УДК 512.622:519.615.4

# МОДИФИКАЦИЯ ФОРМУЛ ЭЙТКЕНА И АЛГОРИТМЫ АНАЛИТИЧЕСКОГО НАХОЖДЕНИЯ КРАТНЫХ КОРНЕЙ ПОЛИНОМОВ

**М.М. Чернявский, Ю.В. Трубников**
*Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»*

*Развитие возможностей компьютерной техники возродило интерес к исследованию связей между корнями полиномов и коэффициентами степенных рядов для функций от них. Также актуальным является вопрос о получении точных формул для вычисления значений кратных корней многочленов произвольной степени.*

*Цель статьи – получить аналоги формул Эйткена в терминах коэффициентов ряда Тейлора для функции 1 / f (z), где f (z) – полином произвольной степени, и рассмотреть алгоритмы получения точных формул, выражающих значения кратных корней полиномов через коэффициенты.*

***Материал и методы.*** *Материал исследования – алгебраические полиномы комплексного аргумента произвольной степени f (z) и разложение функций 1 / f (z) в ряд Тейлора, а также дискриминанты и результанты этих полиномов. Использованы методы математического анализа и система компьютерной математики Maple 2019.*

***Результаты и их обсуждение.*** *Доказана справедливость формул для приближенного вычисления значений простых корней полиномов, в которых используются коэффициенты ряда Тейлора для функции 1 / f (z). Такие формулы являются аналогами формул Эйткена и легко реализуются в системах компьютерной математики.*

*Во второй части статьи показано, как, исследуя дискриминанты и результанты полиномов, можно построить ряд формул для точного нахождения кратных корней. В случаях, когда несколько корней имеют одинаковую кратность, получаются соотношения связи между корнями и коэффициентами полинома, существенно уточняющие соотношения Виета.*

***Заключение.*** *На конкретных числовых примерах алгебраических уравнений с действительными и комплексными коэффициентами в системе компьютерной математики была подтверждена эффективность полученных аналогов формул Эйткена. Кроме того, в статье проанализированы различные алгоритмы для получения точных формул, выражающих значения кратных корней полиномов через коэффициенты.*

***Ключевые слова:*** *полином, алгебраические уравнения, ряд Тейлора, формулы Эйткена, результант, дискриминант, кратные корни, аналитическое решение.*

# MODIFICATION OF AITKEN'S FORMULAS AND ALGORITHMS FOR ANALYTICAL FINDING OF MULTIPLE ROOTS OF POLYNOMIALS

**M.M. Chernyavsky, Yu.V. Trubnikov**
*Educational Establishment "Vitebsk State P.M. Masherov University"*

*The development of the capabilities of computer technology has revived interest in the study of relationships between the roots of polynomials and the coefficients of power series for functions of them. Also current is the isssue of obtaining exact formulas for calculating the values of multiple roots of polynomials of arbitrary degree.*

*The purpose of the article is to obtain analogs of Aitken's formulas in terms of the coefficients of the Taylor series for the function 1 / f (z), where f (z) is a polynomial of arbitrary degree, and to consider algorithms for obtaining exact formulas expressing the values of multiple roots of polynomials in terms of coefficients.*

***Material and methods.*** *The research material is the algebraic polynomials of a complex argument of arbitrary degree f (z) and the expansion of the functions 1 / f (z) in a Taylor series, as well as the discriminants and resultants of these polynomials. Methods of the mathematical analysis and Maple 2019 system of computer mathematics were used in the research.*

***Findings and their discussion.*** *The validity of formulas for approximate calculation of the values of simple polynomial roots has been proved. These formulas use Taylor's series for 1/ f (z). Such formulas are analogous to Aitken's formulas and are quickly applied in systems of computer mathematics.*

*In the second part of the article, it is shown how, while studying the discriminants and resultants of polynomials, one can obtain many formulas for the exact finding of multiple roots. In cases where several roots have the same multiplicity, it is possible to obtain the relationships between the roots and the coefficients of the polynomial. Such relationships essentially refine Vieta's formulas.*

***Conclusion.*** *On specific numerical examples of algebraic equations with real and complex coefficients in the system of computer mathematics, the effectiveness of the obtained analogues of Aitken's formulas was confirmed. In addition, the article analyzes various algorithms to obtain exact formulas expressing the values of multiple roots of polynomials in terms of coefficients.*

***Key words:*** *polynomial, algebraic equations, Taylor series, Aitken's formulas, resultant, discriminant, multiple roots, analytical solution.*

С момента появления полиномов в математических науках формулы связи между коэффициентами и корнями полиномов вызывали большой интерес. Одними из первых были открыты формулы Виета, которые универсальны и активно используются и в настоящее время. Более поздние исследования посвящены изучению зависимостей между корнями и коэффициентами полиномов с некоторыми заданными свойствами. Например, одним из результатов в этом направлении является открытие в первой половине XIX века Н.И. Лобачевским, К. Греффе и Ж. Данделеном метода квадрирования корней, который в русскоязычной математической литературе называют методом Лобачевского [1].

Отдельный практический интерес сегодня представляет изучение связи между корнями различных полиномов с коэффициентами разложения функций от этих полиномов в степенные ряды. Первые результаты в данной области были получены Даниилом Бернулли в первой половине XVIII века. Впоследствии спустя почти два столетия Александр Эйткен смог обобщить метод Бернулли, однако его идеи в то время не получили широкого распространения. Более подробно результаты Эйткена рассмотрены в первом разделе настоящей статьи.

Представляют интерес также точные формулы выражения корней полиномов любой степени через коэффициенты для случаев, когда такое выражение возможно. Предположительно еще Джеймсу Сильвестру в середине XIX века был известен тот факт, что для нахождения кратных корней многочлена любой степени можно получить такие формулы. Также известно, что этой темой занимался Давид Гильберт в конце XIX века [2]. Те исследования носили общий фундаментальный характер, поэтому явного вида формул для нахождения кратных корней многочленов конкретных степеней общественности представлено не было.

В дальнейшем немногочисленные формулы для кратных корней получались обычно как сопутствующие результаты при проведении иных исследований полиномов. Например, предложенный авторами настоящей статьи новый метод определения числа действительных решений у трехчленного алгебраического уравнения произвольной степени с действительными коэффициентами позволил получить точные условия наличия кратного корня и формулы для вычисления такого [3].

Важно отметить, что в современной литературе, посвященной непосредственно исследованию полиномов, имеющих кратные корни, например, в [2], также не приводится конечный вид формул для их выражения через коэффициенты.

Цель настоящей статьи – получить аналоги формул Эйткена в терминах коэффициентов ряда Тейлора для функции $1 / f(z)$, а также рассмотреть алгоритмы получения семейств точных аналитических формул, выражающих значения кратных корней полиномов произвольной степени в виде дробно-рациональных функций от коэффициентов.

**Материал и методы.** В качестве материала исследования выступает ряд математических объектов и понятий. Во-первых, это алгебраические полиномы $f(z)$ комплексного аргумента произвольной степени. Во-вторых, это ряды Тейлора для функций $1 / f(z)$ и конструкции, содержащие коэффициенты этих рядов. В-третьих, это дискриминанты рассматриваемых полиномов, а также результанты полиномов и их производных различных порядков. К тому же к материалу исследования можно отнести структуры частных производных различных порядков от результантов многочленов как источник получения точных формул для вычисления кратных корней этих многочленов.

Основными применяемыми в настоящей статье методами являются методы математического анализа, а также возможности системы компьютерной математики *Maple* 2019 для получения необходимых результатов в аналитическом виде.

**Результаты и их обсуждение.** Для удобства восприятия результаты разделены на два раздела.

**1. Аналоги формул Эйткена в терминах коэффициентов ряда Тейлора**

**1.1. Краткая история задачи.** Из истории математики известно, что в 1728 году Даниил Бернулли открыл новый способ приближенного нахождения наибольшего по модулю корня алгебраического уравнения, но не смог подробно его обосновать. Он рассматривал алгебраические уравнения степени *n* с действительными коэффициентами вида

$$x^n+\alpha_1 x^{n-1}+\ldots+\alpha_{n-1}x+\alpha_n=0 \qquad (1)$$

и занимался построением разностных схем. Так, например, для уравнения (1) составляется разностное уравнение

$$f_{m+n}+\alpha_1 f_{m+n-1}+\ldots+\alpha_{n-1}f_{m+1}+\alpha_n f_m=0,$$

где $f_m$ – некая рекуррентная последовательность.

В случае простого примера $x^2-5x+6=0$ разностное уравнение будет иметь вид

$$f_{m+2}-5f_{m+1}+6f_m=0. \qquad (2)$$

Пусть $\lambda_1>\lambda_2$ – корни уравнения (2). Тогда

$$\lim_{m\to\infty}\frac{f_{m+1}}{f_m}=\lim_{m\to\infty}\frac{c_1\lambda_1^{m+1}+c_2\lambda_2^{m+1}}{c_1\lambda_1^m+c_2\lambda_2^m}=\lim_{m\to\infty}\left(c_1\lambda_1^{m+1}\left(1+u\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{m+1}\right)\right):\left(c_1\lambda_1^m\left(1+u\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^m\right)\right)=\lambda_1,$$

где $c_1$ и $c_2$ – некие константы.

Аналогичная ситуация наблюдается и в случае уравнения *n*-й степени (1).

Развивая эту мысль, Д. Бернулли пришел к следующему результату. Для уравнения (1) вводится замена *y* = 1 / *x.* Если снова обозначить неизвестную через *x*, то получается

$$1+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\ldots+\alpha_n x^n=0.$$

Если записать ряд

$$1/\left(1+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\ldots+\alpha_n x^n\right)=1+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_mx^m+\ldots, \qquad (3)$$

то

$$x_1=\lim_{m\to\infty}c_{m+1}/c_m.$$

Д. Бернулли нашел, что коэффициенты такого ряда связаны рекуррентным образом [4]:

$$c_m=-\left(\alpha_1c_{m-1}+\alpha_2c_{m-2}+\ldots\alpha_nc_{m-n}\right),\quad c_0=1,\quad c_1=-\alpha_1.$$

Впоследствии метод Бернулли изучался разными известными математиками, например, Эйлером и Лагранжем [5]. На практике же рассматриваемый алгоритм нахождения максимального по модулю корня не нашел широкого применения, объективно уступая место традиционным численным методам. Заметим, что алгоритм Бернулли работает и в случае, когда уравнение (1) имеет комплексные коэффициенты.

Важно отметить, что еще Леонард Эйлер установил: последовательность $c_{m+1}/c_m$ не всегда имеет определенный предел даже в случае, когда коэффициенты уравнения (1) являются действительными и старший по модулю корень этого уравнения также действительный. Эйлер долго изучал данный факт, но так и не смог дать ему теоретическое обоснование. Такое обоснование получено авторами настоящей статьи и приведено, например, в [6].

Дальнейшее развитие алгоритма выражения корней уравнения (1) через коэффициенты ряда (3) отражено в работах А. Эйткена (1920-е годы). Так, например, в статье [7] предлагаются следующие формулы ($|x_1|\ge|x_2|\ge|x_3|\ge\ldots\ge|x_n|$):

$$\lim_{m\to\infty}\frac{c_{m+1}}{c_m}=x_1,\ \lim_{m\to\infty}\left(\frac{\begin{vmatrix}c_{m+1}&c_{m+2}\\c_{m+2}&c_{m+3}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}c_m&c_{m+1}\\c_{m+1}&c_{m+2}\end{vmatrix}}\div\frac{c_{m+1}}{c_m}\right)=\frac{x_1x_2}{x_1}=x_2,\ \lim_{m\to\infty}\left(\frac{\begin{vmatrix}c_{m+1}&c_{m+2}&c_{m+3}\\c_{m+2}&c_{m+3}&c_{m+4}\\c_{m+3}&c_{m+4}&c_{m+5}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}c_m&c_{m+1}&c_{m+2}\\c_{m+1}&c_{m+2}&c_{m+3}\\c_{m+2}&c_{m+3}&c_{m+4}\end{vmatrix}}\div\frac{\begin{vmatrix}c_{m+1}&c_{m+2}\\c_{m+2}&c_{m+3}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}c_m&c_{m+1}\\c_{m+1}&c_{m+2}\end{vmatrix}}\right)=\frac{x_1x_2x_3}{x_1x_2}=x_3.$$

Для произвольного корня $x_i$ имеет место такая формула:

$$x_i = \lim_{m\to\infty}\left(\frac{H_i^{(m+1)}}{H_i^{(m)}} \div \frac{H_{i-1}^{(m+1)}}{H_{i-1}^{(m)}}\right), \text{ где } H_i^{(m)} = \begin{vmatrix} c_m & c_{m+1} & \dots & c_{m+i-1} \\ c_{m+1} & c_{m+2} & \dots & c_{m+i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m+i-1} & c_{m+i} & \dots & c_{m+2i-2} \end{vmatrix}, \qquad H_0^{(m)} = 1.$$

Формулы Эйткена и алгоритм Бернулли как его частный случай не приобрели популярности в вычислительной математике и до начала XXI века представляли только теоретический интерес. Первой причиной была высокая трудоемкость вычислений коэффициентов ряда (3), второй – отсутствие гарантий в том, что соответствующие пределы для нахождения корней существуют. Однако с развитием систем компьютерной математики ситуация изменилась.

**1.2. Основные результаты авторов статьи.** Рассмотрим случай, когда уравнение

$$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0 \tag{4}$$

с комплексными коэффициентами имеет простые корни, причем

$$0 < |z_1| < |z_2| < \dots < |z_n|.$$

В данном случае ряд Тейлора функции $1/P(z)$ имеет вид

$$1/P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad \text{где} \quad c_k = \frac{b_1}{z_1^k} + \frac{b_2}{z_2^k} + \dots + \frac{b_n}{z_n^k},$$

$z_j$ $(j = 1, 2, \dots, n)$ – корни полинома *P* (*z*); $b_j$ $(j = 1, 2, \dots, n)$ – некоторые константы. Это следует из разложения дроби 1 / *P* (*z*) на простые, для каждой из которых коэффициенты разложения в ряд Тейлора несложно получить аналитически [2].

Составим отношение

$$\frac{c_m}{c_{m+1}} = \frac{\dfrac{b_1}{z_1^m} + \dfrac{b_2}{z_2^m} + \dots + \dfrac{b_n}{z_n^m}}{\dfrac{b_1}{z_1^{m+1}} + \dfrac{b_2}{z_2^{m+1}} + \dots + \dfrac{b_n}{z_n^{m+1}}} = \frac{z_1^{m+1}}{z_1^m} \cdot \frac{b_1 + b_2\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^m + \dots + b_n\left(\dfrac{z_1}{z_n}\right)^m}{b_1 + b_2\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^{m+1} + \dots + b_n\left(\dfrac{z_1}{z_n}\right)^{m+1}}.$$

Так как $|z_1| < |z_2|$, то все слагаемые в скобках последнего выражения стремятся к нулю при $m \to \infty$. Следовательно,

$$\lim_{m\to\infty} c_m / c_{m+1} = z_1. \tag{5}$$

Для выражения корня $z_2$ рассмотрим определители:

$$\begin{vmatrix} c_{m+8} & c_{m+7} \\ c_{m+7} & c_{m+6} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} c_{m+7} & c_{m+6} \\ c_{m+6} & c_{m+5} \end{vmatrix}.$$

Учитывая, что величины $b_j / z_j^k$ $(j = 3, 4, \dots, n)$ имеют более высокий порядок малости по сравнению с величинами $b_j / z_j^k$ $(j = 1, 2)$, для этих определителей считаем, что

$$c_k = b_1 / z_1^k + b_2 / z_2^k,$$

тогда

$$\begin{vmatrix} c_{m+8} & c_{m+7} \\ c_{m+7} & c_{m+6} \end{vmatrix} = \frac{b_1 b_2 (z_1 - z_2)^2}{z_1^8 z_2^8 z_1^m z_2^m}, \qquad \begin{vmatrix} c_{m+7} & c_{m+6} \\ c_{m+6} & c_{m+5} \end{vmatrix} = \frac{b_1 b_2 (z_1 - z_2)^2}{z_1^7 z_2^7 z_1^m z_2^m}.$$

Таким образом, для полных (т.е. не урезанных) значений $c_k$ получим

$$\begin{vmatrix} c_{m+7} & c_{m+6} \\ c_{m+6} & c_{m+5} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_{m+8} & c_{m+7} \\ c_{m+7} & c_{m+6} \end{vmatrix} = \left(\frac{b_1 b_2 (z_1 - z_2)^2}{z_1^7 z_2^7 z_1^m z_2^m} + h_1\right) : \left(\frac{b_1 b_2 (z_1 - z_2)^2}{z_1^8 z_2^8 z_1^m z_2^m} + h_2\right),$$

где $h_j$ $(j = 1, 2)$ – величины более высокого порядка малости по сравнению с величиной $z_1^{-m} z_2^{-m}$. Т.е.

$$\lim_{m\to\infty}\left(\begin{vmatrix} c_{m+7} & c_{m+6} \\ c_{m+6} & c_{m+5} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_{m+8} & c_{m+7} \\ c_{m+7} & c_{m+6} \end{vmatrix}\right) = \lim_{m\to\infty}\left(\left(\frac{b_1b_2\left(z_1-z_2\right)^2}{z_1^7z_2^7z_1^mz_2^m}+h_1\right):\left(\frac{b_1b_2\left(z_1-z_2\right)^2}{z_1^8z_2^8z_1^mz_2^m}+h_2\right)\right) = z_1z_2$$

и

$$\lim_{m\to\infty}\left(\begin{vmatrix} c_{m+7} & c_{m+6} \\ c_{m+6} & c_{m+5} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_{m+8} & c_{m+7} \\ c_{m+7} & c_{m+6} \end{vmatrix}\right) : \lim_{m\to\infty}\frac{c_{m+7}}{c_{m+8}} = \frac{z_1z_2}{z_1} = z_2 .$$

Далее для получения удобного значения определителя

$$\begin{vmatrix} c_{m+8} & c_{m+7} & c_{m+6} \\ c_{m+7} & c_{m+6} & c_{m+5} \\ c_{m+6} & c_{m+5} & c_{m+4} \end{vmatrix} = \frac{b_1b_2b_3\left(z_1-z_2\right)^2\left(z_1-z_3\right)^2\left(z_2-z_3\right)^2}{z_1^8z_2^8z_3^8\,z_1^mz_2^mz_3^m}$$

в формулах для $c_k$ оставляем слагаемые, содержащие только $z_j$ $\left(j=1,2,3\right)$.

Таким образом,

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\begin{vmatrix} c_{m+7} & c_{m+6} & c_{m+5} \\ c_{m+6} & c_{m+5} & c_{m+4} \\ c_{m+5} & c_{m+4} & c_{m+3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_{m+8} & c_{m+7} & c_{m+6} \\ c_{m+7} & c_{m+6} & c_{m+5} \\ c_{m+6} & c_{m+5} & c_{m+4} \end{vmatrix}} = z_1z_2z_3 . \quad \Rightarrow \lim_{m\to\infty}\frac{\begin{vmatrix} c_{m+7} & c_{m+6} & c_{m+5} \\ c_{m+6} & c_{m+5} & c_{m+4} \\ c_{m+5} & c_{m+4} & c_{m+3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_{m+8} & c_{m+7} & c_{m+6} \\ c_{m+7} & c_{m+6} & c_{m+5} \\ c_{m+6} & c_{m+5} & c_{m+4} \end{vmatrix}} : \lim_{m\to\infty}\frac{\begin{vmatrix} c_{m+7} & c_{m+6} \\ c_{m+6} & c_{m+5} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_{m+8} & c_{m+7} \\ c_{m+7} & c_{m+6} \end{vmatrix}} = z_3$$

и т.д.

Приведем следующий числовой пример. Пусть

$$f\left(z\right) = z^4 - 14z^3 + 71z^2 - 154z + 120 = (z-2)(z-3)(z-4)(z-5). \tag{6}$$

При помощи системы компьютерной математики Maple разложим функцию $1\,/\,f\,(z)$ в ряд Тейлора, например, до 96 слагаемых. Тогда приближенно находим

$$z_1 \approx c_{95}\,/\,c_{96} = 1{,}99999999999999 .$$

$$z_{12} = z_1z_2 \approx \begin{vmatrix} c_{95} & c_{94} \\ c_{94} & c_{93} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_{96} & c_{95} \\ c_{95} & c_{94} \end{vmatrix} = 5{,}99999999999391; \Rightarrow z_1 = \frac{z_{12}}{z_1} \approx 3{,}0000000000000.$$

$$z_{123} = z_1z_2z_3 = \begin{vmatrix} c_{95} & c_{94} & c_{93} \\ c_{94} & c_{93} & c_{92} \\ c_{93} & c_{92} & c_{91} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_{96} & c_{95} & c_{94} \\ c_{95} & c_{94} & c_{93} \\ c_{94} & c_{93} & c_{92} \end{vmatrix} \approx 23{,}9999999928385; \Rightarrow z_3 = \frac{z_{123}}{z_{12}} \approx 3{,}9999999988104.$$

$$z_{1234} = z_1z_2z_3z_4 = \begin{vmatrix} c_{95} & c_{94} & c_{93} & c_{92} \\ c_{94} & c_{93} & c_{92} & c_{91} \\ c_{93} & c_{92} & c_{91} & c_{90} \\ c_{92} & c_{91} & c_{90} & c_{89} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_{96} & c_{95} & c_{94} & c_{93} \\ c_{95} & c_{94} & c_{93} & c_{92} \\ c_{94} & c_{93} & c_{92} & c_{91} \\ c_{93} & c_{92} & c_{91} & c_{90} \end{vmatrix} \approx 120{,}000000000000;$$

$$\Rightarrow z_4 = \frac{z_{1234}}{z_{123}} \approx 5{,}000000001491 .$$

Отметим, что значение произведения всех корней уравнения (6) равно свободному члену по теореме Виета. Отношение определителей в последнем выражении приведено для того, чтобы подтвердить справедливость аналога формулы Эйткена и обратить внимание на точность вычисления по ней.

Далее логичным шагом будет рассмотрение контрпримера, для которого аналоги формулы Эйткена не должны давать результат. Можно показать, что предела отношения $c_m\,/\,c_{m+1}$ в аналогах формул Бернулли (5) не существует, когда два минимальных по модулю корня уравнения (4) находятся на одной окружности комплексной плоскости и эти корни не равны между собой [6]. Поэтому рассмотрим случай, когда для уравнения четвертой степени выполнено

$$0 < \left|z_1\right| < \left|z_2\right| < \left|z_3\right| = \left|z_4\right| .$$

Пусть это будет уравнение

$$f\left(z\right)=z^4-5z^3-10z^2+80z-96=(z-2)(z-3)(z-4)(z+4). \qquad (7)$$

Тогда

$$z_1\approx\frac{c_{95}}{c_{96}}=1,99999999999999\,.$$

$$z_{12}=z_1z_2\approx\begin{vmatrix}c_{95} & c_{94}\\ c_{94} & c_{93}\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}c_{96} & c_{95}\\ c_{95} & c_{94}\end{vmatrix}=5,99999999999391;\Rightarrow z_1=\frac{z_{12}}{z_1}\approx 3,000000000000.$$

Проверим отношение определителей третьего порядка:

$$\begin{vmatrix}c_{95} & c_{94} & c_{93}\\ c_{94} & c_{93} & c_{92}\\ c_{93} & c_{92} & c_{91}\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}c_{96} & c_{95} & c_{94}\\ c_{95} & c_{94} & c_{93}\\ c_{94} & c_{93} & c_{92}\end{vmatrix}\approx -21,81818181816\neq z_1z_2z_3,$$

что было ожидаемо. Вычислим отношение определителей четвертого порядка:

$$\begin{vmatrix}c_{95} & c_{94} & c_{93} & c_{92}\\ c_{94} & c_{93} & c_{92} & c_{91}\\ c_{93} & c_{92} & c_{91} & c_{90}\\ c_{92} & c_{91} & c_{90} & c_{89}\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}c_{96} & c_{95} & c_{94} & c_{93}\\ c_{95} & c_{94} & c_{93} & c_{92}\\ c_{94} & c_{93} & c_{92} & c_{91}\\ c_{93} & c_{92} & c_{91} & c_{90}\end{vmatrix}\approx -96,000000000000=z_{1234}=z_1z_2z_3z_4.$$

То есть наличие двух корней с одинаковыми модулями (в нашем случае это числа $z_3=4$ и $z_4=-4$) сделало неверной только формулу для приближенного нахождения произведения $z_1z_2z_3$.

**2. Получение точных формул для нахождения значений кратных корней полинома пятой степени в терминах дробно-рациональных функций от коэффициентов**

В данной части статьи рассматриваются алгебраические уравнения пятой степени с комплексными коэффициентами $b_i$ $\left(i=\overline{1,5}\right)$

$$P\left(z\right)=z^5+b_1z^4+b_2z^3+b_3z^2+b_4z+b_5=0, \qquad (8)$$

имеющие заданную мультипликативную структуру, то есть раскладываемые на множители следующим образом:

$$P\left(z\right)=\left(z-z_1\right)^5,\quad P\left(z\right)=\left(z-z_1\right)^4\left(z-z_2\right),\quad P\left(z\right)=\left(z-z_1\right)^3\left(z-z_2\right)^2,$$

и т.д. Для таких полиномов исследуется структура частных производных от дискриминанта полинома по коэффициентам, что позволяет получать последовательность точных формул для нахождения значений кратных корней (если кратный корень единственный) либо выражения связи между корнями полинома и коэффициентами, существенно уточняющие соотношения Виета.

**2.1. Случай одного кратного корня**

Пусть уравнение (8) имеет один кратный корень $z_1$ кратности 2, то есть представимо в виде

$$\left(z-z_1\right)^2\left(z-z_2\right)\left(z-z_3\right)\left(z-z_4\right)=0,$$

тогда справедлива теорема 1.

**Теорема 1.** *Корень уравнения (8) $z_1$ кратности 2, если он единственный кратный корень, можно определить по формулам*

$$z_1=\frac{\partial G}{\partial b_j}:\frac{\partial G}{\partial b_{j+1}}\quad\left(j=\overline{1,4}\right), \qquad (9)$$

*где $G$ – дискриминант уравнения (1).*

Доказательство. Дискриминант уравнения (8) будет иметь вид [8]:

$$G=256b_1^5b_5^3-192b_1^4b_2b_4b_5^2-128b_1^4b_3^2b_5^2+144b_1^4b_3b_4^2b_5-27b_1^4b_4^4+144b_1^3b_2^2b_3b_5^2-$$
$$-6b_1^3b_2^2b_4^2b_5-80b_1^3b_2b_3^2b_4b_5+18b_1^3b_2b_3b_4^3+16b_1^3b_3^4b_5-4b_1^3b_3^3b_4^2-27b_1^2b_2^4b_5^2+18b_1^2b_2^3b_3b_4b_5-$$
$$-4b_1^2b_2^3b_4^3-4b_1^2b_2^2b_3^3b_5+b_1^2b_2^2b_3^2b_4^2-1600b_1^3b_2b_5^3+160b_1^3b_3b_4b_5^2-36b_1^3b_4^3b_5+1020b_1^2b_2^2b_4b_5^2+$$

$$+560b_1^2b_2b_3^2b_5^2-746b_1^2b_2b_3b_4^2b_5+144b_1^2b_2b_4^4+24b_1^2b_3^3b_4b_5-6b_1^2b_3^2b_4^3-630b_1b_2^3b_3b_5^2+$$
$$+24b_1b_2^3b_4^2b_5+356b_1b_2^2b_3^2b_4b_5-80b_1b_2^2b_3b_4^3-72b_1b_2b_3^4b_5+18b_1b_2b_3^3b_4^2+108b_2^5b_5^2-$$
$$-72b_2^4b_3b_4b_5+16b_2^4b_4^3+16b_2^3b_3^3b_5-4b_2^3b_3^2b_4^2+2000b_1^2b_3b_5^3-50b_1^2b_4^2b_5^2+2250b_1b_2^2b_5^3-$$
$$-2050b_1b_2b_3b_4b_5^2+160b_1b_2b_4^3b_5-900b_1b_3^3b_5^2+1020b_1b_3^2b_4^2b_5-192b_1b_3b_4^4-900b_2^3b_4b_5^2+$$
$$+825b_2^2b_3^2b_5^2+560b_2^2b_3b_4^2b_5-128b_2^2b_4^4-630b_2b_3^3b_4b_5+144b_2b_3^2b_4^3+108b_3^5b_5-27b_3^4b_4^2-$$
$$-2500b_1b_4b_5^3-3750b_2b_3b_5^3+2000b_2b_4^2b_5^2+2250b_3^2b_4b_5^2-1600b_3b_4^3b_5+256b_4^5+3125b_5^4.$$

Найдем значения частных производных от дискриминанта по коэффициентам уравнения (8) $\partial G/\partial b_i$ $(i=\overline{1,5})$, а затем подставим в них значения коэффициентов $b_i$, выраженных с помощью соотношений Виета через корни $z_i$ $(i=\overline{1,5})$. Поскольку промежуточные преобразования имеют достаточно громоздкий вид, то приведем сразу конечный результат:

$$\frac{\partial G}{\partial b_i}=-4z_1^{5-i}\left(z_2-z_3\right)^2\left(z_2-z_4\right)^2\left(z_3-z_4\right)^2\left(z_1-z_2\right)^3\left(z_1-z_3\right)^3\left(z_1-z_4\right)^3\quad\left(i=\overline{1,5}\right).$$

Отсюда непосредственно следует справедливость теоремы 1.

Рассмотрим конкретный числовой пример. Пусть

$$z^5-19z^4+135z^3-449z^2+704z-420=\left(z-2\right)^2\left(z-3\right)\left(z-5\right)\left(z-7\right).$$

Подставляя поочередно коэффициенты полинома в формулы (9), убеждаемся, что все они дают значение кратного корня $z_1=2$.

Теперь рассмотрим случай, когда уравнение (8) имеет один кратный корень $z_1$ кратности 3 и два простых корня, то есть оно представимо в виде $\left(z-z_1\right)^3\left(z-z_2\right)\left(z-z_3\right)=0.$

Обозначим

$$g_1=\frac{\partial^2 G}{\partial b_1^2},\ g_2=\frac{\partial^2 G}{\partial b_1\partial b_2},\ g_3=\frac{\partial^2 G}{\partial b_2^2},\ g_4=\frac{\partial^2 G}{\partial b_2\partial b_3},\ \ldots,\ g_8=\frac{\partial^2 G}{\partial b_4\partial b_5},\ g_9=\frac{\partial^2 G}{\partial b_5^2}. \tag{10}$$

Тогда справедлива теорема 2.

**Теорема 2.** *Корень уравнения (8) $z_1$ кратности 3 при отсутствии других кратных корней находится по формулам*

$$z_1=g_k/g_{k+1}\quad\left(k=\overline{1,8}\right), \tag{11}$$

*где $g_j$ находятся по формулам (10).*

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1. После вычисления всех $g_k$ по формулам (10) и подстановки в них коэффициентов исходного уравнения, выраженных через корни, после преобразования получаем

$$g_j=-54z_1^{9-j}\left(z_2-z_3\right)^2\left(z_1-z_2\right)^4\left(z_1-z_3\right)^4\quad\left(j=\overline{1,9}\right),$$

откуда сразу следует справедливость теоремы 2.

Заметим, что формулы (9) для нахождения значений корня кратности 3 не работают, поскольку в этом случае все первые производные от дискриминанта по коэффициентам уравнения равны нулю.

Длина конечных выражений (11) примерно одинаковая. Ниже приведено $z_1=\dfrac{\partial^2 G}{\partial b_2^2}:\dfrac{\partial^2 G}{\partial b_2\partial b_3}.$

$$z_1=\left(144b_1^3b_3b_5^2-6b_1^3b_4^2b_5-162b_1^2b_2^2b_5^2+54b_1^2b_2b_3b_4b_5-12b_1^2b_2b_4^3-4b_1^2b_3^3b_5+b_1^2b_3^2b_4^2+1020b_1^2b_4b_5^2-\right.$$
$$-1890b_1b_2b_3b_5^2+72b_1b_2b_4^2b_5+356b_1b_3^2b_4b_5-80b_1b_3b_4^3+1080b_2^3b_5^2-432b_2^2b_3b_4b_5+96b_2^2b_4^3+$$
$$\left.+48b_2b_3^3b_5-12b_2b_3^2b_4^2+2250b_1b_5^3-2700b_2b_4b_5^2+825b_3^2b_5^2+560b_3b_4^2b_5-128b_4^4\right)/\left(144b_1^3b_2b_5^2-\right.$$
$$-80b_1^3b_3b_4b_5+9b_1^3b_4^3+27b_1^2b_2^2b_4b_5-12b_1^2b_2b_3^2b_5+2b_1^2b_2b_3b_4^2+560b_1^2b_3b_5^2-373b_1^2b_4^2b_5-$$
$$-945b_1b_2^2b_5^2+712b_1b_2b_3b_4b_5-80b_1b_2b_4^3-144b_1b_3^3b_5+27b_1b_3^2b_4^2-144b_2^3b_4b_5+72b_2^2b_3^2b_5-$$
$$\left.-12b_2^2b_3b_4^2-1025b_1b_4b_5^2+1650b_2b_3b_5^2+560b_2b_4^2b_5-945b_3^2b_4b_5+144b_3b_4^3-1875b_5^3\right).$$

Теперь рассмотрим случай, когда уравнение (8) имеет один кратный корень $z_1$ кратности 4 и один простой корень, то есть оно представимо в виде $(z-z_1)^4(z-z_2)=0.$

Обозначим

$$h_1=\frac{\partial^3 G}{\partial b_1^3},\ h_2=\frac{\partial^3 G}{\partial b_1^2\partial b_2},\ h_3=\frac{\partial^3 G}{\partial b_1\partial b_2^2},\ h_4=\frac{\partial^3 G}{\partial b_2^3},\ \ldots,\ h_{12}=\frac{\partial^3 G}{\partial b_4\partial b_5^2},\ h_{13}=\frac{\partial^3 G}{\partial b_5^3}. \tag{12}$$

Тогда справедлива теорема 3.

**Теорема 3.** *Корень уравнения (8) $z_1$ кратности 4 можно точно вычислить по формулам*

$$z_1=h_k\,/\,h_{k+1}\quad \left(k=\overline{1,12}\right), \tag{13}$$

*где $h_j$ находятся по формулам (12).*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1. После соответствующих преобразований получаем, что частные производные третьего порядка от дискриминанта (12) имеют вид

$$h_j=1536z_1^{13-j}\left(z_1-z_2\right)^5\quad \left(j=\overline{1,13}\right),$$

откуда сразу следует справедливость формул (13).

Выражения (13) представляют собой дробно-рациональные выражения от коэффициентов уравнения (8). Например, отношение $h_{12}\,/\,h_{13}$ имеет вид:

$$z_1=\frac{-\left(96b_1^4b_2-80b_1^3b_3-510b_1^2b_2^2+50b_1^2b_4+1025b_1b_2b_3+450b_2^3+3750b_1b_5-2000b_2b_4-1125b_3^2\right)}{3\left(3128b_1^5-800b_1^3b_2+1000b_1^2b_3+1125b_1b_2^2-1250b_1b_4-1875b_2b_3+6250b_5\right)}. \tag{14}$$

Рассмотрим конкретный числовой пример. Пусть

$$x^5-23x^4+210x^3-950x^2+2125x-1875=\left(x-5\right)^4\left(x-3\right).$$

Убеждаемся, что все формулы (13) дают значение $z_1=5.$

Наконец, если уравнение (8) имеет вид $\left(z-z_1\right)^5=0,$ то справедлива

**Теорема 4.** *Корень уравнения (8) $z_1$ кратности 5 можно точно вычислить по формулам*

$$z_1=f_k\,/\,f_{k+1}\quad \left(k=\overline{1,15}\right), \tag{15}$$

*где $f_k$ находятся по формулам*

$$f_1=\frac{\partial^4 G}{\partial b_1^4},\ f_2=\frac{\partial^4 G}{\partial b_1^3\partial b_2},\ f_3=\frac{\partial^4 G}{\partial b_1^2\partial b_2^2},\ f_4=\frac{\partial^4 G}{\partial b_1\partial b_2^3},\ \ldots,\ f_{15}=\frac{\partial^4 G}{\partial b_4\partial b_5^3},\ f_{16}=\frac{\partial^4 G}{\partial b_5^4}.$$

Среди всех формул из семейства (15) максимальную пользу дает последнее отношение

$$z_1=f_{15}\,/\,f_{16}=-b_1\,/\,5.$$

### 2.2. Случай двух кратных корней

Представляет интерес структура частных производных различных порядков от дискриминанта полинома (8) по коэффициентам в случаях, когда этот полином имеет два кратных корня.

Сначала рассмотрим случай, когда уравнение (8) имеет вид $\left(z-z_1\right)^2\left(z-z_2\right)^2\left(z-z_3\right)=0.$

Несложно убедиться, что в этом случае все первые частные производные от дискриминанта $\partial G/\partial b_i$ $(i=\overline{1,5})$ равны нулю. Рассмотрим частные производные второго порядка (10). В терминах корней в рассматриваемой ситуации они принимают вид

$$\frac{\partial^2 G}{\partial b_1^2}=32z_1^4z_2^4\left(z_2-z_3\right)^3\left(z_1-z_3\right)^3\left(z_1-z_2\right)^4;\quad \frac{\partial^2 G}{\partial b_1\partial b_2}=16z_1^3z_2^3\left(z_2-z_3\right)^3\left(z_1-z_3\right)^3(z_1+z_2)\left(z_1-z_2\right)^4;$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial b_2^2}=32z_1^3z_2^3\left(z_2-z_3\right)^3\left(z_1-z_3\right)^3\left(z_1-z_2\right)^4;\quad \frac{\partial^2 G}{\partial b_2\partial b_3}=16z_1^2z_2^2\left(z_2-z_3\right)^3\left(z_1-z_3\right)^3(z_1+z_2)\left(z_1-z_2\right)^4;$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial b_3^2}=32z_1^2z_2^2\left(z_2-z_3\right)^3\left(z_1-z_3\right)^3\left(z_1-z_2\right)^4;\quad \frac{\partial^2 G}{\partial b_3\partial b_4}=16z_1z_2\left(z_2-z_3\right)^3\left(z_1-z_3\right)^3(z_1+z_2)\left(z_1-z_2\right)^4;$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial b_4^2}=32z_1z_2\left(z_2-z_3\right)^3\left(z_1-z_3\right)^3\left(z_1-z_2\right)^4;\quad \frac{\partial^2 G}{\partial b_4\partial b_5}=16\left(z_2-z_3\right)^3\left(z_1-z_3\right)^3(z_1+z_2)\left(z_1-z_2\right)^4;$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial b_5^2} = 32\left(z_2 - z_3\right)^3\left(z_1 - z_3\right)^3\left(z_1 - z_2\right)^4.$$

Из представленных выражений можно сразу найти значения произведения кратных корней и их полусумму:

$$z_{12} = z_1 z_2 = \frac{\partial^2 G}{\partial b_j^2} : \frac{\partial^2 G}{\partial b_{j+1}^2} \quad \left(j = \overline{1,4}\right), \qquad \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{\partial^2 G}{\partial b_k \partial b_{k+1}} : \frac{\partial^2 G}{\partial b_{k+1}^2} \quad \left(k = \overline{1,4}\right),$$

что существенно уточняет соотношения Виета и позволяет сразу вычислить значения всех трех различных корней. Оставшийся простой корень найдется по формуле: $z_3 = -b_5 / z_{12}^2$.

Наконец, рассмотрим случай, когда уравнение (8) имеет вид $\left(z - z_1\right)^3\left(z - z_2\right)^2 = 0$.

В этом случае все частные производные первого и второго порядка от дискриминанта полинома по коэффициентам равны нулю. Вычислим все частные производные третьего порядка от дискриминанта (12) и запишем их в терминах корней полинома:

$$\frac{\partial^3 G}{\partial b_1^3} = -648 z_1^8 z_2^4\left(z_1 - z_2\right)^5; \qquad \frac{\partial^3 G}{\partial b_1^2 \partial b_2} = -216 z_1^7 z_2^3\left(z_1 + 2z_2\right)\left(z_1 - z_2\right)^5;$$

$$\frac{\partial^3 G}{\partial b_1 \partial b_2^2} = -216 z_1^6 z_2^3\left(2z_1 + z_2\right)\left(z_1 - z_2\right)^5; \qquad \frac{\partial^3 G}{\partial b_2^3} = -648 z_1^6 z_2^3\left(z_1 - z_2\right)^5;$$

$$\frac{\partial^3 G}{\partial b_2^2 \partial b_3} = -216 z_1^5 z_2^2\left(z_1 + 2z_2\right)\left(z_1 - z_2\right)^5; \qquad \frac{\partial^3 G}{\partial b_2 \partial b_3^2} = -216 z_1^4 z_2^2\left(2z_1 + z_2\right)\left(z_1 - z_2\right)^5;$$

$$\frac{\partial^3 G}{\partial b_3^3} = -648 z_1^4 z_2^2\left(z_1 - z_2\right)^5; \qquad \frac{\partial^3 G}{\partial b_3^2 \partial b_4} = -216 z_1^3 z_2\left(z_1 + 2z_2\right)\left(z_1 - z_2\right)^5;$$

$$\frac{\partial^3 G}{\partial b_3 \partial b_4^2} = -216 z_1^2 z_2\left(2z_1 + z_2\right)\left(z_1 - z_2\right)^5; \qquad \frac{\partial^3 G}{\partial b_4^3} = -648 z_1^2 z_2\left(z_1 - z_2\right)^5;$$

$$\frac{\partial^3 G}{\partial b_4^2 \partial b_5} = -216 z_1\left(z_1 + 2z_2\right)\left(z_1 - z_2\right)^5; \quad \frac{\partial^3 G}{\partial b_4 \partial b_5^2} = -216\left(2z_1 + z_2\right)\left(z_1 - z_2\right)^5; \quad \frac{\partial^3 G}{\partial b_5^3} = -648\left(z_1 - z_2\right)^5.$$

Непосредственно из этих выражений следуют формулы для нахождения $\left(2z_1 + z_2\right)/3.$ Поскольку в данном случае из соотношений Виета $b_1 = -3z_1 - 2z_2$, то это значит, что система для отыскания $z_1$ и $z_2$ является линейной. Обозначим

$$a = \frac{\partial^3 G}{\partial b_4 \partial b_5^2} : \frac{\partial^3 G}{\partial b_5^3} = \frac{2z_1 + z_2}{3}.$$

Тогда $z_1 = 6a + b_1, \quad z_2 = -2b_1 - 9a$.

**2.3. Получение выражений для кратных корней в более компактном виде**

Многообразие точных аналитических формул для нахождения кратных корней алгебраического уравнения фиксированной степени не заканчивается формулами, получаемыми при анализе частных производных от дискриминанта уравнения. В данном подразделе статьи рассматривается понятие результантов многочлена и его производных. Из непосредственного анализа частных производных от таких результантов можно получить точные формулы для нахождения кратных корней кратности 3 и выше в более компактном виде, чем по алгоритмам из подраздела 2.2 настоящего исследования.

Пусть уравнения

$$f\left(z\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^{n-i} = 0, \qquad \varphi\left(z\right) = \sum_{j=0}^{m} b_j z^{m-j} = 0 \tag{16}$$

имеют общий корень. Необходимым и достаточным условием этого свойства является равенство

$$S\left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m\right) = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\left(\alpha_i - \beta_j\right) = 0,$$

в котором $\left\{\alpha_i\right\}_{i=1}^{n}$ и $\left\{\beta_j\right\}_{j=1}^{m}$ – корни уравнений (16). Так как функция *S* является симметричной функцией этих совокупностей корней, то ее можно представить в виде функции коэффициентов

$$\left\{\frac{a_i}{a_0}\right\}_{i=1}^{i=n} \text{ и } \left\{\frac{b_j}{b_0}\right\}_{j=1}^{j=m}.$$

Выражение $R = a_0^m b_0^n S(a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_m)$ называется *результантом* полиномов $f$ и $\varphi$ [8, с. 30]. Так как

$$f(z) = a_0 \prod_{i=1}^{n} (z - \alpha_i), \qquad \varphi(z) = b_0 \prod_{j=1}^{m} (z - \beta_j),$$

то результант представим в виде

$$R = a_0^m \varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\cdot\ldots\cdot\varphi(\alpha_n) = (-1)^{mn} b_0^n f(\beta_1) f(\beta_2)\cdot\ldots\cdot f(\beta_m). \tag{17}$$

Также можно показать, что результант можно выразить в виде следующего определителя:

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n & & \\ & a_0 & a_1 & \dots & a_n & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ b_0 & b_1 & \dots & b_m & & \\ & b_0 & b_1 & \dots & b_m & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & b_0 & b_1 & \dots & b_m \end{vmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} m \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n \end{matrix}.$$

В местах, где ничего не написано, подразумеваются нули.

Для простоты восприятия информации поясним алгоритм нахождения кратного корня в виде дробно-рациональной функции от коэффициентов полинома на примере кубического уравнения. Пусть

$$f(z) = z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3, \quad \varphi(z) = b_0 z^2 + b_1 z + b_2. \tag{18}$$

Запишем результант этих полиномов в виде (17):

$$R = \varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\varphi(\alpha_3) \quad (a_0 = 1).$$

Обозначим $\varphi(\alpha_j) = \varphi_j \ \ (j = 1,2,3)$ и найдем частную производную

$$\frac{\partial R}{\partial b_1} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial b_1}\varphi_2\varphi_3 + \varphi_1\frac{\partial \varphi_2}{\partial b_1}\varphi_3 + \varphi_1\varphi_2\frac{\partial \varphi_3}{\partial b_1} = \alpha_1\varphi_2\varphi_3 + \varphi_1\alpha_2\varphi_3 + \varphi_1\varphi_2\alpha_3 .$$

Далее

$$\frac{\partial^2 R}{\partial b_1 \partial b_2} = \alpha_1(\varphi_3 + \varphi_2) + \alpha_2(\varphi_3 + \varphi_1) + \alpha_3(\varphi_1 + \varphi_2). \tag{19}$$

Если $\alpha_1 = \alpha_2 -$ кратный корень полинома $f$, а $\varphi$ – его производная, то равенство (19) будет иметь вид $\frac{\partial^2 R}{\partial b_1 \partial b_2} = 2\alpha_1\varphi_3$. Аналогично $\partial^2 R / \partial b_2^2 = 2\varphi_3$.

Таким образом,

$$\frac{\partial^2 R}{\partial b_1 \partial b_2} : \frac{\partial^2 R}{\partial b_2^2} = \frac{2\alpha_1\varphi_3}{2\varphi_3} = \alpha_1.$$

Так как результант является полиномиальной функцией от коэффициентов $a_i\ (i = 1, 2, \dots, n),\ b_j\ (j = 0, 1, \dots, m),$ то кратный корень выражается в виде дробно-рациональной функции от коэффициентов $a_i$.

Применим соответствующий алгоритм для нахождения кратного корня кратности 2 кубического уравнения.

Шаг 1. Находим результант полиномов (18).

Шаг 2. Находим требуемые частные производные:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial b_1 \partial b_2} = -a_1 a_2 b_0 - 2a_1 b_2 + 2a_2 b_1 + 3a_3 b_0; \qquad \frac{\partial^2 R}{\partial b_2^2} = 2a_1^2 b_0 - 2a_1 b_1 - 4a_2 b_0 + 6b_2.$$

Шаг 3. Записываем значение кратного корня и выражаем коэффициенты $b_j$ через $a_i$ (для кубического уравнения $b_0 = 3, b_1 = 2a_1, b_2 = a_2$).

Эта схема сохраняется и в общем случае, который далее в статье будет рассмотрен более подробно.

Для кубического уравнения получаем

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{9a_3 - a_1 a_2}{2a_1^2 - 6a_2}, \qquad \alpha_3 = -a_1 - 2\alpha_1 = \frac{-a_1^3 + 4a_1 a_2 - 9a_3}{a_1^2 - 3a_2}.$$

На конкретных числовых примерах алгебраических уравнений третьей степени, имеющих кратный корень, несложно убедиться в правильности последних двух формул.

Поскольку полиномы могут иметь корни различной кратности, то естественным будет доказательство справедливости исследуемого алгоритма в этих конкретных ситуациях. Рассмотрим, например, структуру частных производных от результанта полинома седьмой степени и полинома шестой степени. Если

$$\varphi(z) = b_0 z^6 + b_1 z^5 + b_2 z^4 + b_3 z^3 + b_4 z^2 + b_5 z + b_6 -$$

производная функции $f$, то возможны следующие случаи:

1. Пусть $f(z) = (z - z_1)^6 (z - z_7)$, тогда

$$\frac{\partial^6 R}{\partial b_5^6} = 720\, z_1^6 \varphi(z_7); \qquad \frac{\partial^6 R}{\partial b_4 \partial b_5^5} = 720\, z_1^7 \varphi(z_7). \qquad \Rightarrow z_1 = \frac{\partial^6 R}{\partial b_4 \partial b_5^5} : \frac{\partial^6 R}{\partial b_5^6}.$$

Аналогично можно показать, что в этой ситуации справедливы и следующие формулы:

$$z_1 = \frac{\partial^6 R}{\partial b_{j-1} \partial b_j^5} : \frac{\partial^6 R}{\partial b_j^6} \quad (j = 1, \ldots, 6).$$

2. Пусть $f(z) = (z - z_1)^5 (z - z_6)(z - z_7)$, тогда

$$\frac{\partial^5 R}{\partial b_5^5} = 120\, z_1^5 \varphi(z_6)\varphi(z_7), \qquad \frac{\partial^5 R}{\partial b_4 \partial b_5^4} = 120\, z_1^6 \varphi(z_6)\varphi(z_7). \qquad \Rightarrow z_1 = \frac{\partial^5 R}{\partial b_4 \partial b_5^4} : \frac{\partial^5 R}{\partial b_5^5}.$$

Вычисляя частные производные пятого порядка от результанта по другим коэффициентам полинома $\varphi$, доказываем справедливость выражений

$$z_1 = \frac{\partial^5 R}{\partial b_{j-1} \partial b_j^4} : \frac{\partial^5 R}{\partial b_j^5} \quad (j = 1, \ldots, 6).$$

3. Пусть $f(z) = (z - z_1)^4 (z - z_5)(z - z_6)(z - z_7)$, тогда

$$\frac{\partial^4 R}{\partial b_5^4} = 24 z_1^4 \varphi(z_5)\varphi(z_6)\varphi(z_7), \quad \frac{\partial^4 R}{\partial b_4 \partial b_5^3} = 24 z_1^5 \varphi(z_5)\varphi(z_6)\varphi(z_7). \quad \Rightarrow z_1 = \frac{\partial^4 R}{\partial b_4 \partial b_5^3} : \frac{\partial^4 R}{\partial b_5^4}.$$

4. Пусть $f(z) = (z - z_1)^3 (z - z_4)(z - z_5)(z - z_6)(z - z_7)$, тогда

$$\frac{\partial^3 R}{\partial b_5^3} = 6 z_1^3 \prod_{j=4}^{j=7} \varphi(j), \qquad \frac{\partial^3 R}{\partial b_4 \partial b_5^2} = 6 z_1^4 \prod_{j=4}^{j=7} \varphi(j).$$

5. Пусть $f(z) = (z - z_1)^2 \prod_{j=3}^{j=7} (z - z_j)$, тогда

$$\frac{\partial^2 R}{\partial b_5^2} = 2 z_1^2 \prod_{j=3}^{j=7} \varphi(z_j), \qquad \frac{\partial^2 R}{\partial b_4 \partial b_5} = 2 z_1^3 \prod_{j=3}^{j=7} \varphi(z_j).$$

Объединяя вышесказанное, получаем, что для отыскания корня полинома седьмой степени кратности $k \quad (k = 2, \ldots, 6)$ в случаях, когда остальные корни являются простыми, можно использовать следующие выражения:

$$z_1 = \frac{\partial^k R}{\partial b_{j-1} \partial b_j^{k-1}} : \frac{\partial^k R}{\partial b_j^k} \quad (j = 1, \ldots, 6). \tag{20}$$

К аналогичным выражениям приходим при анализе полиномов произвольной степени.

З а м е ч а н и е. Значение результанта многочлена и его первой производной прямо пропорционально значению дискриминанта [8, с. 34]. Если

$$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n \quad (a_0\neq 0),$$

то

$$R(f,f')=(-1)^{n(n-1)/2}a_0G(f),$$

поэтому все результаты из подраздела 2.2 настоящей статьи являются частными случаями рассматриваемого материала.

Отметим, что при наличии других кратных корней меньшей кратности формулы (20) не работают, поскольку все производные $\dfrac{\partial^k R}{\partial b_j^k}$ равны нулю. В этом случае используем вторую и последующие производные. Например, если

$$f(z)=(z-z_1)^5(z-z_6)^2$$

и

$$\varphi(z)=f''(z)=b_0z^5+b_1z^4+b_2z^3+b_3z^2+b_4z+b_5,$$

тогда

$$\frac{\partial^5 R}{\partial b_4^5}=120z_1^5\varphi^2(z_6),\quad \frac{\partial^5 R}{\partial b_3\partial b_4^4}=120z_1^6\varphi^2(z_6).\quad \Rightarrow z_1=\frac{\partial^5R(f,f'')}{\partial b_3\partial b_4^4}:\frac{\partial^5R(f,f'')}{\partial b_4^5}.$$

Аналогично доказывается, что в этом случае справедливы отношения

$$z_1=\frac{\partial^5R(f,f'')}{\partial b_{j-1}\partial b_j^4}:\frac{\partial^5R(f,f'')}{\partial b_j^5}\quad (j=1,\ldots,5).$$

Проводя такие же рассуждения для полинома $f$ произвольной степени $n$, имеющего корень $z_1$ кратности $k$ при условии, что остальные корни имеют меньшую кратность, можно доказать, что справедливы следующие формулы:

$$z_1=\frac{\partial^kR\left(f,f^{(k-1)}\right)}{\partial b_{j-1}\partial b_j^{k-1}}:\frac{\partial^kR\left(f,f^{(k-1)}\right)}{\partial b_j^k}\quad (j=1,\ldots,n+1-k). \tag{21}$$

Формулы (21) являются наиболее универсальными с точки зрения применения на практике, поскольку учитывают возможность существования других корней полинома различной кратности, меньшей $k$. Для ознакомления приведем некоторые формулы (21) для вычисления корня кратности 3 в случае уравнения пятой степени (8).

$$f(z)=z^5+a_1z^4+a_2z^3+a_3z^2+a_4z+a_5,\quad \varphi(z)=f''(z)=b_0z^3+b_1z^2+b_2z+b_3.$$

$$z_1=\frac{\partial^3R(f,f'')}{\partial b_{j-1}\partial b_j^2}:\frac{\partial^3R(f,f'')}{\partial b_j^3}\quad (j=1,2,3).$$

При $j=2$

$$z_1=\frac{20a_1^2a_3a_5-36a_1a_2^2a_5+7a_1a_2a_3a_4-a_1a_3^3-180a_1a_4a_5+185a_2a_3a_5-26a_3^2a_4-500a_5^2}{3\left(24a_1^2a_2a_5-4a_1^2a_3a_4-40a_1a_3a_5-50a_2^2a_5+8a_2a_3a_4+a_3^3+200a_4a_5\right)};$$

при $j=3$

$$z_1=-\frac{72a_1^3a_4-12a_1^2a_2a_3+160a_1^2a_5-256a_1a_2a_4-38a_1a_3^2+49a_2^2a_3-400a_2a_5+380a_3a_4}{3\left(32a_1^3a_3-12a_1^2a_2^2+72a_1^2a_4-156a_1a_2a_3+49a_2^3-180a_2a_4+190a_3^2\right)}.$$

Проверим их справедливость на конкретном числовом примере:

$$f(z)=z^5+14z^4+76z^3+200z^2+256z+128=(z+2)^3(z+4)^2.$$

Обе эти формулы дают точное значение $z_1=-2$.

**Заключение.** Нами осуществлено развитие алгоритма нахождения минимального по модулю корня алгебраического полинома $f$ ($z$), использующего отношения коэффициентов ряда Тейлора для функции 1 / $f$ ($z$). Доказана справедливость конструкций, аналогичных формулам Эйткена, и на конкретных числовых примерах продемонстрирована их эффективность.

Анализ структур частных производных от дискриминантов или результантов полиномов в системах компьютерной алгебры позволяет быстро получать семейства точных аналитических формул для выражения кратных корней полиномов различной кратности. В случаях, когда два и более корней полинома имеют наивысшую одинаковую кратность, из структур рассматриваемых производных можно получать некоторые соотношения между корнями и коэффициентами полинома, которые существенно проще, чем соотношения Виета.

*ЛИТЕРАТУРА*


1. Беланов, А.А. Решение алгебраических уравнений методом Лобачевского / А.А. Беланов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 96 с.
2. Антипова, И.А. Рациональные выражения для кратных корней алгебраических уравнений / И.А. Антипова, Е.Н. Михалкин, А.К. Цих // Математический сборник. – 2018. – Т. 209, № 10. – С. 3–30.
3. Трубников, Ю.В. Локализация и нахождение решений трехчленных алгебраических уравнений / Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский // Математические структуры и моделирование. – 2020. – № 2(54). – С. 65–85.
4. Шмойлов, В.И. Решение алгебраических уравнений при помощи *r/φ* -алгоритма / В.И. Шмойлов. – Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2011. – 330 с.
5. Эйлер, Л. Введение в анализ бесконечных: в 2 т.: пер. с лат. Е.Л. Пацановского / Л. Эйлер. – 2-е изд. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. – Т. 1. – 315 с.
6. Трубников, Ю.В. Расходящиеся степенные ряды и формулы приближенного аналитического нахождения решений алгебраических уравнений / Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2018. – № 4(101). – С. 5–17.
7. Aitken, A.C. On Bernulli's numerical solution of algebraic equations / A.C. Aitken // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. – 1927. – Vol. 46. – P. 289–305.
8. Прасолов, В.В. Многочлены / В.В. Прасолов. – 4-е изд., испр. – М.: МЦНМО, 2014. – 336 с.


*REFERENCES*


1. Belanov A.A. *Resheniye algebraicheskikh uravneniy metodom Lobachevskogo* [Solving Algebraic Equations Using Lobachevsky Method], Moscow, Nauka, 1989, 96 p.
2. Antipova I.A., Mikhalkin E.N., Tsikh A.K. *Matematicheski sbornik* [Mathematical Collection], 2018, 209(10), pp. 3–30.
3. Trubnikov Yu.V., Chernyavsky M.M. *Matematicheskiye struktury i modelirovaniye* [Mathematical Structures and Modeling], 2020, 2(54), pp. 65–85.
4. Shmoylov V.I. *Resheniye algebraicheskikh uravneniy pri pomoshchi r/φ-algoritma* [Solution of Algebraic Equations by Means of a *r/φ*-Algorithm], Taganrog, Taganrog Institute of technology, 2011, 330 p.
5. Euler L. Vvedeniye v analiz beskonechnykh [Introduction to the Analysis of Infinites], Moscow, 1961, Gos. izd-vo fiz.-mat. lit., Vol. 1, 315 p.
6. Trubnikov Yu.V., Chernyavsky M.M. *Vestnik VGU* [Journal of Vitebsk State University], 2018, 4(101), pp. 5–17.
7. Aitken A.C. On Bernulli's numerical solution of algebraic equations / A.C. Aitken // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. – 1927. – Vol. 46. – Pp. 289–305.
8. Prasolov V.V. *Mnogochleny* [Polynomials], Moscow, MCNMO, 2014, 336 p.


*Поступила в редакцию 01.02.2021*

***Адрес для корреспонденции:*** e-mail: misha360ff@mail.ru – Чернявский М.М.