УДК 512.542

О ХАРАКТЕРИЗАЦИЯХ ЛОКАЛЬНО НОРМАЛЬНЫХ КЛАССОВ ФИТТИНГА

Н.Т. Воробьёв, А.Е. Иванов
Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»

Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел и $\emptyset \neq \omega \subseteq \mathbb{P}$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется ω-нормальным, если для любой ω-группы ее $\mathfrak{F}$-радикал является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой этой группы. Если $\omega = \mathbb{P}$, то класс $\mathfrak{F}$ называют нормальным. В работе найдены характеризации разрешимых ω-нормальных классов Фиттинга в терминах операторов Локетта и свойства квазинормальности.

Цель работы – нахождение характеризаций ω-нормальных классов Фиттинга в терминах операторов Локетта и квазинормальных классов Фиттинга.

Доказано, что если $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга и $(\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\omega)^*$ – локальный класс Фиттинга, то $\mathfrak{F}$ ω-нормален в точности тогда, когда выполняется хотя бы одно из следующих условий: (1) если $\mathfrak{F}$ нормален в классе Фиттинга ω-групп $\mathfrak{X}$, то $\mathfrak{F}$ квазинормален в $\mathfrak{X}$; (2) $\mathfrak{F}$ квазинормален в $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{N}_\omega$; (3) $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}^* \diamond \mathfrak{N}_\omega$.

***Ключевые слова:** класс Фиттинга, нормальный класс Фиттинга, квазинормальный класс Фиттинга, $\mathfrak{F}$-радикал.*

ABOUT CHARACTERIZATIONS OF LOCALLY NORMAL FITTING CLASSES

N.T. Vorob'ev, A.E. Ivanov
Educational Establishment "Vitebsk State P.M. Masherov University"

Let P be the set of all primes and $\emptyset \neq \omega \subseteq \mathbb{P}$. A Fitting class $\mathfrak{F}$ is called ω-normal if, for any ω-group, if its $\mathfrak{F}$-radical is an $\mathfrak{F}$-maximal subgroup of this group. If $\omega = \mathbb{P}$, then the class $\mathfrak{F}$ is called normal. In this paper, we find characterizations of solvable ω-normal Fitting classes in terms of the Lockett operators and quasinormality properties.

The purpose of the work is finding characterizations of ω-normal Fitting classes in terms of the Lockett operators and quasinormal Fitting classes.

It was proved that if $\mathfrak{F}$ is a Fitting class and $(\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\omega)^*$ is a local Fitting class, then $\mathfrak{F}$ is ω-normal exactly if at least one of the following conditions holds: (1) if $\mathfrak{F}$ is normal in the Fitting class $\mathfrak{X}$ of ω-groups, then $\mathfrak{F}$ is quasinormal in $\mathfrak{X}$; (2) $\mathfrak{F}$ is quasinormal in $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{N}_\omega$; (3) $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}^* \diamond \mathfrak{N}_\omega$.

***Key words:** Fitting class, normal Fitting class, quasinormal Fitting class, $\mathfrak{F}$-radical.*

В работе рассматриваются только конечные разрешимые группы. В определениях и обозначениях мы следуем [1]. В теории классов групп задача описания структурных свойств классов Фиттинга связана с применением нормальных классов Фиттинга и их характеризаций (см., например, [1], разделы 3, 6 главы X). Напомним, что класс групп $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга*, если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Из определения класса Фиттинга следует, что если $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, то в любой группе G существует наибольшая нормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа. Ее называют $\mathfrak{F}$-радикалом группы G и обозначают $G_{\mathfrak{F}}$.

Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ обладает свойством *нормальности* [2], если для любой группы G ее $\mathfrak{F}$-радикал является максимальной из подгрупп G, принадлежащих $\mathfrak{F}$. Для локализации понятия нормального класса Фиттинга Лауэ [3] и Хауком [4] были предложены обобщения и развитие свойства нормальности классов Фиттинга в терминах радикалов и регулярных сплетений.

Пусть G и H – группы. Тогда символом $G \wr H$ будем обозначать регулярное сплетение групп G и H, в частности, символом $G \wr Z_p$ – регулярное сплетение групп G и Z_p, где Z_p – циклическая группа порядка p (p – простое число).

Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс групп. Тогда класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется:

1) $\mathfrak{X}$-*нормальным* [3], если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ и для любой группы G из $\mathfrak{X}$ ее $\mathfrak{F}$-радикал является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой G;

2) $\mathfrak{X}$-*квазинормальным* [4], если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ и для каждого $\mathrm{p} \in \mathbb{P}$, $G \in \mathfrak{F}$, и $G \wr Z_p \in \mathfrak{X}$ следует $G^m \wr Z_p \in \mathfrak{F}$ некоторого натурального числа m.

Заметим, что если $\mathfrak{X}$ – класс всех разрешимых групп, то $\mathfrak{F}$ – в точности нормальный класс Фиттинга.

Значительный прогресс в исследовании факторизации и решеток нормальных классов Фиттинга был достигнут в работе Н.Т. Воробьёва и А.В. Марцинкевич [5], благодаря применению характеризаций ω-нормальных ($\mathfrak{S}_\omega$-нормальных) классов Фиттинга, которые были получены Дерком и Хоуксом (см. [1], теорему X.3.7).

Основная цель настоящей работы – нахождение характеризаций ω-нормальных классов Фиттинга в терминах операторов Локетта [6] и квазинормальных классов Фиттинга.

Предварительные сведения. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга. Тогда класс групп $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H} = (G : G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H})$ называют произведением классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$. Хорошо известно, что $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H}$ – класс Фиттинга, и операция умножения классов Фиттинга ассоциативна ([1, теорема IX.1.12(a), (c)].

Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел $\emptyset \neq \omega \subseteq \mathbb{P}$ и $\omega' = \mathbb{P} \backslash \omega$. В частности, если $\omega = \{\mathrm{p}\}$, то $\omega' = \{\mathrm{p}\}'$ будем обозначать символом p'.

Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют ω-нормальным, если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}_\omega$ и для любой ω-группы *G* ее $\mathfrak{F}$-радикал является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой *G.*

Для доказательства критерия ω-нормальности классов Фиттинга мы будем использовать понятие локального класса Фиттинга [7; 8], оператора Локетта [6] и их свойства.

Отображение $f : \mathbb{P} \to \{$классы Фиттинга$\}$ называют *функцией Хартли* или H-*функцией*. Носитель H-функции f – множество $Supp(f) = \{p \in \mathbb{P} : f(p) \neq \emptyset\}$. Пусть $\pi = Supp(f)$. Обозначим $\mathfrak{S}_\pi$, $\mathfrak{N}_p$ и $\mathfrak{S}_{p'}$, – классы всех π-групп, p-групп и p'-групп соответственно. Пусть класс Фиттинга $LR(f) = \mathfrak{S}_\pi \cap (\cap_{p \in \pi} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'})$. Тогда класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют *локальным*, если $\mathfrak{F} = LR(f)$ для некоторой H-функции f.

Если $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, то символом $\mathfrak{F}^*$ обозначим наименьший класс Фиттинга, содержащий $\mathfrak{F}$ такой, что для любых групп G и H справедливо равенство $(G \times H)_{\mathfrak{F}^*} = G_{\mathfrak{F}^*} \times H_{\mathfrak{F}^*}$. Множество $Char(\mathfrak{F}) = \{p \in \mathbb{P} : Z_p \in \mathfrak{F}\}$ называют характеристикой класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\sigma(\mathfrak{F})$ обозначают множество всех простых делителей всех групп из $\mathfrak{F}$.

Лемма 1.1 [7, леммы 1 и 3, предложение X.3, 1.20]. *Пусть* $\mathfrak{F} = LR(f)$ *для некоторой* H-*функции* f *и* $\pi = Supp(f)$. *Тогда*:

1) $\pi = Char(\mathfrak{F}) = \sigma(\mathfrak{F}) = \sigma(\mathfrak{F}^*)$;

2) $LR(f) = LR(f^*)$, *где* f^* – H-*функция такая, что* $f^*(p) = (f(p))^*$ *для всех* $p \in \mathbb{P}$.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называют гомоморфом, если $\mathfrak{F}$ наряду с каждой группой содержит ее фактор. Гоморф называется *насыщенным*, если из условия $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ следует $G \in \mathfrak{F}$, где $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы G.

Лемма 1.2. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{H}$ – *классы Фиттинга. Тогда:*

1) [1, теорема X.1.8(a), (в) и теорема X.1.15] $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^* = (\mathfrak{F}^*)^*$ *и если* $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, *то* $\mathfrak{F}^* \subseteq \mathfrak{H}^*$;

2) [7, лемма 3] *если* $\mathfrak{H}$ – *насыщенный гомоморф, то* $(\mathfrak{F}\mathfrak{H})^* = \mathfrak{F}^*\mathfrak{H}$;

3) [6, лемма 2.1(e)] *пусть* $\mathfrak{F}$ – *класс Фиттинга и* G – *группа. Тогда* $G_{\mathfrak{F}^*}/G_{\mathfrak{F}} \leq Z(G_{\mathfrak{F}})$, *где* $Z(G/G_{\mathfrak{F}})$ – *центр факторгруппы* $G/G_{\mathfrak{F}}$;

4) [1, предложение X.1.25] *если класс Фиттинга* $\mathfrak{F}$ *замкнут относительно взятия подгрупп, то* $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$.

Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется *классом Локетта*, если $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$. Мы будем использовать для характеризации ω-нормальных классов Фиттинга также результаты Хаука [9], Косси [10] о свойствах регулярных сплетений и критерий ω-нормальности Дерка–Хоукса (см. [1, теорема X.3.7]), которые приведем в качестве лемм.

Лемма 1.3 [1, предложение X.2.1(a)]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ – *класс Локетта и* G – *группа. Если* $G \notin \mathfrak{F}$, *то* $(G \wr H)_{\mathfrak{F}} = (G_{\mathfrak{F}})^*$ *для всех групп* H.

Лемма 1.4 [4, теорема 2.10]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Локетта, $G \in \mathfrak{F}$ и H – нильпотентная группа. Если $G^m \wr H \in \mathfrak{F}$ для некоторого натурального числа m, то $G^n \wr H \in \mathfrak{F}$ для любого натурального числа n.*

Лемма 1.5. *Пусть G, H – группы и $W = G \wr H$ – регулярное сплетение G и H. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) [1, лемма A.28.2(d)] *если $K \trianglelefteq G$, то $W/K^* \cong (G/K) \wr H$;*

2) [1, лемма A.18.2(c)] *если $K \leq G$, то $K^*H \cong K \wr H \leq W$.*

Лемма 1.6 [1, теорема X.3.7]. *Пусть $\emptyset \neq \omega \subseteq \mathbb{P}$ и $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга ω-групп. Тогда следующие утверждения равносильны:*

(1) класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ ω-нормален;

(2) для каждого $p \in \omega$ и любой ω-группы G существует натуральное число n такое, что $G^n \wr Z_p \in \mathfrak{F}$;

(3) если $\mathfrak{S}_\omega$ – класс всех ω-групп, то $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{S}_\omega$.

Лемма 1.7 [4, теорема 5.5(c)]. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга. Если $\mathfrak{F}$ квазинормален в $\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F}$ квазинормален в $\mathfrak{H}^*$.*

Примеры локально нормальных классов

Пример 2.1. Пусть $\emptyset \neq \omega \subseteq \mathbb{P}$ и $p \in \omega$. Тогда класс всех p-групп $\mathfrak{N}_p$ нормален в классе всех нильпотентных ω-групп $\mathfrak{N}_\omega$, т.е. $\mathfrak{N}_p \trianglelefteq \mathfrak{N}_\omega$ для каждого простого $p \in \omega$. Докажем это. Так как любая p-группа нильпотентная, $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{N}_\omega$ для всех $p \in \omega$. Пусть G – произвольная нильпотентная ω-группа. Докажем, что подгруппа $O_p(G)$ – $\mathfrak{N}_p$-радикал G является $\mathfrak{N}_p$-максимальной подгруппой группы G. Предположим, что $O_p(G) < M$, где M – $\mathfrak{N}_p$-максимальная подгруппа G. Поскольку $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{N}_\omega$, подгруппа M нильпотентна. Следовательно, M – субнормальная подгруппа G и поэтому $M \leq O_p(G)$. Итак, $O_p(G) \leq M \leq O_p(G)$, следовательно, $M = O_p(G)$, это противоречит тому, что $O_p(G)$ не является $\mathfrak{N}_p$-максимальной подгруппой G. Полученное противоречие показывает, что для любого $p \in \omega$ и любой группы G из $\mathfrak{N}_\omega$ ее $\mathfrak{N}_p$-радикал $\mathfrak{N}_p$-максимальная подгруппа G. Кроме того, $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{N}_\omega$. Следовательно, $\mathfrak{N}_p \trianglelefteq \mathfrak{N}_\omega$ для всех $p \in \omega$.

Пример 2.2. Пусть $\emptyset \neq \omega \subseteq \mathbb{P}$ и $\mathfrak{X}$ – непустой класс Фиттинга ω-групп. Тогда $\mathfrak{X}$ нормален в произведении $\mathfrak{X} \diamond \mathfrak{N}_\omega$ классов Фиттинга $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{N}_\omega$. Действительно, если $G \in \mathfrak{X}$, то $G_\mathfrak{X} = G$ и поэтому $G/G_\mathfrak{X} = 1 \in \mathfrak{N}_\omega$ и по определению произведения классов Фиттинга $G \in \mathfrak{X} \diamond \mathfrak{N}_\omega$. Следовательно, $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X} \diamond \mathfrak{N}_\omega$. Кроме того, в этом случае $G_\mathfrak{X}$ – $\mathfrak{X}$-максимальная подгруппа G.

Пусть $G_\mathfrak{X} < G$ и G – любая группа из $\mathfrak{X} \diamond \mathfrak{N}_\omega$. Тогда по определению произведения классов Фиттинга $G/G_\mathfrak{X}$ – нильпотентная ω-группа.

Предположим, что $G_\mathfrak{X} < M$, где M – $\mathfrak{X}$-максимальная подгруппа G. Так как группа $G/G_\mathfrak{X}$ нильпотентна, то ее подгруппа $M/G_\mathfrak{X}$ субнормальна в $G/G_\mathfrak{X}$. Отсюда M – субнормальная подгруппа G. Следовательно, $M \leq G_\mathfrak{X}$ и $G_\mathfrak{X} = M$. Таким образом, $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X} \diamond \mathfrak{N}_\omega$, и для любой группы G из $\mathfrak{X}\mathfrak{N}_\omega$ ее $\mathfrak{X}\mathfrak{N}_\omega$-радикал $\mathfrak{X}$-максимален в G, т.е. $\mathfrak{X} \trianglelefteq \mathfrak{X}\mathfrak{N}_\omega$ для любого класса ω-групп $\mathfrak{X}$.

Пример 2.3. Любой непустой класс Фиттинга $\mathfrak{X}$ нормален в классе Фиттинга $\mathfrak{X}\mathfrak{N}$, т.е. $\mathfrak{X} \trianglelefteq \mathfrak{X}\mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ – класс всех нильпотентных групп. Это следует из примера 2.2 в случае, когда $\omega = \mathbb{P}$.

Критерий ω-нормальности

Основной результат работы –

Теорема 3.1. *Пусть $\emptyset \neq \omega \subseteq \mathbb{P}$, $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга ω-групп и $\mathfrak{H} = (\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\omega)^*$. Если $\mathfrak{H}$ – локальный класс Фиттинга, то следующие утверждения равносильны:*

(1) $\mathfrak{F}$ – ω-нормальный класс Фиттинга;

(2) если $\mathfrak{X}$ – класс Фиттинга ω-групп такой, что $\mathfrak{F}$ нормален в $\mathfrak{X}$, то $\mathfrak{F}$ квазинормален в $\mathfrak{X}$;

(3) $\mathfrak{F}$ квазинормален в $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{N}_\omega$;

(4) $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}^* \diamond \mathfrak{N}_\omega$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Так как класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ ω-нормален, то по лемме 1.6 (равносильность (1) $\Leftrightarrow$ (2)) для каждого простого $p \in \omega$ и любой группы $G \in \mathfrak{F}$ существует натуральное число n такое, что регулярное сплетение $G^n \wr Z_p \in \mathfrak{F}$. Поскольку $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$, мы получаем, что для любой группы $G \in \mathfrak{F}$ из условия $G \wr Z_p \in \mathfrak{X}$ имеем $G^n \wr Z_p \in \mathfrak{F}$ для некоторого натурального n и для всех $p \in \omega$. Следовательно, класс $\mathfrak{F}$ квазинормален в $\mathfrak{X}$ для любого класса ω-групп $\mathfrak{X}$, содержащего $\mathfrak{F}$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Как установлено в примере 2.2, класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ ω-нормален в произведении $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{N}_\omega$. Теперь, полагая в (2) $\mathfrak{X} = \mathfrak{F} \diamond \mathfrak{N}_\omega$, $\mathfrak{F}$ является квазинормальным классом в произведении $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{N}_\omega$.

$(3) \Rightarrow (4)$. Доказательство данного утверждения разобьем на несколько шагов.

(а) *Покажем, что класс Фиттинга $\mathfrak{H}$ обладает следующим свойством регулярных сплетений:*

Если $1 \neq G \in \mathfrak{H}$ и для всякого простого $p \in \sigma(\mathfrak{H})$ наименьшая нормальная p'-подгруппа $O^{p'}(G)$ группы G ($O^{p'}(G)$ – p'-корадикал G) такая, что $G/O^{p'}(G)$ является p'-группой, совпадает с G, то существует натуральное число n такое, что $G^n \wr Z_p \in \mathfrak{H}$.

Пусть $G \in \mathfrak{H}$ и $W = G \wr Z_p$ – регулярное сплетение группы G с циклической группой порядка $p \in \sigma(\mathfrak{H})$. Докажем, что $W = G \wr Z_p \in \mathfrak{H}$. Так как $\mathfrak{H}$ – локальный класс Фиттинга, то $\mathfrak{H} = \mathfrak{S}_\pi \cap (\cap_{p\in\pi} h(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'})$ для некоторой H-функции h с носителем π. Заметим, что по утверждениям 1) леммы 1.1 и леммы 1.2 $\pi = \sigma(\mathfrak{H}) = \sigma(\mathfrak{N}_\omega)$ и $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{S}^*_\omega$, поскольку $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\omega \subseteq \mathfrak{S}_\omega$. Следовательно, $\pi \subseteq \omega$. Покажем, что $O^{P'}(G) = G$. Предположим, что $O^{P'}(G) < G$. Тогда $G/O^{P'}(G) \in \mathfrak{S}_P$, и существует максимальная нормальная подгруппа M группы G такая, что $O^{P'}(G) \leq M$. Так как группа G разрешима, то индекс $|G{:}\,M| = p$. Но тогда ввиду изоморфизма $G/O^{P'}(G)/M/O^{P'}(G) \cong G/M$ мы заключаем, что G/M является p'-группой. Получили противоречие с тем, что G/M является p-группой. Это доказывает, что $O^{P'}(G) = G$ для каждого $p \in \pi$.

Так как $G \in \mathfrak{S}_\pi$ и $W = G \wr Z_p$ для $p \in \pi$, то $W \cong (G \times G \times \ldots \times G) \rtimes Z_p$ является π-группой, т.е. $W \in \mathfrak{S}_\pi$. Остается проверить, что $W \in \cap_{p\in\pi} \mathrm{h}(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{G}_p$ для каждого $p \in \pi$. Так как $G \in \mathfrak{H}$, то $G \in \mathrm{h}(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_p$ для всех $p \in \pi$. По утверждению 2) леммы 1.1 $\mathrm{h}(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p\prime} = \mathfrak{h}^*(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p\prime}$ для всех $p \in \pi$. Более того, по утверждению 1) леммы 1.2 $(\mathfrak{h}^*(p))^* = \mathrm{h}^*(p)$, т.е. $\mathrm{h}^*(p)$ – класс Локетта для каждого $p \in \pi$. Поэтому без ограничения общности можно считать, что все значения H-функции h класса Фиттинга $\mathfrak{H}$ являются классами Локетта для всех $p \in \pi$.

Если $G \in \mathrm{h}(p)$, то $G \in \mathrm{h}(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p\prime}$, поскольку $\mathrm{h}(p) \subseteq \mathrm{h}(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_p$. Пусть $G \in \mathrm{h}(p)\mathfrak{N}_p \setminus \mathrm{h}(p)$. Тогда по лемме 1.3 $W_{\mathrm{h}(p)} = (G_{\mathrm{h}(p)})^*$ и поэтому $W/W_{\mathrm{h}(p)} \cong W/(G_{\mathrm{h}(p)})^*$. Следовательно, по утверждению 1) леммы 1.5 $W/W_{\mathrm{h}(p)} \cong \left(G/G_{\mathrm{h}(p)}\right) \wr Z_p$. Поскольку $G/G_{\mathrm{h}(p)}$ является p-группой, ввиду изоморфизма заключаем, что $W/W_{\mathrm{h}(p)} \in \mathfrak{N}_p$. Значит, $W \in \mathrm{h}(p)\mathfrak{N}_p \subseteq \mathrm{h}(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p\prime}$.

Если $G \in \mathrm{h}(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}/h(p)\mathfrak{N}_p$, то, рассуждая аналогично, имеем $W/W_{\mathrm{h}(p)\mathfrak{N}_p} \cong (G/G_{\mathrm{h}(p)\mathfrak{N}_p}) \wr Z_p$. Но G – неединичная группа и $G = O^{P'}(G)$. Следовательно $W \in \mathrm{h}(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p\prime}$. Таким образом, $G \in \mathrm{h}(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p\prime}$ для всех $p \in \pi$. Это доказывает, что $W = G \wr Z_p \in \mathfrak{H}$.

Поскольку Z_p – p-группа, то Z_p – нильпотентная группа. Отсюда по лемме 1.4 $G^n \wr Z_p \in \mathfrak{H}^*$ для любого натурального числа n. Утверждение (а) доказано.

(б) $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{H}$. Предположим, что $\mathfrak{F}^* \neq \mathfrak{H}^*$. Пусть G – группа наименьшего порядка из класса $\mathfrak{H}^*/\mathfrak{F}^*$. Тогда $G_{\mathfrak{F}^*} < G$ и по индукции ввиду разрешимости группы $G, G_{\mathfrak{F}^*}$ – единственная максимальная нормальная подгруппа группы G такая, что $G/G_{\mathfrak{F}^*}$ – циклическая группа порядка p. Действительно, если существует максимальная нормальная подгруппа M группы G, отличная от $G_{\mathfrak{F}^*}$, то по индукции $M \in \mathfrak{F}^*$ и по определению класса Фиттинга $MG_{\mathfrak{F}^*} = G$ и $G \in \mathfrak{F}^*$, что противоречит выбору группы G.

По утверждению 3) леммы 1.2 $G_{\mathfrak{H}}/G_{\mathfrak{F}} \leq Z(G/G_{\mathfrak{F}})$. Так как $G_{\mathfrak{F}^*}$ – единственная максимальная нормальная подгруппа G, то $G/G_{\mathfrak{F}}$ – циклическая p-группа. По утверждению 2) леммы 1.5 следует $G_{\mathfrak{F}} \wr Z_p \cong \left(G_{\mathfrak{F}}\right)^* \wr Z_p$ и, значит, $(G_{\mathfrak{F}})^* \wr Z_p$ – субнормальная подгруппа группы G^*Z_p. Поскольку $G^*Z_p \cong G \wr Z_p$, и для каждого $p \in \pi$ из условия $1 \neq G \in \mathfrak{H}$ и $G = O^{p'}(G)$, следует по утверждению (а) $G \wr Z_p \in \mathfrak{H}$. Значит, подгруппа $G_{\mathfrak{F}} \wr Z_p \in \mathfrak{H}$. Так как по условию класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ квазинормален в $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{N}_\omega$, то по лемме 1.7 $\mathfrak{F}$ квазинормален в $\mathfrak{H}$. Следовательно, по утверждению 1) леммы 1.2 $(G_{\mathfrak{F}})^2 \wr Z_p \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^*$. Так как $(\mathfrak{F}^*)^* = \mathfrak{F}^*$ по утверждению 1) леммы 1.2, то $\mathfrak{F}^*$ – класс Локетта. Отсюда по лемме 1.4 следует, что $G_{\mathfrak{F}} \wr Z_p \in \mathfrak{F}^*$. Значит, группа $\left(G_{\mathfrak{F}}\right)^* \wr Z_p$ является подгруппой $\mathfrak{F}^*$-радикала группы $G \wr Z_p$, т.е. $(G_{\mathfrak{F}})^* \wr Z_p \leq (G \wr Z_p)_{\mathfrak{F}^*}$. Но по предположению $G \notin \mathfrak{F}^*$ и, кроме того, по утверждению 1) леммы 1.2 $\mathfrak{F}^*$ – класс Локетта. Следовательно, по лемме 1.3 $\left(G \wr Z_p\right)_{\mathfrak{F}^*} = (G_{\mathfrak{F}^*})^*$, что противоречит вложению подгруппы $\left(G_{\mathfrak{F}}\right)^* \wr Z$ в группу $(G \wr Z_p)_{\mathfrak{F}^*}$. Следовательно, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}^*$.

Очевидно, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F} \diamond \mathfrak{N}$. Отсюда по утверждению 1) леммы 1.1 $\mathfrak{F}^* \subseteq \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{H}$. Утверждение (б) доказано.

(в) $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}^*\mathfrak{N}_\omega$. Так как класс Фиттинга $\mathfrak{N}_\omega$ является насыщенным гомоморфом, то по утверждению 2) леммы 1.2 $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}^*\mathfrak{N}_\omega$. Ввиду утверждения (б) $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}^* \diamond \mathfrak{N}_\omega$ и утверждение (3) ⇨ (4) доказано.

(4) ⇨ (1). Пусть $\mathfrak{S}_\omega$ – класс всех ω-групп. Так как класс $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}_\omega$, то по утверждению 1) леммы 1.2 $\mathfrak{F}^* \subseteq \mathfrak{S}_\omega^*$. Поскольку класс Фиттинга замкнут относительно взятия подгрупп, $\mathfrak{S}_\omega$ – класс Локетта, т.е. $\mathfrak{S}_\omega^* = \mathfrak{S}_\omega$ по утверждению 4) леммы 1.2. Следовательно, $\mathfrak{F}^* \subseteq \mathfrak{S}_\omega$. С другой стороны, так как $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}^*\mathfrak{N}_\omega$, то, учитывая свойство ассоциативности умножения классов Фиттинга, имеем $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}^*\mathfrak{N}_\omega = (\mathfrak{F}^*\mathfrak{N}_\omega)\mathfrak{N}_\omega = \mathfrak{F}^*(\mathfrak{N}_\omega)^2 = (\mathfrak{F}^*\mathfrak{N}_\omega)\mathfrak{N}_\omega^2 = \cdots = \mathfrak{F}^*(\mathfrak{N}_\omega)^n$ для любого натурального числа n. Поскольку $\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathfrak{N}_\omega^n = \bigcup_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{S}_\omega \cap \mathfrak{N})^n = \mathfrak{S}_\omega \cap \bigcup_{n=1}^{\infty}\mathfrak{N}^n = \mathfrak{S}_\omega \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{S}_\omega$, $\mathfrak{S}_\omega \leq \bigcup_{n=1}^{\infty}\mathfrak{F}^*(\mathfrak{N}_\omega)^n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}^*$. Таким образом, $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{S}_\omega$.

Следовательно, по лемме 1.6 (равносильность (1)⇔ (3)) класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ ω-нормален.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 3.2. Если $\omega = \mathbb{P}$, то класс $\mathfrak{H}$ из условия доказанной теоремы совпадает с классом Фиттинга $(\mathfrak{F}\mathfrak{N})^*$. Заметим, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}\mathfrak{N}$ является локальным, поскольку $\mathfrak{F}\mathfrak{N} = LR(f)$ для H-функции f такой, что $f(p) = \mathfrak{F}$ для всех $p \in \mathbb{P}$. Кроме этого, по лемме 5 [7] $\mathfrak{F}\mathfrak{N}$ – класс Локетта, т.е. $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{H}$ – локальный класс Фиттинга. Поэтому из теоремы вытекает результат Хаука о характеризациях нормальных классов Фиттинга, который приведем в качестве следствия.

Следствие 3.3 [4, теорема 5.35]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга. Тогда следующие утверждения равносильны*

(1) $\mathfrak{F}$ – нормальный класс Фиттинга;

(2) если $\mathfrak{X}$ – класс Фиттинга такой, что $\mathfrak{F}$ нормален в $\mathfrak{X}$, то $\mathfrak{F}$ квазинормален в $\mathfrak{X}$;

(3) $\mathfrak{F}$ квазинормален в $\mathfrak{F}\mathfrak{N}$;

(4) $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}\mathfrak{N}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T.C. Hawkes. – Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
2. Blessenohl, D. Über normalen Schunk-und Fittingklassen / D. Blessenohl, W. Gaschütz // Math. Z. – 1970. – Bd. 118. – S. 1–8.
3. Laue, H. Über nichtauflösbare normalen Fittingklassen / H. Laue // J. Algebra. – 1977. – Vol. 45. – P. 274–283.
4. Hauck, P. Zur Theorie der Fittingklasses endlicher auflösbarer Gruppen / P. Hauck // Habilitationschrift. – Mainz: Johanes Gutenberg – Univ. Mainz., 1977. – 152 s.
5. Воробьёв, Н.Т. Конечные π-группы с нормальными инъекторами / Н.Т. Воробьёв, А.В. Марцинкевич // Сиб. матем. журн. – 2015. – Т. 56, № 4. – С. 790–797.
6. Lockett, F.P. The Fitting class $\mathfrak{F}^*$ / F.P. Lockett // Math. Z. – 1974. – Bd. 137. – S. 131–136.
7. Воробьёв, Н.Т. О радикальных классах конечных групп с условием Локетта / Н.Т. Воробьёв // Матем. заметки. – 1988. – Т. 43, № 2. – С. 161–168.
8. Cuo, W. On $\mathfrak{F}$-radicals of finite π-soluble group / W. Guo, X. Liu, B. Li // Algebra and Discrete Mathematics. – 2006. – № 3. – P. 49–54.
9. Hauck, P. Fittingklassen und Kranzprodukte / P. Hauck // J. Algebra. – 1979. – Vol. 59. – P. 313–329.
10. Cossey, J. Products of Fitting classes / J. Cossey // Math. Z. – 1975. – Bd. 141. – № 3. – S. 289–295.

REFERENCES

1. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T.C. Hawkes. – Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
2. Blessenohl, D. Über normalen Schunk-und Fittingklassen / D. Blessenohl, W. Gaschütz // Math. Z. – 1970. – Bd. 118. – S. 1–8.
3. Laue, H. Über nichtauflösbare normalen Fittingklassen / H. Laue // J. Algebra. – 1977. – Vol. 45. – P. 274–283.
4. Hauck, P. Zur Theorie der Fittingklasses endlicher auflösbarer Gruppen / P. Hauck // Habilitationschrift. Mainz: Johanes Gutenberg – Univ. Mainz. – 1977. – 152 s.
5. Vorob'ev N.T., Martsinkevich A.V. Finite π-groups with normal injectors. *Sib. matem. zhurn.* [Siberian Mathematic Journal], 2015, 56(4), pp. 790–797.
6. Lockett, F.P. The Fitting class $\mathfrak{F}^*$ / F.P. Lockett // Math. Z. – 1974. – Bd. 137. – S. 131–136.
7. Vorob'ev N.T. About radical classes of finite groups with Lockett condition. *Matematicheskiye zametki* [Mathematic Notes], 1988, 43(2), pp. 161–168.
8. Cuo, W. On $\mathfrak{F}$-radicals of finite π-soluble group / W. Guo, X. Liu, B. Li // Algebra and Discrete Mathematics. – 2006. – № 3. – P. 49–54.
9. Hauck, P. Fittingklassen und Kranzprodukte / P. Hauck // J. Algebra. – 1979. – Vol. 59. – P. 313–329.
10. Cossey, J. Products of Fitting classes / J. Cossey // Math. Z. – 1975. – Bd. 141. – № 3. – S. 289–295.

Поступила в редакцию 02.02.2021

Адрес для корреспонденции: e-mail: vorobyovnt@tut.by – Воробьёв Н.Т.