекций и проведения лабораторных работ по методам вычислительной математики для студентов физико-математического профиля. Содержание данного курса лекций охватывает следующие разделы: основные понятия, связанные с приближенными значениями величин, и методы оценки вычислительных ошибок; методы численного решения алгебраических и трансцендентных уравнений, а также систем линейных алгебраических уравнений; различные способы аппроксимации и интерполяции функций; задачи численного дифференцирования и интегрирования функций; методы численного решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Рассматриваются такие вопросы теории, как обоснование выбора того или иного численного метода решения задачи, исследование

его сходимости, построение алгоритма его реализации на компьютере, оценка погрешности выбранного метода, для наглядности иллюстрируемые графически в ряде случаев. Отдельное внимание уделено вопросам, связанным с понятиями модель и моделирование: определения, классификация и виды моделирования, более подробно рассмотрены компьютерное и математическое моделирование, вычислительный эксперимент.

Математические обоснования каждого численного метода, доказательства теорем сходимости, получение оценок точности изложены с использованием элементарных сведений из алгебры, аналитической геометрии и математического анализа и должны быть понятны студентам.

Существует обширная учебная литература по вычислительным методам, в данном издании авторы привели только список источников, повлиявших.

Предлагаемый курс лекций по методам вычислительной математики может быть полезен всем, кто изучает и применяет численные методы решения математических задач с помощью компьютера.

Тема 1

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЙ

1.1. Приближенные числа и погрешности

Пусть X – точное значение некоторой величины (обычно неизвестное), x – число, принятое за ее приближенное значение ($X \approx x$). Разность $X - x$ называют погрешностью приближенного значения x , а модуль $\varepsilon_x = |X - x|$ – абсолютной погрешностью величины x .

Предельной *абсолютной погрешностью*, являющейся верхней границей, называют такое по возможности наименьшее число, для которого справедливо неравенство: $\Delta x \geq |X - x|$.

Предельная *относительная погрешность* приближенного числа – это отношение предельной абсолютной погрешности к абсолютному значению приближения:

$$\delta x \geq \frac{\Delta x}{|x|}$$

Относительную погрешность обычно выражают в процентах.

Если известны x и Δx , то принято записывать:

$$X \in [x - \Delta_x, x + \Delta_x] \text{ или } X = x \pm \Delta_x$$

Любая пара чисел $НГ_x$ и $ВГ_x$, такая, что $НГ_x \leq x \leq ВГ_x$ называется *нижней и верхней границей* приближенного числа x .

Значащие цифры – это все цифры десятичной записи числа, начиная с первой ненулевой слева. *Округлением* числа называют замену его близким по величине, но с меньшим количеством значащих цифр. Различают 3 вида округления:

Симметричное – к ближайшему числу: $3,6 \approx 4$; $3,67 \approx 3,7$; $-3,7 \approx -4$.

С избытком – к большему числу: $3,6 \approx 4$; $3,2 \approx 4$, $-3,7 \approx -3$.

С недостатком – к меньшему числу: $3,67 \approx 3,6$; $3,2 \approx 3$; $-3,7 \approx -4$.

Точность приближенного числа зависит не от количества значащих цифр, а от количества верных цифр в его записи. Если полученный в результате вычислений результат содержит излишнее количество сомнительных значащих цифр, то его округляют.

Цифра в записи числа называется *верной*, если абсолютная погрешность не превосходит единицы её разряда; а *верной в строгом смысле* – если погрешность не превосходит половины её разряда.

Пример. Сколько верных цифр в записи числа $a = 18,572$, $\Delta_a = 0,08$?

В широком смысле:

1: $10 \geq 0,08$ – верная

8: $1 \geq 0,08$ – верная

5: $0,1 \geq 0,08$ – верная

7: $0,01 \leq 0,08$ – сомнительная

2: $0,001 \leq 0,08$ – сомнительная

В строгом смысле:

1: $5 \geq 0,08$ – верная

8: $0,5 \geq 0,08$ – верная

5: $0,05 \leq 0,08$ – сомнительная

7: $0,005 \leq 0,08$ – сомнительная

2: $0,0005 \leq 0,08$ – сомнительная

Ответ: 3 цифры верные в широком смысле, 2 – в строгом.

Верная цифра не обязательно буквально совпадает с соответствующей цифрой точного числа. Например, $X = 1,999$ – точное число, $x = 2,000$ – его приближение. Тогда $\Delta_x = 0,001$, и, следовательно, три первые цифры верные, хотя ни одна из них не совпадает с соответствующими цифрами точного числа.

Если исходные данные приводятся без указания погрешностей, но с известными верными цифрами, то погрешность можно определить, исходя из определения верной цифры.

Пример. $X = 4,06$, $\Delta_x = 0,01$ (в широком смысле) или $\Delta_x = 0,005$ (в строгом смысле). Если не уточняется трактовка смысла (широкая, строгая), то по умолчанию принимается *строгий* вариант.

Приближенные результаты записывают по *правилам*:

В промежуточных результатах вычислений обычно сохраняют 1–2 сомнительные цифры, а окончательные результаты округляют с сохранением не более одной сомнительной цифры.

В записи погрешностей обычно оставляют только 1–2 значащие цифры. Для сохранения условия, соответствующего определению предельной погрешности, округление её всегда производят с избытком.

1.2 Вещественные числа и их округление в компьютере

Одним из источников вычислительных погрешностей является приближенное представление вещественных чисел в компьютере, обусловленное конечностью разрядной сетки. Хотя исходные данные представляются в компьютере с большой точностью, накопление погрешностей округления в процессе счета может привести к значительной результирующей погрешности, а некоторые алгоритмы могут оказаться и вовсе непригодными для реального счета.

Компьютеры, как правило, работают в двоичной системе, когда любое число записывается в виде последовательности нулей и единиц. Как десятичная, так и двоичная системы счисления относятся к позиционным системам. В позиционной системе счисления с основанием, как было показано выше, запись

$$a = \pm a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \dots \quad (1.1)$$

означает, что

$$a = \pm (a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_0 r^0 + a_{-1} r^{-1} + \dots)$$

Будем считать далее, что r – целое число, большее 1. Каждое из чисел a_i может принимать одной из значений $\{0, 1, \dots, r-1\}$. Числа a_i называются разрядами, например, a_3 – третий разряд перед запятой, a_{-2} – второй разряд после запятой и т.д.

Запись числа в виде (1.1) называется его представлением в форме числа с *фиксированной запятой*. В компьютере чаще всего используется представление чисел в *форме с плавающей запятой*, т.е. в виде $a = \pm M r^p$, где r – основание системы счисления, p – целое число (положительное,

отрицательное или нуль). Число M представляется в форме числа с фиксированной запятой и называется *мантиссой* числа a . Число p называют *порядком* числа a .

Если мантисса M удовлетворяет условию нормировки $r^{-1} \leq |M| < 1$, то тогда говорят, что число a представлено в *нормализованном виде*. Условие нормировки обеспечивает также единственность записи числа.

Например, число 103,67 в форме с плавающей запятой (нормализованной) имеет вид $0,10367 \cdot 10^3$, здесь $M = 0,10367$, $p = 3$.

Минимальное положительное число M_0 , которое может быть представлено в компьютере с плавающей запятой, называется *машинным нулем*. Число $M_\infty = M_0^{-1}$ называется *машинной бесконечностью*. Все вещественные числа, которые могут быть представлены в компьютере, расположены по абсолютной величине в диапазоне от M_0 до M_∞ . Если в процессе счета задачи появится вещественное число, меньшее по модулю чем M_0 , то ему присваивается нулевое значение. При появлении в процессе счета вещественного числа, большего по модулю чем M_∞ , то происходит переполнение разрядной сетки, компьютер прекращает счет задачи.

Из-за конечности разрядной сетки компьютера в нем можно представить не все числа из диапазона $M_0 \div M_\infty$, а лишь конечное множество чисел. Число a , не представимое в компьютере точно, подвергается округлению, т.е. заменяется близким ему числом, представимым в компьютере точно. Точность представления чисел в компьютере характеризуется относительной погрешностью $|a - \tilde{a}| / |a|$.

Величина относительной погрешности зависит от способа округления. Простейшим способом округления является отбрасывание всех разрядов мантиссы числа a , которые выходят за пределы разрядной сетки.

Пусть для записи мантиссы в компьютере отводится k двоичных разрядов. Представим число a в виде бесконечной двоичной дроби

$$a = \pm 2^p \left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_k}{2^k} + \frac{a_{k+1}}{2^{k+1}} + \dots \right)$$

где a_i равны или 0 или 1. Отбрасывая все лишние разряды, получим округленное число

$$\tilde{a} = \pm 2^p \left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_k}{2^k} \right) \quad (1.2)$$

Погрешность округления имеет вид

$$a - \tilde{a} = \pm 2^p \left(\frac{a_{k+1}}{2^{k+1}} + \frac{a_{k+2}}{2^{k+2}} + \dots \right)$$

Заменим все a_i на 1, тогда неравенство усилится и справедлива оценка

$$|a - \tilde{a}| \leq 2^p \left(\frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+2}} + \dots \right) = \frac{2^p}{2^{k+1}} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots \right) = 2^{p-k}$$

Из условия нормировки $\left(\frac{1}{2} \leq |M| < 1\right)$ вытекает, что $|M| \geq 0,5$, а тогда в (1.2) $a_1 = 1$. Поэтому $|a| \geq 2^p \cdot 2^{-1} = 2^{p-1}$, и для относительной погрешности получаем оценку

$$\frac{|a - \tilde{a}|}{|a|} \leq \frac{2^{p-k}}{2^{p-1}} = 2^{-k+1}$$

Таким образом, относительная точность чисел с плавающей запятой в компьютере определяется числом разрядов k , отводимых для записи мантиссы. Мы выяснили, что конечная разрядность чисел, представленных в компьютере, приводит к погрешностям округления. В процессе счета эти погрешности могут нарастать. Поэтому при постановке задачи естественно требовать, чтобы погрешности в задании начальной информации и погрешности математической модели были согласованы с погрешностью решения задачи на компьютере. Отсюда вытекает основное требование к вычислительному алгоритму – требование точности. Это означает, что вычислительный алгоритм должен давать решение исходной задачи, с заданной точностью за конечное число действий. Алгоритм должен давать решение задачи за допустимое количество действий.

1.3 Оценка погрешности функции

Задачу нахождения погрешности функции по заданным погрешностям приближенных аргументов называют *основной задачей* теории погрешностей. Определим, как вычислить погрешность функции, аргументы которой заданы приближенно.

Пусть дана дифференциальная функция $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и пусть $|\Delta x_i|, i = \overline{1, n}$; – абсолютные погрешности аргументов этой функции. Рассмотрим два способа нахождения абсолютной погрешности функции: метод границ и дифференциальный.

1.3.1 Метод границ

Для нахождения границ результата вычисляют $y_1 = f(\text{НГ}_y)$ и $y_2 = f(\text{ВГ}_y)$, а затем меньшее из этих значений принимают за НГ_y , а большее – за ВГ_y и округляют: нижнее с недостатком, а верхнее с избытком, сохраняя все совпадающие знаки и еще один (различный).

Пример. Найти границы и погрешность вычисления функции:

$$y = \frac{e^x}{1+x^2}, 1,25 < x < 1,28$$

$$y(\text{НГ}_x) = \frac{e^{1,25}}{1+1,25^2} = 1,3620849\dots; y(\text{ВГ}_x) = \frac{e^{1,28}}{1+1,28^2} = 1,3631896\dots$$

Округлим границы на первом различном знаке, нижнюю – с недостатком, верхнюю – с избытком.

$$НГ_x \approx 1,362; ВГ_x \approx 1,364$$

Погрешность приближения функции:

$$\Delta_y = \frac{ВГ_y - НГ_y}{2} = \frac{1,364 - 1,362}{2} = 0,001$$

Таким образом,

$$y \approx \frac{ВГ_y + НГ_y}{2} \approx 1,363; y = 1,363 \pm 0,001$$

Метод границ в случае двух переменных: $z = f(a, b)$ требует четырех расчетов:

$$\left. \begin{array}{l} НГ_a \leq a \leq ВГ_a \\ НГ_b \leq b \leq ВГ_b \end{array} \right\} \begin{array}{l} z = f(НГ_a, НГ_b) \\ z = f(НГ_a, ВГ_b) \\ z = f(ВГ_a, ВГ_b) \\ z = f(ВГ_a, НГ_b) \end{array} \left. \begin{array}{l} \min \longrightarrow НГ_z, \max \longrightarrow ВГ_z \end{array} \right.$$

Замечание. Прежде чем производить расчет для всех возможных вариантов (для n переменных – 2^n), необходимо попытаться оценить характер зависимости функции от некоторых переменных и подобрать комбинацию для максимального и минимального значений.

1.3.2 Дифференциальная оценка погрешности

Пусть $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – дифференцируемая функция n переменных. Предельная абсолютная погрешность функции вычисляется по формуле:

$$|\Delta y| \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \cdot |\Delta x_i|$$

Здесь $|\Delta x_i|, i = \overline{1, n}$ – предельные абсолютные погрешности аргументов функции.

Обратная задача теории погрешностей состоит в том, что по заданной абсолютной погрешности функции необходимо определить, каковы должны быть предельные абсолютные погрешности ее аргументов.

Для решения обратной задачи обычно пользуются принципом «равных влияний», т.е. одинакового вклада каждого аргумента в погрешность функции. Тогда погрешность аргумента x_i можно рассчитать по формуле:

$$\Delta x_i = \frac{\Delta y}{n \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right|}, i = \overline{1, n}.$$

Тема 2

РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Если алгебраическое или трансцендентное уравнение достаточно сложно, то его корни редко удастся найти точно. Кроме того, иногда уравнение содержит коэффициенты, заданные приближенно, следовательно, сама задача о точном нахождении корней теряет смысл. Поэтому особое значение приобретают способы приближенного нахождения корней уравнения и оценки их точности.

Пусть дано уравнение

$$f(x) = 0, \quad (2.1)$$

где функция $f(x)$ определена и непрерывна в некотором конечном $a < x < b$ или бесконечном интервале. Всякое значение ξ , обращающее функцию $f(x)$ в нуль, т.е. такое, что $f(\xi) \equiv 0$, называется *корнем уравнения* $f(x) = 0$.

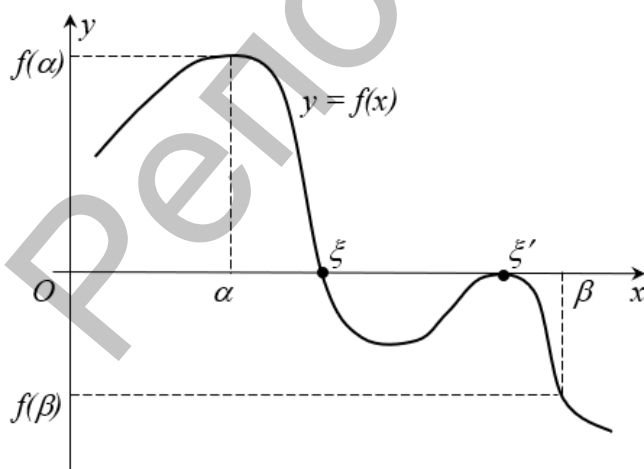
Мы будем предполагать, что уравнение $f(x) = 0$ имеет лишь *изолированные* корни, т.е. для любого корня уравнения (2.1) существует окрестность, не содержащая других корней этого уравнения.

Приближенное нахождение изолированных действительных корней уравнения (2.1) обычно складывается из двух этапов:

- 1) отделение корней, т.е. установление возможно тесных промежутков $[\alpha, \beta]$, в которых содержится один и только один корень уравнения (2.1);
- 2) уточнение приближенных корней, т.е. доведение их до заданной степени точности.

Для отделения корней полезна теорема из математического анализа.

Теорема 2.1. Если непрерывная функция $f(x)$ принимает значения раз-



ных знаков на концах отрезка $[\alpha, \beta]$, т.е. $f(\alpha)f(\beta) < 0$, то внутри этого отрезка содержится, по меньшей мере, один корень уравнения (2.1), т.е. найдется хотя бы одно число $\xi \in [\alpha, \beta]$ такое, что $f(\xi) \equiv 0$. Корень ξ будет заведомо единственным, если производная $f'(x)$ существует и сохраняет постоянный знак внутри интервала (α, β) , т.е. $f'(x) < 0$ ($f'(x) > 0$) при $\alpha < x < \beta$.

Рис. 2.1. Иллюстрация к Теореме 2.1.

Процесс отделения корней начинается с установления знаков функции $f(x)$ в граничных точках $x = a$, $x = b$ области ее существования. Затем определяются знаки функции $f(x)$ в ряде промежуточных точек $x = \alpha_1, \alpha_2, \dots$, выбор которых учитывает особенности функции $f(x)$. Если окажется, что $f(\alpha_k) f(\alpha_{k+1}) < 0$, то в силу Теоремы 2.1 в интервале (α_k, α_{k+1}) имеется корень уравнения $f(x) = 0$. Нужно тем или иным способом убедиться, является ли этот корень единственным. Согласно вышеизложенному получается следующий алгоритм отделения корней уравнения $f(x) = 0$:

- 1) находим участки возрастания и убывания функции $f(x)$ (с помощью $f'(x)$);
- 2) составляем таблицу знаков функции $f(x)$ в стационарных точках (или ближайших к ним), а также в граничных точках области определения;
- 3) определяем интервалы, на концах которых $f(x)$ имеет противоположные знаки. Внутри таких интервалов содержится только по одному корню.

Прежде чем приступить к решению уравнения с помощью вычислительного метода, необходимо отделить корень. *Отделение корней* можно выполнить графически, таблично или аналитически. В графическом способе координаты точек пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью абсцисс являются корнями уравнения (2.1).

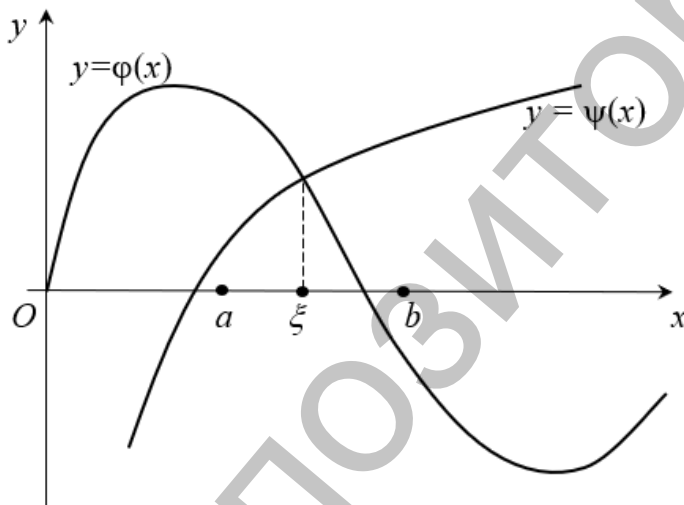


Рис. 2.2. Отделение корней уравнения $\varphi(x) = \psi(x)$.

Если уравнение не имеет близких между собой корней, то этим способом его корни легко отделяются. На практике часто бывает выгодно уравнение (2.1) заменить равносильным $\varphi(x) = \psi(x)$, где функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ более простые, чем $f(x)$. Тогда, построив графики функций $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$, искомые корни получим как абсциссы точек пересечения этих графиков (Рис. 2.2).

2.1 Метод половинного деления

Пусть дано уравнение (2.1), где функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и $f(a)f(b) < 0$. Для нахождения корня исходного уравнения, принадлежащего отрезку $[a, b]$, делим этот отрезок пополам. Если $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, то

$\xi = \frac{a+b}{2}$ является корнем уравнения. Если $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$, то выбираем ту из половин $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$, на концах которой функция $f(x)$ имеет противоположные

знаки. Новый суженный отрезок $[a_1, b_1]$ снова делим пополам и проводим то же рассмотрение и т.д. В результате получаем на каком-то этапе или точный корень уравнения (2.1), или же бесконечную последовательность вложенных друг в друга отрезков $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$ таких что

$$f(a_n)f(b_n) \leq 0, n = 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

и

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b-a) \quad (2.3)$$

Так как левые концы $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ образуют монотонную неубывающую ограниченную последовательность, а правые концы $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ – монотонную невозрастающую ограниченную последовательность, то в силу равенства (2.3) существует общий предел

$$\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в неравенстве (2.2), в силу непрерывности функции $f(x)$ получим $[f(\xi)]^2 \leq 0$. Отсюда $f(\xi) = 0$, т.е. ξ является корнем уравнения (2.1), причем, очевидно, $0 \leq \xi - a_n \leq \frac{1}{2^n}(b-a)$.

Если корни уравнения (2.1) не отделены на отрезке $[a, b]$, то таким способом можно найти один из корней этого уравнения.

Метод половинного деления практически удобно применять для грубого нахождения приближенного корня данного уравнения, так как при увеличении точности значительно возрастает объем вычислительной работы.

Заметим, что метод половинного деления легко реализуется с помощью компьютера. Программа вычисления составляется так, чтобы находить значения правой части уравнения (2.1) в середине каждого из отрезков $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \dots$, и выбирать соответствующую половину. Процесс деления отрезка продолжают до тех пор, пока $|a_n - b_n| \leq \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – любое заданное малое число.

Найдем оценку погрешности приближенного решения.

Теорема 2.2. Пусть ξ – точный, а \hat{x} – приближенный корень уравнения (2.1), находящиеся на одном и том же отрезке $[\alpha, \beta]$, причем $|f'(x)| \geq m > 0$ при $\alpha \leq x \leq \beta$. Тогда справедлива оценка

$$|\hat{x} - \xi| \leq \frac{|f(\hat{x})|}{m} \quad (2.4)$$

Доказательство. По теореме Лагранжа имеем $f(\hat{x}) - f(\xi) = (\hat{x} - \xi)f'(c)$, где c – промежуточное значение между \hat{x} и ξ , т.е. $\xi \in (\alpha, \beta)$. Так как $f(\xi) = 0$ и $f'(c) \geq m$, получаем $|f(\hat{x}) - f(\xi)| = |f(\hat{x})| \geq |\hat{x} - \xi| \cdot m$. Откуда следует оценка (2.4).

Формула (2.4) дает грубые результаты, ее не всегда удобно применять. Чаще всего на практике тем или иным способом сужают интервал (α, β) , содержащий корень ξ и его приближение \hat{x} , и полагают $|\hat{x} - \xi| \leq \beta - \alpha$.

2.2 Метод простой итерации. Обоснование сходимости

Одним из наиболее важных способов численного решения уравнений является метод итерации. Сущность этого метода заключается в следующем.

Пусть дано уравнение (2.1). Надо определить его вещественные корни. Заменим уравнение (2.1) равносильным

$$x = \varphi(x) \quad (2.5)$$

Выберем любым способом грубое приближение корня x_0 и подставим его в правую часть уравнения (2.5). Получим

$$x_1 = \varphi(x_0). \quad (2.6)$$

Подставим в правую часть (2.6) вместо x_0 число x_1 , получим $x_2 = \varphi(x_1)$. Повторяя этот процесс, получим последовательность чисел

$$x_n = \varphi(x_{n-1}), n = 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

Если эта последовательность сходится, т.е. существует $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, то, переходя к пределу в равенстве (2.7) при $n \rightarrow \infty$ и предполагая, что $\varphi(x)$ – непрерывна, получим

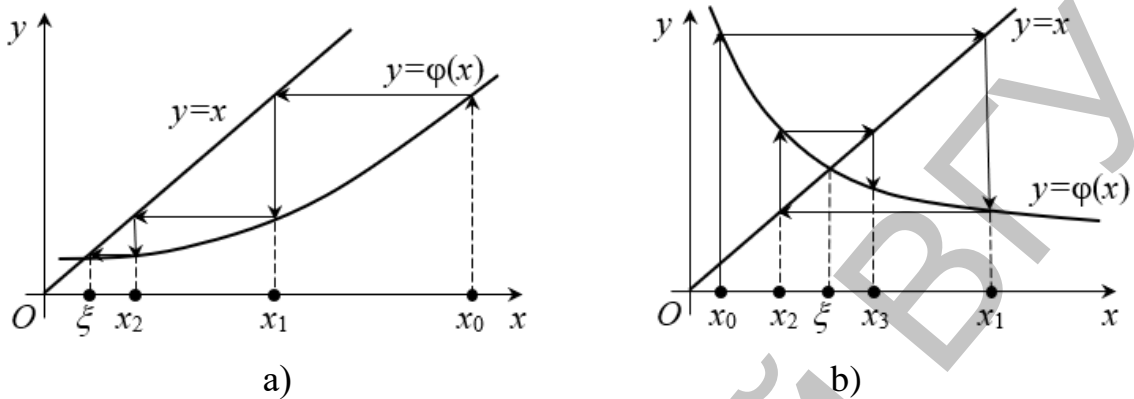
$$\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \varphi(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) \text{ или } \xi = \varphi(\xi).$$

Таким образом, ξ является корнем уравнения (2.5) и может быть вычислен по формуле (2.7) с любой степенью точности.

Геометрически способ итерации может быть пояснен следующим образом. Построим на плоскости xOy графики функций. Построим на плоскости xOy графики функций $y = x$ и $y = \varphi(x)$. Каждый действительный корень ξ уравнения (2.5) является абсциссой точки пересечения M кривой $y = \varphi(x)$ с прямой $y = x$.

На Рис. 2.3а) к корню уравнения мы приближаемся по «ступеньке», на Рис. 2.3б) – по «спирали». Легко сообразить, что решение в виде «лестницы» получается, если производная $\varphi'(x)$ положительна, а решение в виде «спирали», если $\varphi'(x)$ отрицательна.

Если рассмотреть случай, где $|\varphi'(x)| > 1$, то процесс итерации может быть расходящимся (Рис. 2.4). Поэтому для практического применения метода итерации нужно выяснить достаточные условия сходимости итерационного процесса.



а) б)
Рис. 2.3. Сходящийся итерационный процесс
а – «по ступеньке», б – «по спирали»

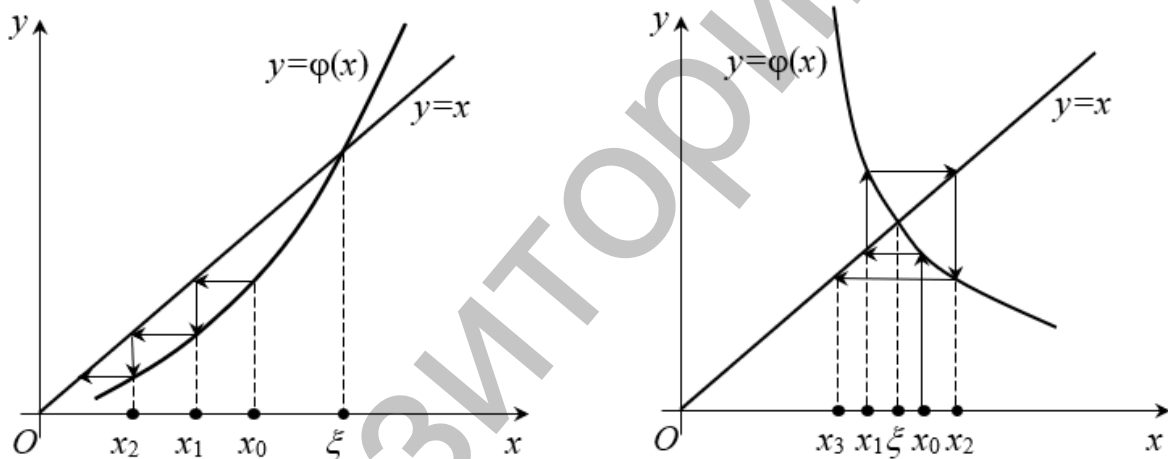


Рис. 2.4. Расходящийся итерационный процесс

Теорема 2.3. Пусть функция $\varphi(x)$ определена и дифференцируема на отрезке $[a, b]$, причем все ее значения $\varphi(x) \in [a, b]$. Тогда, если существует правильная дробь q такая, что

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1 \quad (2.8)$$

при $a < x < b$, то:

1) процесс итерации

$$x_n = \varphi(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.9)$$

сходится независимо от начального значения $x_0 \in [a, b]$;

2) предельное значение $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ является единственным корнем уравнения (2.5) на отрезке $[a, b]$.

Доказательство. Рассмотрим два последовательных приближения

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) \text{ и } x_{n+1} = \varphi(x_n)$$

(которые в силу условий теоремы заведомо имеют смысл). Отсюда

$$x_{n+1} - x_n = \varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1}).$$

Применяя теорему Лагранжа, будем иметь:

$$x_{n+1} - x_n = (x_n - x_{n-1})\varphi'(\bar{x}_n), \text{ где } \bar{x}_n \in [x_{n-1}, x_n].$$

Следовательно, на основании условия (2.8) получаем:

$$|x_{n+1} - x_n| \leq q|x_n - x_{n-1}|.$$

Отсюда, давая значения $n = 1, 2, 3, \dots$, получаем:

$$\begin{aligned} |x_2 - x_1| &\leq q|x_1 - x_0|, \\ |x_3 - x_2| &\leq q|x_2 - x_1| \leq q^2|x_1 - x_0|, \\ &\dots\dots\dots \\ |x_{n+1} - x_n| &\leq q^n|x_1 - x_0|. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Рассмотрим ряд $x_0 + (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1}) + \dots$, для которого наши последовательные приближения x_n являются $(n + 1)$ -ми частными суммами, т.е. $x_n = S_{n+1}$. В силу неравенства (2.10) члены настроенного ряда по абсолютной величине меньше соответствующих членов геометрической прогрессии со знаменателем $q < 1$, поэтому ряд сходится и притом абсолютно. Следовательно, существует $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$, причем, очевидно, $\xi \in [a, b]$. Переходя к пределу в равенстве (2.9), в силу непрерывности функции $\varphi(\xi)$ получаем:

$$\xi = \varphi(\xi) \tag{2.11}$$

Таким образом, ξ есть корень уравнения (2.5). Покажем, что этот корень является единственным. Другого корня уравнение (2.5) не имеет. Действительно, если

$$\bar{\xi} = \varphi(\bar{\xi}) \tag{2.12}$$

то из равенств (2.11) и (2.12) получим:

$$\bar{\xi} - \xi = \varphi(\bar{\xi}) - \varphi(\xi)$$

и, следовательно,

$$(\bar{\xi} - \xi)(1 - \varphi'(c)) = 0,$$

где $c \in [\xi, \bar{\xi}]$. Так как $1 - \varphi'(c) \neq 0$, то $\bar{\xi} = \xi$, т.е. корень ξ – единственный.

Замечание 2.1. В условиях Теоремы 2.3 метод итерации сходится при любом выборе начального приближения $x_0 \in [a, b]$. Благодаря этому он является *самоисправляющимся*, т.е. отдельная ошибка в вычислениях, не выходящая за пределы отрезка $[a, b]$, не повлияет на конечный результат, так как ошибочное значение можно рассматривать как новое начальное значение x_0 . Возможно, возрастет лишь объем работы. Свойство самоисправления делает метод итерации одним из надежнейших методов вычислений.

Из формулы (2.10) имеем:

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &\leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + \dots + |x_{n+1} - x_n| \\ &\leq q^{n+p-1}|x_1 - x_0| + \dots \end{aligned}$$

$+q^{n+p-2}|x_1 - x_0| + \dots + q^n|x_1 - x_0| = q^n|x_1 - x_0|(1 + q + q^2 + \dots + q^{p-1})$.
 Просуммировав члены геометрической прогрессии, получим:

$$|x_{n+p} - x_n| \leq q^n|x_1 - x_0| \frac{1-q^p}{1-q}.$$

Устремляя число p к бесконечности и учитывая, что $\lim_{p \rightarrow \infty} x_{n+p} = \xi$, находим

окончательно: $|\xi - x_n| \leq \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|$. Отсюда ясно, что сходимость процесса итерации будет тем быстрее, чем меньше число q .

Для оценки приближения можно также дать другую формулу, полезную в некоторых случаях. Пусть $f(x) = x - \varphi(x)$. Очевидно, что $f'(\xi) = 1 - \varphi'(\xi) \geq 1 - q$. Отсюда, учитывая, что $f(\xi) = 0$, получим:

$$|x_n - \varphi(x_n)| = |f(x_n) - f(\xi)| = |x_n - \xi| |f'(\bar{x}_n)| \geq (1 - q)|x_n - \xi|$$

где $\bar{x}_n \in (x_n, \xi)$, и, следовательно,

$$|x_n - \xi| \leq \frac{|x_n - \varphi(x_n)|}{1-q}, \text{ т.е. } |\xi - x_n| \leq \frac{1}{1-q} |x_{n+1} - x_n|.$$

Отсюда следует, что

$$|\xi - x_n| \leq \frac{q}{1-q} |x_n - x_{n-1}|. \quad (2.13)$$

В частности, если положить $q = 0,5$, то $|\xi - x_n| \leq |x_n - x_{n-1}|$, т.е. в этом случае из неравенства $|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon$ вытекает неравенство $|\xi - x_n| \leq \varepsilon$.

Замечание 2.2. Существует распространенное мнение, что при совпадении двух последовательных приближений с заданной точностью ε , выполняется равенство $\xi \approx x_n$ с той же точностью. В общем случае, как наглядно показывает Рис. 2.5, это неверно.

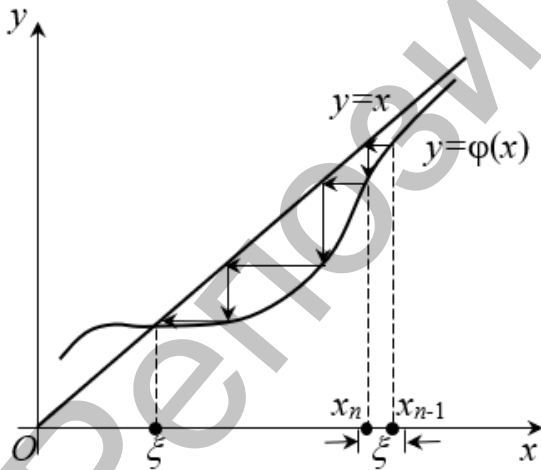


Рис. 2.5. Иллюстрация к Замечанию 2.2.

Процесс итерации следует продолжать до тех пор, пока для двух последовательных приближений x_{n-1} и x_n не будет обеспечено выполнение неравенства

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{1-q}{q} \varepsilon,$$

где ε – заданная предельная абсолютная погрешность корня ξ и $|\varphi'(x)| \leq q$. Тогда в силу формулы (2.13) будет иметь место неравенство $|\xi - x_n| \leq \varepsilon$.

Так как $x_n = \varphi(x_{n-1})$ и $\xi = \varphi(\xi)$, то $|\xi - x_n| = |\varphi(\xi) - \varphi(x_{n-1})| = |\xi - x_{n-1}| |\varphi'(\bar{x}_{n-1})| \leq q|\xi - x_{n-1}|$, т.е. $|\xi - x_n| < |\xi - x_{n-1}|$.

Таким образом, при сходящемся итерационном процессе погрешность $|\xi - x_n|$ стремится к нулю монотонно, т.е. каждое следующее значение x_n является более точным, чем предшествующее значение x_{n-1} . Конечно, при этих выводах игнорируются погрешности округлений.

2.3 Метод Ньютона (метод касательных)

Пусть корень ξ уравнения (2.1) отделен на отрезке $[a, b]$, причем $f'(x)$ и $f''(x)$ непрерывны и сохраняют определенные знаки при $x \in [a, b]$. Найдя какое-нибудь n -ое приближенное значение корня $x_n \approx \xi$, $x_n \in [a, b]$, мы можем уточнить его по методу Ньютона следующим образом.

Положим $\xi = x_n + h_n$, где h_n считаем малой величиной. Отсюда, применяя формулу Тейлора, получим $0 = f(x_n + h_n) \approx f(x_n) + h_n f'(x_n)$, следовательно, $h_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Найдем следующее приближение корня:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.14)$$

Геометрически смысл правила Ньютона эквивалентен замене небольшой дуги кривой $y = f(x)$ касательной, проведенной в некоторой точке кривой. В самом деле, положим для определенности, что $f''(x_n) > 0$ при $a \leq x \leq b$ и $f(b) > 0$ (Рис. 2.6). Выберем $x_0 = b$, для которого $f(x_0)f''(x_0) > 0$.

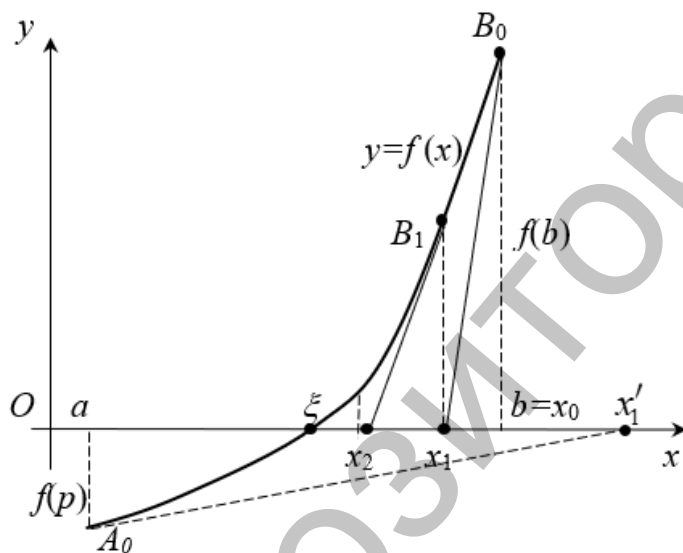


Рис. 2.6. Метод Ньютона (выбор начального приближения).

Проведем касательную к кривой $y = f(x)$ в точке $B_0(x_0, y_0)$. Первое приближение x_1 корня ξ – абсцисса точки пересечения этой касательной с осью Ox . Через точку $B_1(x_1, y_1)$ снова проведем касательную, абсцисса точки пересечения которой с Ox даст нам второе приближение к корню x_2 и т.д. Уравнение касательной в точке $B_n(x_n, y_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, есть $y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$.

Полагая $y = 0$, $x = x_{n+1}$, получим формулу (2.14). Заметим, что если положить $x_0 = a$ и, следовательно, $f(x_0)f''(x_0) < 0$, то проведя касательную к кривой $y = f(x)$ в точке $(a, f(a))$, мы получим точку x_1 , лежащую вне отрезка $[a, b]$, т.е. при таком выборе начального приближения метод Ньютона оказывается непрактичным.

Теорема 2.4. Если $f(a)f(b) < 0$, причем $f'(x)$ и $f''(x)$ отличны от нуля и сохраняют определенные знаки при $a \leq x \leq b$, то, исходя из начального приближения $x_0 \in [a, b]$, удовлетворяющего неравенству $f(x_0)f''(x_0) > 0$, можно вычислить методом Ньютона (2.14) единственный корень ξ уравнения (2.1) с любой степенью точности.

Доказательство. Пусть, например, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$ при $x \in [a, b]$ (остальные случаи рассматриваются аналогично). Выберем, например, $x_0 = b$. По условию $f(x_0) > 0$. Методом математической индукции докажем, что все приближения $x_n > \xi$, $n = 0, 1, 2, \dots$, и, следовательно, $f(x_n) > 0$. В самом деле, прежде всего, $x_0 > \xi$.

Пусть $x_n > \xi$. Применяя формулу Тейлора, получим:

$$0 = f(\xi) = f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n) + \frac{1}{2}f''(c_n)(x_n - \xi)^2,$$

где $c_n \in (\xi, x_n)$. Так как $f''(x) > 0$, то имеем $f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n) < 0$ и, следовательно,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} > \xi,$$

$x_{n+1} > \xi$, $f(x)$ – возрастающая функция, следовательно, $f(x_{n+1}) > 0$, что и требовалось доказать.

Из формулы (2.14), учитывая знаки $f(x_n)$ и $f'(x_n)$, имеем $x_{n+1} < x_n$ ($n = 0, 1, \dots$), т.е. последовательные приближения $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ образуют ограниченную монотонно убывающую последовательность. Следовательно, существует $\bar{\xi} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Переходя к пределу в равенстве (2.14), будем

иметь $\bar{\xi} = \bar{\xi} - \frac{f(\bar{\xi})}{f'(\bar{\xi})}$, т.е. $f(\bar{\xi}) = 0$. Отсюда $\bar{\xi} = \xi$, что и требовалось доказать.

Для оценки погрешности x_n можно воспользоваться общей формулой (2.4), полученной выше. Уточним эту оценку для метода Ньютона. Применяя формулу Тейлора, имеем:

$$\begin{aligned} f(x_n) &= f[x_{n-1} + (x_n - x_{n-1})] \\ &= f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) + \frac{1}{2}f''(\xi_{n-1})(x_n - x_{n-1})^2, \end{aligned}$$

где $\xi_{n-1} \in (x_{n-1}, x_n)$. В силу (2.14) имеем $f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = 0$, тогда $|f(x_n)| \leq \frac{1}{2}M(x_n - x_{n-1})^2$, где M – наибольшее значение $|f''(x)|$ на отрезке $[a, b]$. На основании формулы (2.4) окончательно получаем

$$|\xi - x_n| \leq \frac{M}{2m}(x_n - x_{n-1})^2, \text{ где } |f'(x)| \geq m \quad \forall x \in [a, b].$$

2.4 Метод секущих

В методе Ньютона на каждом шаге необходимо вычислить три величины x_{n+1} , $f(x_n)$ и $f'(x_n)$; при этом главная часть труда затрачивается на нахождение $f(x_n)$ и $f'(x_n)$. Кроме того, обязательным является требование $f'(x_n) \neq 0$. Можно уменьшить вычислительную работу, отказавшись от вычисления одной из этих величин. Заметим вычисление $f'(x_n)$ следующим образом

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}.$$

Тогда метод Ньютона (2.14) перейдет в следующую формулу

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})} (x_n - x_{n-1}). \quad (2.15)$$

Эта формула – метод секущих.

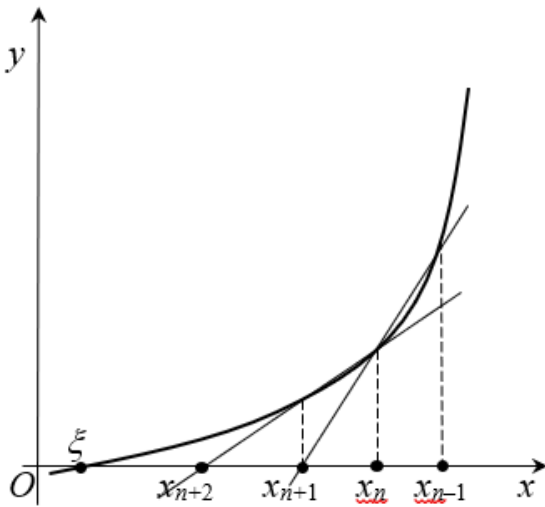


Рис. 2.7. Метод секущих.

Геометрически метод секущих эквивалентен замене небольшой дуги кривой $y = f(x)$ секущей, проходящей через точки $(x_n, f(x_n))$ и $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ (Рис. 2.7).

Метод секущих является двушаговым, т.е. нахождение следующего значения x_{n+1} требует знания двух предыдущих значений x_n, x_{n-1} . В частности, начало расчета требует знания двух начальных значений x_0 и x_1 . Для метода секущих справедлива Теорема 2.4, а также выведенные выше оценки точности.

Тема 3

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) можно разделить на две группы: точные и методы последовательных приближений (итерационные). С помощью точных методов, проделав конечное число операций, можно получить точные значения неизвестных. При этом предполагается, что коэффициенты и правые части системы известны точно, а все вычисления проводятся без округлений. Чаще всего решение задач такими методами проводится поэтапно. На первом этапе систему преобразуют к тому или иному простому виду, на втором – решают упрощенную систему и получают значения неизвестных. Одним из наиболее распространенных точных методов решения СЛАУ выступает метод Гаусса, основной идеей которого является последовательное исключение переменных. Если в системе линейных уравнений много неизвестных, схема метода Гаусса, позволяющая получить точное решение, становится громоздкой и сложной. При таких условиях для нахождения корней системы иногда более удобно пользоваться приближенными итерационными методами.

3.1 Метод Гаусса и его модификации

Наиболее распространенным приемом решения систем линейных уравнений является метод последовательного исключения неизвестных. Этот метод носит название метода Гаусса. Предположим, что для нахождения неизвестных величин x_1, x_2, \dots, x_n задана СЛАУ вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (3.1)$$

Изложим этот метод в его модификации со схемой единственного деления. Пусть $a_{11} \neq 0$. Разделим первое уравнение системы (3.1) на a_{11} . Тогда систему (3.1) можно записать в виде:

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n = q_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (3.2)$$

Отсюда видно, что с помощью первого уравнения можно из всех оставшихся уравнений исключить x_1 . Для этого умножим первое уравнение системы (2) последовательно на $-a_{21}, -a_{31}, \dots, -a_{n1}$, затем сложим соответственно со вторым, третьим и так далее n -ым уравнениями системы (3.2). В результате получим эквивалентную систему:

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n = q_1 \\ a_{22,1}x_2 + \dots + a_{2n,1}x_n = b_{2,1} \\ \dots \\ a_{n2,1}x_2 + \dots + a_{nn,1}x_n = b_{n,1} \end{cases} \quad (3.3)$$

Предположим, что все n шагов преобразований Гаусса возможны. Тогда система (3.1) сведется к треугольному виду:

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + \dots + b_{1n}x_n = q_1 \\ x_2 + b_{23}x_3 + \dots + b_{2n}x_n = q_2 \\ \dots \\ x_{n-1} + b_{n-1,n}x_n = q_{n-1} \\ x_n = q_n \end{cases} \quad (3.4)$$

Процесс сведения системы (3.1) к виду (3.4) называется *прямым ходом* метода Гаусса. Выпишем в общем виде рекуррентные соотношения для получения коэффициентов матрицы на k -м шаге:

$$\left. \begin{aligned} a_{ij}^k &= a_{ij}^{k-1} - \frac{a_{kj}^{k-1} \cdot a_{ik}^{k-1}}{a_{kk}^{k-1}}, \\ f_i^k &= f_i^{k-1} - \frac{f_k^{k-1} \cdot a_{ik}^{k-1}}{a_{kk}^{k-1}} \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

$k = 1, 2, \dots, n-1; i, j = k+1, k+2, \dots, n.$

Здесь k – номер того уравнения, которое вычитается из остальных и номер того неизвестного, которое исключается из последующих уравнений; a_{kk}^{k-1} – *ведущий* или *разрешающий* элемент; i – номер уравнения, из которого в данный момент исключается неизвестное; j – текущий номер столбца.

Нахождение неизвестных величин в порядке x_n, x_{n-1}, \dots, x_1 из системы (3.4) называется *обратным ходом* метода Гаусса.

Формулы для нахождения корней СЛАУ в обратном ходе:

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}, x_k = \frac{f_k^{(k-1)} - \sum_{j=k+1}^n a_{kj}^{(k-1)} \cdot x_j}{a_{kk}^{(k-1)}}; k = n - 1, n - 2, \dots, 1 \quad (3.6)$$

Весь алгоритм метода Гаусса осуществляется за $\frac{n^3}{3}$ порядка арифметических операций.

При вычислениях могут произойти ошибки, поэтому необходим контроль вычислений. Одна из наиболее простых схем контроля основана на том, что увеличение значений всех неизвестных на единицу равносильно замене данной системы (3.1) контрольной системой, в которой свободные члены равны суммам всех коэффициентов соответствующей строки. Решая вместе с данной системой также и контрольную систему, получаем возможность контролировать попутно каждый шаг расчета. Поясним. Наряду с системой (3.1) рассмотрим систему вида

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n = b_1 + \sum_{k=1}^n a_{1k} \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n = b_2 + \sum_{k=1}^n a_{2k} \\ \dots \\ a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n = b_n + \sum_{k=1}^n a_{nk} \end{cases} \quad (3.7)$$

Очевидно, должны иметь место равенства $y_i = x_i + 1; i = \overline{1, n}$.

Поскольку у систем (3.1) и (3.7) одна и та же матрица коэффициентов, то при вычислении вектора $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ в прямом ходе следует вести преобразование только компонент вектора свободных членов.

Необходимым и достаточным условием применимости метода Гаусса является неравенство нулю всех ведущих элементов. Если на k -ом шаге диагональный элемент не равен нулю, но его значение мало ($\approx \varepsilon$), то, может быть, этот элемент отличен от нуля только из-за ошибок округления, а должен быть 0 и делить на него нельзя. Чтобы исключить подобное, алгоритм метода исключения неизвестных модифицируется. На каждом шаге с помощью перестановки строк в качестве разрешающего подбирается наибольший по модулю из возможных элемент. Такая модификация носит название *выбор главного элемента*. Выбор главного элемента путём перестановки строк не является единственным способом модификации, возможна перестановка столбцов с соответствующей перенумерацией неизвестных, а также комбинированная перестановка строк и столбцов.

Вследствие неизбежных округлений результаты даже точного метода являются приближенными, причем оценка погрешности корней в общем случае затруднительна. Полученные методом Гаусса корни СЛАУ можно

уточнить. Покажем, как это делается, если поправки корней малы по абсолютной величине.

Пусть для системы (3.1) найдено решение x_0 . Полагая $\bar{x} = \bar{x}_0 + \bar{\delta}$, где $\bar{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)^{-1}$, то для нахождения вектора поправки $\bar{\delta}$ к корню \bar{x}_0 будем иметь уравнение $A(\bar{x}_0 + \bar{\delta}) = \bar{b}$ или $A\bar{\delta} = \bar{\varepsilon}$, где $\bar{\varepsilon} = \bar{b} - A\bar{x}_0$ – вектор невязки приближенного решения, A – матрица коэффициентов системы (3.1). Таким образом, чтобы найти $\bar{\delta}$, нужно решить линейную систему с прежней матрицей A и новым свободным членом $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)^{-1}$. Для этого достаточно к основной схеме вычислений присоединить столбец $\bar{\varepsilon}$ свободных членов и преобразовать его по общим правилам. Заметим, что преобразованные коэффициенты матрицы A можно не уточнять, так как при малых невязках соответствующие ошибки будут обладать более высоким порядком малости.

Рассмотрим модификацию метода исключения неизвестных – метод *Жордана–Гаусса*. В этом способе объединяются прямой и обратный ход, матрица при этом приводится к единичному виду, а корни системы оказываются на месте свободных членов расширенной матрицы.

Формулы преобразования матрицы в этом случае:

$$\begin{aligned} a_{ij}^k &= a_{ij}^{k-1} - \frac{a_{kj}^{k-1}}{a_{kk}^{k-1}} a_{ik}^{k-1}, i, j \neq k \\ a_{ij}^k &= \frac{a_{kj}^{k-1}}{a_{kk}^{k-1}}, i = k, j \neq k; a_{ij}^k = \frac{a_{ik}^{k-1}}{a_{kk}^{k-1}}, i \neq k, j = k \\ a_{ij}^0 &= a_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Вычисление неизвестных в этом случае упрощается:

$$x_k = \frac{b_k^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, k = 1, \dots, n. \quad (3.9)$$

Если применяется схема единственного деления (осуществляется деление на каждом шаге на ведущий элемент), то корни системы – это вектор свободных членов на n -шаге.

3.2 Метод квадратного корня

Метод основан на представлении матрицы A коэффициентов системы (3.1) в виде произведения треугольных матриц. Это позволяет свести решение заданной системы к последовательному решению двух систем с треугольными матрицами, что является задачей более простой. Метод предназначен для решения СЛАУ с симметрическими матрицами.

Пусть дана система (3.1) или в векторном виде $A\bar{x} = \bar{b}$, где $A = \{a_{ij}\}$ – симметрическая вещественная матрица, т.е. $A' = A$, $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$. Тогда матрицу A можно представить в виде произведения двух транспонированных между собой треугольных матриц $A = T' T$,

$$\text{где } T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}, \quad T' = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & \dots & 0 \\ t_{12} & t_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{1n} & t_{2n} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

Перемножив матрицы T' и T , для определения неизвестных элементов t_{ij} матрицы T получим следующие уравнения:

$$\begin{cases} t_{1i}t_{1j} + t_{2i}t_{2j} + \dots + t_{ii}t_{ij} = a_{ij} \\ t_{1i}^2 + t_{2i}^2 + \dots + t_{ii}^2 = a_{ii} \end{cases}, \quad i < j$$

Отсюда последовательно находим:

$$\begin{cases} t_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad t_{1j} = \frac{a_{1j}}{t_{11}}, \quad j = \overline{2, n}; \\ t_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki}^2}, \quad i = \overline{2, n}; \\ t_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki}t_{kj}}{t_{ii}}, \quad j = \overline{2, n}; \quad i < j; \\ t_{ij} = 0, \quad i > j. \end{cases} \quad (3.10)$$

Система (3.1) имеет единственное решение, если $t_{ii} \neq 0$, $i = \overline{1, n}$; так как тогда $\det A = \det T \cdot \det T' = (\det T)^2 = (t_{11}t_{22}\dots t_{nn})^2 \neq 0$. В силу того, что $A = T'T$, система уравнений (3.1) эквивалентна двум системам уравнений $T'\bar{y} = \bar{b}$ и $T\bar{x} = \bar{y}$ или в развернутом виде

$$\begin{cases} t_{11}y_1 = b_1 \\ t_{12}y_1 + t_{22}y_2 = b_2 \\ \dots \\ t_{1n}y_1 + t_{2n}y_2 + \dots + t_{nn}y_n = b_n \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} t_{11}x_1 + t_{12}x_2 + \dots + t_{1n}x_n = y_1 \\ t_{22}x_2 + \dots + t_{2n}x_n = y_2 \\ \dots \\ t_{nn}x_n = y_n \end{cases},$$

отсюда последовательно находим:

$$\begin{cases} y_1 = \frac{b_1}{t_{11}} \\ y_i = \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki}y_k}{t_{ii}}, \quad i = \overline{2, n}; \end{cases} \quad (3.11)$$

$$\begin{cases} x_n = \frac{y_n}{t_{nn}} \\ x_i = \frac{y_i - \sum_{k=i+1}^n t_{ik}x_k}{t_{ii}}, \quad i < n. \end{cases} \quad (3.12)$$

При практическом применении метода квадратного корня *прямым ходом* с помощью формул (3.10) и (3.11) последовательно вычисляются коэффициенты t_{ij} и y_i , $i, j = \overline{1, n}$, а затем *обратным ходом* с помощью формул (3.12) находятся неизвестные x_i , $i = n, n-1, \dots, 1$.

3.3 Обращение матриц

Нахождение матрицы, обратной матрице A , эквивалентно решению матричного уравнения

$$AX = E,$$

где E – единичная матрица, X – искомая матрица. Это уравнение можно переписать в виде системы n^2 уравнений вида:

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}x_{kj} = \delta_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n};$$

где $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ – символ Кронекера.

Нетрудно заметить, что полученная система распадается на n независимых систем линейных алгебраических уравнений с одной и той же матрицей A , но с различными правыми частями.

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} + \dots + a_{1n}x_{n1} = 1 \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} + \dots + a_{2n}x_{n1} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_{11} + a_{n2}x_{21} + \dots + a_{nn}x_{n1} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} + \dots + a_{1n}x_{n2} = 0 \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} + \dots + a_{2n}x_{n2} = 1 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_{12} + a_{n2}x_{22} + \dots + a_{nn}x_{n2} = 0 \end{cases}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\begin{cases} a_{11}x_{1n} + a_{12}x_{2n} + \dots + a_{1n}x_{nn} = 0 \\ a_{21}x_{1n} + a_{22}x_{2n} + \dots + a_{2n}x_{nn} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_{1n} + a_{n2}x_{2n} + \dots + a_{nn}x_{nn} = 1 \end{cases}$$

Полученные системы можно одновременно решать методом Гаусса, причем в силу того, что все системы имеют одну и ту же матрицу A , достаточно один раз совершать прямой ход.

3.4 Метод итерации

При большом числе неизвестных линейной системы схема метода Гаусса, дающая точное решение, становится весьма сложной. В этих условиях для нахождения корней системы иногда удобнее пользоваться итерационными численными методами, позволяющими получать корни системы с заданной точностью путем сходящихся бесконечных процессов (к числу их относятся метод итерации, метод Зейделя и т.д.). Привлекательным в итерационных методах является их самоисправляемость и простота реализации на компьютере. Итерационный метод для начала вычисления требует задания одного или нескольких начальных приближений. Условия и скорость сходимости каждого итерационного процесса существенно зависят от свойств матрицы системы и выбора начальных приближений.

Прежде, чем изложить суть метода итерации, вспомним некоторые определения.

Пусть дана последовательность векторов

$$\bar{x}^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}, k = 0, 1, 2, \dots$$

Если существует n конечных пределов $x_i = \lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)}$, $i = \overline{1, n}$; то вектор $\bar{x} =$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$
 называют пределом последовательности $\bar{x}^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$; а саму

эту последовательность называют *сходящейся* к вектору \bar{x} . Точно также, если имеется последовательность квадратных матриц $A^{(k)} = \{a_{ij}^{(k)}\}$; $i, j = \overline{1, n}$; $k = 0, 1, 2, \dots$; то пределом этой последовательности называют матрицу A с элементами $a_{ij} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{ij}^{(k)}$, если, конечно, все эти n^2 пределов существуют.

Нормой вектора \bar{x} называется вещественное число $\|\bar{x}\|$, удовлетворяющее следующим требованиям:

- 1) $\|\bar{x}\| > 0$ при $\bar{x} \neq \bar{0}$ и $\|\bar{0}\| = 0$;
- 2) $\|c\bar{x}\| = |c| \cdot \|\bar{x}\|$ при любом числовом множителе c ;
- 3) $\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$.

Вводить норму вектора можно любыми способами, лишь бы выполнялись условия 1) – 3). Например,

$$\|\bar{x}\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|,$$

$$\|\bar{x}\| = \sum_{i=1}^n |x_i|,$$

$$\|\bar{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$$

и так далее.

Нормой квадратной матрицы A называется вещественное число $\|A\|$, удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $\|A\| > 0$ при $A \neq 0$ и $\|0\| = 0$;
- 2) $\|cA\| = |c| \cdot \|A\|$ при любом числовом множителе c ;
- 3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$;
- 4) $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

Приведем примеры некоторых норм матриц:

$$\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|;$$

$$\|A\| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|;$$

Норма матрицы $A = \{a_{ij}\}$ называется *канонической*, если выполнены дополнительно условия:

5) $|a_{ij}| \leq \|A\|;$

6) из неравенства $|A| \leq |B|$ следует, что $\|A\| \leq \|B\|.$

Систему линейных алгебраических уравнений вида (3.1) запишем в матричном виде: $A\bar{x} = \bar{b}.$

Полагая, что диагональные элементы матрицы A , $a_{ii} \neq 0, i = \overline{1, n};$ решим первое уравнение системы (3.1) относительно $x_1,$ второе – относительно x_2 и т.д. Получим эквивалентную систему уравнений вида:

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \dots + \alpha_{1n}x_n, \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3 + \dots + \alpha_{2n}x_n, \\ \dots \dots \dots \\ x_n = \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \dots + \alpha_{nn-1}x_{n-1}, \end{cases} \quad (3.13)$$

где $\beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, \alpha_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}$ при $i \neq j, \alpha_{ii} = 0, i = \overline{1, n}.$

Введем в рассмотрение матрицы:

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}, \quad \bar{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

Тогда (3.13) записывается в виде:

$$\bar{x} = \bar{\beta} + \alpha\bar{x}. \quad (3.14)$$

Полученную систему (3.14) будем решать методом последовательных приближений. За нулевое приближение примем, например, столбец свободных членов $\bar{x}^{(0)} = \bar{\beta}.$ Далее последовательно строим матрицы-столбцы

$$\begin{aligned} \bar{x}^{(1)} &= \bar{\beta} + \alpha\bar{x}^{(0)} \\ \bar{x}^{(2)} &= \bar{\beta} + \alpha\bar{x}^{(1)} \\ &\dots \dots \dots \\ \bar{x}^{(k+1)} &= \bar{\beta} + \alpha\bar{x}^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.15)$$

Если последовательность приближений $\bar{x}^{(0)}, \bar{x}^{(1)}, \dots, \bar{x}^{(k)}, \dots$ имеет предел $\bar{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{x}^{(k)},$ то этот предел является решением системы (3.13), а, следовательно, и системы (3.1). В самом деле, переходя к пределу в равенстве (3.15) будем иметь

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{x}^{(k+1)} = \bar{\beta} + \alpha \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{x}^{(k)} \text{ или } \bar{x} = \bar{\beta} + \alpha\bar{x},$$

т.е. предельный вектор \bar{x} является решением системы (3.13), и системы (3.1). Напишем формулы приближений в развернутом виде:

$$\begin{cases} x_i^{(0)} = \beta_i, \\ x_i^{(k+1)} = \beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j^{(k)}, \\ (\alpha_{ii} = 0; i = \overline{1, n}; k = 0, 1, 2, \dots). \end{cases} \quad (3.15')$$

Метод последовательных приближений, определяемых формулой (3.15) или (3.15') носит название *метода итерации*.

Замечание 3.1. Иногда выгоднее приводить систему (3.1) к виду (3.13) так, чтобы коэффициенты α_{ij} не были равны нулю. Например, пусть дана система вида:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1, n};$$

можно положить $a_{ij} = a_{ij}^{(1)} + a_{ij}^{(2)}$, где $a_{ij}^{(1)} \neq 0, i = \overline{1, n}$. Тогда данная система эквивалентна приведенной системе уравнений вида:

$$x_i = \beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j, \quad i = \overline{1, n};$$

где $\beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}^{(1)}}$, $\alpha_{ii} = -\frac{a_{ii}^{(2)}}{a_{ii}^{(1)}}$, $\alpha_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}^{(1)}}$, $i \neq j, i, j = \overline{1, n}$.

Поэтому при дальнейших рассуждениях мы не будем, вообще говоря, предполагать, что $\alpha_{ii} = 0$.

Замечание 3.2. Для итерационного процесса (3.15) нет необходимости в качестве нулевого приближения выбирать вектор свободных членов. Ниже будет доказано, что сходимость (3.15) зависит от свойств матрицы α , причем при выполнении известных условий, если этот процесс сходится при каком-нибудь исходном начальном приближении, то он будет сходиться к тому же предельному вектору и при любом другом начальном приближении. Начальный вектор $\bar{x}^{(0)}$ в процессе итерации может быть взят произвольным.

Замечание 3.3. Сходящийся процесс итерации обладает важным свойством *самоисправляемости*, т.е. отдельная ошибка в вычислениях не отразится на окончательном результате, так как ошибочное приближение можно рассматривать как новый начальный вектор.

3.4.1 Достаточное условие сходимости метода итераций

Пусть имеем приведенную линейную систему вида (3.14):

$$x = \alpha x + \beta,$$

где $\alpha = \{\alpha_{ij}\}$, $\beta = \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{Bmatrix}$ – заданные матрица и вектор и $x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}$ – иско-

мый вектор.

Теорема 3.1. Процесс итерации для приведенной линейной системы (3.14) сходится к единственному ее решению, если какая-нибудь каноническая норма матрицы α меньше единицы, т.е. для сходимости $x^{(k)} = \beta + \alpha x^{(k-1)}, k = 1, 2, \dots, n$ ($x^{(0)}$ – произвольно) достаточное условие есть

$$\|\alpha\| < 1 \quad (3.16)$$

Доказательство. Отправляясь от произвольного вектора $x^{(0)}$, строим последовательность приближений

$$x^{(1)} = \beta + \alpha x^{(0)},$$

$$x^{(2)} = \beta + \alpha x^{(1)},$$

.....

$$x^{(k)} = \beta + \alpha x^{(k-1)}$$

Отсюда

$$x^{(k)} = \left(E + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{k-1} \right) \beta + \alpha^k x^{(0)} \quad (3.17)$$

Так как при $\|\alpha\| < 1$ имеем $\|\alpha^k\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, то $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha^k = 0$

и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(E + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{k-1} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{k-1} \alpha^n = (E - \alpha)^{-1}.$$

Здесь использовались известные теоремы из теории математического анализа и алгебры. Теперь, переходя к пределу в (3.14) при $k \rightarrow \infty$, получим:

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = (E - \alpha)^{-1} \beta \quad (3.18)$$

Таким образом, доказана сходимость итерационного процесса. Кроме того, из равенства (3.18) имеем $(E - \alpha)x = \beta$ или $x = \alpha x + \beta$, т.е. предельный вектор x является решением системы (3.14). Так как матрица системы $E - \alpha$ – неособенная, то решение x – единственно.

Следствие 3.1. Процесс итерации для системы (3.14) сходится, если выполняется какое-либо из условий:

$$1) \|\alpha\| = \max_i \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| < 1;$$

$$2) \|\alpha\| = \max_j \sum_{i=1}^n |\alpha_{ij}| < 1;$$

$$3) \|\alpha\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}|^2} < 1.$$

В частности процесс итерации заведомо сходится, если выполнены неравенства $|\alpha_{ij}| < \frac{1}{n}$, где α_{ij} – элементы матрицы α ; $i, j = \overline{1, n}$; n – число неизвестных в системе (3.14).

Действительно, ведь 1), 2) и 3) являются простейшими каноническими нормами матрицы α .

Следствие 3.2. Для системы

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.19)$$

процесс итерации сходится, если выполнены неравенства:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}|, \quad i = \overline{1, n}; \quad (3.20)$$

или

$$|\alpha_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |\alpha_{ij}|, \quad j = \overline{1, n};$$

то есть сходимость имеет место, если модули диагональных элементов матрицы $A = \{a_{ij}\}$ системы (3.1) или для каждой строки превышают сумму модулей недиагональных элементов этой строки, или же для каждого столбца превышают сумму модулей недиагональных элементов этого столбца.

В самом деле, при наличии неравенства (3.20), очевидно,

$$\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1, \quad \text{но } \alpha_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, \quad i \neq j, \alpha_{ii} = 0, \quad i = \overline{1, n},$$

а отсюда следует выполнение неравенства 1) из Следствия 3.1.

Для доказательства второго утверждения положим в системе (3.19)

$$x_i = \frac{z_i}{a_{ii}}, \quad i = \overline{1, n} \quad (3.19')$$

где z_i – новые переменные. Тогда получим систему $\sum_{j=1}^n \frac{a_{ij}}{a_{jj}} z_j = b_i, \quad i = \overline{1, n}$.

Для этой системы процесс итерации сходится или расходится одновременно с процессом итерации для исходной системы (3.19). Приведя обычным образом систему (3.19') к специальному виду (3.14) и используя условия 2) Следствия 3.1, получим достаточное условие сходимости процесса для системы (3.19):

$$\sum_{i=1, i \neq j}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1, \quad j = \overline{1, n}$$

или

$$|a_{jj}| > \sum_{i=1, i \neq j}^n |a_{ij}|, \quad j = \overline{1, n}$$

3.4.2 Оценка погрешности приближений процесса итерации

Пусть $x^{(k-1)}$ и $x^{(k)}$ – два последовательных приближения решения линейной системы (3.14). При $p \geq 1$ имеем (3.20):

$$\|x^{(k+p)} - x^{(k)}\| \leq \|x^{(k+p)} - x^{(k+p-1)}\| + \|x^{(k+p-1)} - x^{(k+p-2)}\| + \dots + \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \quad (3.20)$$

Так как $x^{(m+1)} = \alpha x^{(m)} + \beta$ и $x^{(m)} = \alpha x^{(m-1)} + \beta$, то $x^{(m+1)} - x^{(m)} = \alpha \cdot (x^{(m)} - x^{(m-1)})$ и, следовательно,

$$\|x^{(m+1)} - x^{(m)}\| \leq \|\alpha\| \cdot \|x^{(m)} - x^{(m-1)}\| \leq \|\alpha^2\| \cdot \|x^{(m-1)} - x^{(m-2)}\| \leq \|\alpha\|^{m-k} \cdot \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|$$

при $m > k \geq 1$.

Поэтому из формулы (3.20) получаем:

$$\begin{aligned} \|x^{(p+k)} - x^{(k)}\| &\leq \|\alpha\|^{p-1} \cdot \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| + \|\alpha\|^{p-2} \cdot \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| + \dots + \|\alpha\|^2 \cdot \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| + \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| = \\ &= (\|\alpha\|^{p-1} + \|\alpha\|^{p-2} + \dots + \|\alpha\| + 1) \cdot \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \\ &\leq \frac{1}{1 - \|\alpha\|} \cdot \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \end{aligned}$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $p \rightarrow \infty$, получим окончательно

$$\|x - x^{(k)}\| \leq \frac{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|}{1 - \|\alpha\|} \text{ при } k \geq 1 \quad (3.21)$$

или

$$\|x - x^{(k)}\| \leq \frac{\|\alpha\|}{1 - \|\alpha\|} \cdot \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|.$$

Если $\|\alpha\| = \frac{1}{2}$, то предыдущая формула принимает вид

$$\|x - x^{(k)}\| \leq \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|,$$

т.е. в этом случае, если $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| < \varepsilon$, то и $\|x - x^{(k)}\| < \varepsilon$. В общем случае, если в процессе вычислений будет обнаружено, что

$$\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \leq \frac{1-q}{q} \cdot \varepsilon,$$

где $q = \|\alpha\| < 1$, то $\|x - x^{(k)}\| \leq \varepsilon$.

Здесь предполагается, что последовательные приближения $x^{(j)}$, $j = \overline{0, k}$; вычисляются точно, т.е. в них полностью отсутствуют погрешности округлений.

При практическом использовании метода итерации процесс итерирования прекращается, когда две соседние итерации разнятся между собой как

$$\left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right| \leq \frac{1-q}{q} \cdot \varepsilon, i = \overline{1, n}; \quad (3.22)$$

Из формулы (3.21), используя полученные выше оценки для нормы разности двух последовательных приближений, будем иметь

$$\|x - x^{(k)}\| \leq \frac{\|\alpha\|^k}{1 - \|\alpha\|} \cdot \|x^{(1)} - x^{(0)}\|.$$

В частности, если выбрать $x^{(0)} = \beta$, то $x^{(1)} = \alpha\beta + \beta$ и $\|x^{(1)} - x^{(0)}\| \leq \|\alpha \cdot \beta\| \leq \|\alpha\| \cdot \|\beta\|$. Следовательно,

$$\|x - x^{(k)}\| \leq \frac{\|\alpha\|^{k+1}}{1 - \|\alpha\|} \cdot \|\beta\|.$$

Таким образом, мы получили практическую оценку погрешности приближенного решения по методу итераций. Из оценки (3.22), если наперед заданное ε – требуемая точность результата, можно найти необходимое количество итераций, которое надо затратить для достижения заданной точности. Для этого достаточно решить относительно k следующее неравенство

$$\frac{\|\alpha\|^{k+1}}{1 - \|\alpha\|} \cdot \|\beta\| \leq \varepsilon.$$

3.5 Метод Зейделя

Метод Зейделя представляет собой некоторую модификацию метода итерации. Основная его идея заключается в том, что при вычислении $(k+1)$ -го приближения неизвестной x_i ($i = \overline{1, n}$) учитываются уже вычисленные ранее $(k+1)$ -е приближения неизвестных x_j .

Пусть дана приведенная линейная система

$$x_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_{ij} + \beta_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Выберем произвольно начальные приближения корней системы $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$.

Далее предполагается, что некоторые приближения корней $x_i^{(k)}$ известны, согласно методу Зейделя, будем строить $(k+1)$ -е приближения корней по следующим формулам:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \alpha_{11}x_1^{(k)} + \alpha_{12}x_2^{(k)} + \dots + \alpha_{1n}x_n^{(k)} + \beta_1 \\ x_2^{(k+1)} = \alpha_{21}x_1^{(k+1)} + \alpha_{22}x_2^{(k)} + \dots + \alpha_{2n}x_n^{(k)} + \beta_2 \\ x_3^{(k+1)} = \alpha_{31}x_1^{(k+1)} + \alpha_{32}x_2^{(k+1)} + \alpha_{33}x_3^{(k)} + \dots + \alpha_{3n}x_n^{(k)} + \beta_3 \\ \dots \\ x_n^{(k+1)} = \alpha_{n1}x_1^{(k+1)} + \alpha_{n2}x_2^{(k+1)} + \dots + \alpha_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)} + \alpha_{nn}x_n^{(k)} + \beta_n \end{cases} \quad (3.23)$$

Заметим, что указанная выше Теорема 3.1 сходимости для метода итерации остается верной для сходимости метода Зейделя. Обычно метод Зейделя дает лучшую сходимость, чем метод простой итерации, но, вообще говоря, он приводит к более громоздким вычислениям. Процесс Зейделя может сходиться даже в том случае, когда расходится процесс итерации. Однако это бывает не всегда. Возможен случай, когда процесс Зейделя сходится медленнее процесса итерации. Более того, могут быть случаи, когда процесс итерации сходится, а процесс Зейделя расходится, и наоборот.

Тема 4

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ ДЛЯ ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Существует много методов анализа и обработки данных, полученных в ходе эксперимента. Основная задача состоит в восстановлении функции по ее значениям в нескольких точках. Это часть более основной проблемы естествознания: как найти существующую закономерность по разрозненным фактам.

Пусть в процессе эксперимента путем измерений получена таблица некоторой функциональной зависимости $y = f(x)$:

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$f(x_i)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$...	$f(x_n)$

Требуется найти формулу, выражающую эту зависимость аналитически. Сформулируем задачу таким образом, чтобы учитывался характер исходной функции: найти функцию F заданного вида $y = F(x)$, принимающую в точках x_1, x_2, \dots, x_n значения, близкие к табличным y_1, y_2, \dots, y_n .

На практике вид приближающей функции F определяется следующим образом. По заданной таблице значений $f(x)$ строится ее точечный график, а потом проводится гладкая кривая, приближенно отображающая характер расположения точек (Рис. 4.1). По полученной кривой определяется вид приближающей функции. Выберем некоторую зависимость $y = F(x, a, b, \dots, c)$; здесь a, b, \dots, c являются неизвестными параметрами.

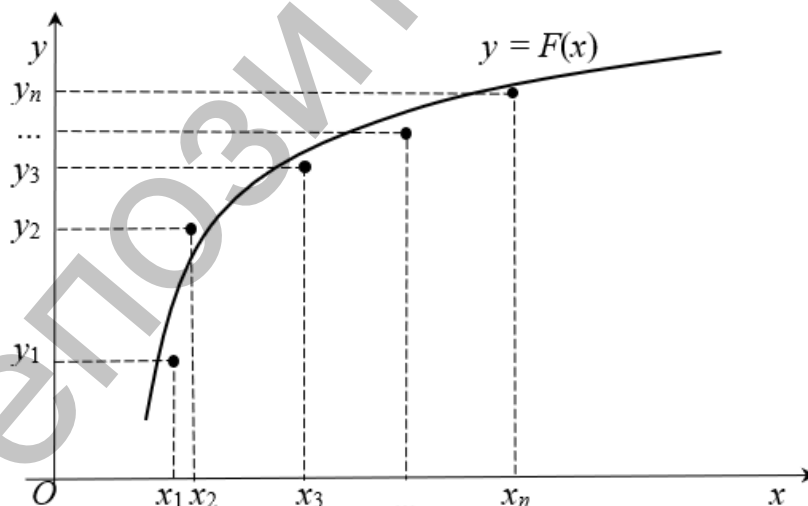


Рис. 4.1. Приближение функцией заданного вида.

Метод наименьших квадратов основан на минимизации суммы квадратов отклонений выбранной функции от исследуемых данных. Он позволяет найти значения неизвестных параметров, при которых функция невязки

$$\Phi = \sum_{i=1}^n [y_i - F(x_i, a, b, \dots, c)]^2 \quad (4.1)$$

принимает наименьшее значение. Для этого приравняем нулю частные производные по всем неизвестным параметрам a, b, \dots, c .

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0 \end{cases}$$

$$\text{или} \begin{cases} \sum_{i=1}^n [y_i - F(x_i, a, b, \dots, c)] F_a(x_i, a, b, \dots, c) = 0 \\ \sum_{i=1}^n [y_i - F(x_i, a, b, \dots, c)] F_b(x_i, a, b, \dots, c) = 0 \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n [y_i - F(x_i, a, b, \dots, c)] F_c(x_i, a, b, \dots, c) = 0 \end{cases}$$

Из полученной системы уравнений можно найти неизвестные параметры a, b, \dots, c , например, методом Гаусса. Мы получим приближающую функцию в аналитическом виде $y = F(x, a, b, \dots, c)$.

Метод наименьших квадратов широко используется в регрессионном анализе, построение приближающих (аппроксимирующих) функций таким способом называют в зависимости от вида функции линейной (квадратичной, геометрической и т.п.) *регрессией*.

4.1 Линейная и квадратичная функции

Рассмотрим, как построить **линейную** функциональную зависимость между исследуемыми данными. Эта зависимость описывается формулой $y = ax + b$. Задача заключается в нахождении значений коэффициентов зависимости a и b , при которых выражение $\Phi = \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2$ принимает наименьшее значение. Другими словами, при найденных коэффициентах a и b сумма квадратов отклонений экспериментальных данных от построенной прямой будет наименьшей.

Из равенства нулю частных производных этой функции по переменным a и b следует:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b)) x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b)) = 0 \end{cases}$$

Откуда получим:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i + nb = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases} \quad (4.2)$$

Решаем полученную систему уравнений любым методом (например, методом исключения неизвестных или методом Крамера) и получаем значения искоемых коэффициентов.

Рассмотрим, как построить **квадратичную** зависимость между исследуемыми данными в виде $y = ax^2 + bx + c$. Функция невязки $\Phi = \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)]^2$ принимает минимальное значение, если ее частные производные по a и b равны нулю. Неизвестные коэффициенты a , b и c будем находить из полученной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^4 + b \sum_{i=1}^n x_i^3 + c \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i^3 + b \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i + cn = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases} \quad (4.3)$$

Здесь n равно количеству элементов в выборке. Систему относительно неизвестных a , b , и c решаем, например, методом Гаусса.

4.2 Приближение различными элементарными функциями

Рассмотрим, как нахождение приближенных функций с двумя параметрами $F(x, a, b)$ для различных элементарных функций (степенной, показательной, логарифмической и др.) может быть сведено к нахождению параметров линейной функции.

4.2.1 Степенная функция

Степенную функцию запишем в виде:

$$F(x, a, b) = ax^b \quad (4.4)$$

Предположим, что исходные данные удовлетворяют условиям: $x_i > 0$ и $y_i > 0, i = \overline{1, n}$. Прологарифмируем функцию F :

$$\ln F = \ln a + b \cdot \ln x$$

Т.к. F – приближающая функция для f , то $\Phi = \ln F$ – приближающая функция для $\ln f$. Введем новую переменную $u = \ln x$. Тогда $\ln F$ – функция от u .

Введем обозначения:

$$b = A; \ln a = B. \quad (4.5)$$

Тогда задача сводится к построению приближающей функции вида

$$\Phi(u, A, B) = Au + B, \quad (4.6)$$

т.е. линейной.

Практически при нахождении приближающей степенной функции необходимо выполнить следующие действия:

1. По исходной таблице составить новую, прологарифмировав значения x и y (это возможно сделать, если они положительны).
2. По новой таблице найти параметры A и B для линейной функции (4.6).
3. Используя введенные обозначения (4.5), найти a и b и подставить в исходное выражение для степенной функции (4.4).

Приближение экспериментальных данных в виде степенной функции называется геометрической регрессией.

4.2.2 Показательная функция

Показательную функцию будем строить с основанием e :

$$F(x, a, b) = ae^{bx} \quad (4.7)$$

Предположим, что искомый параметр a и значения $y_i, i = \overline{1, n}$ – положительны, прологарифмируем функцию (4.7):

$$\ln F = \ln a + b \cdot x$$

Введем обозначения (4.5):

$$b = A; \ln a = B.$$

Получим линейную функцию:

$$\Phi(x, A, B) = Ax + B \quad (4.8)$$

Таким образом, алгоритм построения приближающей показательной функции, следующий:

1. Прологарифмировать значения функции y в исходной таблице (они должны быть положительными).
2. Для новой таблицы с исходными значениями x и новыми y найти параметры A и B для линейной функции (4.8).
3. Используя введенное обозначение (4.5), найти a и b , подставить их в формулу показательной функции (4.7).

4.2.3 Логарифмическая функция

Предположим, что заданные значения $x_i > 0, i = \overline{1, n}$, что соответствует области определения логарифма. Логарифмическую функцию будем строить с основанием e :

$$F(x, a, b) = a \cdot \ln x + b \quad (4.9)$$

Для перехода к линейной функции достаточно сделать замену переменной: $u = \ln x$:

$$\Phi(u, a, b) = a \cdot u + b \quad (4.10)$$

Таким образом, алгоритм построения приближающей логарифмической функции, следующий:

1. Прологарифмировать значения x в исходной таблице (они должны быть положительными).
2. Для новой таблицы с новыми x и исходными значениями y найти параметры a и b для линейной функции (4.10).
3. Подставить a и b в формулу логарифмической функции (4.9).

4.2.4 Обратно-пропорциональная функция

Предположим, что заданные значения $x_i \neq 0, i = \overline{1, n}$, тогда может быть построена обратно-пропорциональная функция, которая имеет вид:

$$F(x, a, b) = \frac{a}{x} + b \quad (4.11)$$

Для перехода к линейной функции достаточно сделать замену переменной: $u = \frac{1}{x}$:

$$\Phi(u, a, b) = a \cdot u + b \quad (4.12)$$

Таким образом, алгоритм построения приближающей обратно-пропорциональной функции, следующий:

1. Значения x в исходной таблице заменить в новой таблице обратными.
2. Для новой таблицы с новыми x и исходными значениями y найти параметры a и b для линейной функции (4.12).
3. Подставить a и b в формулу обратно-пропорциональной функции (4.11).

4.2.5 Дробно-линейная функция

Предположим, что заданные значения $y_i \neq 0, i = \overline{1, n}$, тогда может быть построена дробно-линейная функция, которая имеет вид:

$$F(x, a, b) = \frac{1}{ax + b} \quad (4.13)$$

Для перехода к линейной функции перепишем (4.13) следующим образом:

$$\frac{1}{F(x, a, b)} = ax + b \quad (4.14)$$

Таким образом, алгоритм построения приближающей обратно-пропорциональной функции, следующий:

1. Значения y в исходной таблице заменить в новой таблице обратными.
2. Для новой таблицы с исходными значениями x и новыми y найти параметры a и b для линейной функции (4.14).
3. Подставить a и b в формулу дробно-линейной функции (4.13).

4.2.6 Дробно-рациональная функция

Предположим, что заданные значения $x_i \neq 0, y_i \neq 0, i = \overline{1, n}$, тогда может быть построена дробно-рациональная функция, которая имеет вид:

$$F(x, a, b) = \frac{x}{ax + b} \quad (4.15)$$

Для перехода к линейной функции перепишем (4.15) следующим образом:

$$\frac{1}{F(x, a, b)} = a + \frac{b}{x}$$

Сделаем замену переменной: $u = \frac{1}{x}$ и введем обозначения:

$$b = A; a = B. \quad (4.16)$$

Тогда задача сводится к построению линейной приближающей функции:

$$\Phi(u, A, B) = Au + B$$

Таким образом, алгоритм построения приближающей дробно-рациональной функции, следующий:

1. Значения x и y в исходной таблице заменить в новой таблице обратными.
2. По новой таблице найти параметры A и B для линейной функции.
3. Используя введенное обозначение (4.16), найти a и b , подставить их в формулу дробно-рациональной функции (4.15).

4.3 Погрешность метода наименьших квадратов

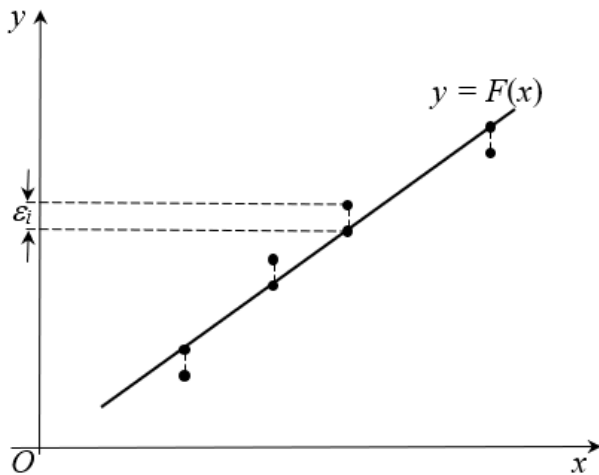


Рис. 4.2. Отклонение приближающей функции.

В точках исходной таблицы исходная функция $f(x)$ и приближающая $F(x)$ различаются на величину $\varepsilon_i = f(x_i) - F(x_i)$.

Отклонения ε_i могут принимать как положительные, так и отрицательные значения (Рис. 4.2.). Чтобы эти знаки не учитывать, возведем каждое отклонение в квадрат и просуммируем квадраты отклонений по всем узлам:

$$Q = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - F(x_i))^2$$

В качестве погрешности используем

$$R = \sqrt{\sum_{i=1}^n (f(x_i) - F(x_i))^2} \quad (4.17)$$

Обычно при обработке экспериментальных данных, определенных с погрешностью ε , согласуют погрешность исходных данных с погрешностью метода, т.е. $R \approx \varepsilon$.

Тема 5 ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Простейшая задача интерполирования заключается в следующем. На отрезке $[a, b]$ заданы $n + 1$ точки x_0, x_1, \dots, x_n , которые называются узлами интерполяции, и значения некоторой функции $f(x)$ в этих точках

$$f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \dots, f(x_n) = y_n \quad (5.1)$$

Требуется построить функцию $F(x)$ (интерполирующая функция), принимающую в узлах интерполяции те же значения, что и $f(x)$, т. е. такую, что

$$F(x_0) = y_0, F(x_1) = y_1, \dots, F(x_n) = y_n \quad (5.2)$$

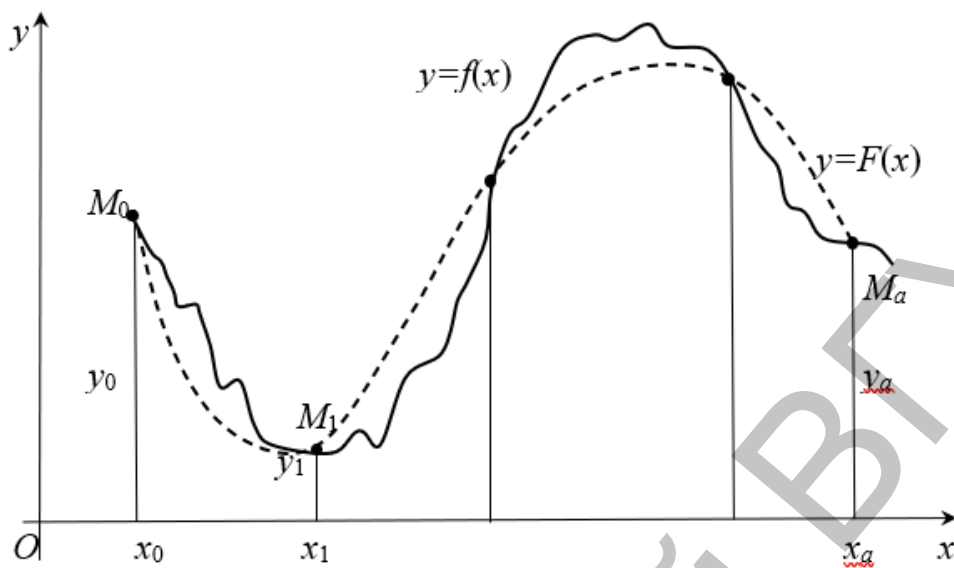


Рис. 5.1. Исходная и интерполирующая кривые.

Геометрически это означает, что нужно найти кривую $y=F(x)$ некоторого определенного типа, проходящую через заданную систему точек $M_i(x_i, y_i), i = 0, 1, 2, \dots$. В такой общей постановке задача может иметь бесчисленное множество решений или совсем не иметь решений. Однако эта задача становится однозначно разрешимой, если вместо произвольной функции $F(x)$ искать полином $P_n(x)$ степени не выше n , удовлетворяющий условиям (5.2), т.е. такой, что

$$\begin{aligned} P_n(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, \\ P_n(x_0) &= y_0, P_n(x_1) = y_1, \dots, P_n(x_n) = y_n \end{aligned} \quad (5.3)$$

Докажем это. Равенства (5.3) представляют собой линейную систему $(n+1)$ алгебраических уравнений вида:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n = y_1 \\ \dots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n = y_n \end{cases}$$

с $(n+1)$ неизвестными a_0, a_1, \dots, a_n . Определителем этой системы является определитель Вандермонда

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} \neq 0,$$

который отличен от нуля, так как узлы x_i -различны. Следовательно, система (5.3) имеет единственное решение при любых правых частях y_i , т.е. коэффициенты интерполяционного многочлена $P_n(x)$ находятся однозначно.

Интерполяционные формулы обычно используют для приближенного вычисления значений данной функции $f(x)$ для значений аргумента x , отличных от узлов интерполирования. Такая операция называется *интерполированием*.

5.1 Интерполяционная формула Лагранжа

Пусть на отрезке $[a, b]$ даны $(n+1)$ значений аргумента x_0, x_1, \dots, x_n и известны для функции $y = f(x)$ соответствующие значения: $f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \dots, f(x_n) = y_n$. Требуется построить полином $L_n(x)$ степени не выше n , имеющий в заданных узлах x_0, x_1, \dots, x_n те же значения, что и функция $f(x)$, т.е. такой, что $L_n(x_i) = y_i, i = \overline{0, n}$.

Решим сначала частную задачу: построим полином $\omega_k(x)$ следующим образом: $\omega_k(x_i) = \delta_{ki} = \begin{cases} 1, & k = i \\ 0, & k \neq i \end{cases}$, где δ_{ki} – символ Кронекера. (5.4)

Так как искомый полином обращается в нуль в n точках

$x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$, то он имеет вид $\omega_k(x) = C_k(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)$, (5.5) где C_k – постоянные коэффициенты.

Полагая $x = x_k$ в формуле (5.5) и учитывая, что $\omega_k(x_k) = 1$, получим $C_k(x_k - x_0)(x_k - x_1)(x_k - x_2) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n) = 1$. Отсюда

$$C_k = \frac{1}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}.$$

Подставив полученное значение C_k в (5.4), будем иметь

$$\omega_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}.$$

Теперь перейдем к решению общей задачи: отысканию полинома $L_n(x)$, удовлетворяющего указанным выше условиям $L_n(x_i) = y_i, i = \overline{0, n}$. Этот полином имеет вид

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \omega_k(x) y_k. \quad (5.6)$$

В самом деле, во-первых, очевидно, что степень построенного полинома $L_n(x)$ не выше n , и, во-вторых, в силу (5.4) имеем:

$$L_n(x_i) = \sum_{k=0}^n \omega_k(x_i) y_k = \omega_i(x_i) y_i = y_i, i = \overline{0, n}.$$

Подставив в (5.6) значения $\omega_k(x)$, получим

$$L(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)} y_k \quad (5.7)$$

Формула (5.7) является *интерполяционной формулой Лагранжа*.

Докажем единственность полинома Лагранжа. Предположим противное. Пусть $\tilde{L}(x)$ – полином отличный от $L(x)$, степени не выше n и такой, что $\tilde{L}(x_i) = y_i$, где $i = \overline{0, n}$. Тогда полином $Q_n(x) = \tilde{L}(x) - L(x)$, степень

которого не выше n , обращается в нуль в $(n+1)$ точках x_0, x_1, \dots, x_n , то есть $Q_n(x) \equiv 0$.

Формуле Лагранжа можно придать более сжатый вид. Для этого введем обозначения $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$. Дифференцируя по x_k это произведение, получим

$$\omega'(x) = \sum_{r=0}^n (x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n).$$

Имея это в виду,

$$L(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)} y_k$$

Рассмотрим два частных случая полинома Лагранжа. При $n = 1$ мы имеем две точки, и формула Лагранжа представляет в этом случае уравнение прямой $y = L_1(x)$, проходящей через две заданные точки

$$y = \frac{x-b}{a-b} y_0 + \frac{x-a}{b-a} y_1,$$

где a и b — абсциссы этих точек.

При $n = 2$ получим уравнение параболы $y = L_2(x)$, проходящей через три точки

$$y = \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} y_0 + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} y_1 + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} y_2,$$

где a, b и c — абсциссы этих точек.

5.2 Схема Эйткена

Рассмотрим удобный способ вычисления интерполяционного вычисления многочлена, который носит название *схема Эйткена*. Обозначим через $E_{i, \dots, i+k}(x)$ многочлен Лагранжа с узлами интерполяции $(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1}), \dots, (x_{i+k}, y_{i+k})$. Тогда справедливо соотношение для вычисления:

$$E_{i, \dots, i+k}(x) = \frac{1}{x_{i+k} - x_i} \cdot \begin{vmatrix} x - x_i & E_{i, \dots, i+k-1}(x) \\ x - x_{i+k} & E_{i+1, \dots, i+k}(x) \end{vmatrix} \quad (5.8)$$

Доказательство проведем по индукции. Не нарушая общности, положим $i = 0, k = n$. Это значит, что многочлены Лагранжа $E_{0, \dots, n-1}(x)$ и $E_{1, \dots, n}(x)$ в правой части (5.8) равны

$$E_{0, \dots, n-1}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \prod_{j=0, j \neq i}^{n-1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \text{ и } E_{0, \dots, n-1}(x) = \sum_{i=1}^n y_i \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$\text{Если обозначить } A_i = \prod_{j=0, j \neq i}^n (x - x_j), \quad T_i = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{(x - x_j)}{x_i - x_j}, \quad X_i =$$

$\prod_{j=1, j \neq i}^{n-1} (x - x_j)$, то очевидно, что

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x_{i+k} - x_i} \cdot \begin{vmatrix} x - x_i & E_{i, \dots, i+k-1}(x) \\ x - x_{i+k} & E_{i+1, \dots, i+k}(x) \end{vmatrix} = \\ & = T_0 + T_n + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \left(\frac{A_i}{X_i(x_i - x_n)(x_n - x_0)} - \frac{A_i}{X_i(x_i - x_0)(x_n - x_0)} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= T_0 + T_n + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \frac{A_i x_n - A_i x_0}{X_i(x_i - x_n)(x_i - x_0)(x_n - x_0)} \\
&= T_0 + T_n + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \frac{A_i}{X_i(x_i - x_n)(x_i - x_0)} = \sum_{i=0}^n T_i
\end{aligned}$$

т.е., итог совпадает с многочленом Лагранжа.

Фактически, вычисление многочлена Эйткена на узловых точках $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ сводится к последовательному вычислению элементов Таблицы 5.1.

Таблица 5.1.

сте- пень	0	1	2	...	n
y_0	$E_0(x)$				
		$E_{0,1}(x)$			
y_1	$E_1(x)$		$E_{0,1,2}(x)$		
		$E_{1,2}(x)$		$E_{0,1,2,3}(x)$	
y_2	$E_2(x)$		$E_{1,2,3}(x)$...	$E_{0,1,\dots,n}(x)$
		$E_{2,3}(x)$...	
...		
		$E_{n-1,n}(x)$			
y_n	$E_n(x)$				

Первый и второй столбцы таблицы совпадают, т.к. многочлен нулевой степени – константа, ордината заданной узловой точки.

Таким образом, схема Эйткена носит рекуррентный характер: каждый многочлен степени $k+1$ строится на двух многочленах степени k . Это позволяет добавлять узловые точки в процессе расчета и дает выигрыш по времени в случае добавления новой узловой точки, если сохранять все расчеты таблицы.

5.3 Оценка погрешности интерполяционной формулы Лагранжа

Для функции $y = f(x)$ мы построим интерполяционный полином Лагранжа $L_n(x)$, принимающий в точках x_0, x_1, \dots, x_n , заданные значения $y_0 = f(x_0), \dots, y_n = f(x_n)$. Возникает вопрос, насколько близкий построенный полином приближается к функции $f(x)$ в других точках, т. е. как велик остаточный член $R_n(x) = f(x) - L(x)$.

Предположим, что при $x \in [a, b]$, содержащем все узлы интерполирования, функция $f(x)$ имеет все производные $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n+1)}(x)$ до $(n+1)$ -ого порядка включительно.

Введем вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - L(x) - C\omega(x) \quad (5.9),$$

где C – постоянный коэффициент, который будет выбран ниже. Очевидно, $F(x)$ имеет $(n+1)$ корень в точках x_0, x_1, \dots, x_n . Подберем коэффициент C так, чтобы $F(x)$ имела $(n+2)$ -ой корень в любой фиксированной точке $\bar{x} \in [a, b]$, не совпадающей с узлами интерполирования. Для этого достаточно положить $f(\bar{x}) - L(\bar{x}) - C\omega(\bar{x}) = 0$. Так как $\omega(\bar{x}) \neq 0$, то $C = \frac{f(\bar{x}) - L(\bar{x})}{\omega(\bar{x})}$. При этом значении C функция $F(x)$ имеет $(n+2)$ корня на отрезке $[a, b]$ и будет обращаться в нуль на концах каждого из отрезков $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_i, \bar{x}], [\bar{x}, x_{i+1}], \dots, [x_{n-1}, x_n]$. Применяя теорему Ролля к каждому из этих отрезков, убеждаемся, что производная $F'(x)$, имеет не менее $(n+1)$ -го корня. Применяя теорему Ролля к производной $F'(x)$, мы убеждаемся, что производная $F''(x)$ имеет n корней на $[a, b]$. Продолжая эти рассуждения, приходим к заключению, что на рассматриваемом отрезке $[a, b]$ производная $F^{(n+1)}(x)$ имеет хотя бы один корень, который обозначим через ξ , т.е. $F^{(n+1)}(\xi) = 0$. Из (5.8), так как $L_n^{(n+1)}(x) = 0$ и $\omega^{(n+1)}(x) = (n+1)!$, имеем:

$$F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - C(n+1)!$$

При $x = \xi$ получаем: $0 = f^{(n+1)}(\xi) - C(n+1)!$.

Отсюда $C = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$, $\xi \in [a, b]$. С другой стороны, $C = \frac{f(\bar{x}) - L_n(\bar{x})}{\omega(\bar{x})}$, т.е.

$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = \frac{f(\bar{x}) - L_n(\bar{x})}{\omega(\bar{x})}$, то есть $f(\bar{x}) - L_n(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega(\bar{x})$. Так как \bar{x} – произвольно, то справедливо

$$R_n(x) = f(x) - L(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega(\bar{x}), \quad x, \xi \in [a, b].$$

Отсюда если известна верхняя граница

$$M_{n+1} = \sup_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|,$$

получим оценку для абсолютной погрешности интерполяционной формулы Лагранжа

$$R_n(x) \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega(x)|, \quad x \in [a, b].$$

В отношении вычислений формула Лагранжа удобна в задаче интерполирования многих функций в одной точке x , т.к. все значения множителей $w_k(x)$ можно вычислить однажды для всех функций. Но формула Лагранжа имеет существенный недостаток. Бывает, что заданное число узлов недостаточно для достижения заданной точности. Тогда к данным узлам добавляют еще один или несколько и выполняют вычисления заново.

5.4 Конечные разности различных порядков. Таблица разностей

Часто интерполирование ведется для функций $y = f(x)$ заданных таблицами $y_i = f(x_i)$ с равностоящими значениями аргумента. В этом случае шаг таблицы $h = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, 1, 2, 3, \dots$ является величиной постоянной. Для таких таблиц построение интерполяционных формул заметно упрощается.

Пусть $y = f(x)$ - заданная функция. Обозначим через $h = \Delta x$ фиксированную величину приращения аргумента. Тогда выражение $\Delta y = \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$ называется *первой конечной разностью*. Аналогично определяются конечные разности высших порядков

$$\Delta^n y = \Delta(\Delta^{n-1} y), n = 2, 3, 4, \dots$$

Конечные разности последовательности $y_i, i = 0, 1, 2, 3, \dots$; определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \Delta y_i &= y_{i+1} - y_i \\ \Delta^2 y_i &= \Delta(\Delta y_{i+1}) = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i \\ &\dots\dots\dots \\ \Delta^n y_i &= \Delta(\Delta^{n-1} y_{i+1}) = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i. \end{aligned}$$

Таблица 5.2.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	
x_2	y_2	Δy_2		
x_3	y_3			
...				
...				
...				

Таблица 5.3.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
x_0	y_0			
		Δy_0		
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$	
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$	
		Δy_2		
x_3	y_3			

Конечные разности любого порядка могут быть представлены через значения функции. Действительно, для разности второго порядка имеем

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = y_{i+2} - y_{i+1} + -y_{i+1} + y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i.$$

Аналогично для разности третьего порядка

$$\Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i = (y_{i+3} - 2y_{i+2} + y_{i+1}) - (y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i) = y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i.$$

С помощью математической индукции можно доказать, что

$$\Delta^k y_i = \Delta y_{i+k} - k y_{i+k-1} + \frac{k(k-1)}{2!} y_{i+k-2} + \dots + (-1)^k y_i.$$

Конечные разности различных порядков удобно располагать в форме таблицы двух видов: *горизонтальной* таблицы разностей (Таблица 5.2) или *диагональной* таблицы разностей (Таблица 5.3).

5.5 Первая интерполяционная формула Ньютона

Пусть для функции $y = f(x)$ заданы значения $y_i = f(x_i)$ $x_i + ih, i = \overline{0, n}$; где h -шаг интерполяции. Требуется подобрать полином $P_n(x)$ степени не выше n , принимающий в точках x_i значения $P_n(x_i) = y_i, i = \overline{0, n}$. Следуя Ньютону, будем искать полином в виде

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}) \quad (5.10)$$

Задача состоит в определении коэффициентов $a_i, i = \overline{0, n}$; полинома $P_n(x)$.

Полагая $x = x_0$ в выражении (5.10), получим

$$P_n(x_0) = y_0 = a_0.$$

Пусть $x = x_1$ тогда

$$P_n(x_1) = y_1 = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = y_0 + a_1(x_1 - x_0).$$

А отсюда следует, что $a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y_0}{h}$.

Положим $x = x_2$, тогда

$$P_n(x_2) = y_2 = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h} 2h + a_2 2h^2.$$

Таким образом, получим, что

$$a_2 = \frac{y_2 - y_0 - 2y_0}{2h^2} = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h^2} = \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}.$$

Последовательно продолжая этот процесс, мы обнаружим, что $a_k = \frac{\Delta^k y_0}{k! h^k}$,

$k = \overline{0, n}$. Заметим, что $0! = 1$ и $\Delta^0 y = y$. Подставляя найденные коэффициенты a_i в выражение (5.10), получим *интерполяционный полином Ньютона*

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1! h} (x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2} (x - x_0)(x - x_1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \quad (5.11)$$

Легко видеть, что построенный полином полностью удовлетворяет поставленным требованиям. Его степень не выше n и

$$P_n(x_0) = y_0,$$

$$P_n(x_1) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h} (x_1 - x_0) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h} h = y_1,$$

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h} (x_2 - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2} (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h} 2h + \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h^2} 2h^2 = y_2$$

и так далее.

Можно показать, что $P_k(x_k) = y_k$, $k = \overline{1, n}$.

Для практического использования интерполяционную формулу Ньютона (5.11) обычно записывают в несколько преобразованном виде. Для этого введем новую переменную $q = \frac{x - x_0}{h}$, тогда

$$\begin{aligned} x &= x_0 + qh, \\ \frac{x - x_1}{h} &= \frac{x_0 + qh - x_0 - h}{h} = q - 1, \\ \frac{x - x_2}{h} &= \frac{x_0 + qh - x_0 - 2h}{h} = q - 2, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{x - x_{n-1}}{h} &= q - n + 1. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в формулу (5.11), получим

$$P_n(x) = y_0 \Delta y + \frac{q(q-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!} \Delta^3 y_0 + \dots$$

$$\dots + \frac{q(q-1)(q-2)\dots(q-n+1)}{n!} \Delta^n y_0 \quad (5.12)$$

Формула (5.11) и есть окончательный вид первой интерполяционной формулы Ньютона. Эту формулу выгодно использовать для интерполирования функции $y = f(x)$ в окрестности начального значения $x = x_0$, где q мало по абсолютной величине.

Если положить $n = 1$, то получим формулу линейного интерполирования $P_1(x) = y_0 + q\Delta y_0$. При $n = 2$ будем иметь формулу параболического или квадратичного интерполирования $P_2(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2} \Delta^2 y_0$.

Замечание 5.1. Если дана неограниченная таблица значений функции $y = f(x)$, то число n в интерполяционной формуле Ньютона (5.12) может быть любым. Практически число n в этом случае выбирают так, чтобы разность $\Delta^n y_i$ была постоянной с заданной степенью точности. За начальное значение x_0 можно принимать любое табличное значение аргумента x . Если таблица значений конечна, то число n ограничено, а именно: n не может быть больше числа значений функции y , уменьшенного на 1.

Замечание 5.2. При применении первой интерполяционной формулы Ньютона удобно пользоваться горизонтальной таблицы разностей, так как тогда нужные значения разностей функции находятся в соответствующей горизонтальной строке таблицы.

5.6 Вторая интерполяционная формула Ньютона

Первая интерполяционная формула Ньютона практически неудобна для интерполирования вблизи конца таблицы. В этом случае обычно применяется вторая интерполяционная формула Ньютона.

Пусть имеем систему значений функции $y_i = y(x_i)$, $i = \overline{0, n}$; для равноотстоящих значений аргумента $x_i = x_0 + ih$. Построим интерполяционный полином следующего вида:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + a_3(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) + \dots + a_n(x - x_n)(x - x_{n-1})\dots(x - x_1) \quad (5.13)$$

Наша задача состоит в определении коэффициентов a_i , $i = \overline{0, n}$ таким образом, чтобы были выполнены равенства

$$P_n(x_i) = y_i, \quad i = \overline{0, n}.$$

Положим $x = x_n$ в формуле (5.12). Тогда будем иметь

$$P_n(x) = y_n = a_0,$$

следовательно, $a_0 = y_n$. Затем полагаем $x = x_{n-1}$, имеем

$$P_n(x_{n-1}) = y_{n-1} = a_0 + a_1(x_{n-1} - x_n) = a_0 - ha_1 = y_n - ha_1,$$

откуда $a_1 = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = \frac{\Delta y_{n-1}}{h}$.

При $x = x_{n-2}$ получаем

$$P_n(x_{n-2}) = y_{n-2} = a_0 + a_1(x_{n-1} - x_n) + a_2(x_{n-2} - x_n)(x_{n-2} - x_{n-1}) = y_n - \frac{\Delta y_{n-1}}{h} 2h + a_2(-2h)h,$$

таким образом

$$a_0 = \frac{y_{n-2} - y_n + 2y_{n-2}y_{n-1}}{2h^2} = \frac{y_{n-2}y_{n-1} + y_{n-2}}{2h^2} = \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2h^2}.$$

Последовательно продолжая этот процесс, мы получим, что

$$a_i = \frac{\Delta^i y_{n-i}}{i! h^i}, \quad i = \overline{0, n}.$$

Подставляя эти значения в формулу (5.13), окончательно будем иметь:

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1! h} (x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2! h^2} (x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots \\ \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n} (x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1) \quad (5.14)$$

Формула (5.14) носит название *второй интерполяционной формулы Ньютона*.

Введем более удобную запись полученной формулы. Пусть $q = \frac{x - x_n}{h}$, тогда

$$\frac{x - x_{n-1}}{h} = \frac{x - x_n + h}{h} = q + 1 \\ \frac{x - x_{n-2}}{h} = \frac{x - x_n + 2h}{h} = q + 2$$

и так далее.

Подставим эти значения в формулу (5.14), получим

$$P_n(x) = y_n + q \frac{\Delta y_{n-1}}{1!} q(q+1) \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!} q(q+1)(q+2) \frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3!} \\ \dots + q(q+1) \dots (q+n-1) \frac{\Delta^n y_0}{n!} \quad (5.15)$$

Формула (5.15) и есть обычный вид *второй интерполяционной формулы Ньютона*.

5.7 Оценки погрешностей интерполяционных формул Ньютона

Если узлы интерполирования x_0, x_1, \dots, x_n – равноотстоящие, причем

$$x_{i+1} - x_i = h, \quad i = \overline{0, n-1};$$

то, полагая $q = \frac{x - x_0}{h}$, на основании оценки остаточного члена интерполяционной формулы Лагранжа, получим *остаточный член первой интерполяционной формулы Ньютона*

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} \omega(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1} q(q-1) \dots (q-n),$$

где ξ – некоторое промежуточное значение между узлами интерполирования x_0, x_1, \dots, x_n и рассматриваемой точкой x .

Аналогично, полагая $q = \frac{x - x_n}{h}$, получим *остаточный член второй интерполяционной формулы Ньютона*

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} \omega(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1} q(q+1) \dots (q+n),$$

где ξ – некоторое промежуточное значение между узлами интерполирования x_0, x_1, \dots, x_n и рассматриваемой точкой x .

Обычно при практических вычислениях интерполяционная формула Ньютона обрывается на членах, содержащих такие разности, которые в пределах заданной точности можно считать постоянными.

Предполагая, что $\Delta^{n+1}y$ почти постоянны для функции $y = f(x)$ и h – достаточно мало, и учитывая, что

$$f^{n+1}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta^{n+1}y_0}{h^{n+1}},$$

приближенно можно положить

$$f^{n+1}(\xi) = \frac{\Delta^{n+1}y_0}{h^{n+1}}.$$

В этом случае *остаточный член первой интерполяционной формулы Ньютона* приближенно равен

$$R_n(x) \approx \frac{q(q-1)\dots(q-n)}{(n+1)!} \Delta^{n+1}y_0.$$

В этих же условиях для остаточного члена *второй интерполяционной формулы Ньютона* получаем выражение

$$R_n(x) \approx \frac{q(q+1)\dots(q+n)}{(n+1)!} \Delta^{n+1}y_0.$$

Замечание 5.3. Если максимальные разности практически постоянны, то результат интерполирования обыкновенно имеет столько верных десятичных знаков, сколько их есть в табличных данных, и поэтому оценка погрешности не обязательна. При пользовании интерполяционной формулой Лагранжа нет возможности следить за ходом конечных разностей, и поэтому следует, если это возможно, оценивать остаточный член.

Тема 6

ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

К численному (приближенному) дифференцированию чаще всего прибегают, когда приходится вычислять производные от функций, заданных таблично, или, когда непосредственное дифференцирование затруднительно.

6.1 Вычисление производных по двум/трем точкам

Как известно, производная аналитически заданной функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ определяется следующим образом:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad (6.1)$$

при этом функция $f(x)$ должна быть непрерывна в окрестности точки a .

Эта хорошо известная из математического анализа формула может быть использована для получения простейшего приближения числового значения производной в точке a . Аппроксимируем производную – заменим предел приближенным значением:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (6.2)$$

Применительно к любой точке x_0 вычисление по формуле (6.2) возможно, если известно значение функции в двух точках: самой точке x_0 и еще одной, $x_0 - \Delta x$ или $x_0 + \Delta x$. Таким образом, имеют место две аппроксимации:

$$\text{левосторонняя} \quad f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} \quad (6.3)$$

$$\text{правосторонняя} \quad f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (6.4)$$

Если рассматривать таблично заданную функцию, то для ее крайнего левого узла возможна аппроксимация (6.4), крайнего правого – (6.3). Комбинируя эти формулы для равноотстоящих трех узлов табличной функции, получим *центрально-разностную* аппроксимацию

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (6.5)$$

Из трех формул аппроксимации производной лучший результат дает последняя – центральная. Применяя разложение в ряд Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} \cdot f''(x_0) + o((x - x_0)^3)$$

в точках x_0 и $x_0 + \Delta x$, можно заключить, что (6.3) и (6.4) формулы имеют *первый* порядок, а (6.5) – *второй* порядок точности относительно Δx .

Действуя аналогично (6.5), можно получить аппроксимации старших производных. Например, для второй производной симметричная *центрально-разностная* аппроксимация получается на трех узлах:

$$\begin{aligned} f''(x_0) &\approx \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} = \\ &= \frac{1}{2\Delta x} \left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} \right) \\ f''(x_0) &\approx \frac{1}{2\Delta x^2} (f(x_0 + \Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - \Delta x)) \end{aligned} \quad (6.6)$$

Формула (6.6) неприменима для крайних узлов. В этом случае надо брать иную аппроксимацию первой производной, например для крайней левой точки:

$$\begin{aligned} f''(x_0) &\approx \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x} = \\ &= \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{f(x_0 + 2\Delta x) - f(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} - \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right) = \\ &= \frac{1}{\Delta x^2} (f(x_0 + 2\Delta x) - 2f(x_0 + \Delta x) + f(x_0)) \end{aligned}$$

и аналогично для крайней правой точки:

$$f''(x_0) \approx \frac{1}{\Delta x^2} (f(x_0) - 2f(x_0 - \Delta x) + f(x_0 - 2\Delta x)).$$

Подобные формулы используются для простейшего вычисления значений производных в отдельных точках, в том числе крайних.

6.2 Численное дифференцирование на основе интерполяционных многочленов

Для вывода формул численного дифференцирования заменяют функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[a; b]$ интерполирующей функцией $P(x)$ (чаще всего полиномом), а затем полагают

$$f'(x) = P'(x) \text{ при } x \in [a; b].$$

Аналогично поступают при нахождении производных высших порядков функции $f(x)$.

Если для интерполирующей функции $P(x)$ известна погрешность

$$R(x) = f(x) - P(x),$$

то погрешность производной $P'(x)$ выражается формулой

$$r(x) = f'(x) - P'(x) = R'(x),$$

т.е. погрешность производной интерполирующей функции равна производной от погрешности этой функции. То же самое справедливо и для производных высших порядков.

Замечание 6.1. Вообще говоря, численное дифференцирование представляет собой операцию менее точную, чем интерполирование. Действительно, близость друг другу ординат двух кривых $y = f(x)$ и $y = P(x)$ на отрезке $[a; b]$ еще не гарантирует близости на этом отрезке их производных $f'(x)$ и $P'(x)$, т.е. малого расхождения угловых коэффициентов касательных к рассматриваемым кривым при одинаковых значениях аргумента (Рис. 6.1).

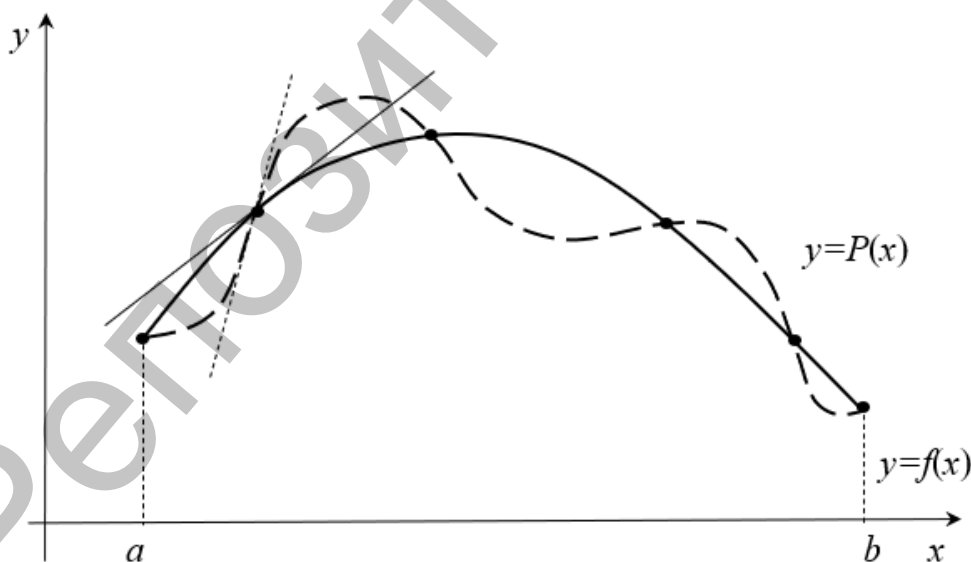


Рис. 6.1. Иллюстрация к Замечанию 6.1.

6.2.1 Формулы численного дифференцирования, основанные на первой интерполяционной формуле Ньютона

Пусть имеем функцию $y = f(x)$, заданную в равноотстоящих точках $x_i, i = \overline{0, n}$; отрезка $[a; b]$ с помощью значений $y_i = f(x_i), i = \overline{0, n}$. Для нахождения на $[a; b]$ производных $y' = f'(x), y'' = f''(x)$ и т.д. функцию y приближенно заменим интерполяционным полиномом Ньютона, построенным для узлов $x_i, i = \overline{0, k}; k \leq n$;

$$y(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{4!}\Delta^4 y_0 + \dots$$

$$q = \frac{x-x_0}{h}, x_{i+1} - x_i = h, i = 0, 1, 2, \dots$$

Преобразуя данный полином, получим

$$y(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q^3-3q^2+2q}{6}\Delta^3 y_0 + \frac{q^3-3q^2+2q}{6}\Delta^3 y_0 + \frac{q^4-6q^3+11q^2-6q}{24}\Delta^4 y_0 + \dots$$

Так как

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dq} \cdot \frac{dq}{dx} = \frac{1}{h} \cdot \frac{dy}{dq},$$

то

$$y'(x) = \frac{1}{h} (\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3q^2-6q+2}{6}\Delta^3 y_0 + \frac{2q^3-9q^2+11q-3}{12}\Delta^4 y_0 + \dots).$$

Аналогично, так как

$$y''(x) = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d(y')}{dq} \cdot \frac{dq}{dx} = \frac{1}{h} \cdot \frac{d(y')}{dq},$$

то

$$y''(x) = \frac{1}{h^2} (\Delta^2 y_0 + (q-1)\Delta^3 y_0 + \frac{6q^2-18q+11}{12}\Delta^4 y_0 + \dots).$$

Таким же способом в случае надобности можно вычислить и производные функции $y(x)$ любого порядка.

Замечание 6.2. При нахождении производных $y'(x), y''(x), \dots$ в фиксированной точке x в качестве x_0 следует выбирать ближайшее табличное значение аргумента.

Замечание 6.3. Формулы численного дифференцирования значительно упрощаются, если исходным значением x оказывается один из узлов таблицы. Так как в этом случае каждое табличное значение можно считать за начальное, то положим $x = x_0, q = 0$. Тогда будем иметь

$$y'(x_0) = \frac{1}{h} (\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} \Delta^3 y_0 - \frac{\Delta^4 y_0}{4} \Delta^4 y_0 + \dots),$$

$$y''(x) = \frac{1}{h^2} (\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12} \Delta^4 y_0 - \dots).$$

Замечание 3. При вычислениях на компьютере производные выражают не через конечные разности, а непосредственно через значения функции.

Если $P_n(x)$ – интерполяционный полином Ньютона, содержащий разности $\Delta y_0, \Delta^2 y_0, \dots, \Delta^n y_0$ и $R_n(x) = y(x) - P_n(x)$ – соответствующая погрешность, то погрешность в определении производной есть

$$R'_n(x) = y'(x) - P'_n(x).$$

Как это было получено выше,

$$R_n(x) = h^{n+1} \frac{q(q-1)\dots(q-n)}{(n+1)!} y^{n+1}(\xi),$$

где ξ – некоторое промежуточное число между значениями x_0, x_1, \dots, x_n . Поэтому, предполагая, что $y(x) \in C^{n+2}[a, b]$, получим

$$R'_n(x) = \frac{dR_n(x)}{dq} \cdot \frac{dq}{dx} = \frac{h^n}{(n+1)!} \left\{ y^{(n+1)}(\xi) \frac{d}{dq} [q(q-1)\dots(q-n)] + q(q-1)\dots(q-n) \frac{d}{dq} [y^{(n+1)}(\xi)] \right\}.$$

Для оценки погрешности в узле таблицы при $x = x_0, q = 0$, имея в виду, что

$$\frac{d}{dq} [q(q-1)\dots(q-n)]_{q=0} = (-1)^n n!,$$

получим выражение

$$R'_n(x_0) = (-1)^n \frac{h^n}{n+1} y^{(n+1)}(\xi).$$

Так как $y^{(n+1)}(\xi)$ во многих случаях трудно оценить, то при достаточно малом h приближенно полагают

$$y^{(n+1)}(\xi) \approx \frac{\Delta^{n+1} y_0}{h^{n+1}}.$$

Тогда

$$R'_n(x_0) \approx (-1)^n \frac{\Delta^{n+1} y_0}{h(n+1)}.$$

Аналогично можно найти погрешность $R''_n(x_0)$ для второй производной $y''(x_0)$.

6.2.2 Численное дифференцирование для равноотстоящих точек на основе интерполяционной формулы Лагранжа

Пусть x_0, x_1, \dots, x_n – равноотстоящие узлы, т.е. $x_{i+1} - x_i = h, i = \overline{0, n-1}$; и пусть для функции $y = y(x)$ известны значения $y_i = y(x_i), i = \overline{0, n}$. Для данной системы узлов построим интерполяционный многочлен Лагранжа

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{\omega(x)}{(x-x_i)\omega'(x_i)} y_i,$$

где

$$\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n),$$

$$\omega'(x_i) = (x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n).$$

Тогда $L_n(x_i) = y_i, i = \overline{0, n}$.

Полагая $q = \frac{x-x_0}{h}$, получим

$$\omega(x) = h^{n+1} q(q-1)(q-2)\dots(q-n),$$

$$\omega'(x_i) = h^n i(i-1)\dots 1(-1)\dots(-(n-i)) = (-1)^{n-i} h^n i! (n-i)!$$

$$x - x_i = h(q - i).$$

Следовательно, для полинома Лагранжа имеем выражение

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i} y_i}{i!(n-i)!} \cdot \frac{q(q-1)\dots(q-n)}{q-i}.$$

Отсюда, учитывая, что $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dq} \cdot \frac{dq}{dx} = \frac{1}{h} \cdot \frac{dy}{dq}$, получаем

$$y'(x) \approx L'_n(x) = \frac{1}{h} \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i} y_i}{i!(n-i)!} \cdot \frac{d}{dq} \left[\frac{q(q-1)\dots(q-n)}{q-i} \right].$$

Аналогично могут быть найдены производные высших порядков данной функции $y(x)$.

Для оценки погрешности

$$r_n(x) = R'_n(x) = y'(x) - L'_n(x)$$

воспользуемся известной формулой погрешности полинома Лагранжа

$$R_n(x) = y(x) - L_n(x) = \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega(x),$$

где ξ – промежуточное значение между точками x_0, x_1, \dots, x_n, x . Предполагая, что $y(x) \in C^2[a, b]$, выводим

$$r_n(x) = R'_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} \left\{ y^{(n+1)}(\xi) \cdot \omega'(x) + \omega(x) \cdot \frac{d}{dx} [y^{(n+1)}(\xi)] \right\}.$$

Предполагая, что $\frac{d}{dx} [y^{(n+1)}(\xi)]$ – ограничена, и, учитывая выкладки выше, получим погрешность производной в узлах (заметим, что здесь $q = 0$, вернее $\omega(x_i)$)

$$r_n(x_i) = R'_n(x_i) = \frac{(-1)^{n-i} i!(n-i)! h^n}{(n+1)!} \cdot y^{(n+1)}(\xi),$$

где ξ – промежуточное значение между x_0, x_1, \dots, x_n .

Тема 7 ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и известна ее первообразная $F(x)$, то определенный интеграл от этой функции в пределах от a до b может быть вычислен по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (7.1)$$

где $F'(x) = f(x)$.

Однако во многих случаях функция $F(x)$ не может быть найдена с помощью элементарных средств или является слишком сложной, вследствие этого вычисление определенного интеграла по формуле (7.1) может быть практически невыполнимым. Кроме того, на практике подынтегральная функция $f(x)$ часто задается таблично и тогда само понятие первообразной теряет смысл. Поэтому особое значение приобретают численные (приближенные) методы вычисления определенных интегралов.

Задача численного интегрирования функции заключается в вычислении значения определенного интеграла на основании ряда значений подынтегральной функции.

Наиболее часто приближенное значение интеграла ищут в виде линейной комбинации значений функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \quad (7.2)$$

Приближенное равенство (7.2) называют квадратурной формулой, определяемой узлами x_k и коэффициентами A_k . Выражение в правой части (7.2) называют квадратурной суммой, а разность

$$R_n(f) = \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$$

– остаточным членом, или остатком, квадратурной формулы.

7.1 Квадратурные формулы Ньютона-Котеса

Пусть для данной функции $y = f(x)$ требуется вычислить интеграл $\int_a^b y dx$. Выбрав шаг $h = \frac{b-a}{n}$, разобьем отрезок $[a, b]$ с помощью равноотстоящих точек $x_0 = a, x_i = x_0 + ih, i = \overline{1, n-1}; x_n = b$ на n равных частей, и пусть $y_i = f(x_i), i = \overline{0, n}$. Заменяя функцию y соответствующим интерполяционным полиномом Лагранжа $L_n(x)$, получим приближенную квадратурную формулу

$$\int_{x_0}^{x_n} y dx \approx \sum_{i=0}^n A_i y_i, \quad (7.3)$$

где A_i – некоторые постоянные коэффициенты. Выведем явные выражения для коэффициентов A_i . Для этого вспомним некоторые формулы из предыдущих лекций.

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{\omega(x)}{(x - x_i)\omega'(x_i)} y_i,$$

где $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$, причем $L_n(x_i) = y_i, i = \overline{0, n}$. Введя новую переменную $q = \frac{x-x_0}{h}$, получим

$$\begin{aligned} \omega(x) &= h^{n+1} q(q-1)(q-2) \dots (q-n), \\ \omega'(x_i) &= h^n i(i-1) \dots 1(-1) \dots (-(n-i)) \\ &= (-1)^{n-i} h^n i! (n-i)! \\ x - x_i &= h(q-i), \end{aligned}$$

Тогда полином Лагранжа можно переписать в виде

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i} y_i}{i!(n-i)!} \cdot \frac{q(q-1) \dots (q-n)}{q-i} \quad (7.4)$$

Заменяя в (7.3) функцию y полиномом Лагранжа в виде (7.4), учитывая сделанные выше выкладки, имеем

$$A_i = \int_{x_0}^{x_n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \cdot \frac{q(q-1) \dots (q-n)}{q-i} dx,$$

или, переходя к новой переменной $q = \frac{x-x_0}{h}$, $dq = \frac{1}{h} dx$ и заменяя пределы интегрирования, получим выражение

$$A_i = h \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \frac{q(q-1)\dots(q-n)}{q-i} dx, \quad i = \overline{0, n}.$$

Так как $h = \frac{b-a}{n}$, то обычно полагают

$$A_i = (b-a)H_i,$$

где

$$H_i = \frac{1}{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \frac{q(q-1)\dots(q-n)}{q-i} dq, \quad i = \overline{0, n}; \quad (7.5)$$

– постоянные, называемые *коэффициентами Ньютона-Котеса*.

Квадратурная формула (7.3) при этом принимает вид

$$\int_a^b y dx = (b-a) \sum_{i=0}^n H_i y_i, \quad (7.6)$$

где $h = \frac{b-a}{n}$, $y_i = f(a + ih)$, $i = \overline{0, n}$.

Формулы (7.6) – квадратурные формулы Ньютона-Котеса, дающие на одном участке интегрирования различные представления для различного числа n отрезков разбиения.

7.2 Формула трапеций и ее остаточный член.

Общая формула трапеций (правило трапеций)

Из формулы (7.5) при $n = 1$ имеем

$$H_0 = - \int_0^1 \frac{q(q-1)}{q} dq = \frac{1}{2},$$

$$H_1 = - \int_0^1 q dq = \frac{1}{2},$$

отсюда

$$\int_{x_0}^{x_1} y dx = \frac{h}{2} (y_0 + y_1).$$

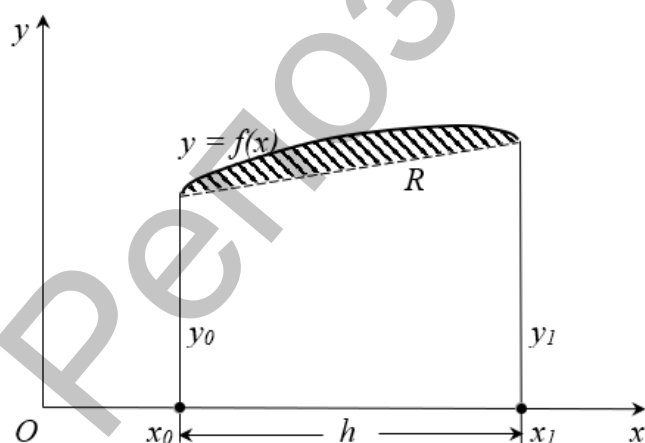


Рис. 7.1. Погрешность формулы трапеций.

Мы получим известную *формулу трапеций* для приближенного вычисления интеграла (Рис. 7.1). Остаточный член квадратурной формулы (7.3) равен $R = \int_{x_0}^{x_1} y dx - \frac{h}{2} (y_0 + y_1)$. Предполагая, что $y \in C^2[a, b]$, выведем простую формулу для остаточного члена. Будем рассматривать $R = R(h)$ как функцию шага h , тогда можно положить

$$R(h) = \int_{x_0}^{x_0+h} y dx - \frac{h}{2} [y(x_0) + y(x_0 + h)].$$

Дифференцируя эту формулу по h последовательно два раза, получим

$$\begin{aligned} R'(h) &= y(x_0 + h) - \frac{1}{2}[y(x_0) + y(x_0 + h)] - \frac{h}{2}y'(x_0 + h) \\ &= \frac{1}{2}[y(x_0 + h) - y(x_0)] - \frac{h}{2}y'(x_0 + h) \end{aligned}$$

и

$$R''(h) = \frac{1}{2}y'(x_0 + h) - \frac{1}{2}y'(x_0 + h) - \frac{h}{2}y''(x_0 + h) = -\frac{h}{2}y''(x_0 + h),$$

причем $R(0) = 0$ и $R'(0) = 0$.

Отсюда, интегрируя по h и используя теорему о среднем, последовательно выводим

$$R'(h) = R'(0) + \int_0^h R''(t)dt = -\frac{1}{2} \int_0^h ty''(x_0 + t)dt = -\frac{1}{2}y''(\xi_1),$$

где $\xi_1 \in [x_0, x_0 + h]$, и

$$\begin{aligned} R(h) &= R(0) + \int_0^h R'(t)dt = -\frac{1}{4} \int_0^h t^2 y''(\xi_1) dt = \\ &= -\frac{1}{4}y''(\xi) \int_0^h t^2 dt = -\frac{h^3}{12}y''(\xi), \end{aligned}$$

где $\xi_1 \in [x_0, x_0 + h]$.

Таким образом, окончательно имеем

$$R = -\frac{h^3}{12}y''(\xi), \quad (7.7)$$

где $\xi_1 \in [x_0, x_0 + h]$.

Отсюда, в частности следует, если $y'' > 0$, то формула трапеций дает значение интеграла с избытком, если же $y'' < 0$ - то с недостатком.

Для вычисления интеграла $\int_a^b y dx$ разделим отрезок интегрирования на n равных частей $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ и к каждому применим формулу трапеций. Полагая $h = \frac{b-a}{n}$ и обозначая через $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$; значения подынтегральной функции в точках x_i , будем иметь

$$\int_a^b y dx = \frac{h}{2}(y_0 + y_1) + \frac{h}{2}(y_1 + y_2) + \dots + \frac{h}{2}(y_{n-1} + y_n)$$

или

$$\int_a^b y dx = h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right). \quad (7.8)$$

Геометрически формула (7.8) получается в результате замены кривой $y = f(x)$ ломаной линией (Рис. 7.2).

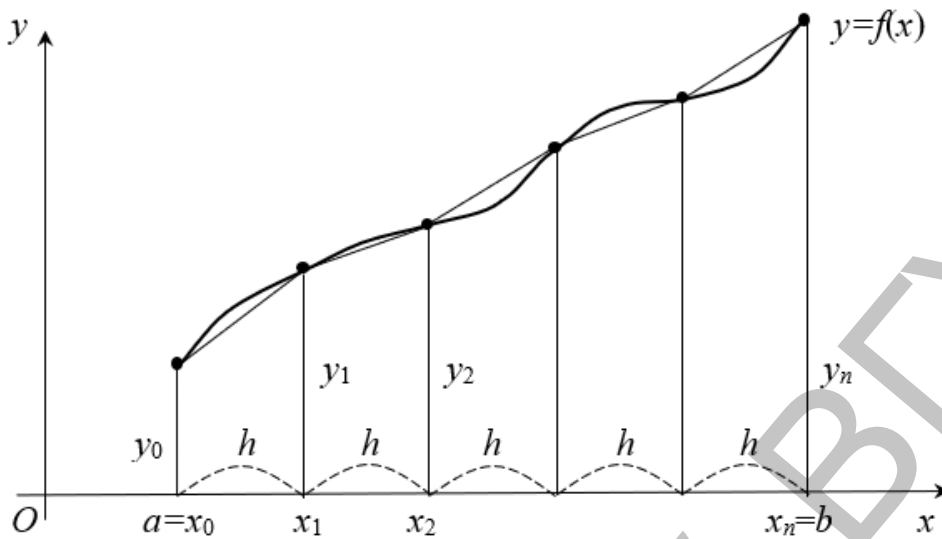


Рис. 7.2. Метод трапеций.

Если $y \in C^2[a, b]$, то остаточный член квадратурной формулы (7.8) в силу (7.7) равен

$$\begin{aligned}
 R &= \int_{x_0}^{x_n} y dx - \frac{h}{2} \sum_{i=1}^n (y_{i-1} + y_i) \\
 &= \sum_{i=1}^n \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} y dx - \frac{h}{2} (y_{i-1} + y_i) \right] = -\frac{h^3}{12} \sum_{i=1}^n y''(\xi_i), \quad (7.9)
 \end{aligned}$$

где $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Рассмотрим среднее арифметическое

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y''(\xi_i) \quad (7.10)$$

Известно, что μ заключается между наименьшим m и наибольшим M значениями второй производной y'' на отрезке $[a, b]$, т. е. $m \leq \mu \leq M$. Так как y'' интегрирована на отрезке $[a, b]$, то в качестве своих значений на $[a, b]$ она принимает все промежуточные числа между m и M . Следовательно, найдется точка $\xi \in [a, b]$ такая, что $\mu = y''(\xi)$.

Из формул (7.9) и (7.10) имеем:

$$R = -\frac{nh^3}{12} y''(\xi) = -\frac{(b-a)h^2}{12} y''(\xi), \quad (7.11)$$

где $\xi \in [a, b]$.

7.3 Формула Симпсона и ее остаточный член.

Общая формула Симпсона (параболическая формула)

Из формулы (7.5) при $n = 2$ получаем:

$$H_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{q(q-1)(q-2)}{q} dq = \frac{1}{6},$$

$$H_1 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} \int_0^2 \frac{q(q-1)(q-2)}{q-1} dq = \frac{2}{3},$$

$$H_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{q(q-1)(q-2)}{q-2} dq = \frac{1}{6}.$$

Следовательно, так как $x_2 - x_0 = 2h$, имеем

$$\int_{x_0}^{x_2} y dx = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2)$$

– полученная формула носит название *формулы Симпсона*.

Геометрически эта формула получается в результате замены данной кривой $y = f(x)$ параболой $y = L_2(x)$, проходящей через три точки $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ (Рис. 7.3).

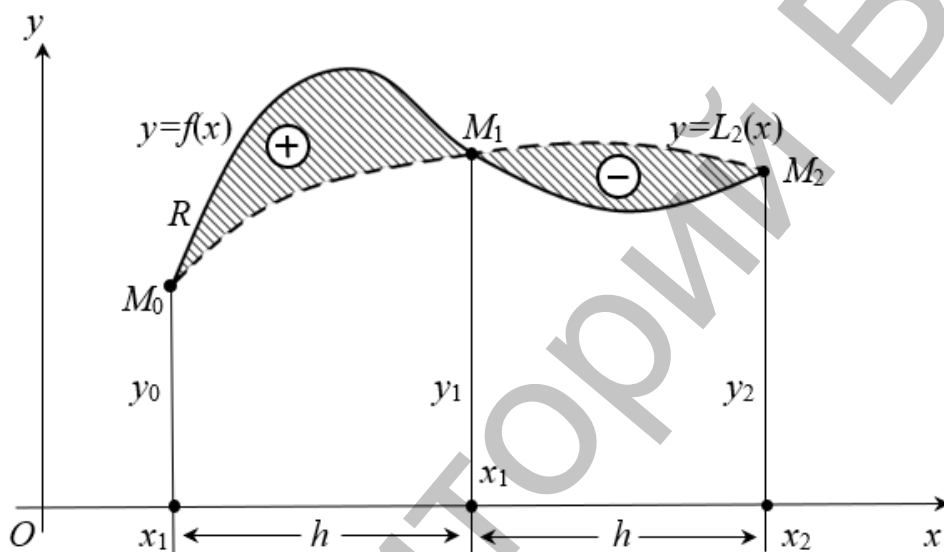


Рис. 7.3. Погрешность формулы Симпсона.

Остаточный член формулы Симпсона равен

$$R = \int_{x_0}^{x_2} y dx - \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Предполагая, что $y \in C^n[a, b]$, аналогично тому, как это делалось для формулы трапеций, выведя более простое выражение для R . Фиксируя среднюю точку x_i и рассматривая $R = R(h)$, как функцию шага $h (h \geq 0)$, будем иметь

$$R = \int_{x_1-h}^{x_1+h} y dx - \frac{h}{3} [y(x_1-h) + 4y(x_1) + y(x_1+h)].$$

Отсюда, дифференцируя функцию $R(h)$ по h последовательно три раза, получим:

$$R'(h) = [y(x_1+h) + y(x_1-h)] - \frac{1}{3} [y(x_1-h) + 4y(x_1) + y(x_1+h)] -$$

$$\frac{h}{3} [-y'(x_1-h) + y'(x_1+h)] = \frac{2}{3} [y(x_1-h) + y(x_1+h)] - \frac{4}{3} y(x_1) -$$

$$\frac{h}{3} [-y'(x_1-h) + y'(x_1+h)],$$

$$R''(h) = \frac{2}{3}[-y'(x_1 - h) + y'(x_1 + h)] - \frac{1}{3}[-y'(x_1 - h) + y'(x_1 + h)] - \frac{h}{3}[y''(x_1 - h) + y''(x_1 + h)] = \frac{1}{3}[-y'(x_1 - h) + y'(x_1 + h)] - \frac{h}{3}[y''(x_1 - h) + y''(x_1 + h)],$$

$$R'''(h) = \frac{1}{3}[y''(x_1 - h) + y''(x_1 + h)] - \frac{1}{3}[y''(x_1 - h) + y''(x_1 + h)] - \frac{h}{3}[y'''(x_1 + h) - y'''(x_1 - h)] = -\frac{h}{3}[y'''(x_1 + h) - y'''(x_1 - h)] = -\frac{2}{3}h^2 y^{IV}(\xi),$$

где $\xi \in [x_1 - h, x_1 + h]$.

Кроме того, очевидно, что $R(0) = 0$, $R'(0) = 0$, $R''(0) = 0$. Последовательно интегрируя $R'''(h)$ и используя теорему о среднем, находим

$$R''(h) = R''(0) + \int_0^h R'''(t) dt = -\frac{2}{3} \int_0^h t^2 y^{IV}(\xi) dt = -\frac{2}{3} y^{IV}(\xi) \int_0^h t^2 dt = -\frac{2}{9} h^3 y^{IV}(\xi),$$

где $\xi \in [x_1 - h, x_1 + h]$.

$$R'(h) = R'(0) + \int_0^h R''(t) dt = -\frac{2}{9} \int_0^h t^3 y^{IV}(\xi) dt = -\frac{2}{9} y^{IV}(\xi) \int_0^h t^3 dt = -\frac{2}{18} h^4 y^{IV}(\xi),$$

где $\xi \in [x_1 - h, x_1 + h]$.

$$R(h) = R(0) + \int_0^h R'(t) dt = -\frac{1}{18} \int_0^h t^4 y^{IV}(\xi) dt = -\frac{1}{18} y^{IV}(\xi) \int_0^h t^4 dt = -\frac{1}{90} h^5 y^{IV}(\xi),$$

где $\xi \in [x_1 - h, x_1 + h]$.

Таким образом, *остаточный член формулы Симпсона равен*

$$R = -\frac{h^5}{90} y^{IV}(\xi), \quad \xi \in (x_0, x_2).$$

Очевидно, что формула Симпсона является точной для полиномов не только второй, но и третьей степени.

Пусть $n = 2m$ есть четное число и $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$ – значения функции $y = f(x)$ для равноотстоящих точек $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$ с шагом $h = \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{2m}$.

Применяя формулу Симпсона к каждому удвоенному промежутку $[x_0, x_2], [x_2, x_4], \dots, [x_{2m-2}, x_{2m}]$ длины $2h$ будем иметь:

$$\int_a^b y dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \dots + \frac{h}{3}(y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}).$$

Отсюда получаем *общую формулу Симпсона*

$$\int_a^b y dx = \frac{h}{3}[(y_0 + y_{2m}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2})].$$

Если $y \in C^{(4)}[a, b]$, то ошибка формулы Симпсона на каждом промежутке $[x_{2k-2}, x_{2k}]$; $k = \overline{1, m}$ дается формулой

$$r_k = -\frac{h^5}{90} y^{IV}(\xi_k), \quad \xi_k \in [x_{2k-2}, x_{2k}].$$

Суммируя все эти ошибки, получим *остаточный член общей формулы Симпсона в виде*

$$R = -\frac{h^5}{90} \sum_{k=1}^m y^{IV}(\xi_k).$$

Так как $y^{IV}(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то найдется точка $\xi \in [a, b]$ такая, что

$$y^{IV}(\xi) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m y^{IV}(\xi_k), \quad \xi \in [a, b].$$

Поэтому будем иметь

$$R = -\frac{mh^5}{90} y^{IV}(\xi) = -\frac{(b-a)h^4}{180} y^{IV}(\xi), \quad (7.12)$$

где $\xi \in [a, b]$.

7.4 Об оценке точности квадратурных формул

Как следует из оценочных формул (7.11) и (7.12) оценка погрешности метода интегрирования по формулам трапеций и Симпсона возможна лишь тогда, когда подынтегральная функция задана аналитически. Однако, даже в этом случае на практике широко применяется следующий прием, пригодный для каждого из рассмотренных методов интегрирования.

Искомый интеграл вычисляется дважды: при делении отрезка $[a, b]$ на n частей и $2n$ частей (разумеется, при интегрировании по формуле Симпсона n к тому же должно быть четным). Вслед за этим, полученные значения интеграла I_n и I_{2n} сравниваются, и совпадающие первые десятичные знаки считаются верными. Для оценки погрешности метода Симпсона может использоваться простая формула. Пусть R_n и R_{2n} – погрешность интегрирования по методу Симпсона, соответственно при n и $2n$ отрезках интегрирования. Учитывая (7.12), получим

$$\frac{R_n}{R_{2n}} = \frac{h_n^4}{h_{2n}^4},$$

где h_n и h_{2n} – шаг, соответствующий количеству отрезков интегрирования. Тогда

$$R_n = 16R_{2n}.$$

Если I – истинное значение интеграла (7.1), то

$$I = I_n + R_n,$$

или

$$I = I_{2n} + R_{2n}.$$

Из этого следует, что

$$R_{2n} = \frac{I_{2n} - I_n}{15}.$$

Эта формула удобна для практической оценки погрешности метода Симпсона.

Из оценки остаточного члена следует, что ошибка по методу трапеций и методу Симпсона уменьшается с уменьшением шага интегрирования. Однако, это чисто теоретическое утверждение. Дело в том, что в процессе вычислений при последовательном удвоении числа отрезков разбиения растут ошибки округления, значение которых с некоторого момента ставит предел достижимой точности результата интегрирования.

Исследуем формулы с равноотстоящими узлами. К их числу относятся формулы трапеций, Симпсона, Ньютона-Котеса. Точность квадратурной формулы в основном характеризуется порядком остаточного члена

$$R=O(h^m),$$

где $h=\frac{b-a}{n}$ – шаг и m – натуральное число.

Квадратурная формула считается тем точнее, чем больше число m ; в этом смысле формула Симпсона является более точной, чем формула трапеций. Можно показать, что в конкретных случаях более грубая квадратурная формула при одном и том же h может дать лучший результат, чем более точная.

Например, для функции $f(x) = -8 + 45x^2 - 25x^4$ (Рис.7.4) имеем

$$I = \int_{-1}^{+1} f(x)dx = -8x + 15x^3 - 5x^5 \Big|_{-1}^{+1} = 4.$$

При $h = 1$ формула трапеций дает точное решение

$$I_1 = \frac{1}{2}f(-1) + f(0) + \frac{1}{2}f(+1) = 4,$$

тогда как формула Симпсона при $h = 1$ не обеспечивает даже знака интеграла

$$I_2 = \frac{1}{3}(f(-1) + 4f(0) + f(+1)) = -\frac{8}{3}.$$

Точность квадратурной формулы при фиксированном числе узлов существенно зависит от расположения этих узлов. При неудачном расположении узлов квадратурная формула может дать сильно искаженные результаты. При наличии значительного числа нулей подынтегральной функции или при большом числе ее экстремумов (т.е. когда много ну-

лей производной $f'(x)$) точность квадратурных формул сильно понижается. Поэтому шаг h следует выбирать так, чтобы он был намного меньше расстояний между соседними нулями функции $f(x)$ и её производной $f'(x)$. Для этого рекомендуется, например, основной отрезок интегрирования $[a, b]$ разбить на частичные отрезки $[\alpha, \beta]$, внутри каждого из которых, функции $f(x)$ и $f'(x)$ сохраняют постоянный знак (если это возможно!), и производить вычисление интеграла по частям, выбирая для каждого отрезка, вообще говоря, свой шаг.

7.5 Метод Монте-Карло

При вычислении интеграла по формулам прямоугольников отрезок интегрирования $[a, b]$ разбивается на n одинаковых интервалов, на концах которых вычисляются значения подынтегральной функции. Вычисляя значения функции в случайных точках, можно получить статистический

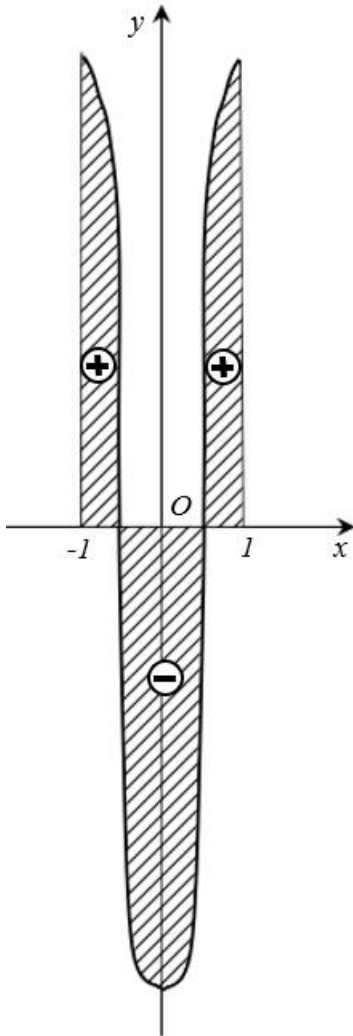
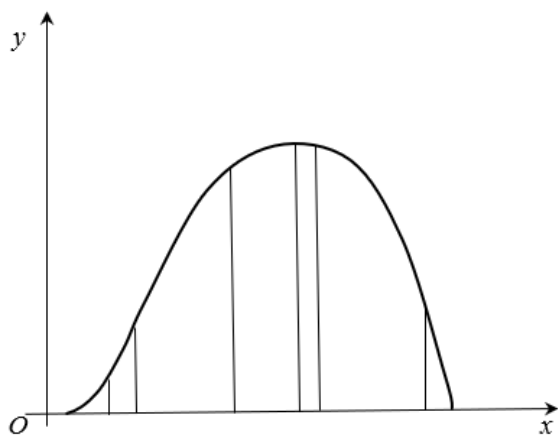


Рис. 7.4. Иллюстрация примера.

вариант метода прямоугольников, который эффективен при вычислении кратных интегралов. Вычислим заданный интеграл статистическим вариантом метода прямоугольников, называемым также методом *Монте-Карло*. Вместо равномерного деления области интегрирования на интервалы и суммирования площадей получившихся «столбиков» в область интегрирования вбрасываются случайные точки, строятся такие же «столбики», ширина которых определяется как $\frac{b-a}{n}$, затем суммируются их площади (Рис. 7.5).



(статистический вариант метода прямоугольников).

Будем получать случайные точки будем с помощью преобразования равномерно распределенных на отрезке $[0; 1]$ случайных величин. Приведем моделирующую формулу для равномерного распределения на отрезке $[a, b]$ $x_i = a + \gamma_i(b - a)$, где γ_i — случайные числа, равномерно распределенные на отрезке $[0; 1]$.

Таким образом, значение интеграла вычисляется по формуле

$$\int_a^b y(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \quad (7.13)$$

Эта формула совпадает с формулой прямоугольников, но отличается тем, что узлы расположены не регулярно, а случайным образом. Погрешность вычисления интеграла по формуле (7.13) будет уменьшаться с ростом числа испытаний $\varepsilon \approx n^{-1/2}$.

Приведем еще один вариант интегрирования методом Монте-Карло, который называют *геометрическим алгоритмом*.

Рассмотрим прямоугольник со сторонами $x = a$, $x = b$, $y = 0$ и $y = M$, где M — число, равное или превышающее по величине максимум функции на интервале (a, b) , так что $0 \leq f(x) \leq M$ на всем интервале (Рис. 7.6). Будем заполнять этот прямоугольник случайными точками (ξ, η) , координаты которых равномерно распределены в интервалах $a < \xi < b$, $0 < \eta < M$. Тогда геометрически очевидно, что приближенное значение интеграла будет равно площади S_0 прямоугольника, умноженной на отношение числа точек N' , попавших под кривую $y = f(x)$, к общему числу точек N . Следовательно приближенно искомый интеграл равен площади S_0 прямоугольника, умноженной на отношение числа точек N' , попавших под кривую $y = f(x)$, к общему числу точек N . На практике это означает, что для каждой разыгранной точки (ξ_i, η_i) , где $i = 1, 2, \dots, N$, проверяется условие $\eta_i < f(\xi_i)$, и, если оно выполнено, то в счетчик для N' добавляется единица, в противном случае —

ничего не добавляется. После проведения N испытаний по приведенной формуле вычисляется приближенное значение интеграла.

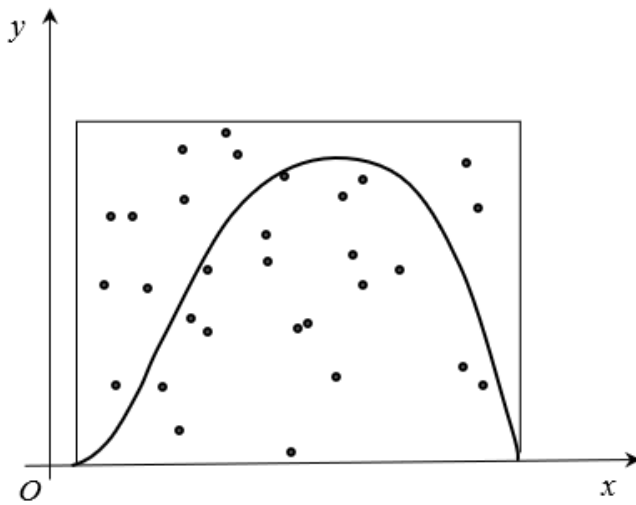


Рис.7.6. Метод Монте-Карло (геометрический алгоритм).

Для определения площади под графиком функции можно использовать следующий стохастический алгоритм:

- ограничим функцию прямоугольником (n -мерным параллелепипедом в случае многих измерений), площадь которого S_0 можно легко вычислить;

- «набросаем» в этот прямоугольник (параллелепипед) некоторое количество точек (N штук), координаты которых будем выбирать случайным образом;

- определим число точек (N' штук), которые попадут под график функции;

- площадь области, ограниченной функцией и осями координат, S дается выражением

$$S = S_0 \frac{N'}{N}.$$

В некоторых случаях, когда функция задана неявно, а необходимо определить область, заданную в виде сложных неравенств, статистический метод может оказаться более предпочтительным.

Тема 8

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Среди задач, с которыми приходится иметь дело в вычислительной практике, значительную часть составляют различные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Такие задачи возникают как непосредственно при математическом моделировании многих реальных явлений, так и в качестве промежуточных при решении ряда более сложных математических задач. При этом, как правило, точное решение рассматриваемой задачи не удастся выразить через элементарные функции. Доля задач, решаемых в явном виде, в случае обыкновенных дифференциальных уравнений ничтожно мала. Обычно приходится прибегать к помощи

приближенных методов решения подобных задач. Так же методы в зависимости от того, ищется ли приближенное решение в аналитическом виде или в виде таблицы чисел, часто разделяют на аналитические и численные. Заметим, что конкретный вид метода зависит также от типа решаемой дифференциальной задачи. В случае обыкновенных дифференциальных уравнений в зависимости от того, ставятся ли дополнительные условия в одной или нескольких точках отрезка изменения независимой переменной, задачи обычно подразделяют на односточечные (задачи с начальными условиями или задачи Коши) и многоточечные. Среди многоточечных задач наиболее часто на практике встречаются так называемые граничные задачи, когда дополнительные условия ставятся на концах рассматриваемого отрезка.

Наиболее простой из указанных выше задач является задача Коши. Заметим, что нередко решение многоточечных и, в частности, граничных задач сводят к решению задач с начальными условиями.

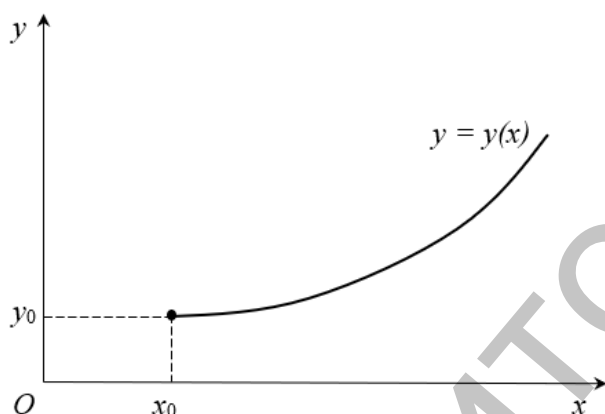


Рис. 8.1. Геометрическое решение задачи Коши

Пусть требуется решить задачу Коши

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (8.1)$$

где $x, x_0 \in [a, b]$.

Геометрически это означает, что требуется найти интегральную кривую $y = y(x)$, проходящую через заданную точку $M(x_0, y_0)$ при выполнении равенства $y' = f(x, y)$ (Рис. 8.1).

Существование и единственность решения уравнения $y' = f(x, y)$ обеспечивается теоремой Пикара.

Теорема. Если функция f определена и непрерывна в некоторой области G , определяемой неравенствами $|x - x_0| \leq a$, $|y - y_0| \leq b$ и удовлетворяет в этой области условию Липшица по y :

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M|y_1 - y_2|,$$

то на некотором отрезке $|x - x_0| \leq h$, где h – положительное число, существует и при том только одно решение задачи (8.1). Здесь M – постоянная (константа Липшица), зависящая в общем случае от a и b . Если $f(x, y)$ имеет ограниченную в G производную $f'_y(x, y)$, то при $(x, y) \in G$ можно принять $M = \max_{[a,b]} f'_y(x, y)$.

В классическом анализе разработано немало приемов нахождения решений дифференциальных уравнений через элементарные (специальные) функции. Между тем весьма часто при решении практических задач эти

методы оказываются либо совсем беспомощными, либо их решение связывается с недопустимыми затратами усилий и времени. По этой причине для решения задач практики созданы методы численного (приближенного) решения дифференциальных уравнений.

Решить поставленную задачу численно – значит для заданной последовательности чисел x_0, x_1, \dots, x_n из отрезка $[a, b]$ и числа y_0 , не определяя самого решения $y = y(x)$, вычислить (приближенно) значения y_0, y_1, \dots, y_n этого решения в точках. Другими словами, исходя из (8.1), найти такие значения, что $y_i = y(x_i), i = \overline{1, n}$. Таким образом, численное решение (8.1) позволяет вместо отыскания ее решения $y = y(x)$ получить таблицу значений этой функции для заданной последовательности аргументов:

x_i	x_0	x_1	...	x_n
$y(x_i)$	y_0		...	y_n

Затем функцию $y(x)$ можно аппроксимировать известными интерполяционными формулами. Заметим, что численные методы применимы к задачам, имеющим единственное решение.

8.1 Метод ломаных Эйлера

Рассмотрим задачу (8.1), где $f(x, y)$ – непрерывно дифференцируемая функция в прямоугольнике $D = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}, x_0 \in [a, b]$. Построим систему равноотстоящих узлов x_0, x_1, \dots, x_n , где $x_k = x_0 + kh, k = 0, 1, 2, \dots$; h – достаточно малый шаг интегрирования.

Проведем касательную в точке (x_0, y_0) к графику решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения (8.1) с угловым коэффициентом $k_0 = y'(x_0, y_0)$ (Рис. 8.2.). Уравнение этой касательной имеет вид

$$y = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0).$$

За приближенное решение уравнения $y' = f(x, y)$ в точке x_1 возьмем ординату y_1 точки пересечения касательной с прямой $x = x_1$, т.е.

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0)$$

или

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0).$$

Продолжая этот процесс, получаем семейство отрезков прямых

$$\begin{aligned} y &= y_k + f(x_k, y_k)(x - x_k), \\ y_k &= y_{k-1} + hf(x_{k-1}, y_{k-1}), \end{aligned} \quad (8.2)$$

$x \in [x_{k-1}, x_k], k = 1, 2, \dots$

Эти отрезки образуют ломаную, называемую *ломаной Эйлера*. Она является приближенным решением исходной задачи (8.1) методом ломаных Эйлера.

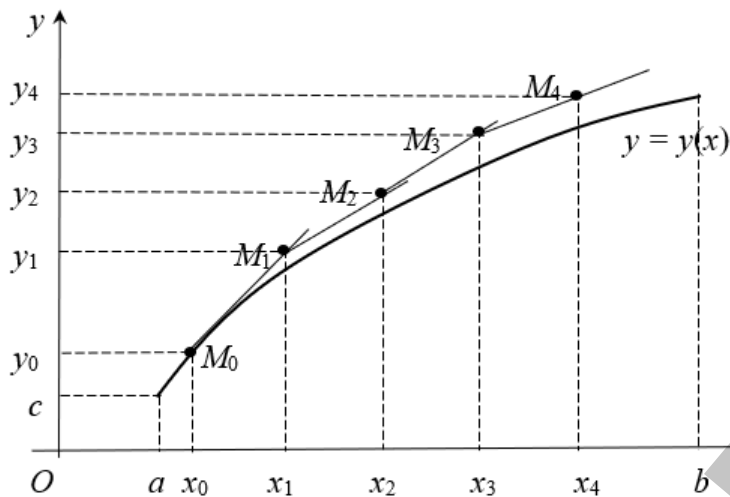


Рис. 8.2. Метод Эйлера.

Метод Эйлера обладает удовлетворительной точностью лишь при достаточно малых h . Действительно, разложим точное решение уравнения (8.1) ряд Тейлора в окрестности узла x_k

$$y(x_k + h) = y(x_k) + y'(x_k)h + O(h^2) = y(x_k) + hf(x_k, y_k) + O(h^2).$$

Сравнив полученное выражение с выведенной ранее формулой (8.2), приходим к выводу, что погрешность приближенного метода Эйлера

$$y_k = y_{k-1} + hf(x_{k-1}, y_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots,$$

дает решение с точностью $O(h^2)$.

Отметим, что особенностью метода Эйлера является то, что на каждом шаге интегрирования приближенное значение $y(x_k)$ определяется через $y(x_{k-1})$. Таким образом, на каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ решается задача Коши

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_{k-1}) = y_{k-1}, \quad k=1, 2, \dots; \end{cases}$$

что удобно с точки зрения вычислений. Метод Эйлера является простейшим численным методом интегрирования дифференциального уравнения. Его недостатки: во-первых, малая точность, во-вторых, систематическое накопление ошибок.

8.2 Модификации метода Эйлера

Более точным является усовершенствованный метод Эйлера (Рис. 8.3), при котором сначала вычисляют промежуточные значения

$$\begin{aligned} x_{k+\frac{1}{2}} &= x_k + \frac{h}{2}, \\ y_{k+\frac{1}{2}} &= y_k + \frac{h}{2}f(x_k, y_k), \end{aligned}$$

а затем полагают

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_{k+\frac{1}{2}}, y_{k+\frac{1}{2}}). \quad (8.3)$$

Получим оценку точности построенного метода. Для этого разложим точное решение (8.1) в ряд Тейлора в окрестности точки $x_{k+\frac{1}{2}}$, получим

$$y(x_k) = y\left(x_k + \frac{h}{2}\right) - \frac{h}{2}y'\left(x_k + \frac{h}{2}\right) + \frac{h^2}{4}y''\left(x_k + \frac{h}{2}\right) + O(h^3)$$

$$y(x_k + h) = y\left(x_k + \frac{h}{2}\right) + \frac{h}{2}y'\left(x_k + \frac{h}{2}\right) + \frac{h^2}{4}y''\left(x_k + \frac{h}{2}\right) + O(h^3)$$

отсюда

$$y(x_k + h) - y(x_k) = hy'\left(x_k + \frac{h}{2}\right) + O(h^3)$$

или

$$y(x_k + h) = y(x_k) + hy'\left(x_k + \frac{h}{2}\right) + O(h^3),$$

а это значит

$$y(x_k + h) = y(x_k) + hf\left(x_{k+\frac{1}{2}}, y_{k+\frac{1}{2}}\right) + O(h^3).$$

Сравнив полученную формулу с (8.3), приходим к выводу, что погрешность (8.3) равна $O(h^3)$.

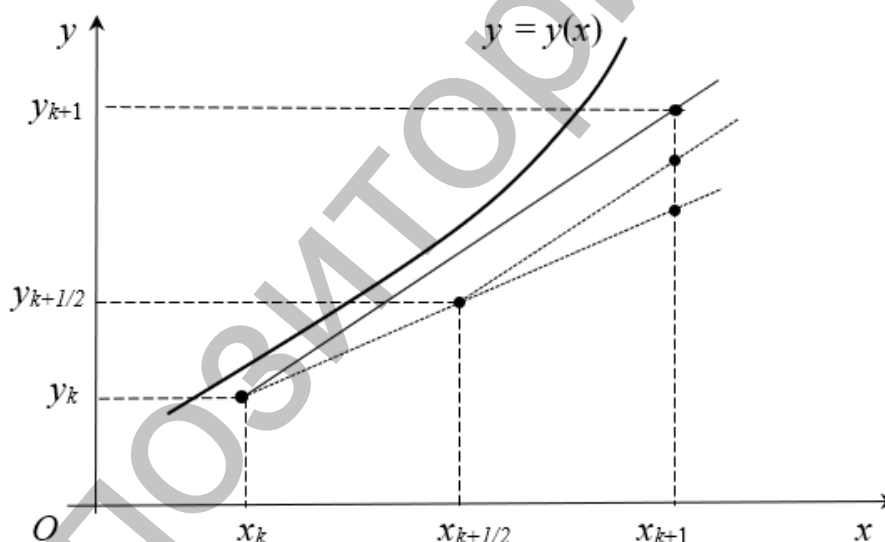


Рис. 8.3. Усовершенствованный метод Эйлера

Другой модификацией метода Эйлера является усовершенствованный метод Эйлера-Коши, при котором сначала определяется «грубое» приближение решения

$$\tilde{y}_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k).$$

Исходя из данного выражения, вычисляют

$$\tilde{f}_{k+1} = f(x_{k+1}, \tilde{y}_{k+1}).$$

Затем приближенно полагают

$$y_{k+1} = y_k + h \frac{f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, \tilde{y}_{k+1})}{2}. \quad (8.4)$$

Усовершенствованный метод Эйлера-Коши можно еще более уточнить, применяя *итерационную обработку* каждого значения y_k . А именно, исходя из грубого приближения

$$y_{k+1}^{(0)} = y_k + hf(x_k, y_k),$$

построим итерационный процесс

$$y_{k+1}^{(i)} = y_k + \frac{h}{2} [f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}^{(i)})], k = 1, 2, \dots \quad (8.5)$$

Итерирование продолжаем до тех пор, пока некоторые два последовательных приближения $y_{k+1}^{(m)}$ и $y_{k+1}^{(m+1)}$ не совпадут между собой в соответствующих десятичных знаках. После этого полагаем

$$y_{k+1} \approx \bar{y}_{k+1}^{(m)},$$

где $\bar{y}_{k+1}^{(m)}$ – общая часть приближений $y_{k+1}^{(m)}$ и $y_{k+1}^{(m+1)}$.

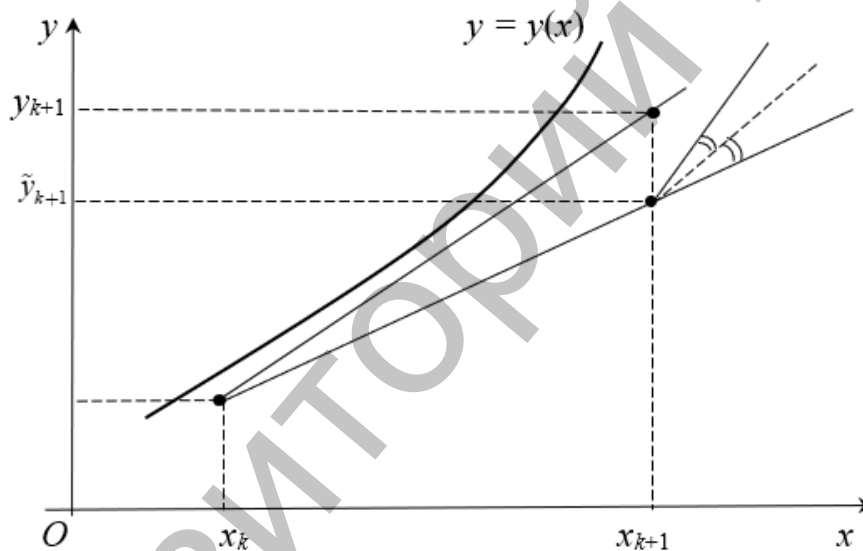


Рис. 8.4. Метод Эйлера-Коши.

Отметим, что метод Эйлера с итерационной обработкой ординат (или *метод прогноза и коррекции*) дает на каждом шаге погрешность порядка h^3 и нередко применяется в вычислительной практике.

8.3 Метод Рунге-Кутты

Этот метод является одним из методов повышенной точности и относится к одношаговым методам численного интегрирования задачи Коши (8.1), т.е. к таким методам, которые позволяют найти приближенное значение решения заданной задачи в узле x_{i+1} по информации об этом решении лишь в одной предыдущей узловой точке x_i . Метод Рунге-Кутты является одним из самых распространенных методов решения задач с начальными условиями для обыкновенных дифференциальных уравнений. Данный метод описывается следующими шестью соотношениями

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i,$$

$$\Delta y_i = \frac{1}{6} (K_1^{(i)} + 2K_2^{(i)} + 2K_3^{(i)} + K_4^{(i)}),$$

$$K_1^{(i)} = hf(x_i, y_i), K_2^{(i)} = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1^{(i)}}{2}),$$

$$K_3^{(i)} = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2^{(i)}}{2}), K_4^{(i)} = hf(x_i + h, y_i + K_3^{(i)}).$$

Как видно, с алгоритмической точки зрения метод Рунге-Кутты не имеет принципиальных различий от метода Эйлера. Разница лишь в объеме вычислений: для получения нового значения y на каждом шаге необходимо проделать все действия, предусмотренные формулами выше.

Метод Рунге-Кутты является методом повышенной точности (он имеет четвертый порядок точности), несмотря на свою трудоемкость, широко используется при численном решении уравнений с помощью компьютера.

На практике применяется следующий способ контроля точности – двойной счет. Если y_{2h} – вычисленное значение $y(x)$ с шагом $2h$, а y_h – соответствующее узловое значение, полученное с шагом h , то для ориентировочной оценки погрешности ε последнего значения y_h можно использовать формулу

$$\varepsilon \approx \frac{|y_{2h} - y_h|}{15}.$$

Тема 9 КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ

Вычислительные методы – это методы приближенного решения математических задач. Они заключаются в выполнении конечного числа элементарных операций над числами, которые, как правило, реализуются на компьютере. Вычислительные методы являются составной частью вычислительной математики, которая, помимо вычислительных методов, выполняет анализ математических моделей и изучает вопросы, связанные с алгоритмами решения типовых математических задач. Математика и реальность могут быть связаны посредством моделирования. С заменой реального объекта (явления) соответствующей ему моделью появляется возможность математически сформулировать задачу его изучения и воспользоваться для анализа математическим аппаратом, который не зависит от конкретной природы данного объекта. Этот аппарат позволяет единообразно описать широкий круг фактов и наблюдений, провести их детальный количественный анализ, предсказать, как поведет себя объект в различных условиях.

Качественный прорыв в развитии вычислительной математики произошел во второй половине XX века в связи с применением компьютеров для решения резко расширяющегося круга задач. Развитие компьютерного моделирования и вычислительных мощностей современной компьютерной

техники позволяет осуществить математизацию различных областей: химии, биологии, медицины, психологии и др. Современные программные средства, использующие методы вычислений и моделирование, превращают компьютер в рабочий инструмент для решения задач научного, технического, экономического характера и др.

9.1 Понятие модели и моделирования

При исследовании объектов окружающего мира часто необходимо отображать результаты исследования в виде, удобном для анализа, хранения и передачи в пространстве или времени. Модель есть абстрактное представление реальности в какой-либо форме (например, в математической, физической, символической, графической), предназначенное для представления определённых аспектов этой реальности и позволяющее получить ответы на изучаемые вопросы

Модель в широком понимании – это образ (в том числе условный или мысленный) какого-либо объекта или системы объектов, используемый при определенных условиях в качестве «заместителя» или «представителя». Другими словами, другими словами, это упрощенное подобие объекта, которое воспроизводит интересующие исследователя свойства и характеристики объекта-оригинала или объекта проектирования. Моделью Земли служит глобус, а звездного неба – экран планетария. Чучело животного есть его модель, а фотография на паспорте или любой перечень паспортных данных – модель владельца паспорта.

Моделирование связано с выяснением или воспроизведением свойств какого-либо реального или создаваемого объекта, процесса или явления с помощью другого объекта, процесса или явления. Моделирование – это построение, совершенствование, изучение и применение моделей реально существующих или проектируемых объектов (процессов и явлений).

Основные причины, почему используются модели вместо попыток «прямого взаимодействия с реальным миром», следующие.

- Сложность реальных объектов. Число факторов, которые относятся к решаемой проблеме, выходит за пределы человеческих возможностей. Поэтому одним из выходов (а часто единственным) в сложившейся ситуации является упрощение ситуации с помощью моделей, в результате чего уменьшается разнообразие этих факторов до уровня восприимчивости специалиста.
- Необходимость проведения экспериментов. На практике встречается много ситуаций, когда экспериментальное исследование объектов ограничено высокой стоимостью или вовсе невозможно (опасно, вредно, ограниченность науки и техники на современном этапе).
- Необходимость прогнозирования. Важное достоинство моделей состоит в том, что они позволяют «заглянуть в будущее», дать прогноз развития ситуации и определить возможные последствия принимаемых решений.

Среди других причин можно назвать следующие:

- исследуемый объект либо очень велик (модель Солнечной системы), либо очень мал (модель атома);
- процесс протекает очень быстро (модель двигателя внутреннего сгорания) или очень медленно (геологические модели);
- исследование объекта может привести к его разрушению (модель самолета, автомобиля).

Человек в своей деятельности обычно вынужден решать две задачи – *экспертную и конструктивную*. В экспертной задаче на основании имеющейся информации описывается прошлое, настоящее и предсказывается будущее. Суть конструктивной задачи заключается в том, чтобы создать нечто с заданными свойствами.

9.2 Классификация моделей

Для решения экспертных задач применяют так называемые *описательные модели*, а для решения конструктивных – *нормативные*.

Описательные модели предназначены для описания свойств или поведения реальных (существующих) объектов. Они являются формой представления знаний о действительности. Например, план города, отчет о деятельности фирмы, психологическая характеристика личности.

Цели описательного моделирования в зависимости от решаемых задач:

- изучение объекта (научные исследования) – наиболее полно и точно отразить свойства объекта;
- управление – наиболее точно отразить свойства объекта в рабочем диапазоне изменения его параметров;
- прогнозирование – построить модель, способную наиболее точно прогнозировать поведение объекта в будущем;
- обучение – отразить в модели изучаемые свойства объекта.

Построение описательной модели происходит по следующей схеме:



Рис. 9.1. Последовательность построения описательной модели.

Описательные модели отражают существующее, их развитие направлено на приближение модели к реальности (в структурном системном анализе такая модель называется моделью «*Как есть*» – «*As-Is*»).

Отображение свойств объекта в модели не является полным в силу разных причин: особенностей восприятия, наличия и точности измерительных приборов, потребности и, наконец, психического состояния субъекта.

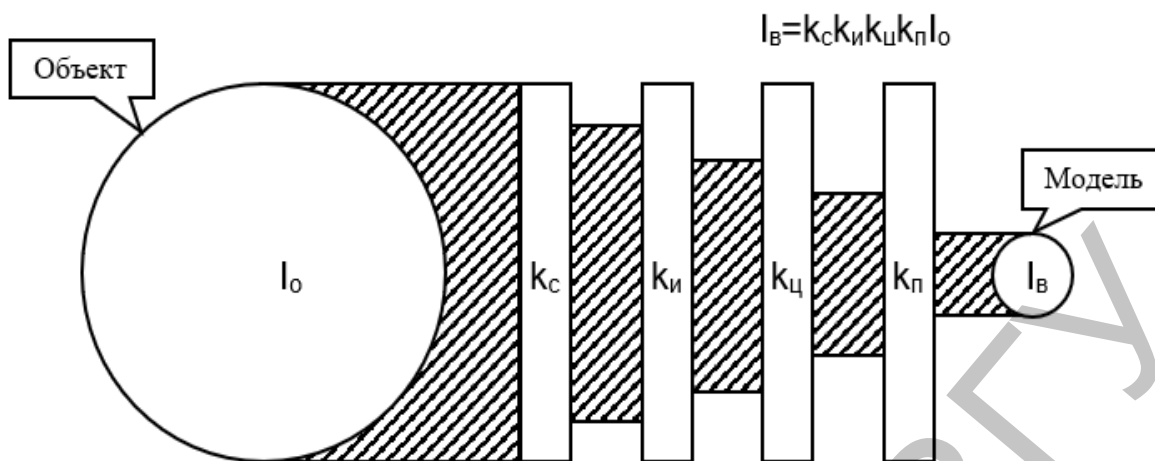


Рис. 9.2. Фильтрация информации об объекте.

Если обозначить полную информацию об объекте через I_0 , а воспринимаемую информацию – I_B , то отображение математически можно сформулировать следующим образом: $I_B = F(I_0)$, где $I_B \subset I_0$, или в линейном приближении (Рис. 9.2), где:

k_c – информационная проницаемость среды – свойство среды по передаче информации от объекта к субъекту ($0 \leq k_c \leq 1$);

k_u – коэффициент измерительной способности (вооруженности) субъекта – способность субъекта воспринимать (измерять) информацию ($0 < k_u < 1$);

$k_ц$ – целевая избирательность субъекта – связана с потребностью в конкретных свойствах объекта ($0 < k_ц < 1$);

k_n – психологическая избирательность субъекта – связана с его психологическим состоянием ($0 < k_n \leq 1$).

Моделировать можно не только то, что существует, но и то, чего еще нет. Нормативные модели предназначены для указания целей деятельности и определенного порядка (алгоритма) действий для их достижения. Цель такой модели является образ желаемого будущего, т. е. модель состояния, на реализацию которого и направлена деятельность, алгоритмом – образ (модель) будущей деятельности.

При нормативном моделировании обычно не используют слово «модель» – чаще говорят «проект», «план». Например, проекты машин, зданий; планы застройки; законы; уставы организаций и должностные инструкции, бизнес-планы, программы действий, управленческие решения.

Нормативные модели показывают не существующее, но желаемое. Здесь решается задача приближения реальности к модели, поскольку модель играет роль стандарта или образца, под который «подгоняются» как сама деятельность, так и ее результаты (в структурном системном анализе она называется моделью «Как должно быть» – «То-Ве»).

По области применения модели классифицируют следующим образом:

– *учебные*: наглядные пособия, обучающие программы, различные тренажеры;

– *опытные*: уменьшенные или увеличенные копии проектируемого объекта. Их называют также натурными и используют для исследования объекта и прогнозирования его будущих характеристик, например, модель корабля испытывается в бассейне для определения устойчивости судна при качке;

– *научно-технические*: их создают для исследования процессов и явлений, например, ускоритель электронов (прибор, имитирующий разряд молнии), стенд для проверки телевизора;

– *игровые*: военные, экономические, спортивные, деловые игры.

– *имитационные*: они не просто отражают реальность с той или иной степенью точности, а имитируют ее.

Математическая модель (или математическое описание) – это система математических соотношений, описывающих изучаемый процесс или явление, это математическое представление реальности. Наиболее лаконичное определение математической модели – «уравнение, выражающее идею».

9.3 Виды моделирования

Моделирование широко распространено, поэтому достаточно полная классификация возможных видов моделирования крайне затруднительна хотя бы в силу многозначности понятия «модель», широко используемого не только в науке и технике, но и, например, в искусстве. Применительно к естественно-техническому, социально-экономическому и другим наукам принято различать следующие виды моделирования:

– *концептуальное моделирование*, при котором с помощью некоторых специальных знаков, символов, операций над ними или с помощью естественного или искусственного языков истолковывается основная мысль (концепция) относительно исследуемого объекта;

– *интуитивное моделирование*, которое сводится к мысленному эксперименту на основе практического опыта работников (широко применяется в экономике);

– *физическое моделирование*, при котором модель и моделируемый объект представляют собой реальные объекты или процессы единой или различной физической природы, причем между процессами в объекте-оригинале и в модели выполняются некоторые соотношения подобия, вытекающие из схожести физических явлений;

– *структурно-функциональное моделирование*, при котором моделями являются схемы, (блок-схемы), графики, чертежи, диаграммы, таблицы, рисунки, дополненные специальными правилами их объединения и преобразования;

– *математическое моделирование*, при котором моделирование, включая построение модели, осуществляется средствами математики и логики;

– *имитационное (программное) моделирование*, при котором логико-математическая модель исследуемого объекта представляет собой алгоритм функционирования объекта, реализованный в виде программного комплекса для компьютера.

Перечисленные выше виды моделирования не являются взаимоисключающими и могут применяться при исследовании сложных объектов либо одновременно, либо в некоторой комбинации.

Остановимся подробнее на понятии *учебное моделирование*.

Требования к современному образованию побуждают к поиску новых современных эффективных образовательных технологий, позволяющих достичь более высоких результатов обучения и воспитания. Одной из основных задач в учебном процессе является развитие у учащихся интереса к учению, творчеству. Данную задачу можно решить, применяя современные обучающие технологии, позволяющие разнообразить формы и средства обучения, повышающие творческую активность учащихся.

Одной из них является технология учебного моделирования, основной задачей которой является не линейная передача знаний, а организация собственной деятельности учащихся по овладению способами анализа и обобщения учебного материала с помощью моделирования.

Учебное моделирование – это технология, которая позволяет преодолеть элементы механического усвоения знаний в обучении, активизировать мыслительную деятельность учащегося. Учебная модель – особая форма наглядности, которая позволяет представить более ярко те свойства изучаемого объекта или явления, которые нас интересуют.

Основные черты технологии учебного моделирования:

- создание и поддержание высокого уровня познавательного интереса и самостоятельной активности учащихся;
- формирование способов умственных действий учащихся;
- формирование и развитие личностных качеств учащихся;
- высокий положительный уровень межличностных отношений учителя и учащихся.

Основными объектами учебного моделирования являются формируемые у учащихся умения и навыки, т.е. учебные действия с заданными свойствами. Содержание и форма моделирования зависят от того, что именно моделируется, что является предметом моделирования на конкретном рассматриваемом этапе обучения.

Технология учебного моделирования имеет коммуникативную направленность: думать не столько о себе, сколько о собеседнике или адресате. В учебном процессе моделирование может использоваться в качестве средства обучения (учебное действие) и в качестве способа упорядочивания содержания, которое должны усвоить учащиеся. Моделирование может рассматриваться также как метапредметный результат образования,

универсальное учебное действие, обеспечивающее умение учащихся преобразовывать учебный материал в модели.

Преобразование изучаемого материала – это всегда нахождение соотношения части и целого, установление закономерностей и связей, критериев для классификации и выстраивание элементов в единую систему, и это все есть моделирование. Обладая компетенциями, связанными с различными способами преобразования учебного материала, учитель любого учебного предмета будет организатором работы ученика с содержанием учебного предмета, а не просто транслятором изучаемой информации.

Моделирование достаточно эффективно применяется в обучении не только при подготовке учителя к урокам, но и в системе подготовки кадрового состава учителей в условиях локальной образовательной среды. Моделирование можно рассматривать и как результат образования и как средство, эффективно используемое в профессиональной педагогической деятельности для развития творческой активности обучающихся.

9.4 Компьютерное и математическое моделирование

Отдельно следует сказать о *компьютерном моделировании*, являющемся развитием имитационного моделирования, а также о *математическом моделировании*.

Понятие «*компьютерное моделирование*» значительно шире традиционного понятия «моделирование с помощью компьютера» и нуждается в уточнении, учитывающем сегодняшние реалии. Компьютерное моделирование – это метод решения задачи анализа или синтеза объекта на основе использования его компьютерной модели. Суть компьютерного моделирования заключена в получении количественных и качественных результатов по имеющейся модели. Качественные выводы, получаемые по результатам анализа, позволяют обнаружить неизвестные ранее свойства объекта. Количественные выводы в основном носят характер прогноза некоторых будущих или объяснения прошлых значений переменных, характеризующих систему.

Предметом компьютерного моделирования могут быть: экономическая деятельность фирмы или банка, промышленное предприятие, информационно-вычислительная сеть, технологический процесс, любой реальный объект или процесс, например процесс инфляции.

Невозможно представить современную науку без широкого применения математического моделирования. Сущность этой методологии состоит в замене исходного объекта его «образом» – математической моделью – и дальнейшем изучении модели с помощью реализуемых на компьютере вычислительных алгоритмов. *Математическое моделирование* – процесс построения и изучения математических моделей. Все естественные и общественные науки, использующие математический аппарат, по сути, занимаются математическим моделированием: заменяют реальный объект его математической моделью и затем изучают последнюю.

Элементы математического моделирования использовались с самого начала появления точных наук, и не случайно, что некоторые методы вычислений носят имена таких корифеев науки, как Ньютон и Эйлер, а слово «алгоритм» происходит от имени арабского ученого Аль-Хорезми. Второе «рождение» этой методологии пришлось на середину 20-ого века и было обусловлено, по крайней мере, двумя причинами. Первая из них – появление компьютеров, избавивших ученых от огромной по объему рутинной вычислительной работы. Вторая – беспрецедентный социальный заказ – выполнение национальных программ СССР и США по созданию ядерно-ракетного щита, которые не могли быть реализованы традиционными методами. Математическое моделирование справилось с этой задачей: ядерные взрывы, полеты ракет и спутников были предварительно «осуществлены» в недрах электронных вычислительных машин с помощью математических моделей и лишь затем претворены на практике.

Технические, экологические и иные системы, изучаемые современной наукой, больше не поддаются исследованию обычными теоретическими методами. Прямой натурный эксперимент над ними долог, дорог, часто либо опасен, либо попросту невозможен, так как многие из этих систем существуют в «единственном экземпляре». Цена ошибок и просчетов в обращении с ними недопустимо высока. Поэтому математическое моделирование является неизбежной составляющей научно-технического прогресса.

Математическое моделирование порождает четкий план действий. Его можно условно разбить на три этапа: *модель – алгоритм – программа* (Рис. 9.3.).

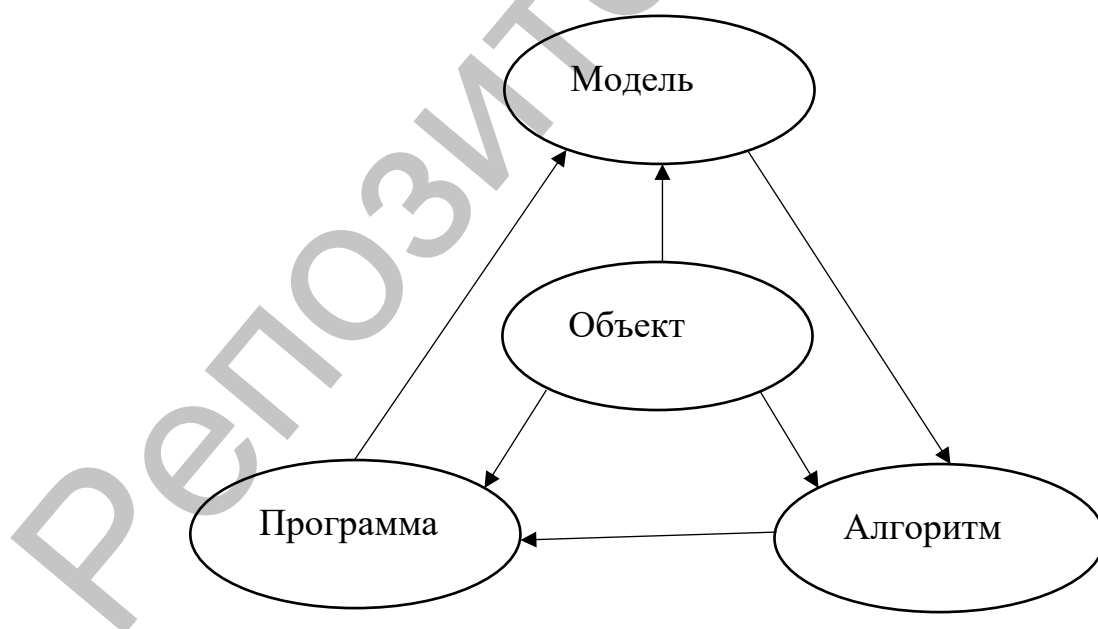


Рис. 9.3. Три этапа математического моделирования.

На первом этапе выбирается/строится «эквивалент» объекта, отражающий в математической форме важнейшие его свойства/законы, которым он подчиняется. Математическая модель исследуется теоретическими методами, позволяющими получить важные предварительные знания об объекте.

Второй этап – разработка алгоритма для реализации модели на компьютере. Модель представляется в форме, удобной для применения численных методов, определяется последовательность вычислительных и логических операций, которые нужно произвести, чтобы найти искомые величины с заданной точностью.

На третьем этапе создаются программы, «переводящие» модель и алгоритм на доступный компьютеру язык. Их можно назвать «электронным» эквивалентом изучаемого объекта, уже пригодным для непосредственного испытания на «экспериментальной установке» – компьютере.

Создав триаду, «*модель-алгоритм-программа*», исследователь получает в руки универсальный, гибкий и недорогой инструмент, который вначале отлаживается, тестируется в пробных вычислительных экспериментах. После того, как адекватность (достаточное соответствие) триады исходному объекту установлена, с моделью проводятся разнообразные и подробные „опыты“, дающие все требуемые качественные и количественные свойства и характеристики объекта». Процесс моделирования сопровождается улучшением и уточнением, по мере необходимости, всех звеньев триады.

9.5 Вычислительный эксперимент

С появлением компьютеров возник новый способ теоретического исследования сложных процессов, допускающих математическое описание, – вычислительный эксперимент, то есть исследование естественнонаучных проблем средствами вычислительной математики.

Допустим, требуется изучить некоторый физический процесс. Математическому исследованию предшествует выбор физического приближения, т.е. решается, какие факторы надо учесть, а какими можно пренебречь. После этого проводится исследование проблемы методом вычислительного эксперимента, в котором можно выделить несколько основных этапов.

Первый этап. Формулируется задача, которую надо решать. Сначала выбирается физическая модель процесса, при этом решается вопрос о том, какие физические факторы надо учесть, а какими можно пренебречь.

Второй этап. Физической модели ставится в соответствие математическая модель, т.е. математическое описание физического процесса с помощью алгебраических, дифференциальных, интегральных и других уравнений. Эти уравнения обычно выражают законы сохранения основных физических величин (энергии, количества движения, массы и др.). Типичные математические модели, соответствующие физическим явлениям, формулируются в виде уравнений математической физики. Большинство реальных процессов описывается нелинейными уравнениями и лишь в первом приближении (при малых значениях параметров, малых отклонениях от равновесия и т.д.) эти уравнения можно заменить линейными. Полученную модель надо исследовать методами математической физики. Надо установить: правильно ли поставлена задача; хватает ли исходных данных, не противоречат ли они друг другу; существует ли решение поставленной задачи и

единственно ли оно. На этом этапе используются методы классической математики.



Рис. 9.4. Этапы вычислительного эксперимента.

Третий этап. Он состоит в построении приближенного численного метода решения задачи, т.е. в выборе вычислительного алгоритма. Под вычислительным алгоритмом понимают последовательность арифметических и логических операций, при помощи которых находится приближенное численное решение математической задачи, сформулированной на втором этапе.

Именно на этом этапе требуется привлечение компьютера и, как следствие, развитие численных методов. Под численным методом понимается такая интерпретация математической модели (дискретная модель), которая доступна для реализации на компьютере. Например, если математическая модель представляет собой дифференциальное уравнение, то численным методом может быть аппроксимирующее его разностное уравнение совместно с алгоритмом, позволяющим отыскать решение этого разностного уравнения. Результатом реализации численного метода на компьютере является число или таблица чисел. Помимо собственно численных методов существуют методы, позволяющие проводить с помощью компьютера аналитические выкладки.

Четвертый этап. Для реализации численного метода, необходимо составить программу для компьютера или воспользоваться готовой программой (пакетом прикладных программ, инструментальными средствами и т.д.). За многие годы развития языков программирования созданы обширные библиотеки подпрограмм, объектов и модулей, предназначенных для решения типовых задач вычислительной математики. Имеется целый ряд математических пакетов (Mathematica, Maple, MATLAB, Mathcad и др.), реализующих разнообразные численные методы и представляющих результаты в наглядной графической форме. В научно-технических расчетах и при решении сложных практических задач современные исследователи зачастую интегрируют инструменты для проведения вычислительного эксперимента, сочетая готовые библиотечные средства, разработанные самостоятельно программы и математические пакеты.

Пятый этап. Проведение расчетов на компьютере и анализ полученных численных результатов с последующим уточнением математической модели. Может оказаться, что модель слишком груба, т.е. результат не согласуется с физическим экспериментом, или что модель слишком сложна, и решение с достаточной точностью можно получить на более простых моделях. Тогда следует начинать работу с первого этапа, т.е. уточнить математическую модель, и снова пройти все этапы.

Вычислительный эксперимент – это не разовый расчет по стандартным формулам, а, прежде всего, расчет серии вариантов для различных математических моделей. Вычислительный эксперимент значительно удешевляет изучение сложных физических процессов, так как стоимость физического эксперимента (например, термоядерный синтез) в сотни и тысячи раз дороже написания программ и расчетов на компьютере.

Знание будущими педагогами классификации средств моделирования, основ моделирования, понимание моделирования как результат образования и как средство обучения, позволит эффективно использовать моделирование в собственной профессиональной деятельности и на этой основе создавать разнообразные средства обучения, позволяющие повышать творческую активность учащихся.

Применение моделирования важно для анализа образовательной деятельности и ее организации на различных этапах обучения, включая взаимосвязь обучения с развитием творчества и самостоятельности, что позволит обеспечить повышение качества образования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амосов, А. Вычислительные методы / А. Амосов, Ю. Дубинский, Н. Копченова. – М.: Лань, 2014. – 672 с.
2. Андреев, В.Б. Численные методы: учеб. пособие / В.Б. Андреев. – М.: МАКС Пресс, 2013. – 336 с.
3. Бахвалов, Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2008. – 640 с.
4. Демидович, Б.П. Основы вычислительной математики / Б.П. Демидович, И.А. Марон. – СПб.: Лань, 2009. – 672 с.
5. Зенков, А. В. Численные методы / А.В. Зенков. – М.: Издательство Юрайт, 2019. – 122 с.
6. Киреев, В.И. Численные методы в примерах и задачах: учеб. пособие / В.И. Киреев. – М.: Высш. шк., 2008. – 480 с.
7. Лапчик, М.П. Численные методы / М.П. Лапчик, М.И. Рагулина, Е.К. Хеннер. – М.: Академия, 2007. – 384 с.
8. Петров, И.Б. Лекции по вычислительной математике / И.Б. Петров, А.И. Лобанов. – М.: ИНТУИТ, 2013. – 528 с.
9. Пирумов, У. Г. Численные методы / У. Г. Пирумов [и др.]. – М.: Издательство Юрайт, 2019. – 421 с.
10. Рыжиков, Ю. Вычислительные методы / Ю. Рыжиков. – СПб.: БХВ, 2012. – 400 с.
11. Самарский, А.А. Введение в численные методы. – СПб.: Лань, 2009. – 288 с.
12. Самарский, А.А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. / А.А. Самарский, А.П. Михайлов. – М.: Физматлит, 2001. – 320 с.

Учебное издание

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ

Курс лекций

Составители:

АЛЕЙНИКОВА Татьяна Григорьевна

ШЕРБАФ Алмас Ибрагимовна

Технический редактор

Г.В. Разбоева

Компьютерный дизайн

В.Л. Пугач

Подписано в печать 2021. Формат 60x84^{1/16}. Бумага офсетная.

Усл. печ. л. 4,77. Уч.-изд. л. 3,24. Тираж экз. Заказ .

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Свидетельство о государственной регистрации в качестве издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий

№ 1/255 от 31.03.2014.

Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.