

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра прикладной математики и механики

Л.В. Маркова, Е.А. Корчевская

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ
НАХОЖДЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ
ВЕКТОРОВ И СОБСТВЕННЫХ
ЗНАЧЕНИЙ МАТРИЦ**

Методические рекомендации

*Витебск
УО «ВГУ им. П.М. Машерова»
2011*

УДК 519.6(075.8)
ББК 22.19я73
М26

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 6 от 24.10.2011 г.

Авторы: заведующий кафедрой прикладной математики и механики УО «ВГУ им. П.М. Машерова», кандидат физико-математических наук, доцент **Л.В. Маркова**; доцент кафедры прикладной математики и механики УО «ВГУ им. П.М. Машерова», кандидат физико-математических наук **Е.А. Корчевская**

Рецензент:

доцент кафедры информатики и информационных технологий УО «ВГУ им. П.М. Машерова», кандидат педагогических наук, доцент *Н.Д. Адаменко*

Маркова, Л.В.

М26

Численные методы нахождения собственных векторов и собственных значений матриц : методические рекомендации / Л.В. Маркова, Е.А. Корчевская. – Витебск : УО «ВГУ им. П.М. Машерова», 2011. – 47 с.

В издании излагаются общие методические указания, которых следует придерживаться при изучении численных методов отыскания собственных векторов и собственных значений матриц, выполнении практических заданий. Предназначается для студентов специальностей физико-математического профиля.

УДК 519.6(075.8)
ББК 22.19я73

© Маркова Л.В., Корчевская Е.А., 2011
© УО «ВГУ им. П.М. Машерова», 2011

СОДЕРЖАНИЕ

1. Основы теории погрешностей. Вычислительный эксперимент. Численные методы	4
1.1. Источники погрешностей.....	4
1.2. Вычисление абсолютной и относительной погрешностей.....	5
1.3. Округление чисел.....	6
1.4. Оценка погрешности по способу границ.....	9
1.5. Этапы вычислительного эксперимента.....	11
1.6. Понятие численного метода, свойства и особенности.....	13
1.7. Численные методы алгебры.....	15
2. Численное решение задач на собственные значения	16
2.1. Постановка задачи.....	16
2.2. Метод Данилевского.....	21
2.3. Итерационный метод нахождения максимальных по модулю вещественных собственных значений матрицы.....	27
2.4. Решение полной проблемы собственных значений при помощи QR-алгоритма.....	30
2.5. Прямой метод вращений.....	36
2.6. Итерационный метод вращений (метод Якоби).....	40
2.7. Функции MathCad.....	42
Контрольные вопросы	44
Литература	46

1. Основы теории погрешностей. Вычислительный эксперимент. Численные методы

1.1. Источники погрешностей

Анализ ошибок (или, как говорят чаще, погрешностей) является неотъемлемой частью процесса решения прикладной задачи. Часть этих погрешностей связана с вычислениями, которые в наше время производятся на ЭВМ. С увеличением скорости производства вычислений и с вовлечением в счетный процесс чисел с большим количеством значащих цифр, как это делается в ЭВМ, потребность в оценке фактической точности результата лишь возрастает. При этом следует правильно рассматривать сам термин «ошибка», который в данном случае выражает объективно неизбежную погрешность, сопровождающую процесс решения задачи, начиная с измерения исходных значений. Задача анализа ошибок сводится, по существу, к отысканию их надежных границ и к соблюдению условий, обеспечивающих их минимальное распространение.

Возникновением, накоплением и распространением ошибок сопровождаются все стадии решения прикладной задачи, начиная с получения значений исходных данных.

Погрешность решения задачи обуславливается следующими причинами:

1) математическое описание задачи является неточным, в частности неточно заданы исходные данные описания;

2) применяемый для решения метод часто не является точным. Получение точного решения возникающей математической задачи требует неограниченного или неприемлемо большого числа арифметических операций, поэтому вместо точного решения задачи приходится прибегать к приближенному;

3) при вводе данных в машину, при выполнении арифметических операций и при выводе данных производятся округления.

Погрешности, соответствующие этим причинам, называют:

1) неустранимой погрешностью,

2) погрешностью метода,

3) вычислительной погрешностью.

Часто неустранимую погрешность подразделяют на два вида:

а) погрешность, являющуюся следствием неточности задания числовых данных, входящих в математическое описание задачи;

б) погрешность, являющуюся следствием несоответствия математического описания задачи реальности, которую называют, соответственно, погрешностью математической модели.

1.2. Вычисление абсолютной и относительной погрешностей

Пусть X — точное значение некоторой величины, а x — наилучшее из известных приближений. В этом случае ошибка (или погрешность) приближения x определяется разностью $X - x$. Обычно знак этой ошибки не имеет решающего значения, поэтому рассматривают абсолютную величину ошибки:

$$e_x = |X - x|. \quad (1.1)$$

Величина e_x , называемая *абсолютной погрешностью* приближенного значения x , в большинстве случаев остается неизвестной, так как для ее вычисления нужно знать точное значение X . На практике обычно удается установить верхнюю границу абсолютной погрешности, т.е. такое число Δx , для которого справедливо неравенство

$$\Delta x \geq |X - x|. \quad (1.2)$$

Число Δx называют *предельной абсолютной погрешностью* (или *границей абсолютной погрешности*) приближения x .

Таким образом, предельная абсолютная погрешность приближенного числа x — это всякое число Δx , не меньшее абсолютной погрешности e_x этого числа.

По абсолютной погрешности нельзя в полной мере судить о точности измерений или вычислений. Качество приближения измеряется с помощью *относительной погрешности*, которая определяется как отношение ошибки e_x к модулю значения X (когда оно неизвестно, то к модулю приближения x).

Предельной относительной погрешностью (или *границей относительной погрешности*) δx приближенного числа называется отношение предельной абсолютной погрешности к абсолютному значению приближения x :

$$\delta x = \frac{\Delta x}{|x|}. \quad (1.3)$$

Формула (1.3) позволяет при необходимости выражать абсолютную погрешность через относительную:

$$\Delta x = |x| \delta x. \quad (1.4)$$

Относительную погрешность выражают обычно в процентах, и тогда она умножается на 100.

Неравенство (1.2) позволяет установить приближения к точному значению X по недостатку и избытку:

$$x - \Delta x < X < x + \Delta x, \quad (1.5)$$

которые могут рассматриваться как одна из возможных пар значений соответственно нижней границы (НГ) и верхней границы (ВГ) приближения x :

$$\text{НГ}_x = x - \Delta x; \quad \text{ВГ}_x = x + \Delta x. \quad (1.6)$$

Пример. Найти абсолютную и относительную погрешности числа $\pi = 3,14159265358\dots$, заданного тремя цифрами после запятой, т.е. $x = 3,141$.

Тогда абсолютную погрешность рассчитаем по формуле (1.1)
 $e_x = |\pi - x| = 0,0005926\dots$

Предельной абсолютной погрешностью будет верхняя граница абсолютной погрешности (1.2), т.е. $\Delta x = 0,0006$.

Вычислим предельную относительную погрешность по формуле (1.3) $\delta x = \frac{0,0006}{3,141} \cdot 100\% \approx 0,02\%$.

Тогда можем записать $\pi = 3,141 \pm 0,0006$; $\pi = 3,141(1 \pm 0,02\%)$.

В дальнейшем рассматриваются только предельные погрешности, поэтому слово “предельная” будет опускаться.

1.3. Округление чисел

Значащими цифрами числа называют все цифры в его записи, начиная с первой ненулевой слева.

Пример. У чисел $a = 0,03045$, $a = 0,03045000$ значащими цифрами являются подчеркнутые цифры. Число значащих цифр в первом случае равно 4, во втором – 7.

Цифра числа называется *верной* (в широком смысле), если абсолютная погрешность этого числа не превосходит единицы разряда, в котором стоит эта цифра.

Цифра числа называется *верной* (в строгом смысле), если абсолютная погрешность этого числа не превосходит половины единицы разряда, в котором стоит эта цифра.

Излишне сохраненные цифры, помимо верных, называются сомнительными.

Вычислить приближенное число с точностью $\varepsilon = 10^{-n}$ означает, что необходимо сохранить верной значащую цифру, стоящую в n -м разряде после запятой.

В приближенных вычислениях часто приходится округлять как точные, так и приближенные числа. Под округлением понимают отбрасывание одной или нескольких последних цифр в десятичном представлении числа.

При округлении соблюдают следующие правила.

1. Если первая из отброшенных цифр больше 5 либо равна 5 и среди остальных отброшенных цифр есть ненулевые, то к последней оставшейся цифре прибавляется единица.

2. Если первая из отбрасываемых цифр меньше 5, то оставшиеся десятичные знаки сохраняются без изменения.

3. Если первая из отброшенных цифр равна 5 и остальные отброшенные цифры нулевые, то последняя оставшаяся цифра не изменяется, если она четная, и увеличивается на единицу, если она нечетная.

Во многих практических задачах пользуются упрощенными правилами округления, согласно которым цифра, если за ней стоят цифры 0, 1, 2, 3, 4, при округлении не изменяется и увеличивается на 1 в противоположном случае.

Также различают округление к большему (с избытком) и к меньшему (с недостатком).

Погрешности округления в ЭВМ числа x , обусловленные конечностью разрядной сетки, могут быть вычислены по формуле:

$$\delta(x) = \frac{1}{\alpha_m} \left(\frac{1}{s} \right)^{n-1},$$

где α_m – первая значащая (отличная от нуля) цифра; s – основание системы счисления; n – разрядность компьютера.

Пример. Округлив число 0,1544 до трех значащих цифр, определить абсолютную и относительную погрешность полученного приближенного числа.

Пусть $X = 0,1544$, тогда $x = 0,154$ – исходное число, округленное до трех значащих цифр.

Тогда рассчитаем абсолютную погрешность: $e_x = |X - x| = 0,0004$.

Вычислим относительную погрешность:

$$\delta x = \frac{0,0004}{0,1544} \cdot 100\% \approx 0,26\%.$$

Тогда можем записать $X = 0,154 \pm 0,0004$; $X = 0,154(1 \pm 0,26\%)$.

Пример. Определить количество верных цифр в числе $a = 2,91385$, если известна его абсолютная погрешность $\Delta a = 0,0097$.

Используем определение верной цифры:

$\Delta a \leq 1$	2	верно
$\Delta a \leq 0,1$	9	верно
$\Delta a \leq 0,01$	1	верно
$\Delta a \leq 0,001$	3	неверно

В итоге получили, что в данном числе в широком смысле верны 3 цифры.

Пример. Определить количество верных цифр в числе $a = 18,572$, если известна его относительная погрешность $\delta a = 0,4\%$.

Вычислим абсолютную погрешность по формуле (1.4):

$$\Delta a = 18,572 \cdot 0,4 / 100 = 0,074288.$$

Используем определение верной в строгом смысле цифры:

$\Delta a \leq 10/2$		1	верно
$\Delta a \leq 1/2$		8	верно
$\Delta a \leq 0,1/2$		5	неверно

Верными в строгом смысле являются только цифры 1, 8.

Рассмотрим правило вычисления погрешностей арифметических операций и функций по погрешности аргументов (без учета ошибок округления). При вычислении абсолютных погрешностей обычно используются формулы дифференцирования, в которых дифференциалы независимых переменных заменяются абсолютными погрешностями: $dx_i = ei_x$.

Пусть $X_1 > 0$, $X_2 > 0$ – точные значения величин, и заданы предельные абсолютные погрешности Δx_1 и Δx_2 , т.е. $X_1 = x_1 \pm \Delta x_1$, $X_2 = x_2 \pm \Delta x_2$. Необходимо найти погрешность суммы $X = X_1 + X_2$.

Так как дифференциал $dX = dX_1 + dX_2$, то $e_x = e1_x + e2_x \leq \Delta x_1 + \Delta x_2$. Отсюда следует, что $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2$.

Теперь предположим, что $X_1 > X_2$, и найдем погрешность разности $X = X_1 - X_2$. Тогда $dX = dX_1 - dX_2$ и $e_x = e1_x - e2_x \leq \Delta x_1 + \Delta x_2$. Поэтому $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2$.

Абсолютная погрешность суммы и разности двух приближенных чисел равна сумме абсолютных погрешностей слагаемых.

Это правило справедливо для произвольного числа слагаемых. Так, если x_1, x_2, \dots, x_n имеют одну и ту же погрешность Δx , то погрешность суммы этих слагаемых будет равна $n\Delta x$. Но реально погрешности могут иметь разные знаки и поэтому взаимно компенсировать друг друга. По правилу Чеботарева при $n > 10$ погрешность суммы можно принять равной $\sqrt{3n}\Delta x$.

Для относительной погрешности суммы и разности двух чисел $X = X_1 \pm X_2$ получаем

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta x_1 \pm \Delta x_2}{x_1 \pm x_2} = \frac{\Delta x_1 \cdot x_1}{x_1 \pm x_2} \cdot \frac{1}{x_1} + \frac{\Delta x_2 \cdot x_2}{x_1 \pm x_2} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{x_1}{x_1 \pm x_2} \delta x_1 + \frac{x_2}{x_1 \pm x_2} \delta x_2.$$

Для произвольного числа слагаемых

$$\delta x = \frac{x_1}{x} \delta x_1 + \frac{x_2}{x} \delta x_2 + \dots + \frac{x_n}{x} \delta x_n,$$

где $x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, $x_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Пусть $\max_i \delta x_i = M$, $\min_i \delta x_i = m$.

$$\text{Тогда } \delta x \leq \frac{x_1 \cdot M + \dots + x_n \cdot M}{x} = M, \delta x \geq \frac{x_1 \cdot m + \dots + x_n \cdot m}{x} = m.$$

Поэтому $m \leq \delta x \leq M$.

Аналогично при выполнении умножения и деления получаем погрешности (при тех же предположениях).

Найдем погрешность произведения $X = X1 \cdot X2$:

$$\Delta x = e1_x \cdot x2 + e2_x \cdot x1 \leq \Delta x1 \cdot x2 + \Delta x2 \cdot x1,$$

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x1 \cdot x2} = \delta x1 + \delta x2.$$

Найдем погрешность частного $X = X1/X2$:

$$\Delta x = \frac{e1_x \cdot x2 - e2_x \cdot x1}{x2^2} \leq \frac{x1 \cdot \Delta x2 + x2 \cdot \Delta x1}{x2^2},$$

$$\delta x = \delta x1 + \delta x2.$$

Следовательно, относительная погрешность произведения двух чисел равна сумме относительных погрешностей его сомножителей.

Аналогичное правило выполняется и для частного от деления двух чисел.

Так же получают формулы для погрешностей арифметических действий при вычислении функций многих переменных. Так, для $z = f(x1, x2, \dots, xn)$ имеем следующие формулы для погрешностей:

$$\Delta z = \left| \frac{\partial f}{\partial x1} \right| \Delta x1 + \left| \frac{\partial f}{\partial x2} \right| \Delta x2 + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial xn} \right| \Delta xn,$$

$$\begin{aligned} \delta z &= \left| \frac{x1}{f} \cdot \frac{\partial f}{\partial x1} \right| \delta x1 + \left| \frac{x2}{f} \cdot \frac{\partial f}{\partial x2} \right| \delta x2 + \dots + \left| \frac{xn}{f} \cdot \frac{\partial f}{\partial xn} \right| \delta xn = \\ &= \left| x1 \cdot \frac{\partial \ln f}{\partial x1} \right| \delta x1 + \left| x2 \cdot \frac{\partial \ln f}{\partial x2} \right| \delta x2 + \dots + \left| xn \cdot \frac{\partial \ln f}{\partial xn} \right| \delta xn. \end{aligned}$$

1.4. Оценка погрешности по способу границ

Способ границ применяется для оценки погрешности результата расчета по формуле, содержащей приближенные величины.

Пусть a – приближенное исходное данное, так что заданы его границы: $НГ(a) \leq a \leq ВГ(a)$. Нужно найти результат y , зависящий от a и поэтому также приближенный: $y = f(a)$.

Найдем границы y , т.е. два таких числа $НГ(y)$ и $ВГ(y)$, что $НГ(y) \leq y \leq ВГ(y)$. Если результат y увеличится с ростом a (например, площадь квадрата в зависимости от длины стороны), то, по определению границ, $ВГ(y) \geq f(a)$ для любого $a \in [НГ(a), ВГ(a)]$ и можно принять $ВГ(y) = f(ВГ(a))$. Аналогично $НГ(y) = f(НГ(a))$. Если y убывает с ростом a (например, давление воздуха с высотой), то $ВГ(y) = f(НГ(a))$ и $НГ(y) = f(ВГ(a))$.

Для нахождения границ результата нужны два расчета по одному и тому же алгоритму с исходными данными $НГ(a)$ и $ВГ(a)$.

Границы результата округляют так: $НГ$ – с недостатком, $ВГ$ – с избытком. При этом в их записи следует сохранить все цифры до первой слева, отличие в которой $НГ(y)$ и $ВГ(y)$ уже существенно.

Тогда значение y можем найти следующим образом:

$$y = \frac{НГ(y) + ВГ(y)}{2}.$$

А границы погрешности оценивается:

$$\Delta y \leq \frac{ВГ(y) - НГ(y)}{2}.$$

Случай функции нескольких переменных.

Пусть a, b – исходные данные, известные приближенно:

$$НГ(a) \leq a \leq ВГ(a), \quad НГ(b) \leq b \leq ВГ(b).$$

Если результат $y = f(a, b)$ монотонно зависит от своих аргументов, то крайние его значения достигаются при некоторых комбинациях граничных значений исходных данных.

В общем случае следует провести $2 \cdot 2 = 4$ вычислений и выбрать из них пару: наибольший ($ВГ(y)$) и наименьший ($НГ(y)$) результаты. В случае трех исходных данных рассматривается $2^3 = 8$ расчетов и т.д. задача упрощается, если из ее постановки ясен характер зависимости: рост или убывание хотя бы по одному аргументу.

Пример. Произвести расчет по заданной формуле для приведенных исходных данных. Рассчитать границы, погрешность и значение результата.

$$G = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot (1^2 - a2^2)}{T1^2 \cdot a1 - T2^2 \cdot a2}$$

$$a1 = 1.22 \pm 0.002$$

$$a2 = 2.33 \pm 0.002$$

$$T1 = 4.61 \pm 0.01$$

$$T2 = 6.72 \pm 0.02$$

Проведем некоторые предварительные расчеты по длинной формуле. Выясним, как зависит функция G от $a1, a2, T1, T2$.

Зафиксируем $a1, a2, T1$ и вычислим

$$G(1.22, 2.33, 4.61, 6.74) = 1.946536$$

$$G(1.22, 2.33, 4.61, 6.70) = 1.977531$$

Видно, что с возрастанием $T2$ убывает функция G .

Зафиксируем $a1, a2, T2$ и вычислим

$$G(1.22, 2.33, 4.62, 6.72) = 1.964724$$

$$G(1.22, 2.33, 4.60, 6.72) = 1.959158$$

Видно, что G возрастает с ростом $T1$.

Зафиксируем $a1, T1, T2$ и вычислим

$$G(1.22, 2.332, 4.61, 6.72) = 1.964339$$

$$G(1.22, 2.328, 4.61, 6.72) = 1.959528$$

Видно, что G возрастает с ростом a_2 .

Зафиксируем a_2, T_1, T_2 и вычислим

$$G(1.222, 2.33, 4.61, 6.72) = 1.960553$$

$$G(1.218, 2.33, 4.61, 6.72) = 1.963309$$

Видно, что с возрастанием a_1 убывает функция G .

Найдем границы G :

$$BG(G) = G(HG(a_1), BG(a_2), BG(T_1), HG(T_2)) = 1.984156$$

$$HG(G) = G(BG(a_1), HG(a_2), HG(T_1), BG(T_2)) = 1.940027.$$

Видно, что различие в третьей цифре уже существенно.

Округляем HG – с недостатком, BG – с избытком.

$$BG(G) = 1.99.$$

$$HG(G) = 1.94.$$

$$\text{Тогда } G = \frac{HG(G) + BG(G)}{2} = 1.965, \quad \Delta y \leq \frac{BG(G) - HG(G)}{2} = 0.025.$$

1.5. Этапы вычислительного эксперимента

Основным методом получения знаний при исследовании реальных объектов и сложных процессов в настоящее время являются *моделирование и вычислительный эксперимент*, т.е. исследование естественнонаучных проблем средствами вычислительной математики. Схема вычислительного эксперимента может включать в себя несколько этапов, обычно их классифицируют следующим образом:

1. Постановка задачи – объект исследования.
2. Математическая модель (построение\уточнение).
3. Численный метод, т.е. дискретная модель и вычислительный алгоритм (выбор/изменение).
4. Программирование и тестирование.
5. Анализ результатов (возврат на любой из предыдущих этапов).

Постановка задачи – это конкретная формулировка задачи на профессиональном языке, выделение исходной информации (что дано) для решения этой задачи и четкое определение конечных целей, т.е. какие и в каком виде должны быть получены результаты (не количественные значения величин, а непосредственное определение элементов с их признаками и типами данных).

Модель – это идеальный образ или материальный прообраз системы, подобный ей в конечном числе отношений. *Математическая модель* – это запись законов «физического» приближения в форме уравнения или системы уравнений (алгебраических, дифференциальных, интегральных и т.п.). Очень часто на этапе построения математической модели привлекаются

знания из области, которая называется «Уравнения математической физики».

Под численным методом понимается такая интерпретация математической модели (дискретная модель), которая доступна для реализации на ЭВМ и сводится к выполнению конечного числа арифметических действий над числами. Таким образом, численный метод представляет собой *вычислительный алгоритм* решения исходной задачи. При выборе такого алгоритма рассматривается несколько вариантов и выбирается оптимальный, т.е. лучший с точки зрения вычислительных требований к решению исходной задачи. Для решения сложной задачи используют метод пошаговой детализации построения решения таким образом, чтобы на каждом шаге (этапе) структура алгоритма была простой и ясной. Например, решение системы дифференциальных уравнений сводится к решению системы алгебраических уравнений.

Программирование и тестирование – запись разработанного алгоритма в виде программы, т.е. конечной последовательности операторов любого языка (или среды) программирования. Программа определяется алгоритмом, но, тем не менее, на этом этапе должны быть выполнены определенные требования, а именно:

1. Программа должна быть универсальной и не зависеть от конкретного набора входных данных (динамическая память, переменные вместо констант и т.д.).

2. Программа должна обрабатывать вырожденные случаи и ошибки ввода/вывода, сопровождая соответствующими комментариями.

3. Программа должна содержать лаконичные комментарии, позволяющие отслеживать логику программы.

4. Необходимо использовать приемы, повышающие эффективность программы, т.е. уменьшающие количество операций и, следовательно, время ее выполнения. (Повторяющиеся вычисления организовывать в виде процедур, функций, выносить за пределы цикла и т.п.).

5. При создании программного продукта необходимо учитывать требования, определяемые стандартами, протоколами, ГОСТами.

6. При программировании сложных алгоритмов необходимо использовать принципы модульности и объектно-ориентированного программирования.

Тестирование и отладка программы позволяют проверить правильность работы программы и исправить обнаруженные ошибки.

При проведении вычислительного эксперимента на каждом из этапов возможен переход как минимум на один уровень выше.

1.6. Понятие численного метода, его свойства и особенности

Среди этапов вычислительного эксперимента выделяют этап решения математической задачи с помощью численного метода. Под *численным методом* понимается такая интерпретация математической модели (дискретная модель), которая доступна для реализации на ЭВМ и сводится к выполнению конечного числа арифметических действий над числами.

Предметом курса “Численные методы” являются вопросы построения, применения и теоретического обоснования алгоритмов приближенного решения различных классов математических задач (алгебры, анализа, математической физики). Теоретическое обоснование численного метода подразумевает доказательство соответствия метода определенным требованиям: корректности, точности, устойчивости и сходимости метода к точному решению.

Общим для всех численных методов является:

- Сведение математической задачи к конечномерной (чаще всего путем дискретизации исходной математической модели).
- Результатом реализации численного метода является число или таблица чисел.
- Реализуемость численного метода, т.е. построение вычислительного алгоритма как последовательности конечного числа операций для получения результата и ориентация этого алгоритма на возможности ЭВМ.
- Множественность, т.е. возможность решения одной и той же задачи различными методами.
- Непрерывное развитие и совершенствование численных методов.

При использовании численных методов для решения математических задач необходимо различать свойства самой задачи и свойства вычислительного алгоритма, предназначенного для ее решения. Для каждой математической задачи, прежде всего, принято рассматривать вопрос о ее корректности.

Определение. Говорят, что задача поставлена корректно, если:

- 1) задача разрешима при любых допустимых исходных данных, т.е. существует принципиальная возможность получить решение с любой точностью;
- 2) это решение является единственным;
- 3) задача является устойчивой, т.е. непрерывно зависит от входных данных (малому изменению входных данных соответствует малое изменение решения).

Если задача неустойчива, то она считается некорректной даже при наличии единственного решения. Для решения корректных и

некорректных задач используются различные методы. Если задача поставлена некорректно, то численный метод наследует ее некорректность, что проявляется неограниченным ростом погрешности при уточнении задачи численным методом. Мы в дальнейшем будем рассматривать только корректные задачи. Однако корректность исходной математической задачи не гарантирует хороших свойств численных методов ее решения. Предложенный численный метод решения корректной задачи может оказаться неустойчивым. Поэтому свойства численных методов даже для корректной математической задачи должны изучаться особо.

К таким свойствам относятся:

1. Аппроксимация численным методом исходной задачи и оценка качества такой аппроксимации, т.е. дискретная задача должна приближать (аппроксимировать) исходную задачу и ее свойства как можно точнее.

2. Устойчивость численного метода, т.е. в процессе вычислений погрешности округлений не должны накапливаться. Если в процессе вычислений погрешности округлений неограниченно возрастают, то такой алгоритм называется неустойчивым.

Например. Имеем уравнение $Y_{i+1} = qY_i$ вместо Y_i возьмем $Y_i + \Delta_i$ (второе слагаемое представляет собой погрешность исходных данных) и подставим в исходное уравнение, тогда получим

$$Y_{i+1} = q(Y_i + \Delta_i) = qY_i + q\Delta_i$$

Если параметр $q > 1$, то погрешность нарастает и алгоритм будет неустойчивым. Имеет смысл использовать только устойчивые алгоритмы. Для улучшения устойчивости алгоритма применяют различные способы уменьшения погрешностей. Необходимо учитывать, что в машинной арифметике существенен порядок выполнения операций из-за погрешностей округления: законы коммутативности и дистрибутивности не всегда работают.

К таким способам относят следующие приемы:

а) сложение чисел нужно проводить по мере их возрастания;
б) следует избегать вычитания близких чисел. Для избежания потери точности на некотором этапе вычислений желательно видоизменять алгоритм;

в) следует избегать последовательного произведения упорядоченных чисел. Иногда целесообразно нарушать такой последовательный порядок.

3. Сходимость приближенного решения к точному решению задачи. Численный метод сходится, если при неограниченном росте параметра дискретизации решение дискретной задачи стремится к решению исходной задачи.

Например. Система двух уравнений $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$ имеет точное

решение $\{1; -1\}$, а приближенное решение можно быть получено $\{0.97; -1.2\}$, или $\{0.981; -1.18\}$ или $\{0.9998; -1.0092\}$ в зависимости от параметра дискретизации.

4. Численный метод должен быть точным, т.е. должен давать возможность получить решение с любой заранее заданной точностью (пример рассмотрен выше).

5. Численный метод должен быть экономичным, т.е. его алгоритм требует наименьших затрат (число действий, объем памяти, время решения) для решения исходной задачи.

6. Алгоритм численного метода должен быть таковым, чтобы в нем отсутствовали аварийные ситуации (деление на машинный ноль, значение исходных данных не противоречило математической или физической модели и т.д.).

1.7. Численные методы алгебры

К численным методам алгебры традиционно относят:

1. Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений.

2. Численные методы обращения матриц.

3. Численные методы вычисления определителей.

4. Численные методы нахождения собственных значений и собственных векторов матриц.

При формальном подходе решение этих задач не встречает затруднений. Решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) можно найти как отношение определителей по формуле Крамера. Для нахождения собственных значений матрицы достаточно выписать характеристическое уравнение и найти его корни.

Однако при непосредственном использовании формулы Крамера для решения системы с n неизвестными необходимо вычислить $n + 1$ определитель, что требует порядка $n!$ арифметических действий. Следовательно, при сколько-нибудь больших n применение этого метода становится неэкономичным или даже невозможным. Кроме того, вычисления по формулам Крамера часто ведут к большим погрешностям округлений при определении окончательного результата.

Аналогичные трудности возникают при решении задачи нахождения собственных значений матрицы с использованием явного выражения характеристического многочлена.

Методы решения алгебраических задач разделяются на

- прямые (точные);

- итерационные;
- вероятностные.

Классы задач, для решения которых обычно применяются методы этих групп, условно можно назвать *классами задач с малым, средним и большим числом неизвестных*. На сегодняшний день точные методы обычно применяются для решения систем не выше порядка 10^4 , итерационные – до 10^7 . Изменение объема и структуры памяти ЭВМ, увеличение их быстродействия и развитие численных методов приводят к смещению границ применения методов в сторону систем более высоких порядков.

Определение. Под *точными* (аналитическими) понимаются такие методы, которые позволяют в предположении отсутствия округлений получить точные значения неизвестных как результат выполнения конечного числа арифметических операций. Результат таких методов может быть выражен аналитической формулой.

Например. Метод Крамера, методы исключения неизвестных (Гаусса и его модификации) для решения СЛАУ.

Определение. Итерационными методами являются методы, в которых точное решение может быть найдено лишь теоретически как предел некоторой бесконечной последовательности векторов (решений). Нулевой вектор (исходное, начальное приближение к решению) при этом разыскивается каким-либо способом или задается произвольно. Итерационные методы даже в предположении отсутствия ошибок округлений дают лишь приближенное решение с заданной точностью.

Например. Метод Зейделя, простых итераций для решения СЛАУ.

2. Численное решение задач на собственные значения

2.1. Постановка задачи

Большое число научно-технических задач, а также исследования в области вычислительной математики требуют нахождения собственных значений и собственных векторов матриц.

Например, рассмотрим норму матрицы A

$\|A\|_{\text{ш}} = \sqrt{\lambda_1}$, где λ_1 – наибольшее собственное значение матрицы.

Для определения сходимости методов простой итерации используется такая норма матрицы (должна быть $\|\cdot\| < 1$), критерий сходимости метода Зейделя также использует понятие собственных

значений: все корни характеристического уравнения должны быть $0 < \lambda < 1$.

Собственным значением квадратной матрицы A n -порядка

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \{a_{ij}\}, i, j = 1, 2, \dots, n$$

называется такое число λ , при котором для некоторого ненулевого вектора X имеет место равенство:

$$AX = \lambda X, X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}. \quad (2.1)$$

Любой вектор $X \neq 0$, удовлетворяющий этому равенству, называется собственным вектором матрицы A , соответствующим (или принадлежащим) собственному значению λ .

Уравнение (2.1) эквивалентно однородному уравнению

$$(A - \lambda E)X = 0, \quad (2.2)$$

где E – единичная матрица порядка n .

Эта однородная система линейных уравнений, нетривиальные решения которой являются искомыми собственными векторами. Для однородной системы обычно одно из уравнений системы является следствием остальных и для любого λ решение (2.2) не единственно, а находится с точностью до какого-либо множителя. Матрица

$$C = A - \lambda E = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

называется характеристической матрицей данной матрицы A .

Из курса алгебры известно, что система (2.2) имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда $\det(A - \lambda E) = 0$, т.е.

$$|A - \lambda E| = 0. \quad (2.4)$$

Уравнение (2.4) называется характеристическим уравнением матрицы A , а полином $|A - \lambda E|$ – характеристическим полиномом

$$D(\lambda) = |A - \lambda E| = (-1)^n (\lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - p_2 \lambda^{n-2} - \dots - p_n)$$

или собственным многочленом матрицы (без учета множителя $(-1)^n$)

$$D(\lambda) = \lambda^n - d_1 \lambda^{n-1} - d_2 \lambda^{n-2} - \dots - d_n. \quad (2.5)$$

Собственные значения являются корнями собственного многочлена. Совокупность всех собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ матрицы A называется спектром этой матрицы. Спектральным радиусом $\rho(A)$ матрицы A называется максимум из модулей собственных значений этой матрицы.

Задача отыскания собственных значений и собственных векторов матрицы сводится к отысканию

- 1) коэффициентов характеристического уравнения (2.5), т.е. d_i ;
- 2) корней характеристического уравнения (2.5), т.е. собственных значений, λ_i ;

- 3) нетривиальных решений системы $(AX = \lambda X)$ (2.1), в которой вместо λ подставлено одно из найденных значений λ_i . Если для данного собственного значения λ_i система (2.1) (или (2.2)) имеет несколько линейно независимых решений, этому собственному значению λ_i принадлежит (соответствует) несколько собственных векторов.

Каждый из трех этапов задачи отыскания собственных значений и собственных векторов представляет собой достаточно сложную вычислительную задачу. Все численные методы отыскания собственных значений и собственных векторов можно разделить на точные (прямые) и итерационные.

К прямым методам относятся такие, по которым сначала строят характеристический многочлен матрицы (т.е. вычисляют коэффициент d_i), затем получают собственные значения матрицы λ_i как корни характеристического многочлена и по λ_i находят соответствующие собственные векторы. Прямые методы дают возможность находить все собственные значения матрицы (спектр) и все принадлежащие им собственные векторы, т.е. позволяют решать полную проблему собственных значений.

В итерационных методах собственные значения матрицы определяются непосредственно, т.е. без обращения к характеристическому (собственному) многочлену. При этом одновременно вычисляются и соответствующие собственные векторы. Схемы этого типа приводят к последовательности векторов, имеющей своим пределом собственный вектор, и к числовой последовательности, пределом которой являются соответствующее собственное значение.

Итерационные методы позволяют с достаточной точностью определить лишь несколько собственных значений и соответствующих собственных векторов, т.е. итерационные методы применяются к решению частичной проблемы собственных значений. Хотя в некоторых случаях итерационными методами решают полную проблему собственных значений.

Полная и частичная проблемы собственных значений сильно различаются как по методам их решения, так и по области приложений.

Пример. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы \mathbf{A} методом непосредственного вычисления определителя, точность вычислений $\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Составим характеристическое уравнение матрицы \mathbf{A} :

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 & 3 \\ -2 & 4 - \lambda & 5 \\ 3 & 2 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Непосредственно вычисляем определитель, имеем:

$$(2 - \lambda)(4 - \lambda)(-1 - \lambda) - 15 - 12 - 9(4 - \lambda) - 10(2 - \lambda) - 2(-1 - \lambda) = 0,$$

т.е. $\lambda^3 - 5\lambda^2 - 19\lambda + 89 = 0.$

Уравнение решаем методом Ньютона, отделив корни:

$$f(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 - 19\lambda + 89 \Rightarrow f'(\lambda) = 3\lambda^2 - 10\lambda - 19$$

$$x_{n+1} = \lambda_n - \frac{f(\lambda)}{f'(\lambda)}$$

на промежутках: $\lambda_1 \in] - \infty, -1,2]$; $\lambda_2 \in [-1,2; 4,7]$; $\lambda_3 \in [4,7; +\infty[$.

Решая, найдем $\lambda_1 \approx -4,2841$; $\lambda_2 \approx 3,7621$; $\lambda_3 \approx 5,522$.

Для определения собственных векторов, принадлежащих найденным собственным значениям, строим систему линейных уравнений (2.2):

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{X} = \mathbf{0}.$$

При $\lambda_1 = -4,2841$ получаем систему:

$$\begin{cases} 6,2841x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ -2x_1 + 8,2841x_2 + 5x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3,2841x_3 = 0 \end{cases}$$

Решив эту систему, имеем: $\mathbf{X}^{(1)} = c(-0,507; -0,746; 1)^T$, где c – некоторая константа.

Таким образом, собственный вектор матрицы определяется с точностью до числового множителя. На практике обычно при нахождении собственных векторов матрицы одну из его компонент полагают равной некоторому числу (например, 1). Остальные компоненты находятся однозначно из подсистемы линейно независимых уравнений, в которой отброшено уравнение, являющееся следствием остальных. Эта процедура не влияет на результат решения задачи (так как собственные векторы находятся с точностью до постоянного множителя).

Аналогично определяются два других собственных вектора. При $\lambda_2 = 3,7621$ из системы:

$$\begin{cases} -1,7621x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ -2x_1 + 0,2379x_2 + 5x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4,7621x_3 = 0 \end{cases}$$

имеем $\mathbf{X}^{(2)} = c(1; -0,492; 0,423)^T$.

При $\lambda_3 = 5,5220$ имеем:

$$\begin{cases} -3,522x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ -2x_1 + 1,522x_2 + 5x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 6,522x_3 = 0 \end{cases}$$

$\mathbf{X}^{(3)} = c(-0,00858; 0,228; 1)^T$.

Отметим некоторые свойства собственных значений для частных типов исходной матрицы:

1. Все собственные значения симметрической матрицы действительны.

2. Если собственные значения матрицы действительны и различны, то соответствующие им собственные векторы ортогональны и образуют базис рассматриваемого пространства. Следовательно, любой вектор в данном пространстве можно выразить через совокупность линейно-независимых собственных векторов.

3. Если две матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} подобны, т.е. они связаны соотношением

$$\mathbf{B} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}, \quad (2.6)$$

то их собственные значения совпадают (\mathbf{S} – некоторая матрица).

Преобразование подобия (2.6) можно использовать для упрощения исходной матрицы, а задачу о вычислении ее собственных значений свести к аналогичной задаче для более простой матрицы.

Очевидно, самым лучшим упрощением матрицы $\mathbf{A} = \{\mathbf{a}_{ij}\}$ $i, j = 1, 2, \dots, n$, было бы приведение ее к треугольному виду:

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \mathbf{a}'_{11} & \mathbf{a}'_{12} & \dots & \mathbf{a}'_{1n} \\ 0 & \mathbf{a}'_{22} & \dots & \mathbf{a}'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{a}'_{nn} \end{bmatrix}$$

Т.к. определитель матрицы \mathbf{A}' равен произведению ее диагональных элементов, то характеристический многочлен для матрицы \mathbf{A}' имеет вид:

$$\det(\mathbf{A}' - \lambda\mathbf{E}) = (\mathbf{a}'_{11} - \lambda)(\mathbf{a}'_{22} - \lambda) \dots (\mathbf{a}'_{nn} - \lambda) \quad (2.7)$$

Собственные значения матрицы \mathbf{A}' равны корням этого многочлена, т.е.

$$\lambda_1 = a'_{11}; \quad \lambda_2 = a'_{22}; \quad \dots \quad \lambda_n = a'_{nn}. \quad (2.8)$$

Таким образом, собственные значения треугольной матрицы равны ее диагональным элементам. То же самое можно сказать и о диагональной матрице, которая является частным случаем треугольной.

Некоторые типы матриц удается привести к треугольному виду с помощью преобразования подобия: например, симметрическую матрицу. Процедура вычисления собственных значений полученной матрицы значительно упрощается.

Существует ряд методов, основанных на использовании преобразования подобия, позволяющего привести исходную матрицу к более простой структуре. Например, метод Крылова, метод вращений, метод Данилевского.

2.2. Метод Данилевского

Этот метод основан на том, что преобразование подобия $S^{-1}AS$ не изменяет характеристического многочлена матрицы A . Поэтому, удачно подобрав преобразование подобия, можно получить матрицу, собственный многочлен которой записывается непосредственно по ее виду. М.А. Данилевский предложил исходную матрицу A приводить преобразованием подобия к так называемой *канонической форме Фробениуса*.

$$\Phi = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Характеристический полином матрицы Φ можно записать

$$|\Phi - \lambda E| = (-1)^n (\lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - \dots - p_n) = (-1)^n P(\lambda). \quad (2.10)$$

Таким образом, элементы p_1, p_2, \dots, p_n первой строки матрицы Фробениуса являются соответствующими коэффициентами ее собственного многочлена, а значит, и собственного многочлена исходной матрицы A , связанной с матрицей Φ преобразованием подобия:

$$\Phi = S^{-1}AS. \quad (2.11)$$

Решая уравнение

$$P(\lambda) = 0, \quad (2.12)$$

найдем собственные значения матриц Фробениуса и A . Основная задача, следовательно, сводится к отысканию матрицы S , которая обеспечивает преобразование подобия от матрицы к матрице Φ .

Поступим следующим образом. Возьмем единичную матрицу, размерность которой соответствует размерности матрицы A .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

В единичной матрице $n-1$ строка заменяется строкой, сформированной из элементов n -ой строки матрицы A , взятых с противоположным знаком, после их деления на элемент $a_{n,n-1}$. Только элемент $n-1$ столбца формируется по-иному. В эту позицию выставляется элемент, обратный элементу $a_{n,n-1}$.

Получим матрицу

$$M_{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{a_{n,1}}{a_{n,n-1}} & -\frac{a_{n,2}}{a_{n,n-1}} & \dots & -\frac{a_{n,n-2}}{a_{n,n-1}} & \frac{1}{a_{n,n-1}} & -\frac{a_{n,n}}{a_{n,n-1}} \\ a_{n,n-1} & a_{n,n-1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n-1} & a_{n,n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Умножение матрицы A справа на матрицу M_{n-1} дает матрицу AM_{n-1} , в которой последняя строка принимает нужный вид, т.е. совпадает с последней строкой матрицы Фробениуса. Затем полученную матрицу умножим слева на матрицу M_{n-1}^{-1} (обратную), т.е. в единичной матрице $(n-1)$ -строка заменяется n -строкой исходной матрицы A .

$$M_{n-1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Очевидно, что преобразование $M_{n-1}^{-1}AM_{n-1}$ не изменяет последнюю строку матрицы AM_{n-1} . Таким образом, после выполнения первого шага метода Данилевского получаем матрицу $A^C = M_{n-1}^{-1}AM_{n-1}$:

$$A \overset{\circ}{=} \begin{bmatrix} a_{11} \overset{\circ}{} & a_{12} \overset{\circ}{} & \dots & a_{1,n-1} \overset{\circ}{} & a_{1,n} \overset{\circ}{} \\ a_{21} \overset{\circ}{} & a_{22} \overset{\circ}{} & \dots & a_{2,n-1} \overset{\circ}{} & a_{2,n} \overset{\circ}{} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} \overset{\circ}{} & a_{n-1,2} \overset{\circ}{} & \dots & a_{n-1,n-1} \overset{\circ}{} & a_{n-1,n} \overset{\circ}{} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

При этом матрицы M_{n-1}^{-1} и M_{n-1} записываются непосредственно по виду матрицы A .

Второй шаг метода Данилевского аналогичен первому и состоит в приведении второй снизу строки матрицы $A^{(1)}$ к форме Фробениуса при сохранении неизменной первой снизу строки. Для этого проводим преобразование:

$$A \overset{\circ}{\leftarrow} M_{n-2}^{-1} A \overset{\circ}{\leftarrow} M_{n-2} \Leftrightarrow M_{n-2}^{-1} M_{n-1}^{-1} A M_{n-1} M_{n-2}, \text{ где}$$

$$M_{n-2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{a_{n-1,1} \overset{\circ}{}}{a_{n-1,n-2} \overset{\circ}{}} & -\frac{a_{n-1,2} \overset{\circ}{}}{a_{n-1,n-2} \overset{\circ}{}} & \dots & \frac{1}{a_{n-1,n-2} \overset{\circ}{}} & -\frac{a_{n-1,n-1} \overset{\circ}{}}{a_{n-1,n-2} \overset{\circ}{}} & -\frac{a_{n-1,n} \overset{\circ}{}}{a_{n-1,n-2} \overset{\circ}{}} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

$$M_{n-2}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} \overset{\circ}{} & a_{n-1,2} \overset{\circ}{} & \dots & a_{n-1,n-1} \overset{\circ}{} & a_{n-1,n} \overset{\circ}{} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

Итак, если $a_{n,n-1} \neq 0$, $a_{n-1,n-2} \overset{\circ}{} \neq 0$, ..., $a_{21} \overset{\circ}{} \neq 0$, то после $n-1$ шагов метода Данилевского будем иметь:

$$M_1^{-1} M_2^{-1} \dots M_{n-1}^{-1} A M_{n-1} M_{n-2} \dots M_1 = A \overset{\circ}{\leftarrow}^{-1}, \quad (2.18)$$

где матрицы M_{n-i} формируются из единичной матрицы заменой элементов $n-i$ строки на элементы, полученные делением элементов $n-i+1$ строки матрицы A , взятых с противоположным знаком, на $n-i$

элемент столбца из этой строки. Преобразование (2.18) можно записать следующим образом:

$$A^{(k-1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(k-1)} & a_{12}^{(k-1)} & \dots & a_{1,n-1}^{(k-1)} & a_{1n}^{(k-1)} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \Phi = S^{-1}AS$$

Т.е. матрица A посредством преобразования подобия будет приведена к канонической форме Фробениуса, по виду первой строки которой записывается собственный многочлен:

$$P(\lambda) = \lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - \dots - p_n.$$

Пример. С помощью преобразования подобия привести матрицу A к канонической форме Фробениуса.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & 9 \end{bmatrix}.$$

Составим матрицу

$$M_{n-1} = M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 \\ -\frac{7}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{9}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$AM_{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 \\ -\frac{7}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{9}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{7} & -\frac{18}{7}+3 \\ 4 & \frac{5}{7} & -\frac{45}{7}+6 \\ 0 & 1 & -9+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ 4 & \frac{5}{7} & -\frac{3}{7} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{n-1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathbf{M}_{n-1}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{M}_{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ 4 & \frac{5}{7} & -\frac{3}{7} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ 28 & 14 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{т.е. } \mathbf{A}^{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ 28 & 14 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Тогда } \mathbf{M}_{n-2} = \mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{14}{28} & \frac{3}{28} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{28} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{\mathbf{C}} \mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ 28 & 14 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{28} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{14} & \frac{15}{28} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 28 & 14 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{A}^{\mathbf{C}} \mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 28 & 14 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{14} & \frac{15}{28} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+14 & -6-3 & 15 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

т.е.

$$\Phi = \begin{bmatrix} 15 & -9 & 15 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

По виду матрицы A составим собственный многочлен:

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 15\lambda^2 + 9\lambda - 15 = 0.$$

Матрицы, связанные преобразованием подобия, имеют одинаковые спектры. Таким образом, решив уравнение $P(\lambda) = 0$, найдем собственные значения матрицы Φ , а следовательно матрицы A . Собственные векторы этих матриц, принадлежащие одним и тем же собственным значениям, будут различны, но между ними существует связь.

Если \mathbf{X} – собственный вектор матрицы A , принадлежащий собственному значению λ , а вектор \mathbf{Y} – собственный вектор матрицы Фробениуса $\Phi = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$, принадлежащий тому же собственному значению λ , то вектор

$$\mathbf{X} = \mathbf{S}\mathbf{Y}. \quad (2.19)$$

Действительно, так как $\Phi\mathbf{Y} = \lambda\mathbf{Y}$ и $\Phi = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$, то, следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{Y} = \lambda\mathbf{Y} &\Rightarrow \left. \begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{Y} = \lambda\mathbf{S}\mathbf{Y} \\ \mathbf{A}\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{S}\mathbf{Y}. \end{aligned}$$

Итак, собственные векторы матрицы A легко определить по соответствующим собственным векторам матрицы Φ .

Найдем собственные векторы матрицы Φ . Имеем $\Phi\mathbf{Y} = \lambda\mathbf{Y} \Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \dots & \mathbf{p}_{n-1} & \mathbf{p}_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \dots \\ \mathbf{y}_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \dots \\ \mathbf{y}_n \end{bmatrix}.$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{p}_1\mathbf{y}_1 + \mathbf{p}_2\mathbf{y}_2 + \dots + \mathbf{p}_n\mathbf{y}_n &= \lambda\mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_1 &= \lambda\mathbf{y}_2 \\ \dots & \\ \mathbf{y}_{n-1} &= \lambda\mathbf{y}_n \end{aligned} \right\}$$

Так как собственный вектор матрицы определен с точностью до постоянного множителя, то полагаем $y_n = 1$.

Тогда

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \lambda^{n-1} \\ \lambda^{n-2} \\ \vdots \\ \lambda \\ 1 \end{bmatrix}$$

Равенство $p_1\lambda_1 + \dots + p_n y_n = \lambda y_1$ можно использовать для контроля $X = SY = M_{n-1}M_{n-2} \dots M_1 y_1$.

Собственный вектор $X^{(i)}$, соответствующий числу λ_i , определяется равенством:

$$X^{(i)} = M_{n-1}M_{n-2} \dots M_1 Y^{(i)}, \quad (2.20)$$

где

$$Y^{(i)} = \begin{pmatrix} \lambda_i^{n-1} \\ \lambda_i^{n-2} \\ \dots \\ \lambda_i \\ 1 \end{pmatrix}^T. \quad (16)$$

Отдельные координаты вектора $X^i = \begin{pmatrix} x_1^i \\ x_2^i \\ \dots \\ x_n^i \end{pmatrix}$ находим из системы линейных уравнений (2.20), в предположении, что $x_n^i = 1$.

Метод Данилевского рекомендуется для матриц невысокого порядка в силу его возможной неустойчивости.

2.3. Итерационный метод нахождения максимальных по модулю вещественных собственных значений матрицы

Рассмотрим вещественную квадратную матрицу

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – ее собственные значения, а $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n)}$ – собственные вектора, соответствующие этим собственным значениям, т.е.

$$AX^{(i)} = \lambda_i X^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.21)$$

Будем считать, что матрица A обладает полной системой линейно-независимых собственных векторов, т.е. все $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n)}$ предполагаем линейно-независимыми.

Это будет иметь место, например, если матрица A симметрична ($A = A^T$) или если все ее собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ различны.

Тогда систему собственных векторов $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n)}$ можно считать базисом n -мерного векторного пространства.

Выберем некоторый вектор $Y^{(0)} = \begin{pmatrix} y_1^{(0)} \\ y_2^{(0)} \\ \dots \\ y_n^{(0)} \end{pmatrix}^T$ в качестве начального итерационного приближения и рассмотрим следующую последовательность векторов:

$$Y^{(0)}, Y^{(1)} = A Y^{(0)}, Y^{(2)} = A Y^{(1)}, \dots, Y^{(k)} = A Y^{(k-1)}, \dots \quad (2.22)$$

Выразим вектор $Y^{(k)} = \begin{pmatrix} y_1^{(k)} \\ y_2^{(k)} \\ \dots \\ y_n^{(k)} \end{pmatrix}^T$ на k -ой итерации через вектор начального приближения.

$$Y^{(2)} = A Y^{(1)} = A (A Y^{(0)}) = A^2 Y^{(0)}, \dots, Y^{(k)} = A^k Y^{(0)}$$

Разложим вектор начального приближения $\mathbf{Y}^{(0)} = (y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})^T$ по базису $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \dots, \mathbf{X}^{(n)}$

$$\mathbf{Y}^{(0)} = \mathbf{a}_1 \mathbf{X}^{(1)} + \mathbf{a}_2 \mathbf{X}^{(2)} + \dots + \mathbf{a}_n \mathbf{X}^{(n)}, \quad (2.23)$$

где $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ – некоторые вещественные числа. Тогда для вектора $\mathbf{Y}^{(k)}$ получаем

$$\mathbf{Y}^{(k)} = \mathbf{A}^k \mathbf{Y}^{(0)} = \mathbf{a}_1 \mathbf{A}^k \mathbf{X}^{(1)} + \mathbf{a}_2 \mathbf{A}^k \mathbf{X}^{(2)} + \dots + \mathbf{a}_n \mathbf{A}^k \mathbf{X}^{(n)}$$

Из определения любого собственного вектора X_i можем записать

$$\mathbf{A} \mathbf{X}^{(i)} = \lambda_i \mathbf{X}^{(i)} \Rightarrow \mathbf{A}^k \mathbf{X}^{(i)} = \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{A} \mathbf{X}^{(i)} = \mathbf{A}^{k-1} \lambda_i \mathbf{X}^{(i)} \Rightarrow \mathbf{A}^k \mathbf{X}^{(i)} = \lambda_i^k \mathbf{X}^{(i)} \quad (i)$$

Следовательно,

$$\mathbf{Y}^{(k)} = \mathbf{A}^k \mathbf{Y}^{(0)} = \mathbf{a}_1 \lambda_1^k \mathbf{X}_1 + \mathbf{a}_2 \lambda_2^k \mathbf{X}_2 + \dots + \mathbf{a}_n \lambda_n^k \mathbf{X}_n \quad (2.24)$$

или по компонентам

$$y_i^{(k)} = \mathbf{a}_1 \lambda_1^k x_{1i} + \mathbf{a}_2 \lambda_2^k x_{2i} + \dots + \mathbf{a}_n \lambda_n^k x_{ni}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.25)$$

где $y_i^{(k)}$ – i -ая компонента вектора $\mathbf{y}^{(k)}$; $x_{1i} \neq 0, x_{2i} \neq 0, \dots, x_{ni} \neq 0$ – i -ые компоненты собственных векторов $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \dots, \mathbf{X}^{(n)}$ соответственно.

Рассмотрим случай, когда матрица \mathbf{A} имеет единственное максимальное по модулю вещественное собственное значение.

Обозначим его λ_1 и пронумеруем остальные собственные значения в порядке убывания их модулей, так что будем иметь

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|. \quad (2.26)$$

Будем считать, что $\mathbf{a}_1 \neq 0$. Если это не так, то выбираем другой вектор начального приближения $\mathbf{Y}^{(0)}$.

В силу (2.25), (2.26) имеем для i -ой компоненты вектора $\mathbf{Y}^{(k)}$:

$$y_i^{(k)} = \mathbf{a}_1 \lambda_1^k x_{1i} \left[1 + \frac{\mathbf{a}_2 x_{2i}}{\mathbf{a}_1 x_{1i}} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k + \frac{\mathbf{a}_3 x_{3i}}{\mathbf{a}_1 x_{1i}} \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1} \right)^k + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{\mathbf{a}_n x_{ni}}{\mathbf{a}_1 x_{1i}} \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k \right] = \mathbf{a}_1 \lambda_1^k x_{1i} \left[1 + O \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k \right]. \quad (2.27)$$

Так как в силу соотношения (2.26) все слагаемые вида

$$\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k \rightarrow 0 \text{ при больших значениях } k.$$

Аналогично для i -ой компоненты вектора $\mathbf{Y}^{(k+1)}$ можем записать:

$$y_i^{(k+1)} = a_1 \lambda_1^{k+1} x_{ii} \left[1 + O\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{k+1} \right]. \quad (2.28)$$

Рассмотрим отношение соответствующих компонент вектора Y на двух соседних итерациях:

$$\frac{y_i^{(k+1)}}{y_i^{(k)}} = \lambda_1 \frac{1 + O\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{k+1}}{1 + O\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \lambda_1, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.29)$$

Построим итерационную последовательность

$$\lambda_1^{(0)} = \frac{y_i^{(0)}}{y_i^{(0)}}, \quad \lambda_1^{(1)} = \frac{y_i^{(1)}}{y_i^{(0)}}, \quad \dots, \quad \lambda_1^{(k)} = \frac{y_i^{(k+1)}}{y_i^{(k)}}, \quad \dots \quad (2.30)$$

Эта последовательность сходится к исходному собственному значению λ_1 при $k \rightarrow \infty$ и любом $i = 1, 2, \dots, n$.

Таким образом, для нахождения λ_1 с точностью ε нужно выбрать любой номер i и построить итерационную последовательность (2.30), заканчивая итерации по условию

$$|\lambda_1^{(k+1)} - \lambda_1^{(k)}| < \varepsilon.$$

Сходимость итерационного процесса можно повысить, вычисляя k -ое приближение как среднее арифметическое:

$$\lambda_1^{(k)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{y_i^{(k+1)}}{y_i^{(k)}}, \quad k=0,1,2,\dots$$

Аналогичным образом можно найти собственный вектор X_1 , соответствующий собственному значению λ_1 :

$$\begin{aligned} Y^{(k)} &= a_1 \lambda_1^k X^{(1)} + a_2 \lambda_2^k X^{(2)} + \dots + a_n \lambda_n^k X^{(n)} = \\ &= a_1 \lambda_1^k \left[X^{(1)} + \frac{a_2}{a_1} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k X^{(2)} + \dots + \frac{a_n}{a_1} \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k X^{(n)} \right] = a_1 \lambda_1^k X^{(1)} \quad \text{при } k \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Так как собственный вектор определяется с точностью до постоянного множителя, отсюда находим

$$X^{(1)} = \frac{1}{a_1 \lambda_1^k} Y_1^{(k)} \quad \text{или} \quad X^{(1)} \approx Y^{(k)} \quad \text{при } k \rightarrow \infty,$$

где $Y^{(k)}$ строится по правилу (2.22).

Итерационным методом может быть найдено любое последующее собственное значение матрицы. Однако эти значения

менее точны. Запишем только формулу для нахождения собственного значения λ_2 и собственного вектора \mathbf{X}_2 :

$$\lambda_2 \approx \frac{y_i^{(k+1)} - \lambda_1 y_i^{(k)}}{y_i^{(k)} - \lambda_1 y_i^{(k-1)}} X^{(2)} \approx Y^{(k+1)} - \lambda_1 Y^{(k)}.$$

Пример. Методом итераций определить наибольшее по модулю собственное значение и соответствующий ему собственный вектор, $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-3}$

$$A = \begin{pmatrix} 1,6 & 2,3 & 1,2 \\ 2,3 & 0,6 & 1,5 \\ 1,2 & 1,5 & 3,8 \end{pmatrix}.$$

Строим последовательность векторов:

$$Y^{(k)} = AY^{(k-1)}, \text{ где } Y^{(0)} \text{ – произвольный вектор,}$$

тогда

$$\lambda_1 = \frac{y_i^{(k+1)}}{y_i^{(k)}},$$

где $y_i^{(k+1)}$ и $y_i^{(k)}$ – одноименные координаты двух последовательных векторов.

Пусть $Y^{(0)} = \{1,1,1\}^T$, возьмем $y_1^{(0)}$, найдем $Y^{(1)} = AY^{(0)}$,

$$y_1^{(1)} = 5,1; \quad y_2^{(1)} = 4,4; \quad y_3^{(1)} = 6,5;$$

$$y_1^{(2)} = 26,08; \quad y_1^{(3)} = 142,108; \quad \dots \quad y_1^{(7)} = 2,20927 \cdot 10^7;$$

$$\lambda = \frac{y_1^{(1)}}{y_1^{(0)}} = 5,11 \quad \lambda = \frac{y_1^{(2)}}{y_1^{(1)}} = 5,45 \quad \lambda = \frac{y_1^{(3)}}{y_1^{(2)}} = 5,484 \quad \dots \quad \lambda = \frac{y_1^{(7)}}{y_1^{(6)}} = 5,5243$$

Собственный вектор $\mathbf{X}^{(1)} \approx Y^{(k)} \Rightarrow \mathbf{X}^{(1)} \approx Y^{(11)} = (1,22047 \cdot 10^8; 1,12758 \cdot 10^8; 1,830184 \cdot 10^8)^T$ или $\mathbf{X}^{(1)} = (0,667; 0,616; 1)^T$.

2.4. Решение полной проблемы собственных значений при помощи QR-алгоритма

Определение. Ортогональной называют такую квадратную матрицу A , для которой выполняется равенство $A^{-1} = A^T$.

Пусть A – произвольная вещественная матрица. Ее можно представить в виде $A = U^T A_{n-1}$, где U – ортогональная, а A_{n-1} – правая треугольная матрицы. Запишем это равенство в виде

$$A = Q_1 R_1, \quad (2.31)$$

где Q_1 – ортогональная, R_1 – правая треугольная матрицы.

Из (2.31) имеем $R_1 = Q_1^{-1} A$, поэтому матрица $A_1 = R_1 Q_1 = Q_1^{-1} A Q_1$ подобна матрице A .

Построим последовательность матриц A_n по следующему правилу. Матрицу A_n разлагаем на произведение ортогональной и правой треугольной матриц в виде $A_n = Q_{n+1}R_{n+1}$ и полагаем $A_{n+1} = R_{n+1}Q_{n+1}$. Поскольку $A_{n+1} = Q_{n+1}^{-1}A_nQ_{n+1}$, то все матрицы A_n подобны между собой и подобны исходной матрице A .

Представим исходную матрицу A в виде $A = Q\Lambda Q^{-1}$, где Λ – правая каноническая форма Жордана, т.е. $\lambda_{ij} = 0$ при $j < i$ и $j > i + 1$, $\lambda_{ii} = \lambda_i$ – собственные значения матрицы A , λ_{ii+1} равны нулю или 1.

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_m \end{bmatrix}$$

Всегда можно подобрать матрицу Q так, чтобы диагональные элементы матрицы Λ были упорядочены в порядке невозрастания модуля

$$|\lambda_1| = \dots = |\lambda_{l_1}| > |\lambda_{l_1+1}| = \dots = |\lambda_{l_2}| > \dots > |\lambda_{l_s}|$$

Теорема. Пусть в разложении матрицы A все диагональные миноры матрицы Q не вырождены. Тогда последовательность матриц A_n при $n \rightarrow \infty$ сходится по форме к клеточному правому треугольному виду A .

Имеется в виду, что после некоторой перестановки строк и одновременно такой же перестановки столбцов матрицы A будут выполняться соотношения: если $l_k < i \leq l_{k+1}, j < i$ или $l_{k+1} < j$, $k=1, \dots, s$, то $a_{ij} \rightarrow 0$.

При реализации описанного алгоритма построения матриц A_n видно, что некоторые элементы матриц A_n оказываются малыми. Приравняв их к нулю, мы получим клеточную правую треугольную матрицу. Характеристический многочлен этой матрицы равен произведению характеристических многочленов ее диагональных клеток.

Если требуется найти не только собственные значения матрицы A , но и ее собственные и присоединенные векторы, то в процессе построения последовательности матриц A_n следует запоминать ортогональные матрицы $P_n = Q_1 \dots Q_n$, вычисляемые по рекуррентной формуле $P_{n+1} = P_n Q_{n+1}$.

Каждый шаг QR-алгоритма требует $N \sim 10m^3/3$ арифметических операций.

На практике прибегают к различным способам ускорения сходимости.

Один из этих способов заключается в следующем. Матрица A предварительно преобразуется в эквивалентную ей правую почти треугольную матрицу. Матрица A называется правой почти треугольной, если $a_{ij} = 0$ при $j < i - 1$. Алгоритм преобразования матрицы A в правую почти треугольную матрицу заключается в последовательном построении матриц A_l таких, что первые l столбцов матрицы A_l имеют вид первых l столбцов правой почти треугольной матрицы, т.е. $a_{ij} = 0$, если $j < i - 1$ и $j \leq l$. По элементам $(l + 1)$ -го столбца матрицы A_l построим матрицу U_{l+1} так, чтобы в матрице $B = U_{l+1}A_l$ элементы $b_{1,l+1}, \dots, b_{l,l+1}$ были те же, что у матрицы A_l , а элементы $b_{l+3,l+1}, \dots, b_{m,l+1}$ были нулевыми. Положим $A_{l+1} = U_{l+1}A_lU_{l+1}^T$. Умножение справа на матрицу U_{l+1}^T не меняет первых $l+1$ столбцов матрицы B , поэтому матрица A_{l+1} является матрицей требуемого вида. После получения правой почти треугольной матрицы A_{m-1} применяют QR-алгоритм в его первоначальной форме.

В этом случае каждый шаг QR-алгоритма требует $N \sim 6m^2$ арифметических операций.

Для еще большего ускорения сходимости применяется вариант QR-алгоритма со сдвигом. А именно, строится последовательность ортогональных матриц Q_l и правых треугольных матриц R_l по рекуррентным формулам

$$A - v_1 E = Q_1 R_1, \quad A_1 = R_1 Q_1 + v_1 E,$$

...

$$A_{l-1} - v_l E = Q_l R_l, \quad A_l = R_l Q_l + v_l E.$$

Матрицы A_l подобны матрице A ; за счет введения «сдвигов» v_l удается добиться ускорения сходимости.

QR-алгоритм легко осуществляется с помощью преобразования Хаусхолдера. Пусть вектор выбран так, что:

$$w_1^T = \mu \begin{bmatrix} a_{11} - s \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

$$s = \left(\sum_{j=1}^n a_{j1}^2 \right)^{1/2}, \quad \mu = \left[s \begin{bmatrix} -a_{11} \\ \dots \end{bmatrix} \right]^{1/2}$$

Тогда легко проверить, что

$$A_0 C = \begin{bmatrix} -2w_1 w_1^T \\ \dots \end{bmatrix} A_0 = \begin{bmatrix} s & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & * & \dots & * \end{bmatrix}, \quad (2.33)$$

где звездочкой обозначены элементы, отличные от нуля.

Выберем далее вектор w_2 так, что

$$w_2^T = \hat{\mu} \begin{bmatrix} \hat{a}_{22} - \hat{s} & \hat{a}_{32} & \dots & \hat{a}_{n2} \end{bmatrix}$$

$$\hat{s} = \left(\sum_{j=2}^n \hat{a}_{j2}^2 \right)^{1/2}, \hat{\mu} = \left[\hat{s} \begin{bmatrix} \hat{a}_{22} - \hat{s} \end{bmatrix} \right]^{1/2}$$

Крышечкой помечены элементы матрицы A_0 . Тогда лежащие ниже главной диагонали элементы двух первых столбцов матрицы $\begin{bmatrix} E - 2w_2 w_2^T \\ A_0 \end{bmatrix}$ обратятся в нуль. Продолжая этот процесс с помощью векторов w_i , имеющих нули в первых $i-1$ позициях, получаем:

$$\begin{bmatrix} E - 2w_{n-1} w_{n-1}^T \\ \dots \\ E - 2w_2 w_2^T \\ \dots \\ E - 2w_1 w_1^T \\ A_0 \end{bmatrix} = R_0, \quad (2.34)$$

где R_0 – верхняя треугольная матрица.

Положим

$$Q_0 = \begin{bmatrix} E - 2w_1 w_1^T \\ \dots \\ E - 2w_2 w_2^T \\ \dots \\ E - 2w_{n-1} w_{n-1}^T \end{bmatrix}. \quad (2.35)$$

Тогда можно записать, что $Q_0^T A_0 = R_0$. Так как каждая матрица $\begin{bmatrix} E - 2w_i w_i^T \\ \dots \end{bmatrix}$ ортогональна, то и их произведение Q_0 также будет ортогональной матрицей. Следовательно, $Q_0^{-1} = Q_0^T$. Тогда и имеет место соотношение $A_0 = Q_0 R_0$, которое и представляет собой QR-разложение матрицы A_0 . Это разложение может быть осуществлено всегда, без каких-либо ограничений на матрицу A . Кроме того, указанный алгоритм численно устойчив.

Пусть возможно разложение матрицы $A = A_0 = Q_0 R_0$. Тогда получим: $A_1 = R_0 Q_0$; отсюда $R_0 = A_1 Q_0^T$ и $A_0 = Q_0 A_1 Q_0^T$. Далее, разложив матрицу $A_1 = Q_1 R_1$, получим $A_2 = R_1 Q_1$, $R_1 = A_2 Q_1^T$, $A_1 = Q_1 A_2 Q_1^T$, $A_0 = \begin{bmatrix} Q_0 Q_1 & A_2 \\ \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 Q_0^T \\ \dots \end{bmatrix}$.

Следовательно, $\lambda(A_0) = \lambda(A_2)$ и

$$A = A_0 = \begin{bmatrix} Q_0 Q_1 \dots Q_k & A_{k+1} \\ \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_k \dots Q_1 Q_0^T \\ \dots \end{bmatrix}.$$

Полагаем $|\lambda_i| \neq |\lambda_j|$, $i \neq j$, $\lambda_i = \lambda_i(A)$, $i = 1, \dots, n$. Тогда

$$\lambda_i(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{ii}^{(k)}, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $a_{ii}^{(k)}$ – диагональные элементы матрицы A_k .

Пример. Используя QR-алгоритм, найти собственные значения симметрической матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Выберем вектор w_1 согласно формуле (2.32):

$$w1 = \begin{pmatrix} \mu1 \cdot (A_{0,0} - s1) \\ \mu1 \cdot A_{1,0} \\ \mu1 \cdot A_{2,0} \end{pmatrix},$$

где

$$\mu1 = \left[\frac{1}{2} \cdot s1 \cdot (1 - A_{0,0}) \right]^{1/2},$$

$$s1 = \left[\sum_{j=0}^2 (A_{j,0})^2 \right]^{1/2}.$$

Тогда

$$w1 = \begin{pmatrix} -0,23 \\ -0,973 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Построим матрицу A1 согласно формуле (2.33):

$$A1 = \begin{pmatrix} E - 2 \cdot w1 \cdot w1^T & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A1 = \begin{pmatrix} 2,236 & -1,789 & 0,447 \\ 0 & -1,342 & 0,894 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Выберем вектор w2 по формуле (2.32):

$$w2 = \begin{pmatrix} \mu2 \cdot 0 \\ \mu2 \cdot (A_{1,1} - s2) \\ \mu2 \cdot A_{2,1} \end{pmatrix},$$

где

$$\mu2 = \left[\frac{1}{2} \cdot s2 \cdot (2 - A_{1,1}) \right]^{1/2},$$

$$s2 = \left[\sum_{j=1}^2 (A_{j,1})^2 \right]^{1/2}.$$

Тогда

$$w2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,949 \\ -0,315 \end{pmatrix}.$$

Построим матрицу A2 по формуле (2.33):

$$A2 = \begin{pmatrix} E - 2 \cdot w2 \cdot w2^T & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2,236 & -1,789 & 0,447 \\ 0 & 1,673 & -1,912 \\ 0 & 0 & 1,069 \end{pmatrix}.$$

Построим матрицу Q согласно формуле (2.35):

$$Q_0 = \begin{pmatrix} E - 2 \cdot w_1 \cdot w_1^T & & \\ & E - 2 \cdot w_2 \cdot w_2^T & \\ & & A_0 \end{pmatrix},$$

$$Q_0 = \begin{pmatrix} 0,894 & -0,359 & 0,267 \\ -0,447 & 0,717 & 0,535 \\ 0 & -0,598 & 0,802 \end{pmatrix}.$$

Убедимся, что матрица Q – ортогональна.

$$Q_0^{-1} = \begin{pmatrix} 0,894 & -0,447 & 0 \\ 0,359 & 0,717 & -0,598 \\ 0,267 & 0,535 & 0,802 \end{pmatrix} = Q_0^T.$$

Построим верхнетреугольную матрицу R по формуле (2.34):

$$R_0 = \begin{pmatrix} E - 2 \cdot w_2 \cdot w_2^T & & \\ & E - 2 \cdot w_1 \cdot w_1^T & \\ & & A_0 \end{pmatrix}.$$

$$R_0 = \begin{pmatrix} 2,236 & -1,789 & 0,447 \\ 0 & 1,673 & -1,912 \\ 0 & 0 & 1,069 \end{pmatrix}$$

После первой итерации матрица A вычисляется по формуле $A = R_0 \cdot Q_0$ и имеет вид:

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 2,8 & -0,748 & 0 \\ -0,748 & 2,343 & -0,639 \\ 0 & -0,639 & 0,857 \end{pmatrix}.$$

Первая итерация завершена. Поддиагональные элементы матрицы достаточно велики, поэтому итерационный процесс необходимо продолжать.

После второй итерации матрица A будет иметь вид:

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 3,143 & -0,559 & 0 \\ -0,559 & 2,248 & -0,188 \\ 0 & -0,188 & 0,609 \end{pmatrix}.$$

После третьей итерации матрица A будет иметь вид:

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 3,308 & -0,372 & 0 \\ -0,372 & 2,104 & -0,052 \\ 0 & -0,052 & 0,588 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, итерационный процесс продолжается до тех пор, пока недиагональные элементы матрицы не будут удовлетворять заданной точности.

2.5. Прямой метод вращений

Определение. Матрица B называется эрмитово сопряженной к матрице A , если она получена из нее транспонированием (зеркальным отражением от главной диагонали) с последующей заменой элементов комплексно-сопряженными, т.е. $B = A^H$, если $b_{ik} = a_{ki}^*$.

Определение. Матрица эрмитова, если она эрмитово сопряжена самой себе: $A = A^H$, и косоэрмитова, если она удовлетворяет соотношению: $A = -A^H$.

Вещественная эрмитова матрица называется симметричной, а косоэрмитова — кососимметричной.

Определение. Унитарной называется матрица, обратная своей эрмитово сопряженной: $U^H = U^{-1}$; вещественные унитарные матрицы называют ортогональными. Матрица называется нормальной, если она перестановочна со своей эрмитово сопряженной, т.е. $AA^H = A^HA$. Легко видеть, что эрмитовые, косоэрмитовые и унитарные матрицы являются частными случаями нормальных.

Метод основан на специально подобранном вращении координатной системы. Любое вращение можно свести к последовательности элементарных (плоских) вращений–поворотов в двумерной плоскости, проходящей через k -ю и l -ю оси координат; остальные оси координат при этом неподвижны. Для комплексных векторов матрица элементарного вращения имеет следующий вид:

$$U_{kl} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \dots & -\beta^* & 0 \dots k\text{-ая} \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \dots & \alpha & 0 \dots l\text{-ая} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = \cos \varphi,$$

$$\beta = e^{-i\psi} \sin \varphi,$$

$$\alpha^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Остальные недиагональные элементы этой матрицы – нули. Для вещественных векторов надо полагать $\psi = 0$. Если из-за погрешностей расчета окажется, что $\alpha^2 + |\beta|^2 \neq 1$ или β и β^* не точно сопряжены друг другу, то унитарность матрицы нарушается. Тогда при преобразовании подобия нарушится эрмитовость матрицы A и сильно ухудшится

устойчивость метода вращения. Поэтому в численных расчетах следует определять α и β по таким формулам, чтобы указанные соотношения выполнялись с очень высокой точностью.

Построим формулы для преобразования матрицы A при элементарном вращении. Матрица $B = AU_{kl}$ отличается от матрицы A элементами k -го и l -го столбцов; остальные элементы у них совпадают:

$$\begin{aligned} b_{ik} &= a_{ik}\alpha + a_{il}\beta, \quad b_{il} = -a_{ik}\beta^* + a_{il}\alpha, \quad 1 \leq i \leq n, \\ b_{ij} &= a_{ij} \quad \text{при } j \neq k, l \text{ и } 1 \leq i \leq n. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Аналогично, матрица $C = U_{kl}^H B$ отличается от матрицы B элементами k -ой и l -ой строк:

$$\begin{aligned} c_{ki} &= b_{ki}\alpha + b_{li}\beta^*, \quad c_{li} = -b_{ki}\beta + b_{li}\alpha, \quad 1 \leq i \leq n, \\ c_{ji} &= b_{ji} \quad \text{при } j \neq k, l \text{ и } 1 \leq i \leq n. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Следовательно, матрица $C = U^H A U$ отличается от матрицы A лишь двумя строками и двумя столбцами.

Заметим, что если A эрмитова, то матрица C также будет эрмитова; тогда в изменившихся столбцах и строках достаточно вычислить только половину элементов и тем самым вдвое уменьшить объем расчетов. Найдем такую последовательность элементарных вращений, которая приводит произвольную (неэрмитову) матрицу A к верхней почти треугольной форме.

Можно так подобрать угол поворота в матрице U_{kl} , чтобы уничтожить элемент U_{lk-1} , расположенный непосредственно перед левым нижним углом подматрицы плоского поворота (рис. 1).

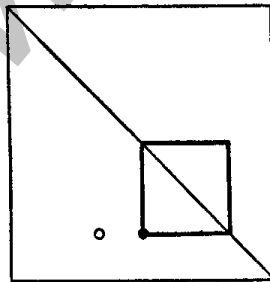


Рис. 1.

Из формул (2.36) и (2.37) видно, что для этого надо положить

$$\alpha = \frac{|a_{kk-1}|}{\sqrt{|a_{kk-1}|^2 + |a_{lk-1}|^2}}, \quad \beta = \frac{\alpha a_{lk-1}}{a_{kk-1}}. \quad (2.38)$$

Для вещественных матриц величина β тоже будет вещественной. Тогда (2.38) переписутся

$$\alpha = \frac{a_{kk-1}}{\sqrt{a_{kk-1}^2 + a_{lk-1}^2}}, \quad \beta = \frac{a_{lk-1}}{\sqrt{a_{kk-1}^2 + a_{lk-1}^2}}. \quad (2.39)$$

Теперь будем аннулировать те элементы матрицы и в том порядке, как это указано цифрами на рис. 2.

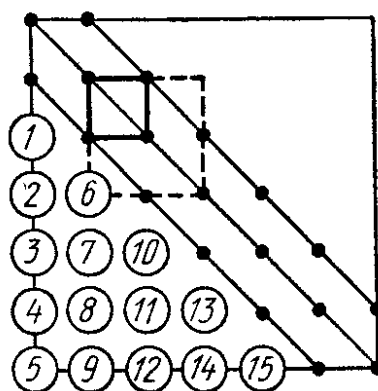


Рис. 2.

Первый элемент уничтожается при помощи матрицы U_{23} , обозначенной на рисунке сплошным квадратом. Вторым уничтожается вращением U_{24} , обозначенным пунктирным квадратом. При втором вращении в матрице A меняются элементы вторых и четвертых строк и столбцов. Значит, аннулированный элемент «1», лежащий в третьей строке, так и останется равным нулю.

Продолжая эти рассуждения, можно убедиться, что однажды уничтоженный элемент при такой последовательности исключения будет оставаться равным нулю. Поэтому после окончания всех исключений матрица станет верхней почти треугольной матрицей ($a_{ij} = 0$ при $i > j + 1$). Это справедливо для произвольной (неэрмитовой) матрицы.

Если исходная матрица A эрмитова, то благодаря сохранению эрмитовости при унитарном преобразовании подобия она приводится к трехдиагональной форме. В этом случае для экономии времени при каждом вращении достаточно вычислять только изменившиеся элементы нижней половины матрицы (уже обратившиеся в нуль элементы в дальнейшие расчеты не включают).

Для полученной трехдиагональной (или почти треугольной) матрицы можно вычислять собственные значения и собственные векторы способом, изложенным ниже. Найденные собственные значения будут одновременно собственными значениями исходной матрицы. А собственные векторы x_i – исходной матрицы связаны с собственными векторами трехдиагональной матрицы соотношением

$$x_i = U_{23}U_{24} \dots U_{n-1n}y_i. \quad (2.40)$$

Проще всего вычислять их, последовательно умножая требуемый вектор y слева на матрицы вращения. Структура матриц

такова, что при умножении на U_{kl} меняются только k -я и l -я компоненты вектора

$$\begin{aligned} x_k &= \alpha y_k - \beta^* y_l, & x_l &= \beta y_k + \alpha y_l, \\ x_j &= y_j, & \text{при } j &\neq k, l. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Предварительное перемножение самих матриц вращения потребовало бы большего числа действий (это особенно невыгодно, если нужна только часть собственных векторов).

На приведение эрмитовой матрицы к трехдиагональной форме и нахождение всех собственных значений в методе вращений требуется около $2n^3 + 50n^2$ арифметических действий и n^2 ячеек оперативной памяти. Для нахождения каждого собственного вектора надо затратить еще $3n^2$ действий. Собственные значения и собственные векторы в этом методе определяются устойчиво (если унитарность U_{kl} не нарушена ошибками округления).

Трехдиагональные матрицы. Для трехдиагональных матриц (даже очень высокого порядка) есть способ быстрого вычисления $\det(A - \lambda E)$ без нахождения явного выражения характеристического многочлена.

Рассмотрим этот способ. Обозначим главный минор m -го порядка матрицы $A - \lambda E$ через $D_m(\lambda)$. Разложим такой минор по элементам последней строки; в ней всего два ненулевых элемента (рис. 3).

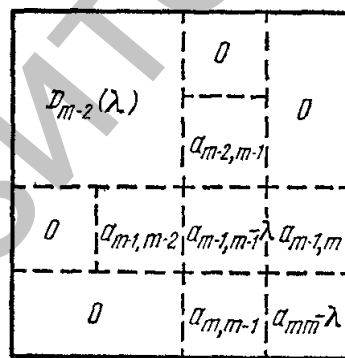


Рис. 3.

Получим

$$D_m(\lambda) \cong (a_{mm} - \lambda) D_{m-1}(\lambda) - a_{m, m-1} B_{m, m-1}(\lambda), \quad (2.42)$$

где через $B_{m, m-1}(\lambda)$ обозначен минор, дополняющий элемент $a_{m, m-1}$. Этот минор содержит в последнем столбце только один ненулевой элемент $a_{m-1, m}$, поэтому его целесообразно разложить по элементам последнего столбца:

$$B_{m, m-1}(\lambda) \cong a_{m-1, m} D_{m-2}(\lambda). \quad (2.43)$$

Подставляя (2.43) в (2.42), найдем рекуррентное соотношение, выражающее минор высшего порядка через низшие:

Если необходимо обратить в нуль элемент a_{ik} матрицы A , то $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ нужно выбрать по формулам

$$c = \cos\varphi = \sqrt{\frac{1+z}{2}}, \quad s = \sin\varphi = \varepsilon\sqrt{\frac{1-z}{2}}, \quad (2.46)$$

где

$$z = \sqrt{1 - \frac{a_{ik}^2}{(a_{ii} - a_{kk})^2 + a_{ik}^2}}, \quad \varepsilon = \begin{cases} \operatorname{sign} a_{ik}, & a_{ii} = a_{kk}, \\ \operatorname{sign} \frac{a_{ii} - a_{kk}}{a_{ik}}, & a_{ii} \neq a_{kk}. \end{cases}$$

Тогда получим матрицу $B = T_m^T A T_m$ с измененными i -м и k -м столбцами и строками:

$$\begin{aligned} b_{ii} &= \cos^2\varphi a_{ii} + \sin^2\varphi a_{kk} + 2\cos\varphi\sin\varphi a_{ik}, \\ b_{kk} &= \sin^2\varphi a_{ii} + \cos^2\varphi a_{kk} - 2\cos\varphi\sin\varphi a_{ik}, \\ b_{ik} &= b_{ki} = 0, \\ b_{ij} &= b_{ji} = \cos\varphi a_{ji} + \sin\varphi a_{jk}, \\ b_{kj} &= b_{jk} = -\sin\varphi a_{ji} + \cos\varphi a_{jk}, \\ j &= 1, \dots, n, \quad j \neq i, \quad j \neq k, \\ b_{jl} &= a_{jl} \text{ в остальных случаях.} \end{aligned} \quad (2.47)$$

Отметим, что выполняется соотношение $b_{ii}^2 + b_{kk}^2 = a_{ii}^2 + a_{kk}^2 + 2a_{ik}^2$, т.е. сумма квадратов диагональных элементов увеличивается. Соответственно, на ту же величину уменьшается сумма квадратов внедиагональных элементов, откуда и следует сходимость к диагональной матрице. Элементы, которые однажды обратились в нуль, при последующих шагах снова могут стать ненулевыми. Если на каждом шаге данного преобразования подобия брать максимальный по модулю элемент преобразуемой матрицы, то в пределе получится диагональная матрица.

Заметим, что по мере того, как A_m при $m \rightarrow \infty$ превращается в диагональную матрицу, на диагонали которой стоят собственные значения в некоторой последовательности, зависящей от выбранных вначале пар i, k , в столбцах матрицы $T_1 \dots T_m$ появляются стоящие в соответствующей последовательности нормированные собственные векторы.

Пример. Применить метод Якоби к матрице $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Выберем максимальный по модулю недиагональный элемент матрицы. Пусть $(i, k) = (1, 2)$. По формулам (2.46) вычислим c и s : $c = 0,7071$; $s = -0,7071$. Тогда матрица T_1 будет иметь вид:

$$T1 = \begin{pmatrix} 0,7071 & 0,7071 & 0 \\ -0,7071 & 0,7071 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица В, вычисленная согласно (2.47), будет иметь вид:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0,7071 \\ 0 & 1 & -0,7071 \\ 0,7071 & -0,7071 & 2 \end{pmatrix}.$$

Первая итерация завершена. Заметим, что поддиагональные элементы матрицы В достаточно велики, поэтому итерационный процесс необходимо продолжать.

Выберем максимальный по модулю недиагональный элемент матрицы В. Пусть $(i, k) = (1, 3)$. По формулам (2.46) вычислим c и s : $c = 0,8881$; $s = 0,4597$. Тогда матрица $T1 \cdot T2$ будет иметь вид:

$$T1 \cdot T2 = \begin{pmatrix} 0,628 & 0,7071 & -0,3251 \\ -0,628 & 0,7071 & 0,3251 \\ 0,4597 & 0 & 0,8881 \end{pmatrix}.$$

Матрица В, вычисленная, согласно (2.47), будет иметь вид:

$$B = \begin{pmatrix} 3,366 & -0,3251 & 0 \\ -0,3251 & 1 & -0,628 \\ 0 & -0,628 & 1,634 \end{pmatrix}.$$

Продолжаем итерационный процесс до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность.

На седьмой итерации:

$$T1 \cdot T2 \cdot T3 \cdot T4 \cdot T5 \cdot T6 \cdot T7 = \begin{pmatrix} 0,4873 & 0,8591 & 0,1561 \\ -0,7311 & 0,3037 & 0,611 \\ 0,4775 & -0,4119 & 0,7761 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 3,4229 & 0 & 0,0001 \\ 0 & 1,69 & 0 \\ 0,0001 & 0 & 0,8871 \end{pmatrix}.$$

Диагональные элементы матрицы В являются собственными значениями исходной матрицы, а столбцы матрицы $T1 \cdot T2 \cdot T3 \cdot T4 \cdot T5 \cdot T6 \cdot T7$ – собственными векторами.

2.7. Функции MathCad

Для контроля вычислений можно использовать стандартные функции пакета MathCad:

eigenvals (A) – возвращает вектор из собственных значений матрицы А;

eigenvec (A, λ) – нормированный собственный вектор матрицы A , соответствующий ее собственному значению λ ;

eigenvecs (A) – возвращает матрицу, чьими столбцами являются собственные векторы матрицы A . Порядок расположения собственных векторов соответствует порядку собственных значений, возвращаемых функцией `eigenvals`.

Репозиторий ВГУ

Контрольные вопросы

1. Назовите этапы вычислительного эксперимента.
2. Дайте определение постановки задачи.
3. Что такое модель и математическая модель?
4. Что такое численный метод и что он из себя представляет?
5. Опишите этап программирования и тестирования.
6. Что понимается под численным методом?
7. Что общего у всех численных методов?
8. Что значит „задача поставлена корректно (некорректно)“?
9. Назовите свойства численных методов.
10. Какие факторы приводят к погрешности решения задачи?
11. Дайте определение понятий абсолютной и относительной погрешностей.
12. Какие вы знаете способы уменьшения погрешности вычислений?
13. Сформулируйте правила округления приближенных чисел.
14. Сформулируйте определение верной цифры числа. Приведите примеры.
15. Докажите утверждение об оценке абсолютной погрешности суммы и разности двух чисел.
16. Что относят к численным методам алгебры?
17. На какие методы делятся методы решения алгебраических задач?
18. Что понимается под точными методами? Приведите пример.
19. Что понимается под итерационными методами? Приведите пример.
20. Что такое собственный вектор и собственное значение матрицы A ?
21. На чем основан метод Данилевского?
22. Запишите каноническую форму Фробениуса.
23. Запишите характеристический полином матрицы Фробениуса Φ .
24. В чем заключается основная задача метода Данилевского?
25. Опишите первый шаг метода Данилевского.
26. Что получится после $n-1$ шагов метода Данилевского?
27. Как записывается собственный многочлен матрицы A по ее канонической форме Фробениуса?
28. Какая связь между собственными векторами матриц A и Φ , принадлежащими одному собственному значению λ ?

29. Запишите разложение вектора $Y^{(k)}$ по базису в матричном виде для случая, когда матрица A обладает полной системой линейно-независимых собственных векторов.

30. Как можно повысить сходимость итерационного процесса?

31. Как найти собственный вектор X_1 , соответствующий собственному значению λ_1 ?

32. Почему собственные векторы матриц можно нормировать?

33. Что такое ортогональная матрица?

34. Что такое матрица плоского вращения?

35. Для нахождения собственных значений каких матриц пригоден метод Якоби?

36. Как найти матрицу плоского вращения на очередном шаге метода Якоби? Из какого условия находится угол плоского вращения?

37. Докажите, что на одном шаге метода Якоби сумма квадратов недиагональных элементов уменьшается на удвоенный квадрат того элемента, который подлежит обнулению на данном шаге.

38. До каких пор продолжается итерационный процесс метода Якоби при практическом нахождении собственных значений и собственных векторов исходной матрицы?

39. Опишите QR-алгоритм.

40. Опишите методику ускорения QR-алгоритма.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Бином, 2004. – 636 с.
2. Калиткин Н.Н. Численные методы: учеб. пособие. – М.: Наука, 1978. – 512 с.
3. Марчук П.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1989. – 608 с.
4. Самарский А.А. Введение в численные методы. – М.: Наука, 1983. – 272 с.
5. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
6. Бахвалов Н.С. Численные методы в задачах и упражнениях: учеб. пособие. – М.: Высшая школа (Высшая математика), 2000. – 190 с.
7. Сборник задач по методам вычислений: учеб. пособие для студ. учреждений, обеспечивающих получение высш. образования по физико-математическим спец. / под ред. П. И. Монастырного. – Минск: Издательский центр БГУ, 2007. – 376 с.
8. Киреев В.И., Пантелеев А.В. Численные методы в примерах и задачах: учеб. пособие. – М.: «Высшая школа», 2006. – 480 с.
9. Турчак Л.И. Основы численных методов: учеб. пособие для студ. вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Физматлит, 2002. – 300 с.

Учебное издание

МАРКОВА Людмила Васильевна
КОРЧЕВСКАЯ Елена Алексеевна

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ
НАХОЖДЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ
И СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ МАТРИЦ**

Методические рекомендации

Технический редактор	<i>Г.В. Разбоева</i>
Корректор	<i>Ф.И. Сивко</i>
Компьютерный дизайн	<i>Е.В. Малнач</i>

Подписано в печать Формат 60x84 ¹/₁₆. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 2,73. Уч.-изд. л. 2,03. Тираж 50 экз. Заказ

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования
«Витебский государственный университет им. П.М. Машерова».
ЛИ № 02330 / 0494385 от 16.03.2009.

Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Витебский государственный университет им. П.М. Машерова».
210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.