Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра алгебры и методики преподавания математики

МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Сборник заданий

Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2020

УДК 512.643(075.8)
ББК 22.143я73
М33

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 1 от 22.10.2020.

Составитель: профессор кафедры алгебры и методики преподавания математики ВГУ имени П.М. Машерова, доктор физико-математических наук, доцент **Н.Н. Воробьёв**

Научный редактор:
заведующий кафедрой алгебры
и методики преподавания математики ВГУ имени П.М. Машерова,
доктор физико-математических наук, профессор *Н.Т. Воробьёв*

Рецензент:
профессор кафедры геометрии и математического анализа
ВГУ имени П.М. Машерова, доктор физико-математических наук,
профессор *Ю.В. Трубников*

М33 **Матрицы и определители** : сборник заданий / сост. Н.Н. Воробьёв. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2020. – 79 с.

Сборник заданий содержит наряду с типовыми задачами теории матриц и определителей (алгебра матриц, ранг матрицы, обратная матрица, определение, основные свойства и методы вычисления определителя *n*-го порядка) также задачи, являющиеся обобщением и углублением курса элементарной алгебры, и может быть использован для проведения практических и самостоятельных (контрольных) работ по алгебре студентов факультета математики и информационных технологий.

УДК 512.643(075.8)
ББК 22.143я73

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый сборник заданий предназначен для первоначального изучения основ теории матриц и определителей. В первую очередь он адресован студентам факультета математики и информационных технологий и может быть использован для организации их самостоятельной работы. Одни студенты могут использовать данное издание для предварительного ознакомления с материалом лекционного курса, другие – при подготовке к практическим занятиям по определенной теме. Оно может быть использовано и при обобщающем повторении, например, перед курсовым или государственным экзаменом. Сборник не является задачником, хотя в некоторой степени может его заменить. Его основу составляют некоторые, на наш взгляд, наиболее важные именно с практической точки зрения темы традиционных курсов «Алгебра и теория чисел», «Геометрия и алгебра» и «Матричный анализ».

Весь материал разбивается на разделы и подразделы. Каждый раздел начинается обзором основных понятий и тесно связанных с ними результатов, что по существу представляет собой не разбавленное деталями доказательств концентрированное изложение теории. Подробные обоснования приведенных утверждений, как правило, опущены – их можно получить самостоятельно или, в случае затруднений, прибегнуть к рекомендуемой литературе. Далее рассматриваются достаточно детальные решения наиболее типичных задач. Каждый раздел завершают упражнения для самостоятельного решения. Как правило, задачи естественным образом объединены в группы по возрастанию степени сложности. Поэтому расположение задачи содержит некоторую информацию о методе ее решения. Отметим, что в настоящем издании приведен лишь самый необходимый минимум упражнений, которых начинающему читателю, конечно, недостаточно. Имеется в виду, что читатель использует соответствующие разделы многократно изданных и легко доступных задачников Л.Я. Окунева [8], И.В. Проскурякова [9], Д.К. Фаддеева и И.С. Соминского [13], Л.Б. Шнепермана [15].

Значительная помощь при подготовке рукописи оказана студентами III курса факультета математики и информационных технологий **Лабусовой Е.**, **Лаптевым Ю.**, **Лихотой Н.**, **Савельевой Н.**, аспирантом **Стаселько И.И.**, которым автор приносит благодарность.

1. АЛГЕБРА МАТРИЦ

Определение 1. **Суммой** двух $(m\times n)$-матриц $A=(\alpha_{ij})$ и $B=(\beta_{ij})$ называется такая матрица $C=(\gamma_{ij})$, элемент γ_{ij} которой равен $\alpha_{ij}+\beta_{ij}$, т.е. $A+B=(\alpha_{ij}+\beta_{ij})$ для любых наборов $i\in\{1,\dots,m\}$, $j\in\{1,\dots,n\}$.

Определение 2. Пусть F — некоторое поле. **Произведением** $(m\times n)$- матрицы $A=(\alpha_{ij})$ **на скаляр** $\lambda\in F$ называется такая $(m\times n)$-матрица λA, что $\lambda A=(\lambda\alpha_{ij})$, где $i\in\{1,\dots,m\}$, $j\in\{1,\dots,n\}$.

Задача 1.

Выполнить действия:

a) $4\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&1&1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-1&3&1\\2&1&2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}2&4&1\\-1&3&2\end{pmatrix}$;

b) $2A-3B+4$, где $A=\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2&1\\0&-1\end{pmatrix}$.

Решение.

a) $4\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&1&1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-1&3&1\\2&1&2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}2&4&1\\-1&3&2\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}4\cdot1&4\cdot2&4\cdot(-1)\\4\cdot2&4\cdot1&4\cdot1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\cdot(-1)&3\cdot3&3\cdot1\\3\cdot2&3\cdot1&3\cdot2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\cdot2&2\cdot4&2\cdot1\\2\cdot(-1)&2\cdot3&2\cdot2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}4&8&-4\\8&4&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3&9&3\\6&3&6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&8&2\\-2&6&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-3-4&9&-3\\8+6-2&1&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&9&-3\\16&1&6\end{pmatrix}.$$

b) Так как в данное выражение вместо переменных A и B подставляются матрицы, то можно считать, что число 4 есть $4E$, где E – единичная матрица. Таким образом,

$$2A-3B+4=\begin{pmatrix}2&-2\\4&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6&-3\\0&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-5\\4&9\end{pmatrix}.$$

Ответ: a) $\begin{pmatrix}-3&9&-3\\16&1&6\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}0&-5\\4&9\end{pmatrix}$.

Определение 3. Пусть даны две матрицы

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\dots&\alpha_{1n}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}&\dots&\alpha_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\\alpha_{m1}&\alpha_{m2}&\dots&\alpha_{mn}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}\beta_{11}&\beta_{12}&\dots&\beta_{1p}\\\beta_{21}&\beta_{22}&\dots&\beta_{2p}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\\beta_{n1}&\beta_{n2}&\dots&\beta_{np}\end{pmatrix},$$

причем ***число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.*** **Произведением** матрицы A на матрицу B называется матрица

$C = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1p} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{m1} & \gamma_{m2} & \cdots & \gamma_{mp} \end{pmatrix}$, обозначаемая через AB, элементы которой вычисляются по формулам:

$$\gamma_{ij} = \alpha_{i1}\beta_{1j} + \alpha_{i2}\beta_{2j} + \ldots + \alpha_{in}\beta_{nj} = \sum_{s=1}^{n} \alpha_{is}\beta_{sj}$$

(i=1, 2, ... , m; j =1, 2, ... , p).

Замечание. Согласно нашему определению, **произведение двух матриц имеет смысл** тогда и только тогда, когда **число столбцов первого множителя равно числу строк второго множителя.**

Задача 2.

Вычислить AB и BA, если они существуют, если:

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$;

d) $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -f & e & -d \\ f & 0 & -c & b \\ -e & c & 0 & -a \\ d & -b & a & 0 \end{pmatrix}$.

Решение.

a)

$$AB=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = (-1\cdot 2 + 2\cdot 2 + 3\cdot 1 + (-1)\cdot(-2)) = (-2+4+3+2)=7;$$

$$BA=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2\cdot(-1) & 2\cdot 2 & 6 & -2 \\ 2\cdot(-1) & 2\cdot 2 & 6 & -2 \\ 1\cdot(-1) & 1\cdot 2 & 3 & -1 \\ (-2)\cdot(-1) & (-2)\cdot 2 & -6 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 & -2 \\ -2 & 4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) $AB=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\cdot 2+2\cdot 1+0\cdot 0 & 9 \\ 2\cdot 2+(-1)\cdot 1+2\cdot 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$,

$$BA=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 9 & -1 & 6 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

c) $AB=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix}$, произведение BA не существует.

d) $AB=\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -f & e & -d \\ f & 0 & -c & b \\ -e & c & 0 & -a \\ d & -b & a & 0 \end{pmatrix}=(af-be+cd)\cdot E=BA$,

где E – единичная матрица.

Ответ: a) AB=7, $BA=\begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 & -2 \\ -2 & 4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$; b) $AB=\begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 9 & -1 & 6 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$; c) $AB=\begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix}$, произведение BA не существует; d) $AB=(af-be+cd)\cdot E=BA$, где E – единичная матрица.

Задача 3.

Выполнить действия:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^3$; b) $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n$.

Решение.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 20 & 35 \end{pmatrix}$.

b) Заметим, что при n=2 имеем:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos^2\varphi - \sin^2\varphi & -\cos\varphi\sin\varphi - \sin\varphi\cos\varphi \\ \sin\varphi\cos\varphi + \cos\varphi\sin\varphi & -\sin^2\varphi + \cos^2\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{pmatrix}.$$

При n=3 аналогично получаем: $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} \cos 3\varphi & -\sin 3\varphi \\ \sin 3\varphi & \cos 3\varphi \end{pmatrix}$.

В итоге: $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}$.

Ответ: a) $\begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 20 & 35 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}$.

Задача 4.

Решить систему матричных уравнений:

$$\begin{cases} 2X - Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ 3X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Решение.

Умножим первое уравнение на 2 и сложим со вторым

$$4X - 2Y + 3X + 2Y = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$7X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} \frac{1}{7} & 0 \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

Из первого уравнения системы

$$Y=2X-\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{7} & 0 \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -1 \\ \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X=\begin{pmatrix} \frac{1}{7} & 0 \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -1 \\ \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$.

Из *задачи 2* следует, что умножение матриц не подчиняется перестановочному (коммутативному) закону, т. е., вообще говоря, $AB\neq BA$ (речь идет о случае, когда оба произведения, AB и BA, имеют смысл). Однако в некоторых отдельных случаях может оказаться, что $AB=BA$. В таких случаях матрицы A и B называются ***перестановочными.*** Очевидно, что это может иметь место только в том случае, когда A и B – квадратные матрицы одного и того же порядка.

Задача 5.

Найти все матрицы, перстановочные с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение.

От нас требуется найти все матрицы A второго порядка такие, что

$$A\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\cdot A.$$

Пусть $A=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$. Тогда $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$

или $\begin{pmatrix} x_1-x_2 & 2x_1-x_2 \\ x_3-x_4 & 2x_3-x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1+2x_3 & x_2+2x_4 \\ -x_1-x_3 & -x_2-x_4 \end{pmatrix}$.

Равенство двух матриц означает равенство их элементов, занимающих одинаковые места. Следовательно, имеем систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = x_1 + 2x_3 \\ 2x_1 - x_2 = x_2 + 2x_4 \\ x_3 - x_4 = -x_1 - x_3 \\ 2x_3 - x_4 = -x_2 - x_4 \end{cases}.$$

Проводя соответствующие вычисления, находим общее решение системы:

$$\begin{cases} x_2 = -2x_3 \\ x_4 = x_1 + 2x_3 \end{cases}.$$

Таким образом, общий вид матрицы A будет:

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & -2x_3 \\ x_3 & x_1 + 2x_3 \end{pmatrix}, \text{ где } x_1 \text{ и } x_3 - \text{любые числа.}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} x_1 & -2x_3 \\ x_3 & x_1 + 2x_3 \end{pmatrix}$, где x_1 и x_3 − любые числа.

Упражнения

1. Произвести умножение матриц в указанном порядке:

a) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Проверить на нескольких примерах, что произведение зависит от порядка сомножителей.

2. Вычислить выражения:

a) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}^5$; b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n$; c) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}^n$, где $a^2 + bc = 1$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$.

3. Найти все матрицы $X = \begin{pmatrix} x & -y \\ -y & x \end{pmatrix}$, удовлетворяющие уравнению $f(X) = 0$, если $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

4. Решить систему матричных уравнений:

$$\begin{cases} X+Y=\begin{pmatrix} n & 1 \\ 0 & n-1 \end{pmatrix} \\ 2X+(n+2)Y=\begin{pmatrix} n & 0 \\ 2 & n-2 \end{pmatrix} \end{cases}$$, где n – номер варианта.

5. Найти все матрицы, перестановочные с матрицей:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

6. Как изменится матрица

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix},$$

если ее умножить справа (слева) на одну из матриц:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

Постарайтесь, решив эту задачу, сформулировать аналогичные задачи для матриц n-го порядка.

7. Можно ли рассматривать действие “добавить к первой строке матрицы все остальные” как умножение (слева или справа) на некоторую вспомогательную матрицу?

8. Для произвольной матрицы A обозначим через $\overline{A}$ матрицу, получающуюся из A заменой всех ее элементов комплексно-сопряженными числами. Доказать, $AB=C$, то $\overline{A}\overline{B}=\overline{C}$.

2. ПОНЯТИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ *n*-го ПОРЯДКА

2.1. Определители второго и третьего порядков

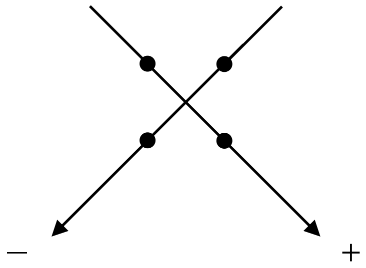
Определение. Рассмотрим квадратную матрицу второго порядка

$A=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$, где α_{ij} — некоторые числа $i,j\in\{1,2\}$.

Выражение $\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{21}\alpha_{12}$ называется **определителем 2-го порядка матрицы *A*.**

Обозначение: $|A|=\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}=\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{21}\alpha_{12}$.

Правило, по которому вычисляется определитель матрицы 2-го порядка можно изобразить следующим образом:



Совершенно аналогично для произвольной квадратной матрицы $\boldsymbol{A}$ третьего порядка можно рассмотреть **определитель 3-го порядка матрицы *A*.** Напомним, что

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{31}\alpha_{12}\alpha_{23} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31} - \alpha_{33}\alpha_{21}\alpha_{12} -$$

$$-\alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32}.$$

Схематически правило для вычисления определителей третьего порядка (так называемое «правило треугольника» или правило Саррюса) может быть изображено следующим образом:

Задача.

Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{5} \\ 2+\sqrt{5} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} \varepsilon & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{vmatrix}$, где $\varepsilon = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}$; 3) $\begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение.

1) $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{5} \\ 2+\sqrt{5} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix} = (1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) - (2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5}) = (1-2)-(4-5) = 0$.

2) $\begin{vmatrix} \varepsilon & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{vmatrix} = \varepsilon^2 + 1 = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^2 + 1 = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) + 1 =$

$= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$.

3) $\begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix}$ $= 1\cdot1\cdot1 + (1-i)\cdot i\cdot 0 + (1+i)\cdot(-i)\cdot 0 - (1-i)\cdot 1\cdot(1+i) - 1\cdot(-i)\cdot i -$

$-1\cdot0\cdot0 = 1 + 0 + 0 - (1 - i^2) - (-i^2) - 0 = 1 - 1 - 1 - 1 = -2$.

Ответ: 1) 0; 2) $\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$; 3) –2.

Упражнения

1. Вычислить определители:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$;

f) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$; g) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix}$.

2. Пользуясь определителями, решить системы уравнений:

a) $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 3x + 7y = 2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 4x + 7y + 13 = 0 \\ 5x + 8y + 14 = 0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} ax - by = 2a \\ bx + ay = 2b \end{cases}$.

3. Доказать, что определитель второго порядка равен нулю тогда и только тогда, когда одна из его строк пропорциональна другой. То же самое для столбцов.

4. Доказать, что значение дроби $\frac{ax+b}{cx+d}$ (где, по крайней мере, одно из чисел c, d отлично от нуля) тогда и только тогда не зависит от значения x, когда $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$.

5. Доказать, что квадратный трехчлен $ax^2 + 2bx + c$ тогда и только тогда будет полным квадратом, когда $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = 0$.

6. Решить уравнения:

a) $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 2 & x \end{vmatrix} = 0$; b) $\begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix} = 0$,

считая неизвестные *x* и *y* действительными числами.

7. Вычислить определители:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$.

8. Пользуясь определителями, решить системы уравнений:

a) $\begin{cases} x+y+z=-2 \\ 3x+y+4z=-13 \\ 8x+9y+5z=-5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+2y+3z=7 \\ 2x-y+z=9 \\ x-4y+2z=11 \end{cases}$; c) $\begin{cases} bx+ay=-2ab \\ -2cy+bz=3bc \\ cx+az=0 \end{cases}$,

где $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$.

9. Решить уравнения:

a) $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & -2 \end{vmatrix}=0$; b) $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix} = abc$.

2.2. Перестановки и подстановки

Определение 1. Пусть M – некоторое множество, состоящее из n элементов, т.е. $M=\{1, 2, \ldots, n \mid n \in \mathbf{N}\}$. **Подстановкой** множества M называется взаимно однозначное отображение множества M на себя.

Обозначение: $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \ldots & \varphi(n) \end{pmatrix}$ или $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}$.

Определение 2. **Перестановкой** n чисел называется расположение этих чисел в определенном порядке.
Например, числа второй строки n-элементной подстановки образуют перестановку.

Определение 3. **Инверсией** называется любая пара чисел в данной перестановке, таких, что большее из них стоит левее меньшего. Если число инверсий четное, то перестановка называется **четной**. Если число инверсий нечетное, то перестановка называется **нечетной**.

Задача 1.

Определить число инверсий в перестановках:
a) (5 4 1 7 6 3 2); b) (n $n-1$ … 2 1),
а также решить вопрос о четности этих перестановок.

Решение.

a) Первое число в данной перестановке есть 5. Определяем, в скольких инверсиях участвует это число. В данном случае 5 образует инверсии с 1, 2, 3, 4.

Таким образом, число 5 участвует в четырех инверсиях. Вычеркиваем (мысленно) число 5 и обращаемся к следующему числу, 4. Оно образует инверсии с 1, 2, 3 – всего 3 инверсии. Вычеркиваем число 4 и обращаемся к следующему, 1. Единица не образует инверсий ни с одним из последующих чисел, иначе говоря, число таких инверсий равно нулю. Зачеркиваем 1 и т. д. Суммарное число инверсий равно:

$$4+3+0+3+2+1 = 13.$$

Поскольку 13 – число нечетное, данная перестановка является нечетной.

b) На первом месте в данной перестановке стоит число n. Оно образует инверсию с любым из последующих чисел: $n-1$, $n-2$, … , 2, 1. Следовательно, число n входит в $n-1$ инверсию. Вычеркиваем n и обращаемся к следующему числу – $(n-1)$. Оно также образует инверсию с любым из последующих чисел; число таких инверсий равно $n-2$ и т. д. Всего в данной перестановке имеется

$$(n-1)+(n-2)+\ldots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}$$

инверсий. Это число будет четным, если произведение $n(n-1)$ делится на 4. Но из двух сомножителей n, $n-1$ один обязательно является нечетным; следовательно, для того чтобы произведение делилось на 4, нужно, чтобы другой сомножитель делился на 4. Итак, перестановка будет четной, если одно из чисел n или $n-1$ делится на 4, и нечетной в противном случае.

Впрочем, учитывая специальный характер перестановки задачи b, можно указать более короткое решение. Очевидно, в данной перестановке любые два числа образуют инверсию. Следовательно, число всех инверсий равно числу сочетаний из n элементов по 2, т. е. $\frac{n(n-1)}{2}$.

Ответ: a) 13, нечетная; b) $\frac{n(n-1)}{2}$, перестановка четная если одно из чисел n, $n-1$ делится на 4, и нечетная в противном случае.

Определение 4. Подстановка называется **четной**, если обе перестановки (верхняя и нижняя) имеют одинаковую четность.

Задача 2.

Определить, четна или нечетна подстановка:

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 4 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение.

В данном случае число инверсий в верхней перестановке равно 10, в нижней — 6. Следовательно, подстановка четная.

Ответ: четная.

Упражнения

1. Определить число инверсий в перестановках:
a) $(7\ \ 6\ \ 9\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 5\ \ 4\ \ 8)$;
b) $(2n\ \ 2n-1\ \ \ldots\ \ n+2\ \ n+1\ \ n\ \ n-1\ \ \ldots\ \ 2\ \ 1)$;
c) $(1\ \ 3\ \ 5\ \ 7\ \ldots\ \ 2n-1\ \ 2\ \ 4\ \ 6\ \ \ldots\ 2n)$.

2. Подобрать i и k так, чтобы:
a) перестановка $(1\ 2\ 7\ 4\ i\ 5\ 6\ k\ 9)$ была четной;
b) перестановка $(1\ i\ 2\ 5\ k\ 4\ 8\ 9\ 7)$ была нечетной.

3. Решить вопрос о четности подстановок:
a) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 & 1 & 6 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 7 & 5 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ n & n-1 & \ldots & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & \ldots & 2n-1 & 2 & 4 & 6 & \ldots & 2n \\ 2 & 4 & 6 & \ldots & 2n & 1 & 3 & 5 & \ldots & 2n-1 \end{pmatrix}$.

2.3. Определители *n*-го порядка

Рассмотрим квадратную матрицу $A=(\alpha_{ij})$ порядка n. Выберем по одному элементу из **каждой строки** и **каждого столбца** матрицы и составим произведение этих элементов, называемое **членом определителя**:

$$\alpha_{1j}\alpha_{2k}\ldots\alpha_{nr}, \qquad (*)$$

где вторые индексы $j, k, \ldots, r$ образуют перестановку чисел $1, 2, \ldots, n$.

Определение. **Определителем** квадратной матрицы порядка n называется число, представляющее собой сумму членов определителя вида:

$$\sum(\pm\alpha_{1j}\alpha_{2k}\ldots\alpha_{nr}),$$

причем знак “+” приписывается произведению в том случае, если множество **вторых индексов** является **четной перестановкой** чисел $1, 2,\ldots, n$; и знак “–” в том случае, когда число перестановок **нечетное**.

Задача 1.

С каким знаком входит в определитель 5-го порядка следующее произведение: $a_{51}a_{23}a_{34}a_{45}a_{12}$?

Решение.

Напомним правило знака. Если $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\ldots a_{i_nj_n}$ — какой-либо член определителя n-го порядка, то знак, с которым это произведение входит в определитель, зависит от четности подстановки

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_n \end{pmatrix}.$$

Точнее, если эта подстановка четная, произведение берется со знаком плюс, если подстановка нечетная – со знаком минус. В данном случае имеем четную подстановку

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, произведение берется со знаком плюс.
Ответ: со знаком плюс.

Задача 2.

Пользуясь только определением, доказать, что определитель 5-го порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

равен нулю.

Решение.

Определитель 5-го порядка представляет собой сумму произведений вида $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$, каждое из которых берется с определенным знаком (правило знака сейчас не играет роли). Здесь $(j_1 \quad j_2 \quad j_3 \quad j_4 \quad j_5)$ – любая перестановка из чисел 1, 2, 3, 4, 5; поэтому всего в таком определителе должно быть 5! = 120 членов. Однако, в данном случае многие члены определителя будут равны нулю. Посмотрим, какие члены могут быть отличны от нуля. Для этого нужно, чтобы все пять сомножителей $a_{1j_1}, a_{2j_2}, a_{3j_3}, a_{4j_4}, a_{5j_5}$ были отличны от нуля. Но $a_{5j_5} \neq 0$ возможно только при $j_5 = 1$ или $j_0 = 2$ (элементы a_{63}, a_{64}, a_{66} по условию равны нулю). То же самое относится к a_{4j_4} и a_{3j_3}. Итак, рассматриваемое произведение может быть отлично от нуля лишь в том случае, когда любое из чисел j_3, j_4, j_6 равняется 1 или 2. Но это невозможно, так как j_3, j_4, j_6 – три различных числа. Следовательно, все члены данного определителя равны нулю, а вместе с ними равен нулю и сам определитель.

Задача 3.

Пользуясь только определением, вычислить определители:

a) $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$,

в которых все элементы по одну сторону от главной (побочной) диагонали равны нулю.

Решение.

a) Выясним, какие из членов $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}\dots a_{nj_n}$, в данном определителе могут быть отличны от нуля. Очевидно, для этого нужно, чтобы j_1 равнялось 1, j_2 – 1 или 2, j_3 − 1, 2 или 3 и т. д. Так как $j_2 \neq j_1$, то отсюда j_2=2. Так как j_3 не равно ни j_1 ни j_2, то отсюда , j_3= 3, и т. д. В результате приходим к выводу, что единственным отличным от нуля членом в данном определителе может быть только $a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}$.

Это произведение входит в определитель со знаком плюс (докажите!). Итак, данный определитель равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали.

b) Рассуждая аналогично, приходим к тому, что единственным ненулевым членом данного определителя может быть лишь $a_{1n}\cdot a_{2(n-1)}\cdot\dots\cdot a_{n1}$. Определим его знак. Поскольку первые индексы сомножителей члена определителя располагаются в порядке возрастания, то знак определяется четностью перестановки из вторых индексов (n n−1 n−2 … 1). Определим количество инверсий в ней.

1	соответствует	(n−1)	инверсия,
2	соответствует	(n−2)	инверсии,
…	…	…	
(n−1)	соответствует	1	инверсия.

Всего: $(n-1) + (n-2) + \dots + 1 = \dfrac{1+n-1}{2}(n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$ инверсий.

Итак, данный определитель равен произведению элементов, стоящих на побочной диагонали со знаком $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Ответ: a) $a_{11}\cdot a_{12}\cdot\dots\cdot a_{nn}$; b) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot a_{1n}\cdot a_{2(n-1)}\cdot\dots\cdot a_{n1}$.

Упражнения

1. Определить, с каким знаком входит в определитель 7-го порядка произведение: $a_{33}a_{16}a_{72}a_{27}a_{55}a_{61}a_{44}$.

2. Выбрать значения i и k так, чтобы произведение $a_{47}a_{63}a_{1i}a_{55}a_{7k}a_{24}a_{31}$ было членом определителя (какого порядка?) и входило в него со знаком плюс.

3. Выписать все слагаемые, входящие в определитель 5-го порядка и имеющие вид $a_{14}a_{23}a_{3\alpha_3}a_{4\alpha_4}a_{5\alpha_5}$. Что получится, если из их суммы вынести $a_{14}a_{23}$ за скобки?

4. Найти члены определителя 4-го порядка, содержащие элемент a_{32} и входящие в определитель со знаком плюс.

5. Найти члены определителя:

$$\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix},$$

содержащие x^4 и x^3.

6. Пользуясь только определением, вычислить определители:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & 0 \end{vmatrix};$$

c) определитель шестого порядка, у которого все элементы равны нулю, кроме элементов главной и побочной диагоналей.

7. Дан определитель n-го порядка:

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & 0 & \dots & 0 \\ \hline a_{(k+1)1} & \dots & a_{(k+1)k} & a_{(k+1)(k+1)} & \dots & a_{(k+1)n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & a_{n(k+1)} & \dots & a_{nn} \end{array}\right|$$

Доказать, что он равен произведению двух определителей:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} a_{(k+1)(k+1)} & \dots & a_{(k+1)n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n(k+1)} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

8. Дан определитель порядка *2n*:

$$\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{matrix}} & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} a_{33} & a_{34}\\ a_{43} & a_{44}\end{matrix}} & & \\ & & \ldots & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} a_{(2n-1)(2n-1)} & a_{(2n-1)(2n)} \\ a_{(2n)(2n-1)} & a_{(2n)(2n)}\end{matrix}}\end{vmatrix},$$

в котором все элементы, расположенные вне указанных *n* «ящиков», равны нулю. Доказать, что он равен произведению:

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44}\end{vmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{vmatrix} a_{(2n-1)(2n-1)} & a_{(2n-1)(2n)} \\ a_{(2n)(2n-1)} & a_{(2n)(2n)}\end{vmatrix}$ – определителей 2-го порядка, соответствующих всем «ящикам».

2.4. Основные свойства определителей *n*-го порядка

Определение. Пусть дана матрица *A* *n*-го порядка. Вычеркнем в ней *i*-ую строку и *k*-ый столбец и сдвинем, не нарушая порядка, оставшиеся элементы. Определитель полученной матрицы (*n*–1)-го порядка называется **минором** (или **дополнительным минором) элемента** *i*-ой строки и *k*-го столбца матрицы *A*.

Обозначение: Δ_{ik} – дополнительный минор элемента α_{ik}.

Определение. Пусть *A* – матрица *n*-го порядка. Минор Δ_{ik} элемента *i*-ой строки и *k*-го столбца матрицы *A*, взятый со знаком $(-1)^{i+k}$, называется **алгебраическим дополнением** этого элемента.

Обозначение: $A_{ik} = (-1)^{i+k}\Delta_{ik}$ – алгебраическое дополнение элемента a_{ik}.

1^0. *Определитель матрицы A n-го порядка равен сумме произведений всех элементов какой-нибудь одной фиксированной строки на их алгебраические дополнения, т. е. для любого i=1,2,…,n имеет место равенство:*

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in},$$

называемое разложением определителя $|A|$ *по элементам i-ой строки.*

Аналогично для любого k=1,2,…,n имеет место разложение определителя $|A|$ *по элементам k-го столбца:*

$$|A| = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \ldots + a_{nk}A_{nk}.$$

Задача 1.

Вычислить определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение.

Разложив его по элементам второй строки, получим:

$$\Delta = aA_{21} + bA_{22} + cA_{23} + dA_{24} = -a\Delta_{21} + b\Delta_{22} - c\Delta_{23} + d\Delta_{24} = -a\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+b\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} - c\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + d\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 9a + 12b - 9c + 3d.$$

Ответ: $9a+12b$ $-9c+3d$.

Задача 2.

Вычислить определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -x & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -x \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Решение.

В данном случае для разложения целесообразно выбрать третий столбец, так как наличие нулевых элементов дает возможность не вычислять соответствующих алгебраических дополнений (произведение нуля на любое число равно нулю). Получим:

$$\Delta = 0 \cdot A_{13} + 0 \cdot A_{23} + 0 \cdot A_{33} + 3 \cdot A_{43} = -3\Delta_{43} = -3\begin{vmatrix} -x & 1 & -1 \\ -1 & -x & 1 \\ 1 & -1 & -x \end{vmatrix} = 3x^3 + 9x.$$

Ответ: $3x^3 + 9x$.

Задача 3.

Вычислить определитель n-го порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & -b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & -b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & -b \\ -b & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}.$$

Решение.

Разложив наш определитель по элементам первого столбца, получим:

$$\Delta = a\begin{vmatrix} a & -b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a & -b \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}_{n-1} + (-b)(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} -b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & -b & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -b & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a & -b \end{vmatrix}_{n-1}.$$

Так как в первом определителе нули — под главной диагональю, а во втором – над главной диагональю, то оба они равны произведению элементов, расположенных на главной диагонали. Таким образом,

$$\Delta = a \cdot a^{n-1} + (-b)(-1)^{n+1}(-b)^{n-1} = a^n - b^n.$$

Ответ: $a^n - b^n$.

2^0. *Если матрица n-го порядка имеет две пропорциональные строки (или два пропорциональных столбца), то ее определитель равен 0.*

3^0. *Если все элементы i-ой строки матрицы n-го порядка представлены в виде суммы двух слагаемых*

$$a_{ik} = a'_{ik} + a''_{ik} \qquad (k=1,2,\dots,n),$$

то ее определитель можно представить в виде суммы определителей двух матриц, у которых элементами i-ой строки являются соответственно первые и вторые слагаемые разложения, а все остальные строки – такие же, как у исходной матрицы:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{i1} + a''_{i1} & a'_{i2} + a''_{i2} & \dots & a'_{in} + a''_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \dots & a'_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a''_{i1} & a''_{i2} & \dots & a''_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Аналогичное утверждение, разумеется, имеет место и для столбцов.

Задача 4.

Найти значение определителя:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+2a & 1 & a & x \\ 1+2b & 2 & b & x \\ 1+2c & 3 & c & x \\ 1+2d & 4 & d & x \end{vmatrix}.$$

Решение.

Элементы первого столбца являются здесь суммами двух слагаемых, поэтому согласно свойству 3^0, имеем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a & x \\ 1 & 2 & b & x \\ 1 & 3 & c & x \\ 1 & 4 & d & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2a & 1 & a & x \\ 2b & 2 & b & x \\ 2c & 3 & c & x \\ 2d & 4 & d & x \end{vmatrix}.$$

В первом определителе первый столбец пропорционален последнему, во втором же первый столбец пропорционален третьему. Следовательно, по свойству 7 оба они равны нулю, а значит, Δ=0.

Ответ: 0.

Задача 5.

Вычислить определитель *n*-го порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & n-1 \\ x & x & x & \dots & x & n+x \end{vmatrix}.$$

Решение.

Элементы последней строчки представимы в виде сумм:

$$0 + x,\ 0 + x,\ \dots,\ n + x.$$

Тогда:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & n-1 \\ x & x & x & \dots & x & x \end{vmatrix}.$$

В первом определителе под главной диагональю везде нули, поэтому он равен произведению элементов главной диагонали, т.е.

$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)n = n!$. Второй определитель равен нулю, так как у него первая и последняя строки пропорциональны. Таким образом, $\Delta = n! + 0 = n!$.
Ответ: $n!$.

4^0. *Определитель матрицы n-го порядка не изменится, если к элементам одной ее строки прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же произвольное число. То же самое справедливо и для столбцов.*

Задача 6.

Вычислить определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение.

Здесь целесообразно первую строку, умноженную на 2, прибавить к четвертой. Так как при таком преобразовании определитель не меняется, то:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 9 = 54.$$

Ответ: 54.

Задача 7.

Вычислить определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & -2 & 5 & 9 \end{vmatrix}.$$

Решение.

Легко можно получить нули над главной диагональю. Для этого первый столбец, умноженный на –2, прибавим ко второму. Затем в полученном определителе первый столбец, умноженный на –3, прибавим к третьему. Во вновь полученном определителе опять первый столбец, умноженный на –4, прибавим к последнему. Так как, по свойству 4^0, при наших преобразованиях матрицы определитель не меняется, то в результате этих трех последовательно выполненных преобразований мы получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 4 & 0 \\ 1 & -4 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 4\cdot 5 = 20.$$

Ответ: 20.

Задача 8.

Вычислить определитель *n*-го порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \\ n-1 & n & n-1 & \dots & 3 & 2 \\ n-2 & n-1 & n & \dots & 4 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{vmatrix}.$$

Решение.

Вычтем здесь из первого столбца второй (т. е. к первому прибавим второй, умноженный на –1), затем из второго столбца вычтем третий, из третьего – четвертый и т. д., наконец, из предпоследнего столбца вычтем последний. В результате мы получим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & \dots & 1 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 1 & n-1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & n \end{vmatrix}.$$

В полученном определителе первую строку, (умноженную на 1), прибавим последовательно ко всем остальным:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \dots & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 2 & 4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n+1 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 2\cdots 2\cdot (n+1) = 2^{n-2}(n+1).$$

Ответ: $2^{n-2}(n+1)$.

Задача 9.

Вычислить определитель матрицы *n*-го порядка:

$$A = \begin{pmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{pmatrix},$$

представив A в виде произведения двух матриц более простого устройства.

Решение.

Элемент матрицы A, расположенный в i-ой строке и j-ом столбце, имеет вид $a_{ij} = 1 + x_i y_j = 1\cdot 1 + x_i y_j$. Следовательно, если ввести в рассмотрение матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & y_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & y_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & y_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

то a_{ij} будет равняться сумме произведений элементов i-ой строки матрицы B на соответствующие элементы j-ой строки матрицы C. Так как при перемножении матриц приходится умножать строки первой матрицы на столбец второй, то отсюда видно, что матрица A равна произведению B и C^{T}, где C^{T} – транспонированная матрица для C.

Отсюда $|A|=|B|\cdot|C^{\mathrm{T}}|=|B|\cdot|C|$, так как от транспонирования определитель не меняется. Но при $n > 2$ оба определителя $|B|$ и $|C|$ равны, очевидно, нулю. Следовательно, и определитель $|A|$ также равен нулю.

Исключением является случай $n=2$; тогда $|A| = (x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$.

Ответ: $n = 2$, тогда $|A| = (x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$;

$n > 2$, тогда $|A| = 0$.

Упражнения

1. Определитель $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ равен Δ.

Чему равен определитель:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{vmatrix}?$$

2. Доказать, что, если все элементы одной строки (столбца) определителя равны единице, то сумма алгебраических дополнений всех элементов определителя равна самому определителю.

3. Как изменится определитель матрицы, n-го порядка, если ее столбцы записать в обратном порядке?

4. Изменится ли определитель, если его матрицу транспонировать относительно побочной диагонали? Относительно главной диагонали?

5. Что произойдет с определителем, если его матрицу повернуть на 90^0 против часовой стрелки?

6. Вычислить определитель *задачи 3*, пользуясь лишь определением определителя.

7. Вычислить определители, разложив их:

a) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ по элементам второго столбца;

b) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ по элементам третьей строки;

c) $\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}$ по элементам второго столбца;

d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & x \\ 1 & 3 & 1 & y \\ 3 & 1 & 1 & z \\ 1 & 1 & 1 & t \end{vmatrix}$ по элементам последнего столбца.

8. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & 1+x_1y_3 \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & 1+x_2y_3 \\ 1+x_3y_1 & 1+x_3y_2 & 1+x_3y_3 \end{vmatrix}.$$

9. Используя свойства определителей, вычислить:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 12 & 31 & 62 \\ 122 & 315 & 623 \end{vmatrix}.$$

10. Вычислить определители *n*-го порядка:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -x & a & a & \dots & a & a \\ -x & -x & a & \dots & a & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -x & -x & -x & \dots & a & a \\ -x & -x & -x & \dots & -x & a \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -x & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -x & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -x & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ -x & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$.

11. Проверьте утверждение теоремы об умножении определителей для следующих матриц:

$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

рассмотрите произведения: $A \cdot B$, $B \cdot A$, $A \cdot A$.

12. Вычислить определитель матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix}$$

путем возведения его в квадрат.

Указание. Примените теорему об умножении определителей к произведению AA^T, где A^{T} – транспонированная матрица.

13. Вычислить определитель *n*-го порядка:

$$\begin{vmatrix} \cos(\alpha_1 - \beta_1) & \cos(\alpha_1 - \beta_2) & \dots & \cos(\alpha_1 - \beta_n) \\ \cos(\alpha_2 - \beta_1) & \cos(\alpha_2 - \beta_2) & \dots & \cos(\alpha_2 - \beta_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos(\alpha_n - \beta_1) & \cos(\alpha_n - \beta_2) & \dots & \cos(\alpha_n - \beta_n) \end{vmatrix},$$

представив его в виде произведения двух определителей.

14. Докажите, что если A – невырожденная матрица (т.е. $|A| \neq 0$), то $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

15. Пусть B – невырожденная матрица. Докажите, что для любой матрицы A имеет место равенство: $\left|B^{-1}AB\right| = |A|$.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

3.1. Определители с числовыми элементами

Вычисление определителей основано на формуле разложения определителя по элементам строки:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$

и аналогичной формуле разложения по элементам столбца. Учитывая связь между алгебраическими дополнениями и минорами:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

можно записать:

$$\Delta = a_{i1}(-1)^{i+1} M_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2} M_{i2} + \ldots + a_{in}(-1)^{i+n} M_{in}.$$

С помощью этой формулы вычисление определителей n-го порядка Δ сводится к вычислению ряда определителей ($n-1$)-го порядка — миноров $M_{i1}, M_{i2}, \ldots, M_{in}$. Каждый из этих определителей, в свою очередь, можно свести к определителям ($n-2$)-го порядка, эти последние — к определителям порядка ($n-3$) и т. д. В конечном счете, вычисление Δ сводится таким путем к вычислению ряда определителей 3-го порядка, или, при желании, даже 2-го. Последние вычисляются непосредственно.

Особенно простой вид принимает разложение определителя по i-ой строке в случае, когда все элементы этой строки, кроме одного a_{ij}, равны нулю. Тогда имеем:

$$\Delta = a_{ij}(-1)^{i+j} M_{ij},$$

благодаря чему вычисление Δ сводится к вычислению единственного определителя ($n-1$)-го порядка M_{ij}. Хотя в наперед заданном определителе Δ может и не оказаться строки с нужным количеством нулей, тем не менее всегда можно, не изменяя значения определителя, преобразовать его так, чтобы в выбранной (по желанию) строке все элементы оказались равными нулю, кроме одного. Это преобразование основано на одном из свойств определителя, а именно: определитель не изменится, если к элементам одной строки прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число, или, выражаясь короче, если к одной строке прибавить другую, умноженную на любое число. Конкретно способ преобразования определителя к нужному виду объяснен в решении следующей задачи.

Задача 1.

Вычислить определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение.

Во второй строке определителя уже имеются два нуля, поэтому займемся именно этой строкой. Постараемся, не изменяя значения определителя, преобразовать его так, чтобы во второй строке все элементы оказались нулями, кроме a_{24}, равного 1. Очевидно, для этого достаточно ко второму столбцу прибавить четвертый, умноженный на 2, а к третьему столбцу – четвертый, умноженный на (–2). После таких преобразований получим определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 7 & -2 & 1 \end{vmatrix},$$

равный исходному. Разлагаем его по элементам второй строки:

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 7 & 1 \end{vmatrix}.$$

В этом определителе удобно выбрать второй столбец, поскольку в нем уже имеется один нуль и, кроме того, элементы этого столбца невелики. Преобразуем определитель так, чтобы все элементы второго столбца, кроме $a_{12} = -1$, стали равными нулю. Для этой цели из третьей строки вычитаем первую, а из четвертой − удвоенную первую. Получаем определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix},$$

по-прежнему равный Δ. Разлагая его по элементам второго столбца, находим:

$$\Delta = (-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} \boxed{-1} & 3 & 3 \\ \boxed{0} & 1 & 0 \\ \boxed{0} & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель 3-го порядка можно было бы вычислить непосредственно. Однако еще проще разложить его по элементам первого столбца. В результате получим:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

Ответ: 1.

Замечание 1. Подчеркнем еще раз следующее обстоятельство: для приведения определителя к такому виду, в котором все элементы выбранной строки, кроме одного, равны нулю, нужно оперировать со столбцами, если же нули «делаются» в столбце, то приходится оперировать со строками.

2. Более коротко решение *задачи 1* можно было бы записать следующим образом:

$$\begin{array}{c} + \ \mathbf{x(2)} \\ \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} \\ + \ \mathbf{x(-2)} \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0} & & & \boxed{1} & \boxed{0} \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 7 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot(-1)^{4+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 7 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{cc} \mathbf{x(-1)} & \mathbf{x(-2)} \\ + & + \\ & \\ & \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} \boxed{-1} & 3 & 3 \\ \boxed{0} & 1 & 0 \\ \boxed{0} & 3 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

Упражнения

1. Вычислить определители:

$$\text{a)}\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix};\quad \text{b)}\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & -1 & 2 \end{vmatrix};$$

$$\text{c)}\ \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix};\ \text{d)}\ \begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислить определители:

$$\text{a)}\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix};\ \text{b)}\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix};\ \text{c)}\ \begin{vmatrix} 3 & 4 & 6 & 7 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 2 & 4 \\ 8 & 7 & 1 & 5 \end{vmatrix};\ \text{d)}\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 8 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 4 & 7 \end{vmatrix};$$

$$\text{e)}\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 5 & 6 \\ -3 & -5 & 1 & 7 \\ -4 & -6 & -7 & 1 \end{vmatrix};\quad \text{f)}\ \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix};\quad \text{h)}\ \begin{vmatrix} 23 & 11 & 48 & 106 \\ 19 & 32 & 45 & 116 \\ 7 & 25 & 43 & 83 \\ 67 & 73 & 81 & 289 \end{vmatrix}$$

3. Вычислить определители:

$$\text{a)}\ \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 5 & 3 \\ -3 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix};\ \text{b)}\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix};\ \text{c)}\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

4. Вычислить определители:

a) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & -1 & 1 & 1 & y \\ 1 & 1 & -1 & 1 & z \\ 1 & 1 & 1 & -1 & u \\ x & y & z & u & 0 \end{vmatrix}$.

5. Вычислить определители:

a) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -1 & -2 & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{5} \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 2 & 3 & 1 & \frac{1}{5} \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{8} & \frac{6}{9} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -1 \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & \frac{3}{5} & 2 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 0 & \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5} \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \sqrt{5} \\ -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{7} \\ -\sqrt{5} & -\sqrt{5} & -\sqrt{7} & 0 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 0 & \sqrt{2} & \sqrt{6} & \sqrt{10} \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \sqrt{7} \\ -\sqrt{6} & -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{5} \\ -\sqrt{10} & -\sqrt{7} & -\sqrt{5} & 0 \end{vmatrix}$.

3.2. Вычисление определителей *n*-го порядка. Буквенные определители

В этом пункте приводится ряд определителей, в расположении элементов которых имеется та или иная закономерность, в то время как порядок этих определителей конкретно не указан (и обозначен буквой n). Никаких общих рецептов для вычисления определителей n-го порядка, естественно, дать нельзя (если, конечно, не рассматривать само определение как один из способов). Существуют, однако, особые методы, позволяющие получать более простые выражения для целого ряда буквенных определителей n-го порядка, а также определителей с числовыми элементами. Мы укажем наиболее распространённые методы:

3.2.1. Метод приведения определителя к треугольному виду

Идея этого способа довольно проста – данный определитель преобразуют так, чтобы все элементы, лежащие по одну сторону диагонали, стали равны нулю. Если получается определитель, у которого все элементы, лежащие по одну сторону главной диагонали, равны нулю, то такой определитель будет равен произведению элементов главной диагонали. Если же получается определитель, у которого все элементы, лежащие по одну сторону от побочной диагонали, равны нулю, то такой определитель будет равен произведению элементов побочной диагонали, взятому со знаком $(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}$, где n – порядок определителя.

Задача 1.

Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Решение.

Элементы этого определителя устроены по следующему закону. Все элементы главной диагонали, кроме первого, равны нулю. Далее, в любом i-ом столбце $(i = 2,3,\dots,n)$ все элементы, расположенные выше нуля, равны i, а все элементы, расположенные ниже нуля, равны $(-i)$. Исходя из этого наблюдения, легко сообразить, что если к каждой строке определителя, начиная со второй, прибавить первую строку, то получится определитель, в котором все элементы ниже главной диагонали равны нулю. Так и сделаем. Получим определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 2 & 6 & \dots & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix},$$

равный исходному. На основании решения задачи 3 а) п. 2.3 этот определитель равен $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$

Ответ: $n!$

Задача 2.

Вычислить определитель n-го порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}.$$

Решение.

В этом определителе все элементы главной диагонали равны a, а остальные элементы равны b. Если вычесть из всех строк первую, то получим определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b-a & a-b & 0 & \dots & 0 \\ b-a & 0 & a-b & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b-a & 0 & 0 & \dots & a-b \end{vmatrix},$$

который еще не является треугольным, но легко приводится к треугольному виду: для этого достаточно к первому столбцу прибавить сумму всех остальных столбцов. В результате такого преобразования получим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix},$$

откуда $\Delta = (a-b)^{n-1}[a+(n-1)b]$.

Ответ: $(a-b)^{n-1}[a+(n-1)b]$.

Задача 3.

Вычислить определитель n-го порядка:

$$D = \begin{vmatrix} a & a & \dots & a & a+x \\ a & a & \dots & a+x & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a+x & a & \dots & a & a \end{vmatrix}.$$

Решение.

Прибавляем к последнему столбцу предыдущие столбцы:

$$D = \begin{vmatrix} a & a & \dots & a & na+x \\ a & a & \dots & a+x & na+x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a+x & a & \dots & a & na+x \end{vmatrix}.$$

Выносим за знак определителя общий множитель ($na+x$) элементов последнего столбца и затем вычитаем из предыдущих столбцов последний столбец, умноженный на a. Получаем определитель треугольного вида, у которого элементы, лежащие выше побочной диагонали, равны нулю:

$$D = (na+x)\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & x & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & x & \dots & 0 & 1 \\ x & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, $D = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}(x+na)x^{n-1}$.

Ответ: $(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}(x+na)x^{n-1}$.

Упражнения

1. Вычислить следующие определители приведением к треугольному виду:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ x_1 & x_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & \dots & a_1 & b_1 & a_1 \\ a_2 & \dots & b_2 & a_2 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & \dots & a_n & a_n & a_n \end{vmatrix}$.

2. Вычислить определитель порядка *n*, элементы которого заданы условием: $a_{ij} = \min(i, j)$.

В задачах **3 - 10** вычислить определители путём приведения их к треугольному виду:

3.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 3 & 4 & 3 & \dots & 3 \\ 3 & 3 & 6 & \dots & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 2n \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1+a_1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1+a_2 & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+a_n & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} n & n-1 & \dots & 3 & 2 & a_1 \\ n & n-1 & \dots & 3 & a_2 & a_1 \\ n & n-1 & \dots & a_3 & a_2 & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & a_{n-1} & \dots & a_3 & a_2 & a_1 \\ a_n & a_{n-1} & \dots & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$.

4.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & \dots & 2n-1 \\ -1 & 0 & 5 & \dots & 2n-1 \\ -1 & -3 & 0 & \dots & 2n-1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -3 & -5 & \dots & 0 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-2} & 0 & -a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & 0 & -a_{n-1} & -a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} & -a_n \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} x & x & \dots & x & x & 1 \\ x & x & \dots & x & 2 & x \\ x & x & \dots & 3 & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & n & \dots & x & x & x \\ x & x & \dots & x & x & x \end{vmatrix}$.

5.

a) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 3 & 5 & 3 & \dots & 3 \\ 3 & 3 & 5 & \dots & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 5 \end{vmatrix}$; (порядок определителя n)

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; (порядок определителя n)

c) $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x \end{vmatrix}$.

6.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -b & b^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -b^2 & b^3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -b^{n-1} & b^n \end{vmatrix}$.

7.

a) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -b_1 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -b_2 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -b_{n-1} & b_n \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix}$.

8.

a) $\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} a_1+x_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2+x_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n+x_n \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} c-1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & c^2-1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & -1 & c^3-1 & \dots & -1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & c^n-1 \end{vmatrix}$.

9.

a) $\begin{vmatrix} \alpha_1^2-1 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2-1 & \dots & \alpha_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2-1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} \alpha_1^2-1 & \alpha_1\alpha_2 & \alpha_1\alpha_3 & \dots & \alpha_1\alpha_n \\ \alpha_1\alpha_2 & \alpha_2^2-1 & \alpha_2\alpha_3 & \dots & \alpha_2\alpha_n \\ \alpha_1\alpha_3 & \alpha_2\alpha_3 & \alpha_3^2-1 & \dots & \alpha_3\alpha_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1\alpha_n & \alpha_2\alpha_n & \alpha_3\alpha_n & \dots & \alpha_n^2-1 \end{vmatrix}$.

10.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \dots & n-3 & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & 1 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} a+1 & a+2 & a+3 & \dots & a+n-1 & a+n \\ a+n & a+1 & a+2 & \dots & a+n-2 & a+n-1 \\ a+n-1 & a+n & a+1 & \dots & a+n-3 & a+n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a+2 & a+3 & a+4 & \dots & a+n & a+1 \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} a+1 & a+2 & a+3 & \dots & a+n-1 & a+n \\ a+2 & a+3 & a+4 & \dots & a+n & a+1 \\ a+3 & a+4 & a+5 & \dots & a+1 & a+2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a+n & a+1 & a+2 & \dots & a+n-2 & a+n-1 \end{vmatrix}$.

3.2.2. Метод выделения линейных множителей

Сущность этого способа заключается в том, что буквенный определитель n-го порядка рассматривается как многочлен m-ой степени от одной или нескольких неизвестных (букв). Непосредственно или после некоторых преобразований находят m взаимно простых линейных множителей, на которые данный определитель делится. Тогда с точностью до постоянного множителя c определитель будет равен произведению этих линейных множителей. Постоянная c находится путём сравнения соответствующего члена определителя с членом произведения линейных множителей.

Задача 1.

Вычислить определитель *n*-го порядка:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & x+a & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & x+a & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x+a \end{vmatrix}.$$

Решение.

Произведение диагональных элементов этого определителя содержит x в наивысшей, а именно (n–1)-ой степени. Следовательно, данный определитель есть многочлен от x степени n–1. При x=2–a, x=3–a, … , x=n–a определитель обращается в нуль, так как при этих значениях x становятся одинаковыми, соответственно, первая и вторая, первая и третья,…, первая и n-ая строки. Таким образом, D делится на $x+a-2, x+a-3, \dots, x+a-n$, и потому

$$D=c(x+a-2)(x+a-3)\dots(x+a-n). \quad (1)$$

Для определения c сравниваем член x^{n-1}, получаемый при перемножении элементов главной диагонали определителя, с членом cx^{n-1}, получаемым в правой части равенства (1). Так как эти члены должны совпадать, то c=1 и окончательно $D=(x+a-2)(x+a-3)\dots(x+a-n)$.

Ответ: $D=(x+a-2)(x+a-3)\dots(x+a-n)$.

Задача 2.

Вычислить определитель:

$$D=\begin{vmatrix} -x & a & b & c \\ a & -x & c & b \\ b & c & -x & a \\ c & b & a & -x \end{vmatrix}.$$

Решение.

Прибавляем к первому столбцу остальные, тогда все элементы первого столбца станут равными $-(x-a-b-c)$. Определитель D, следовательно, делится на $x-a-b-c$. А если из первого столбца вычесть второй, прибавить третий и вычесть четвертый, то все элементы первого столбца с точностью до множителя ± 1 элементы станут равными $x+a-b+c$, в силу чего D делится на $x+a-b+c$. Если же к первому столбцу прибавить второй и вычесть третий и четвертый столбцы, то элементы первого столбца с точностью до множителя ± 1 станут равными $x-a+b+c$, в силу чего D делится на $x-a+b+c$. Наконец, если из первого столбца вычесть второй и третий столбцы и прибавить четвертый, то с точностью до множителя ± 1 элементы первого столбца станут равными $x+a+b-c$, в силу чего D делится на $x+a+b-c$. Отсюда

$$D=m(x-a-b-c)(x+a-b+c)(x-a+b+c)(x+a+b-c), \quad (2)$$

где m не зависит x, a, b, c. Для определения m сравниваем член x^4 определителя D, получающийся при перемножении элементов главной диагонали, с членом mx^4 в правой части равенства (2). Находим, что m=1, и окончательно $D=(x-a-b-c)(x+a-b+c)(x-a+b+c)(x+a+b-c)$.

Ответ: $D=(x-a-b-c)(x+a-b+c)(x-a+b+c)(x+a+b-c)$.

Упражнения

В задачах вычислить определители методом выделения линейных множителей.

1.

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 7-x^2 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 8 & 6 \\ 5 & 3 & 8 & 15-x^2 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 7-x^2 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 8 & 3 \\ 5 & 15-x^2 & 8 & 3 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & x+2 & 3 & \ldots & n \\ 1 & 2 & x+2 & \ldots & n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & x+2 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x+\alpha & a_3 & \ldots & a_n \\ a_1 & a_2 & x+\alpha & \ldots & a_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & x+\alpha \end{vmatrix}$.

2.

a) $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & x & x_2 & \ldots & x_n \\ 1 & x_1 & x & \ldots & x_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_1 & x_2 & \ldots & x \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \ldots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \ldots & a_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & x \end{vmatrix}$.

3.

a) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ a & b & d & c & e \\ b & a & c & e & d \\ b & a & e & d & c \\ a & b & d & e & c \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ x_1^3 & 1 & x_1 & x_1^2 \\ x_2^2 & x_2^3 & 1 & x_2 \\ x_2 & x_2^2 & x_2^3 & 1 \end{vmatrix}$. **5.** $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$

(определитель Вандермонда).

3.2.3. Метод рекуррентных соотношений

Выражают данный определитель D n-го порядка через один или несколько определителей того же вида, но низшего порядка. Для этого определитель D разлагают по некоторой строке или столбцу. Иногда приходится соответствующим образом преобразовать D, а затем уже его разлагать по строке или столбцу. Равенство, при котором определитель D выражается через один или несколько определителей низшего порядка того же вида, принято называть рекуррентным или возвратным соотношением. Затем, пользуясь методом математической индукции, находят, исходя из рекуррентного соотношения, общее выражение данного определителя D.

Впрочем, возможно и такое видоизменение этого способа: в рекуррентное соотношение, выражающее определитель n-го порядка через определители низшего порядка, подставляют выражение определителя (n–1)-го порядка, получающееся при замене в рекуррентном соотношении n через n–1; затем подобным же образом подставляют выражение определителя (n–2)-го порядка и. т. д., пока не придем к общему выражению данного определителя n-го порядка. Остается лишь убедиться в правильности этого выражения с помощью метода математической индукции.

Задача 1.

Вычислить определитель (n+1)-го порядка:

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

Решение.

Разлагаем D_{n+1} по последней строке:

$$D_{n+1} = a_n(-1)^{n+2}\begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ x & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} + x\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & x & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}.$$

Первый определитель в правой части этого равенства имеет треугольный вид; второй определитель того же типа, что и D_{n+1}, но n-го порядка и a_n уже не содержит. Следовательно, получается рекуррентное соотношение

$$D_{n+1} = a_n + xD_n. \qquad (1)$$

Для установления общего выражения определителя D_{n+1} рассмотрим D_1 и D_2 (т.е. определители 1-го и 2-го порядка того же типа): $D_1 = a_0, D_2 = \begin{vmatrix} a_0 & -1 \\ a_1 & x \end{vmatrix} = a_0 x + a_1$. Мы видим, что D_1– многочлен от x нулевой степени с коэффициентом a_0 и D_2– многочлен первой степени с коэффициентами a_0 и a_1.

Покажем, что для D_{n+1} имеет место аналогичное выражение: $D_{n+1} = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$. Пусть доказано, что $D_n = a_0 x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}$. Подставляя это выражение D_n в рекуррентное соотношение (1), получаем, что:

$$D_{n+1} = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Тем самым справедливость общего выражения D_{n+1} уже не вызывает сомнений.

Ответ: $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$.

Задача 2.

Вычислить определитель n-го порядка:

$$D_n = \begin{vmatrix} 2\cos^2\frac{\theta}{2} & \cos\theta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos^2\frac{\theta}{2} & \cos\theta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos^2\frac{\theta}{2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2\cos^2\frac{\theta}{2} & \cos\theta \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\cos^2\frac{\theta}{2} \end{vmatrix}.$$

Решение.

Разлагая по первому столбцу, получаем:

$$D_n = 2\cos^2\frac{\theta}{2}\cdot D_{n-1} - \begin{vmatrix} \cos\theta & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos^2\frac{\theta}{2} & \cos\theta & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\cos^2\frac{\theta}{2} \end{vmatrix}.$$

Второй определитель в правой части этого равенства разлагаем по первой строке. Получаем рекуррентное соотношение:

$$D_n = 2\cos^2\frac{\theta}{2}\cdot D_{n-1} - \cos\theta\cdot D_{n-2},$$

или после замены $2\cos^2\frac{\theta}{2}$ через $1+\cos\theta$:

$$D_n = (1+\cos\theta)D_{n-1} - \cos\theta\cdot D_{n-2}. \qquad (2)$$

Заменяем в рекуррентном соотношении (2) *n* через (*n*–1). Получаем:

$$D_{n-1} = (1+\cos\theta)D_{n-2} - \cos\theta\cdot D_{n-3}.$$

Подставляем это выражение D_{n-1} в равенство (2):

$$D_n = (1+\cos\theta+\cos^2\theta)D_{n-2} - (1+\cos\theta)\cos\theta\cdot D_{n-3}. \quad (3)$$

Далее, заменяем в рекуррентном соотношении (2) *n* через (*n*-2):

$$D_{n-2} = (1+\cos\theta)D_{n-3} - \cos\theta\cdot D_{n-4}.$$

Это выражение D_{n-2} подставляем в равенство (3) :

$D_n = (1+\cos\theta+\cos^2\theta+\cos^3\theta)D_{n-3} - (1+\cos\theta+\cos^2\theta)\cos\theta\cdot D_{n-4}$ и т. д., пока не придем к равенству:

$$D_n = (1+\cos\theta+\ldots+\cos^{n-2}\theta)D_2 - (1+\cos\theta+\ldots+\cos^{n-3}\theta)\cos\theta\cdot D_1,$$

где

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2\cos^2\frac{\theta}{2} & \cos\theta \\ 1 & 2\cos^2\frac{\theta}{2} \end{vmatrix} = 1+\cos\theta+\cos^2\theta, \quad D_1 = 1+\cos\theta,$$

или окончательно: $D_n = 1+\cos\theta+\ldots+\cos^n\theta$.

Справедливость этого выражения D_n проверяется с помощью метода математической индукции.

Ответ: $1+\cos\theta+\ldots+\cos^n\theta$.

Способ рекуррентных соотношений требует умения правильно подмечать общий вид данного определителя, и в этом, пожалуй, наибольшая трудность метода. Впрочем, для некоторых определителей такого умения и не требуется. Ограничимся определителями, удовлетворяющими рекуррентным соотношениям, вида

$$D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2} \quad (4)$$

с постоянными коэффициентами p и q (p и q не равны одновременно нулю).

Для решения рекуррентного соотношения (4) рассмотрим квадратное уравнение $x^2 - px - q = 0$ и обозначим через r_1 и r_2 корни уравнения. Представляются только две возможности: либо a) $r_1 \neq r_2$, либо b) $r_1 = r_2 = r$.

Пусть a) $r_1 \neq r_2$. Тогда, пользуясь формулами Виета $p = r_1 + r_2$ и $q = -r_1 r_2$, можно соотношение (4) преобразовать двояким образом:

$$D_n - r_2 D_{n-1} = r_1 (D_{n-1} - r_2 D_{n-2}), \quad (5)$$

$$D_n - r_1 D_{n-1} = r_2 (D_{n-1} - r_1 D_{n-2}). \quad (6)$$

Из равенства (5) видно, что $u_n = D_n - r_2 D_{n-1}$, (n=2, 3, …) можно рассматривать, как члены геометрической прогрессии со знаменателем r_1, а из равенства (6) видно, что $v_n = D_n - r_1 D_{n-1}$ можно рассматривать, как члены геометрической прогрессии со знаменателем r_2. Отсюда

$$u_n = u_2 r_1^{n-2}, \quad v_n = v_2 r_2^{n-2},$$

или

$$D_n - r_2 D_{n-1} = (D_2 - r_2 D_1) r_1^{n-2}, \quad (7)$$

$$D_n - r_1 D_{n-1} = (D_2 - r_1 D_1) r_2^{n-2}. \quad (8)$$

Умножая равенство (7) на r_1 и равенство (8) на $-r_2$ и почленно складывая, получаем: $D_n (r_1 - r_2) = (D_2 - r_2 D_1)\, r_1^{n-1} - (D_2 - r_1 D_1)\, r_2^{n-1}$, откуда $D_n = C_1 r_1^{n-1} + C_2 r_2^{n-1}$, где

$$C_1 = \frac{D_2 - r_2 D_1}{r_1 - r_2}, \quad C_2 = -\frac{D_2 - r_1 D_1}{r_1 - r_2}.$$

Коэффициенты C_1 и C_2 можно вычислить следующим образом: при n=1 и n=2 получаем два линейных уравнения относительно C_1 и C_2, а именно: $C_1 + C_2 = D_1$, $C_1 r_1 + C_2 r_2 = D_2$.

b) $r_1 = r_2 = r$. Здесь поступаем так:

$$D_n - rD_{n-1} = r(D_{n-1} - rD_{n-2})$$

и $u_n = D_n - rD_{n-1}$ являются членами геометрической прогрессии со знаменателем r. Следовательно,

$$D_n - rD_{n-1} = (D_2 - rD_1) r^{n-2} = Cr^n,$$

$$\text{где } C = \frac{1}{r^2}(D_2 - rD_1), \quad \text{или} \quad \frac{D_n}{r^n} - \frac{D_{n-1}}{r^{n-1}} = C,$$

т. е. $\dfrac{D_n}{r^n}$ является членом арифметической прогрессии с разностью C. Отсюда

$$\frac{D_n}{r^n}=\frac{D_2}{r^2}+C(n-2),\quad D_n=r^n(C_1+C\cdot n),\ \text{где}\ C_1=\frac{D_2}{r^2}-2C.$$

Постоянные C_1 и C можно определить из системы линейных уравнений, получающейся при n=1 и n=2.

Задача.

Вычислить определитель n-го порядка:

$$D_n=\begin{vmatrix} 7 & 4 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 3 & 7 & 4 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 3 & 7 & 4 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 7 \end{vmatrix}.$$

Решение.

Разлагая по первой строке, получаем: $D_n=7D_{n-1}-12D_{n-2}$. Соответствующее этому рекуррентному соотношению квадратное уравнение $x^2-7x+12=0$ имеет корни r_1=3, r_2=4, $r_1\neq r_2$. Следовательно, $D_n=C_1\cdot 3^{n-1}+C_2\cdot 4^{n-1}$

Полагая n=1 и n=2, получаем: $D_1=7$, $D_2=\begin{vmatrix}7 & 4\\ 3 & 7\end{vmatrix}=37$, C_1+C_2=7, 3C_1+4C_2=37, откуда C_1= –9, C_2=16, $D_n=4^{n+1}-3^{n+1}$.

Ответ: $4^{n+1}-3^{n+1}$.

Упражнения

В задачах 1 – 10, пользуясь методом рекуррентных соотношений, вычислить определители.

1. $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n\\ -x & x & 0 & \dots & 0\\ 0 & -x & x & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}$. **2.** $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n\\ -y & x & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & -y & x & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & -y & x \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ x_0 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_1 & x_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_n \end{vmatrix}$. **4.** $\begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & b_n \end{vmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ -1 & a & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & a & \dots & 0 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & .. & -1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & a \end{vmatrix}$.

6.

a) $\begin{vmatrix} 8 & 5 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 5 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 8 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 6 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$.

7. $$\begin{vmatrix} 2\cos\varphi & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\varphi & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\varphi & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 2\cos\varphi & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\cos\varphi \end{vmatrix}$$

(порядок определителя n).

8. $$\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 0 \end{vmatrix}.$$

9. $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & x \\ 3 & 2 & 1 & \dots & 0 & x^2 \\ 4 & 3 & 2 & \dots & 0 & x^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & x^n \end{vmatrix}.$$

10. $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1! & 0 & 0 & \dots & 0 & x \\ 1 & 2 & 2! & 0 & \dots & 0 & x^2 \\ 1 & 3 & 2!C_3^2 & 3! & \dots & 0 & x^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n & 2!C_n^2 & 3!C_n^3 & \dots & (n-1)!C_n^{n-1} & x^n \end{vmatrix}.$$

3.2.4. Метод разложения определителя на сумму определителей

Иногда удается довольно просто вычислить определитель n-го порядка путем разложения его на сумму двух или нескольких определителей.

Задача 1.

Вычислить определитель n-го порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & b \\ b & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}.$$

Решение.

Разлагаем его по первому столбцу:

$$\Delta = a\begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & b & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} b \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a & b & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b \end{vmatrix} = a \cdot a^{n-1} + (-1)^{n+1} b \cdot b^{n-1} =$$

$= a^n + (-1)^{n+1} b^n$, так как получились определители треугольного вида.
Ответ: $a^n + (-1)^{n+1} b^n$.

Задача 2.

Вычислить определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x+a_n \end{vmatrix}.$$

Решение.

Записываем данный определитель в виде:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x+a_1 & 0+a_2 & 0+a_3 & \dots & 0+a_n \\ 0+a_1 & x+a_2 & 0+a_3 & \dots & 0+a_n \\ 0+a_1 & 0+a_2 & x+a_3 & \dots & 0+a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0+a_1 & 0+a_2 & 0+a_3 & \dots & x+a_n \end{vmatrix}.$$

По известному свойству определитель Δ можно разложить на сумму 2^n определителей n-го порядка, если рассматривать последовательно элементы каждого столбца как суммы двух слагаемых. При этом часть определителей разложения будет иметь одинаковые столбцы и их можно отбросить, так как они равны нулю.

Таким образом, получаем, что

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix} + \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} x & 0 & \dots & a_i & \dots & 0 \\ 0 & x & \dots & a_i & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_i & \dots & x \end{vmatrix}$$

(a_i находится в i-ом столбце).

Определитель

$$D_i = \begin{vmatrix} x & 0 & \ldots & a_i & \ldots & 0 \\ 0 & x & \ldots & a_i & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_i & \ldots & x \end{vmatrix}$$

можно разложить по последнему столбцу, полученный при этом определитель $(n-1)$-го порядка опять можно разложить по последнему столбцу и т. д., пока не дойдем до определителя i-го порядка треугольного вида, у которого последний столбец состоит из элементов, равных a_i, и тогда окажется, что

$$D_i = x^{n-i} \begin{vmatrix} x & 0 & \ldots & a_i \\ 0 & x & \ldots & a_i \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_i \end{vmatrix} = x^{n-1} \cdot x^{i-1} \cdot a_i = x^{n-1} a_i.$$

Так как определитель n-го порядка

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & x & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & x & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & x \end{vmatrix}$$

равен x^n, то отсюда окончательно находим, что

$$\Delta = x^n + \sum_{i=1}^{n} x^{n-1} a_i = x^{n-1}(x + a_1 + \ldots + a_n).$$

Ответ: $x^{n-1}(x + a_1 + \ldots + a_n)$.

Упражнения

В задачах 1–6 вычислить определители с помощью метода разложения на сумму определителей.

1. $\begin{vmatrix} a_1 + 2b_1 & a_1 + 2b_2 & \ldots & a_1 + 2b_n \\ a_2 + 2b_1 & a_2 + 2b_2 & \ldots & a_2 + 2b_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n + 2b_1 & a_n + 2b_2 & \ldots & a_n + 2b_n \end{vmatrix}$ $(n>2)$

2. $\begin{vmatrix} 1 + x_1 y_1 & 1 + x_1 y_2 & \ldots & 1 + x_1 y_n \\ 1 + x_2 y_1 & 1 + x_2 y_2 & \ldots & 1 + x_2 y_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 + x_n y_1 & 1 + x_n y_2 & \ldots & 1 + x_n y_n \end{vmatrix}$ $(n>2)$.

3. $\begin{vmatrix} x & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & x & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x \end{vmatrix}$. **4.** $\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & x_3 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x_n \end{vmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix} b_1 & \alpha_1\beta_2 & \alpha_1\beta_3 & \dots & \alpha_1\beta_n \\ \alpha_2\beta_1 & b_2 & \alpha_2\beta_3 & \dots & \alpha_2\beta_n \\ \alpha_3\beta_1 & \alpha_3\beta_2 & b_3 & \dots & \alpha_3\beta_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_n\beta_1 & \alpha_n\beta_2 & \alpha_n\beta_3 & \dots & b_n \end{vmatrix}$. **6.** $\begin{vmatrix} a_1+x_1 & a_1+x_2 & \dots & a_1+x_n \\ a_2+x_1 & a_2+x_2 & \dots & a_2+x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n+x_1 & a_n+x_2 & \dots & a_n+x_n \end{vmatrix}$

(n>2).

7. Показать, что:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}+x & \dots & a_{1n}+x \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ a_{n1}+x & \dots & a_{nn}+x \end{vmatrix} = D + x\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}, \quad \text{где} \quad D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

и A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} определителя D.

8. Вычислить определитель n-го порядка (n>1):

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x & \dots & x \\ x & 1 & x & \dots & x \\ x & x & 1 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & 1 \end{vmatrix},$$

пользуясь задачей 7.

9. Пользуясь задачей 7, показать, что при n>2 определители задач 1 и 6 равны нулю.

10. Пользуясь задачей 7, вычислить:

a) $\begin{vmatrix} a_1+x & a_1 & \dots & a_1 \\ a_1 & a_1+x & \dots & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_1 & \dots & a_1+x \end{vmatrix}$;   b) $\begin{vmatrix} a_1+x & a_1 & \dots & a_1 \\ a_2 & a_2+x & \dots & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_n & \dots & a_n+x \end{vmatrix}$.

11. Показать, что если $f_1(x),\dots,f_n(x)$ — многочлены от x степени не выше ($n-2$) и $a_1,\dots,a_n$ — произвольные числа, то:

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & \dots & f_1(a_n) \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ f_n(a_1) & \dots & f_n(a_n) \end{vmatrix} = 0.$$

3.2.5. Метод приведения к определителю Вандермонда

Некоторые определители можно вычислить путем сведения их к определителю Вандермонда (см. пример 2 на стр. 37 учебника Окунева «Высшая алгебра» Учпедгиз, 1958 или пример 4 на стр. 50 учебника А. Г. Куроша «Курс высшей алгебры», Физматгиз, 1959).

Задача.

Вычислить:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1^n & \alpha_1^{n-1}\beta_1 & \dots & \beta_1^n \\ \alpha_2^n & \alpha_2^{n-1}\beta_2 & \dots & \beta_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n+1}^n & \alpha_{n+1}^{n-1}\beta_{n+1} & \dots & \beta_{n+1}^n \end{vmatrix},$$

путем сведения к определителю Вандермонда.

Решение.

Выносим за знак определителя множители $\alpha_1^n, \alpha_2^n, \dots, \alpha_{n+1}^n$ соответственно из первой, …, (n+1)-ой строк. Получаем определитель Вандермонда:

$$\Delta=\alpha_1^n\alpha_2^n\dots\alpha_{n+1}^n\begin{vmatrix}1 & \left(\frac{\beta_1}{\alpha_1}\right) & \dots & \left(\frac{\beta_1}{\alpha_1}\right)^n\\ 1 & \left(\frac{\beta_2}{\alpha_2}\right) & \dots & \left(\frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)^n\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & \left(\frac{\beta_{n+1}}{\alpha_{n+1}}\right) & \dots & \left(\frac{\beta_{n+1}}{\alpha_{n+1}}\right)^n\end{vmatrix}=$$

$$=\alpha_1^n\alpha_2^n\cdots\alpha_{n+1}^n\cdot\prod_{i>j}\left[\left(\frac{\beta_i}{\alpha_i}\right)-\left(\frac{\beta_j}{\alpha_j}\right)\right]=$$

$$=\alpha_1^n\alpha_2^n\cdots\alpha_{n+1}^n\prod_{i>j}\frac{\alpha_j\beta_i-\alpha_i\beta_j}{\alpha_i\alpha_j}=\prod_{i>j}(\alpha_j\beta_i-\alpha_i\beta_j).$$

Ответ: $\prod_{i>j}(\alpha_j\beta_i-\alpha_i\beta_j)$.

Упражнения

В задачах 1–4 вычислить определители путем приведения их к определителю Вандермонда.

1. a) $\begin{vmatrix}x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n\\ x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n\end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix}\sin^{n-1}\varphi_1 & \sin^{n-2}\varphi_1 & \dots & \sin\varphi_1 & 1\\ \sin^{n-1}\varphi_2 & \sin^{n-2}\varphi_2 & \dots & \sin\varphi_2 & 1\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \sin^{n-1}\varphi_n & \sin^{n-2}\varphi_n & \dots & \sin\varphi_n & 1\end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix}1 & \cos\varphi_1 & \cos^2\varphi_1 & \dots & \cos^{n-1}\varphi_1\\ 1 & \cos\varphi_2 & \cos^2\varphi_2 & \dots & \cos^{n-1}\varphi_2\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & \cos\varphi_n & \cos^2\varphi_n & \dots & \cos^{n-1}\varphi_n\end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix}\sin^n\varphi_1 & \sin^{n-1}\varphi_1\cos\varphi_1 & \dots & \cos^n\varphi_1\\ \sin^n\varphi_2 & \sin^{n-1}\varphi_2\cos\varphi_2 & \dots & \cos^n\varphi_2\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \sin^n\varphi_{n+1} & \sin^{n-1}\varphi_{n+1}\cos\varphi_{n+1} & \dots & \cos^n\varphi_{n+1}\end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1+1 & x_2+1 & \dots & x_n+1 \\ x_1^2+x_1 & x_2^2+x_2 & \dots & x_n^2+x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1}+x_1^{n-2} & x_2^{n-1}+x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-1}+x_n^{n-2} \end{vmatrix}$;

f) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1+2 & x_2+2 & \dots & x_n+2 \\ x_1^2+3x_1 & x_2^2+3x_2 & \dots & x_n^2+3x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1}+nx_1^{n-2} & x_2^{n-1}+nx_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-1}+nx_n^{n-2} \end{vmatrix}$;

g) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1+x_1 & 1+x_1^2 & \dots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \dots & 1+x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_{n-1} & 1+x_{n-1}^2 & \dots & 1+x_{n-1}^n \end{vmatrix}$;

h) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1+1 & a_2+1 & \dots & a_n+1 \\ a_1^2+a_1+1 & a_2^2+a_2+1 & \dots & a_n^2+1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1}+a_1^{n-2}+1 & a_2^{n-1}+a_2^{n-2}+1 & \dots & a_n^{n-1}+a_n^{n-2}+1 \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} x_1-1 & x_1^2-1 & \dots & x_1^n-1 \\ x_2-1 & x_2^2-1 & \dots & x_2^n-1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n-1 & x_n^2-1 & \dots & x_n^n-1 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$.

4.

$$\text{a)}\begin{vmatrix} n^{n-1} & (n-1)^{n-1} & (n-2)^{n-1} & \dots & 1 \\ n^{n-2} & (n-1)^{n-2} & (n-2)^{n-2} & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix};\text{b)}\begin{vmatrix} a^{n} & (a-1)^{n} & \dots & (a-n)^{n} \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \dots & (a-n)^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a-1 & \dots & a-n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

5. Перемножить всеми четырьмя способами следующие определители:

$$\text{a)}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}; \qquad \text{b)}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

6. Вычислить следующие определители путем возведения их в квадрат с помощью одного из четырех способов умножения определителей *n*-го порядка:

$$\text{a)}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ d & -c & b & -a \end{vmatrix};\ \text{b)}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ a_2 & -a_1 & -a_4 & a_3 & -a_6 & a_5 & -a_8 & a_7 \\ a_3 & a_4 & -a_1 & -a_2 & -a_7 & -a_8 & a_5 & a_6 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & -a_1 & -a_8 & a_7 & -a_6 & a_5 \\ a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & -a_1 & a_2 & -a_3 & a_4 \\ a_6 & -a_5 & a_8 & -a_7 & a_2 & -a_1 & a_4 & -a_3 \\ a_7 & -a_8 & -a_5 & a_6 & a_3 & -a_4 & -a_1 & a_2 \\ a_8 & a_7 & -a_6 & -a_5 & a_4 & a_3 & -a_2 & -a_1 \end{vmatrix}.$$

Задачи 7–17 посвящены вычислению определителей *n*-го порядка различными способами. В тех случаях, когда в формулировке задачи не указан метод вычисления, выбор наиболее целесообразного способа представляем вам самим.

7. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & \dots & 2n-1 \\ 1 & 2 & 5 & \dots & 2n-1 \\ 1 & 3 & 4 & \dots & 2n-1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 3 & 5 & \dots & 2n-2 \end{vmatrix}$. **8.** $\begin{vmatrix} a & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a & a-b_1 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -a & a-b_2 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a-b_{n-1} & b_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -a & a-b_n \end{vmatrix}$.

9. $\begin{vmatrix} 1-b_1 & b_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1-b_2 & b_3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-b_{n-1} & b_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1-b_n \end{vmatrix}$.

10. $\begin{vmatrix} 1 & 1+h & 1+2h & \dots & 1+(n-1)h \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}$.

11. $\begin{vmatrix} 1 & C_n^1 & C_n^2 & \dots & C_n^{n-1} & C_n^n \\ 1 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & \dots & C_{n-1}^{n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & C_1^1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$. **12.** $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-2} & x^{n-1} \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix}$.

13. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & \dots & 2n-3 & 2n-1 \\ 2n-1 & 1 & 3 & \dots & 2n-5 & 2n-3 \\ 2n-3 & 2n-1 & 1 & \dots & 2n-7 & 2n-5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 3 & 5 & 7 & \dots & 2n-1 & 1 \end{vmatrix}$. **14.** а) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & a & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & a & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & a \end{vmatrix}$;

b) Вычислить путем приведения к определителю типа a):

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & \dots & 2n-3 & 2n-1 \\ -(2n-1) & 1 & 3 & \dots & 2n-5 & 2n-3 \\ -(2n-3) & -(2n-1) & 1 & \dots & 2n-7 & 2n-5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -3 & -5 & -7 & \dots & -(2n-1) & 1 \end{vmatrix}.$$

15. $\begin{vmatrix} a & -b & 0 & 0 & \dots & 0 \\ ac & a & -b & 0 & \dots & 0 \\ ac^2 & ac & a & -b & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ac^n & ac^{n-1} & ac^{n-2} & ac^{n-3} & \dots & a \end{vmatrix}$. **16.** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & \dots & a & a \\ 1 & a & 0 & \dots & a & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a & a & \dots & 0 & a \\ 1 & a & a & \dots & a & 0 \end{vmatrix}$.

17. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & a_1+a_2 & \dots & a_1+a_n \\ 1 & a_2+a_1 & 0 & \dots & a_2+a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n+a_1 & a_n+a_2 & \dots & 0 \end{vmatrix}$.

В задачах 18–26 вычислить определители способом приведения к треугольному виду:

18. $\begin{vmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \beta_1 & \gamma_1 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_2 & 0 & \gamma_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_n & 0 & 0 & \dots & \gamma_n \end{vmatrix}$. **19.** $\begin{vmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \beta_1 & a & a & \dots & a \\ \beta_2 & 0 & a & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_n & 0 & 0 & \dots & a \end{vmatrix}$.

20. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n-1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & n-1 & -1 \end{vmatrix}$. **21.** $\begin{vmatrix} 2 & \frac{n-2}{n} & \frac{n-2}{n} & \dots & \frac{n-2}{n} \\ \frac{n-2}{n} & 2 & \frac{n-2}{n} & \dots & \frac{n-2}{n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{n-2}{n} & \frac{n-2}{n} & \frac{n-2}{n} & \dots & 2 \end{vmatrix}$.

(определитель порядка n).

22. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & -1 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix}$.

23. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & \dots & a^n \\ b & 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ b^2 & b & 1 & a & \dots & a^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b^n & b^{n-1} & b^{n-2} & b^{n-3} & \dots & 1 \end{vmatrix}$. **24.** $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -2 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -(n-1) & x \end{vmatrix}$.

25. Вычислить определитель *2n*-го порядка:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \beta_1 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \dots & \beta_3 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \beta_{2n-2} & \dots & \alpha_{2n-2} & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{2n-1} & 0 & \dots & 0 & \alpha_{2n-1} & 0 \\ \beta_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \alpha_{2n} \end{vmatrix}.$$

26. $\begin{vmatrix} (x-1)^2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & (x-1)^2 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & (x-1)^2 \end{vmatrix}$.

4. РАНГ МАТРИЦЫ

4.1. Метод элементарных преобразований

Определение. **Рангом** матрицы называется максимальное число ее линейно независимых строк (столбцов).

Наиболее удобным способом вычисления ранга является способ элементарных преобразований.

Элементарные преобразования матриц

1) перестановка двух строк (столбцов) матрицы;

2) умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля;

3) прибавление к одной строке (столбцу) другой строки (столбца), умноженной на любое число;

4) вычеркивание строки (столбца), состоящей сплошь из нулей.

Ранг матрицы при элементарных преобразованиях не меняется. Вместе с тем, любую ненулевую матрицу A с помощью элементарных преобразований можно привести к ступенчатому виду:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{rr} & \dots & b_{rn} \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

где все диагональные элементы $b_{11}, b_{22}, \dots, b_{rr}$ отличны от нуля, а элементы, расположенные ниже диагональных, равны нулю. Отметим, что в матрице B система всех строк линейно независима. Поэтому её ранг равен r. Учитывая, что ранг не меняется при элементарных преобразованиях, можем записать: $\operatorname{rank} A = r$.

В принципе безразлично, проводятся элементарные преобразования над строками или над столбцами матрицы. Однако мы будем пользоваться только преобразованиями строк, допуская исключение для столбцов в случае 1), т.е. допуская перестановку столбцов. Для приведения любой матрицы к виду B этих действий достаточно.

В следующих ниже задачах запись $A \sim B$ обозначает тот факт, что матрица B получена из A элементарными преобразованиями; в частности, отсюда следует, что матрицы A и B имеют одинаковый ранг.

Задача 1.

Найти ранг матрицы путём элементарных преобразований:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ -3 & 5 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & -5 & 0 & -7 \\ -5 & 7 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Указать максимальную линейно независимую подсистему строк в матрице A.

Решение.

1. Постараемся сначала при помощи элементарных преобразований добиться того, чтобы первый элемент в первом столбце был отличен от нуля, в то время как остальные элементы этого столбца обратились в нуль. С этой целью оставим первую строку без изменения, а к каждой из остальных строк прибавим первую, умноженную на подходящее число; ко второй – первую, умноженную на (–3), к третьей – первую, также умноженную на (–3), наконец, к четвертой – первую, умноженную на (–5). Получим матрицу:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -7 & -3 & -11 \\ 0 & -8 & -14 & -6 & -22 \\ 0 & -8 & -14 & -6 & -24 \end{pmatrix}.$$

Теперь добиваемся того, чтобы второй элемент второго столбца был отличен от нуля, а все следующие за ним элементы этого столбца были равны нулю. Для этого вторую строку оставляем без изменения, а к каждой из следующих за ней строк прибавляем вторую, умноженную на (–2). Получаем матрицу:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -7 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Третья строка состоит сплошь из нулей; вычёркиваем её, получим матрицу:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -7 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

имеющую тот же ранг. Третий элемент в третьем столбце здесь равен нулю, однако можно добиться того, чтобы он был отличен от нуля, если переставить третий и пятый столбцы. Получится матрица:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -11 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (*)$$

которая уже имеет требуемый вид. Ранг B равен трем, следовательно, и ранг исходной матрицы A также равен трем.

2. Как видно из первой части решения, матрица A после ряда элементарных преобразований переходит в матрицу B вида (*). При этом в процессе перехода от A к B третья строка обратилась в нулевую (и была отброшена). Если удалить из матрицы A третью строку, то останется матрица

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ -3 & 5 & 2 & 3 & 4 \\ -5 & 7 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

ранг которой равен рангу матрицы A, т.е. 3. Значит, система всех строк матрицы A' линейно независима. Отсюда следует, что 1-ая, 2-ая и 4-ая строки матрицы A образуют максимальную линейно независимую подсистему строк.

Ответ: rank A=3; 1-ая, 2-ая и 4-ая строки матрицы A образуют максимальную линейно независимую подсистему строк.

Вывод. Решение задачи 1 делает понятным следующее **правило нахождения максимальной линейно независимой подсистемы строк матрицы:** *чтобы найти максимальную линейно независимую подсистему строк в произвольной матрице А, нужно с помощью элементарных преобразований вида 3) привести эту матрицу к виду* (1) *(см. начало пункта) и затем исключить из неё те строки, которые в процессе перехода к матрице* (1) *превратились в нулевые. Тогда оставшиеся строки матрицы А будут составлять максимальную линейно независимую подсистему.*

Задача 2.

Чему равен ранг матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & a & 2 \\ -2 & 7 & 5 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 8 & a \end{pmatrix}$$

при различных значениях a?

Решение.

Применяем способ элементарных преобразований, как если бы a было конкретным числом:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & a & 2 \\ -2 & 7 & 5 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 8 & a \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{x(-2)} \ \text{x(-1)} \\ + \\ + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & a & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1-2a & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 8-a & a-2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \text{x(-2)} \\ + \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & a & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1-2a & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6+3a & a \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что если хотя бы одно из чисел $(6 + 3a)$ или a отлично от нуля, то ранг A равен 3; если же оба эти числа равны нулю, то ранг A равняется 2. Однако последний случай невозможен, так как при $a = 0$ имеем: $6+3a = 6 \neq 0$. Поэтому ранг A равен 3 во всех случаях.

Ответ: rank $A = 3$ при любых значениях a.

Задача 3.

Чему равен ранг матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & a & b & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

при различных значениях a и b?

Решение.

Первую строку матрицы A делаем последней; столбцы, содержащие параметры a и b делаем, соответственно, предпоследним и последним.

Имеем:

$$A \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 & -5 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -3 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & a & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -10 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & a+6 & b-10 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & a-4 & b+10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & a-9 & b+19 \end{pmatrix}.$$

Отсюда: ранг A равен 3, если $a = 9$ и $b = -19$, ранг A равен 4 – в остальных случаях.

Ответ: rank $A = 3$, если $a = 9$ и $b = -19$; rank $A = 4$ – в остальных случаях.

Задача 4.

Пусть над матрицей A совершается некоторая последовательность элементарных преобразований, причём над строками производятся только преобразования следующего вида: к какой-либо строке прибавляется одна из **предыдущих** строк, умноженных на любое число. Доказать, что если из матрицы A мы выбросим строку, которая в результате указанных преобразований превращается в нулевую строку, то оставшаяся матрица A' будет иметь тот же ранг, что и матрица A.

Решение.

Из условий задачи вытекает, что обращение какой-либо строки в нулевую может произойти только при добавлении к ней некоторой линейной комбинации *предыдущих* строк. Следовательно, любая строка матрицы A, обращающаяся после ряда преобразований в нулевую строку, является линейной комбинацией предыдущих строк матрицы A. Если из матрицы A удалить такую строку, то ранг матрицы не изменится.

Упражнения

1. При помощи элементарных преобразований найти ранги следующих матриц:

$$
\text{a)}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 7 \\ -1 & -3 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & -1 \\ 7 & 9 & 7 & 1 \end{pmatrix};\quad
\text{b)}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};\quad
\text{c)}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix};
$$

$$
\text{d)}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix};\quad
\text{e)}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};\quad
\text{f)}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix};
$$

$$
\text{g)}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 3 & -9 & -1 & 6 \\ 3 & -1 & -5 & 7 & 2 & -7 \end{pmatrix};\quad
\text{h)}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix};
$$

$$
\text{i)}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & -1 & -3 \\ 1 & 4 & 1 & 5 & 11 \\ -1 & -4 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix};\quad
\text{k)}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ -8 & -5 & -12 & 5 & 1 \\ 8 & 9 & 13 & -7 & 3 \end{pmatrix};
$$

$$
\text{l)}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -2 & -1 & 2 \\ 8 & -4 & 3 & -1 & -5 & -2 \\ -1 & 2 & -7 & -5 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix};\quad
\text{m)}\begin{pmatrix} 75 & 0 & 116 & -39 & 0 \\ 171 & -69 & 402 & 123 & 45 \\ 301 & 0 & 87 & -417 & -169 \\ 114 & -46 & 268 & 82 & 30 \end{pmatrix}.
$$

2. Найти ранги следующих матриц:

a) $\begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ a & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & 5 & 11 & 1 & 2a \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & -4 \\ -2 & 2 & 3 & 2 & a \end{pmatrix}$

при различных значениях a.

3. Составьте сами матрицу, ранг которой равен:
a) 1; b) 2; c) 3.

4. Как может измениться ранг матрицы, если приписать к ней:
a) строку; b) 2 строки?

Тот же вопрос для столбцов.

5. Напомним, что элементарными преобразованиями над строками матрицы мы называем следующие действия:

a) перестановка двух строк;

b) умножение строки на число, отличное от нуля;

c) прибавление к одной строке другой строки, умноженной на любое число;

d) вычеркивание строки, состоящей только из нулей.

Доказать, что элементарное преобразование типа a) можно осуществить, выполнив несколько раз преобразование типа b) и c).

6. Доказать, что любую матрицу ранга r можно элементарными преобразованиями привести к виду, где число строк равно r, $a_{11}=1$, $a_{22}=1$, … , $a_{rr}=1$, а все остальные элементы равны нулю.

7. С помощью элементарных преобразований выделить в матрице A максимальную линейно независимую подсистему строк:

a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$;

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 2 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 1 \end{pmatrix}$; d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -4 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -7 & 8 & -15 & 6 & -5 \\ 5 & 5 & -6 & 11 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

4.2. Метод окаймляющих миноров

Определение. Матрица имеет ранг r, если среди ее миноров существует хотя бы один минор порядка r, отличный от нуля, а все миноры порядка $(r + 1)$ и выше равны нулю или не существуют.

Метод окаймляющих миноров состоит в следующем:

1. Выбираем некоторый минор матрицы (как правило, берут минор в левом верхнем углу), который не равен нулю. Затем вычисляют *все* миноры, окаймляющие этот минор, порядок которых на 1 больше данного. Если *все* они равны нулю, то ранг матрицы равен порядку выбранного минора.

2. Если хотя бы один из окаймляющих миноров не равен нулю, то вычисляют все окаймляющие его миноры. Если они все равны нулю, то ранг матрицы равен порядку этого окаймляющего минора, если хотя бы один отличен от нуля, то берут этот окаймляющий минор и т.д.

Задача 1.

Найти методом окаймляющих миноров ранг матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Указать максимальную линейно независимую подсистему строк в матрице A.

Решение.

Начинаем с миноров первого порядка, т.е. с элементов матрицы A. Среди них явно имеются отличные от нуля. Выберем, например, минор (элемент) $M_1 = 1$, расположенный в первой строке и первом столбце. Окаймляя при помощи второй строки и второго столбца, получаем минор $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$, равный нулю. Окаймляя при помощи второй строки и третьего столбца, получаем минор

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix},$$

отличный от нуля. Переходим теперь к минорам третьего порядка, окаймляющим M_2. Их всего два (можно добавить второй столбец или четвёртый). Вычисляем их:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, все окаймляющие миноры третьего порядка оказались равными нулю. Ранг матрицы A равен 2.

Максимальную линейно независимую подсистему образуют, например, первая и вторая строки.
Ответ: rank A = 3; максимальную линейно независимую подсистему образуют, например, первая и вторая строки.

Задача 2.

Найти методом окаймляющих миноров ранг матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Легко находим минор 3-го порядка:

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -2,$$

отличный от нуля. Окаймляя его при помощи четвёртого столбца и четвёртой строки, получаем минор 4-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix},$$

равный нулю (проверьте!). Однако второй окаймляющий минор:

$$M_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

отличен от нуля (проверьте!). Для этого минора в матрице A уже не существует окаймляющих миноров. Следовательно, ранг A равен 4.

Ответ: rank A = 4.

Задача 3.

Найти методом окаймляющих миноров ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

в зависимости от значений a.

Решение.

В качестве минора 1-го порядка, не равного нулю, возьмём элемент M_1=1, расположенный в третьей строке и первом столбце. Окаймляющие его миноры 2-го порядка суть:

$$\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - a, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a - 1, \quad \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a - 1, \quad \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1.$$

Единственное значение a, при котором все эти миноры равны нулю, есть $a = 1$; тогда ранг A равен 1. Если же $a \neq 1$, то отличным от нуля будет хотя бы первый из указанных миноров. Окаймляющий его минор третьего порядка есть сам определитель матрицы A. Он равен

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 3a + 2.$$

Выясним, при каких значениях a это выражение равно нулю. Для этого решим уравнение $x^3 - 3x + 2 = 0$.

Имеем:

$$x^3 - 3x + 2 = (x^3 - x) - (2x - 2) = x(x^2 - 1) - 2(x - 1) = (x - 1)(x^2 + x - 2),$$

откуда следует

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -2.$$

Следовательно, если $a \neq 1$ и $a \neq -2$, то ранг A равен 3.

Ответ: при $a = 1$ – rank $A = 1$,
при $a = -2$ – rank $A = 2$,
при всех остальных значениях a rank $A = 3$.

Упражнения

1. Найти методом окаймляющих миноров ранги следующих матриц:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & -3 \\ 3 & 5 & -13 & 11 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 8 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -7 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 4 & -3 & -5 & -7 \\ 1 & 0 & 7 & 11 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & -1 & 8 \\ 3 & 8 & -9 & -5 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 1 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 1 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -4 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -7 & 8 & -15 & 6 & -5 \\ 5 & 5 & -6 & 11 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Указать в каждом случае максимальную линейно независимую подсистему строк.

2. Найти методом окаймляющих миноров ранги следующих матриц:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ a & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} a & a & a+1 \\ a & a & a-1 \\ a+1 & a & 2a+3 \end{pmatrix}$,

в зависимости от значений a.

3. Найти методом окаймляющих миноров ранги следующих матриц:

a) $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & b \\ 1 & a & 1 & c \\ 1 & 1 & a & d \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & -3 & -4 \\ a & b & 6 & 2 \end{pmatrix}$,

в зависимости от значений a, b, c и d.

5. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Определение 1. Квадратная матрица A называется **невырожденной** (или **неособенной**), если её определитель не равен нулю. Если определитель матрицы A равен нулю, то матрица A называется **вырожденной** или **особенной**.

Определение 2. Матрица A^{-1} называется обратной квадратной матрице A, если $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, где E — единичная матрица.

Теорема (существование и единственность обратной матрицы).

Всякая невырожденная матрица имеет единственную обратную. Вырожденная матрица обратной матрицы не имеет.

5.1. Нахождение обратной матрицы с помощью алгебраических дополнений

Пусть $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$ – квадратная матрица n-го порядка.

Для нахождения обратной матрицы A^{-1} необходимо:

1) вычислить определитель $|A|$ матрицы A. Если $|A| \neq 0$, то по теореме о существовании и единственности обратная матрица A^{-1} для матрицы A существует;

2) найти алгебраические дополнения A_{ij} для всех элементов α_{ij} $(i, j \in \{1, ..., n\})$

3) записать обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Задача.

Дана матрица $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найти для неё обратную матрицу A^{-1}.

Решение.

1. Находим определитель $|A|$ матрицы A. Имеем $|A|=-1\neq 0$. Следовательно, обратная матрица существует.

2. Находим алгебраические дополнения для всех элементов матрицы:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1; \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4; \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1; \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5; \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1; \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -6; \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4.$$

2. Запишем теперь обратную матрицу:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{A_{11}}{|A|} & \dfrac{A_{21}}{|A|} & \dfrac{A_{31}}{|A|}\\ \dfrac{A_{12}}{|A|} & \dfrac{A_{22}}{|A|} & \dfrac{A_{32}}{|A|}\\ \dfrac{A_{13}}{|A|} & \dfrac{A_{23}}{|A|} & \dfrac{A_{33}}{|A|}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -4 & -3\\ 1 & -5 & -3\\ -1 & 6 & 4\end{pmatrix}.$$

Ответ: $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -4 & -3\\ 1 & -5 & -3\\ -1 & 6 & 4\end{pmatrix}.$

5.2. Нахождение обратной матрицы путем элементарных преобразований

Пусть A – невырожденная квадратная матрица. Для нахождения обратной матрицы A^{-1} необходимо:

1) приписать к матрице A слева единичную матрицу E соответствующей размерности;

2) путем элементарных преобразований над строками всей составной матрицы привести матрицу A к единичной матрице E;

3) тогда на месте единичной матрицы будет стоять обратная матрица A^{-1}.

Задача.

Найти обратную матрицу A^{-1} , если:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Решение.

Поскольку $|A| = 1 \neq 0$, то обратная матрица A^{-1} существует.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&1&1&1\\0&1&0&0&0&1&1&1\\0&0&1&0&0&0&1&1\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right)\begin{array}{l}+\\ \text{x(-1)}\\ \\ \\ \end{array}\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&-1&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&1&1\\0&0&1&0&0&0&1&1\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ +\\ \text{x(-1)}\\ \\ \end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ \\ \leftarrow + \\ \text{x(-1)} \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

5.3. Нахождение обратной матрицы с помощью линейного преобразования

Определение 1. **Линейным преобразованием** переменных называется выражение одной системы переменных $y_1, y_2, \ldots, y_m$ через новую систему переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ при помощи линейных однородных функций:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots \\ y_4 = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

, где a_{ij} — постоянные числа (действительные или комплексные).

Линейное преобразование может быть записано в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

или $AX=Y$, где A, X, Y — соответствующие матрицы.

Матрица A называется **матрицей линейного преобразования**.

Определение 2. Пусть линейное преобразование

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$$

переводит переменные x_1 и x_2 в переменные y_1 и y_2. Преобразование, переводящее y_1 и y_2 в x_1 и x_2 называется **обратным** по отношению к первому:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} y_1 + \dfrac{-a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} y_2 \\ x_2 = \dfrac{-a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} y_1 + \dfrac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} y_2 \end{cases}.$$

Матрица обратного преобразования:

$\dfrac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$, где $|A|$ — определитель матрицы исходного преобразования, отличный от нуля.

Если $|A| = 0$, то обратное преобразование не существует.

Обратные матрицы можно находить следующим образом: пользуясь методом Гаусса, находят для линейного преобразования

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \text{ , где } i = 1,2, \ldots, n, \qquad (S)$$

с данной матрицей A обратное линейное преобразование S^{-1}, т.е. выражают неизвестные $x_1, \ldots, x_n$ через неизвестные $y_1, \ldots, y_n$. Матрица S^{-1} и будет искомой матрицей A^{-1}.

Задача.

Дана матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Запишите линейное преобразование, отвечающее этой матрице. Найдите обратное преобразование и с помощью него обратную матрицу A^{-1}.

Решение.

Матрице A отвечает линейное преобразование

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ y_2 = x_1 - x_2 \\ y_3 = -x_1 + 2x_2 + x_3 \end{cases}, \qquad (1)$$

для которого A является матрицей из коэффициентов при неизвестных x_1, x_2, x_3. Найти обратное преобразование — значит найти выражения x_1, x_2, x_3 через y_1, y_2, y_3. Для этого необходимо решить систему (1) относительно неизвестных x_1, x_2, x_3, что проще всего достигается при помощи элементарных преобразований над уравнениями системы (см. начало п.4).

Прежде чем приступить к преобразованиям, запишем систему (1) в виде:

$$\begin{cases} 1 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 0 \cdot y_3 = 2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \\ 0 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 + 0 \cdot y_3 = x_1 - x_2 \\ 0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 1 \cdot y_3 = -x_1 + 2x_2 + x_3 \end{cases}. \qquad (2)$$

Далее переставляем первое и второе уравнения и исключаем x_1 из всех уравнений, кроме первого:

$$\begin{cases} y_2 = x_1 - x_2 \\ y_1 - 2y_2 = 4x_2 + 3x_3 \\ y_2 + y_3 = x_2 + x_3 \end{cases}.$$

Переставляем второе и третье уравнения и исключаем из третьего x_2:

$$\begin{cases} y_2 = x_1 - x_2 \\ y_2 + y_3 = x_2 + x_3 \\ y_1 - 6y_2 - 4y_3 = -x_3 \end{cases}.$$

Умножаем обе части третьего уравнения на (–1) и исключаем x_3 из второго уравнения:

$$\begin{cases} y_2 = x_1 - x_2 \\ y_1 - 5y_2 - 3y_3 = x_2 \\ -y_1 + 6y_2 + 4y_3 = x_3 \end{cases}.$$

Наконец, исключаем x_2 из первого уравнения:

$$\begin{cases} y_1 - 4y_2 - 3y_3 = 1\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 \\ y_1 - 5y_2 - 3y_3 = 0\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 0\cdot x_3 \\ -y_1 + 6y_2 + 4y_3 = 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 1\cdot x_3 \end{cases} \qquad (3)$$

Обратное преобразование найдено. Ему отвечает матрица:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix},$$

которая и будет обратной для A. Задача решена.

Ответ: матрице A отвечает линейное преобразование $\begin{cases} y_1 = 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ y_2 = x_1 - x_2 \\ y_3 = -x_1 + 2x_2 + x_3 \end{cases}.$

5.4. Решение матричных уравнений

При решении матричных уравнений вида $AX=B$ или $YA=B$, где A, B – квадратные матрицы n-го порядка, а X – искомая квадратная матрица того же n-го порядка, надо различать два случая:

1°. A – невырожденная матрица. В этом случае каждое из уравнений $AX = B$ и $YA = B$ имеет единственное решение $A=AA^{-1}B$ и $Y=BA^{-1}$. В самом деле, легко непосредственно проверить, что $A^{-1}B$ удовлетворяет уравнению $AX=B$ и BA^{-1} удовлетворяет уравнению $YA=B$. Если X_1 и X_2 — решения уравнения $AX=B$, то $AX_1=B$ и $AX_2=B$, откуда $AX_1=AX_2$. Умножая обе части последнего равенства слева на обратную матрицу A^{-1}, получаем $X_1=X_2$. Аналогично убеждаемся в единственности решения уравнения $YA=B$.

Задача 1.

Найти матрицу X второго порядка, удовлетворяющую уравнению

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Здесь матрица $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ – невырожденная. Находим, что:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \text{ и } X = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & -11 \\ 15 & 15 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} -11 & -11 \\ 15 & 15 \end{pmatrix}$.

*2^o^*. A – вырожденная матрица. В этом случае предыдущий способ непригоден и приходится пользоваться другим приёмом, который мы поясним с помощью следующей задачи.

Задача 2.

Решить матричное уравнение:

$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, где X – искомая матрица второго порядка.

Решение.

Полагаем $X = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$.

Тогда после перемножения матриц $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ и X получаем:

$$\begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 & 2y_1 + 3y_2 \\ 4x_1 + 6x_2 & 4y_1 + 6y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$$

откуда:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ 4x_1 + 6x_2 = 2 \end{cases}; \quad \text{(I)} \qquad \begin{cases} 2y_1 + 3y_2 = 2 \\ 4x_1 + 6x_2 = 4 \end{cases}. \quad \text{(II)}$$

Системы (I) и (II) являются совместными и неопределенными. Находим, что $x_1 = \dfrac{1-3x_2}{2}$ – общее решение системы (I) и $y_1 = \dfrac{2-3y_2}{2}$ – общее решение системы (II). Полагая $x_2 = 2a + 1$, $y_2 = 2b$, получаем:

$$X=\begin{pmatrix}-3a-1 & 1-3b\\ 2a+1 & 2b\end{pmatrix}$$, где a и b – произвольные числа.

Ответ: $X=\begin{pmatrix}-3a-1 & 1-3b\\ 2a+1 & 2b\end{pmatrix},\ a,b\in\mathbf{R}$.

Обращаем внимание на то, что матричное уравнение $AX = B$ или $YA = B$ в случае вырожденной матрицы A может оказаться неразрешимым (т.е. не имеющим решения), так как соответствующие системы линейных уравнений могут быть и несовместными.

Упражнения

1. Найти матрицу A^{-1}, если:

a) $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, где ad – bc ≠ 0;   b) $A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$;

c) $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$;   d) $A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$.

2. Найти A^{-1}, если:

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ -1 & -1 & 2\\ 2 & 4 & -5\end{pmatrix}$;   b) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$;   c) $A=\begin{pmatrix}3 & -4 & 5\\ 2 & -3 & 1\\ 3 & -5 & -1\end{pmatrix}$;

d) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$;   e) $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -5 & 7\\ 0 & 1 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

3. Проверьте, что если:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix},\ \text{ то }\ A^{-1}=\frac{1}{4}A.$$

Разъяснение. Под kA, где k – число, понимается матрица, полученная из A умножением всех элементов на k.

4. Найти A^{-1}, если A — матрица n-го порядка:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 \end{pmatrix}$.

5. Найти матрицу X из следующих уравнений:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$; b) $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 3 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$; f) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$; h) $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$;

i) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & -8 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 9 & -3 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

k) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -5 & 7 \\ 4 & -9 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

l) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}$.

6. Найти все матрицы X, удовлетворяющие уравнению:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$; b) $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 1 & 11 & 7 \\ 7 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

7. С помощью линейных преобразований (см. п. 5.3.) найти обратные матрицы для следующих:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & -8 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 8 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & -4 & -3 \\ 3 & 8 & -1 & -6 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & \dots & a^n \\ 0 & 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & a & \dots & a^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & n-3 & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. С помощью линейных преобразований (см. п. 5.3.) найти обратные матрицы для матриц упражнений:

2 a) – e) ; **3**; **4** a), b).

9. Докажите, что если матрица A «треугольная», т.е. все элементы по одну сторону от главной диагонали равны нулю, и если все элементы главной диагонали отличны от нуля, то матрица A^{-1} существует и тоже является треугольной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беллман, Р. Введение в теорию матриц / Р. Беллман. – М.: Наука, 1976. − 368 с.

2. Боревич, З.И. Определители и матрицы / З.И. Боревич. – М.: Наука, 1988. − 184 с.

3. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1966. – 576 с.

4. Кострикин, А.И. Введение в алгебру. Ч. I. Основы алгебры / А.И. Кострикин. − М.: Наука, 1994. − 318 с.

5. Кострикин, А.И. Линейная алгебра и геометрия / А.И. Кострикин, Ю.И. Манин. − М.: Наука, 1986. − 304 с.

6. Сборник задач по алгебре / Под ред. А.И. Кострикина. − М.: Факториал, 1995. − 456 с.

7. Ланкастер, П. Теория матриц / П. Ланкастер. − М.: Наука, 1978. – 283 с.

8. Окунев, Л.Я. Сборник задач по высшей алгебре / Л.Я. Окунев − М.: Просвещение, 1964. − 183 с.

9. Проскуряков, И.В. Сборник задач по линейной алгебре / И.В. Проскуряков. − М.: Наука, 2001. – 480 с.

10. Размыслович, Г.П. Геометрия и алгебра / Г.П. Размыслович, М.М. Феденя, В.М. Ширяев. − Мн.: Университетское, 1987. − 352 с.

11. Размыслович, Г.П. Сборник задач по геометрии и алгебре: Учеб. Пособие / Под ред. В.М. Ширяева / Г.П. Размыслович, М.М. Феденя, В.М. Ширяев. − Мн.: Універсітэцкае, 1999. − 383 с.

12. Стренг, Г. Линейная алгебра и ее применения / Г. Стренг. – М.: Мир, 1980. − 454 с.

13. Фаддеев, Д.К. Задачи по высшей алгебре / Д.К. Фаддеев, И.С. Соминский. − СПб.: Издательство «Лань», 1999. − 288 с.

14. Хорн, Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. − М.: Мир, 1988. – 666 с.

15. Шнеперман, Л.Б. Сборник задач по алгебре и теории чисел / Л.Б. Шнеперман. – Мн.: Вышэйш. школа, 1982. − 223 с.

Учебное издание

МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Сборник заданий

Составитель

ВОРОБЬЁВ Николай Николаевич

Технический редактор *Г.В. Разбоева*

Компьютерный дизайн *Л.И. Ячменёва*

Подписано в печать 2020. Формат 60х84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 4,59. Уч.-изд. л. 1,57. Тираж экз. Заказ .

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Свидетельство о государственной регистрации в качестве издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/255 от 31.03.2014.

Отпечатано на ризографе учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».
210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.