Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра алгебры и методики преподавания математики

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Сборник заданий

Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2020

УДК 512.643(075.8)
ББК 22.143я73
Л59

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 6 от 18.06.2020.

Составитель: профессор кафедры алгебры и методики преподавания математики ВГУ имени П.М. Машерова, доктор физико-математических наук, доцент **Н.Н. Воробьёв**

Рецензент:
профессор кафедры геометрии и математического анализа
ВГУ имени П.М. Машерова, доктор физико-математических наук,
профессор *Ю.В. Трубников*

Л59 **Линейные операторы :** сборник заданий / сост. Н.Н. Воробьёв. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2020. – 98 с.

Настоящий сборник заданий, являясь продолжением вышедшего ранее учебного издания «Векторные пространства и их приложения», посвящен решению задач одного из разделов линейной алгебры – теории линейных операторов конечномерных векторных пространств. Наряду с упражнениями для самостоятельного решения изложение сопровождается большим количеством детально разобранных задач. Издание может быть использовано для подготовки к практическим занятиям, а также для проведения самостоятельных и контрольных работ по дисциплинам «Алгебра», «Алгебра и теория чисел», «Геометрия и алгебра». Предназначено для студентов факультета математики и информационных технологий.

УДК 512.643(075.8)
ББК 22.143я73

С О Д Е Р Ж А Н И Е

ПРЕДИСЛОВИЕ

Понятие линейного оператора наряду с понятием векторного пространства является основным в линейной алгебре и играет важную роль в самых разнообразных областях математики и физики, прежде всего – в анализе и его приложениях. Современное определение линейного оператора впервые дал Дж. Пеано (Peano Giuseppe, 1858–1932) в 1888 году (для векторных пространств над полем $\mathbb{R}$). Оно было подготовлено предшествующим развитием математики, накопившей огромное число примеров. Их неполный перечень включает линейные подстановки в системах линейных уравнений, преобразования координат, дифференциальные и интегральные преобразования. Вплоть до начала XX века систематически изучались лишь линейные операторы между конечномерными пространствами над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$. Первые "бесконечномерные" наблюдения были сделаны О. Теплицем (Toeplitz Otto, 1881–1940) в 1909 году. Однако линейные операторы между бесконечномерными пространствами изучаются, как правило, в предположении их непрерывности относительно некоторых топологий.

Настоящий сборник заданий, являясь по существу логическим продолжением выпущенного ранее издания «Векторные пространства и их приложения» [9], предназначен для первоначального изучения основ теории линейных операторов конечномерных векторных пространств. Прежде всего, он адресован студентам-заочникам и может ими использоваться для самостоятельного овладения методами решения задач. Вместе с тем материал издания может послужить основой для проведения самостоятельных и контрольных работ по данной тематике на стационаре. Весь материал разбивается на разделы и подразделы. Структура сборника такова: каждый раздел начинается обзором основных понятий и результатов, представляющим собой концентрированное изложение теории. Некоторые обоснования приведенных утверждений опущены, их можно получить самостоятельно или, в случае затруднений, прибегнуть к рекомендуемой литературе. Далее приводятся наиболее типичные задачи различной степени сложности с решениями. Каждый раздел завершают упражнения для самостоятельного решения.

Сборник может быть использован для подготовки к практическим занятиям по дисциплинам «Алгебра», «Алгебра и теория чисел», «Геометрия и алгебра». Предназначен для факультета математики и информационных технологий.

Автор искренне признателен доцентам кафедры алгебры и методики преподавания математики **Наумику Михаилу Ивановичу, Залесской Елене Николаевне** за ряд ценных замечаний, способствовавших качественному улучшению текста. Основная работа по изготовлению оригинал-макета издания выполнена магистрантом кафедры алгебры и методики преподавания математики **Побойневым Вадимом Олеговичем** и аспирантом кафедры **Стасeлько Игнатом Игоревичем.** Им автор приносит особую благодарность.

1. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ИХ МАТРИЦЫ. ДЕЙСТВИЯ НАД ЛИНЕЙНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

1.1 Определение линейного оператора

Определение 1. Непустое множество элементов произвольной природы V называется *векторным* (или *линейным*) *пространством* над полем F, если на нем определены операции:

а) сложения элементов множества V, т.е. $(\forall\, a,\, b\in V)\ (a+b\in V)$;

б) умножения элементов из V на скаляры из F, т.е.

$$(\forall\, a\in V)\ (\forall\, \lambda\in F)\ (\lambda a\in V);$$

и при этом выполняются следующие условия:

1°. Относительно операции „+“ множество V является коммутативной (абелевой) группой;

2°. Операция умножения на скаляры ассоциативна, т.е.

$$(\forall\, a\in V)\ (\forall\, \lambda,\, \mu \in F)\ ((\lambda\mu)a = \lambda\, (\mu a));$$

3°. Операция умножения на скаляры дистрибутивна относительно сложения векторов, т.е.

$$(\forall\, a,\, b\in V)\ (\forall\, \lambda \in F)\ (\lambda\, (a+b) = \lambda a+\lambda b);$$

4°. Операция умножения на скаляры дистрибутивна относительно сложения скаляров, т.е.

$$(\forall\, a\in V)\ (\forall\, \lambda,\, \mu \in F)\ ((\lambda+\mu)a = \lambda a+\mu a);$$

5°. $(\forall\, a\in V)\ (1_F\, a = a)$.

Определение 2. Пусть V и U — векторные пространства над полем F. Отображение

$$\varphi : V \to U$$

называется *линейным*, если

1°. $(\forall a,b\in V)\ (\varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b))$;

2°. $(\forall\, \lambda\in F)(\forall a \in V)(\varphi(\lambda a)=\lambda\varphi(a))$.

Пример 1.

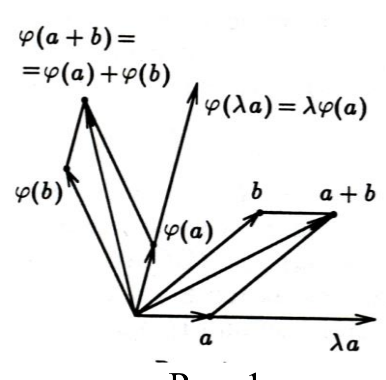

Рис. 1

Поворот есть линейное отображение пространства E^2 в себя (рис. 1).

Определение 3. Пусть V — векторное пространство над полем F. *Линейным оператором* или (линейным преобразованием) называется такое отображение f векторного пространства V в себя, т.е. f: $V \to V$, которое удовлетворяет следующим требованиям:

1°. $(\forall a, b \in V)\ (f(a+b) = f(a) + f(b))$;

2°. $(\forall \lambda \in F)(\forall a \in V)\ (f(\lambda a) = \lambda f(a))$.

***Обозначение*: *Hom*(*V*,*V*) —** множество всех линейных операторов векторного пространства V.

Задача 1.

Выяснить, будет ли отображение φ вещественного векторного пространства L над полем $\mathbb{R}$ в себя линейным оператором, если:

а) $\varphi(x) = 2x$ для всякого вектора $x \in L$;

б) для всякого вектора $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ его образ $\varphi(x) = (x_1+k, x_2+k, x_3-k)$, где $k \in \mathbb{R}$ — фиксированное число.

Решение.

Отображение φ является линейным оператором, если выполняются следующие два требования:

$$1)\ \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y);$$

$$2)\ \varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x).$$

Проверим, выполняются ли эти требования для заданных отображений.

а) По условию для любых векторов $x, y \in L$ и любого $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\varphi(x+y) = 2(x+y) = 2x + 2y = \varphi(x) + \varphi(y);$$

$$\varphi(\lambda x) = 2(\lambda x) = \lambda(2x) = \lambda\varphi(x).$$

Таким образом, в случае *а*) требования 1), 2) выполнены, и поэтому отображение φ является линейным оператором вещественного векторного пространства L.

б) Если $x = (x_1, x_2, x_3)$, то $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$. По условию имеем:

$$\lambda\varphi(x) = \lambda(x_1+k, x_2+k, x_3-k) = (\lambda x_1 + \lambda k, \lambda x_2 + \lambda k, \lambda x_3 - \lambda k);$$

$$\varphi(\lambda x) = (\lambda x_1 + k, \lambda x_2 + k, \lambda x_3 - k).$$

т.е. $\varphi(\lambda x) \neq \lambda\varphi(x)$ при $\lambda \neq 1$ и $k \neq 0$.

Уже отсюда следует, что если $k \neq 0$, то φ не является линейным оператором пространства $\mathbb{R}^3$.

Вместе с тем, при $k = 0$ имеем

$$\varphi(x) = (x_1 + 0, x_2 + 0, x_3 - 0) = (x_1, x_2, x_3) = x,$$

т.е. в этом случае отображение φ будет тождественным, а потому тождественным оператором пространства $\mathbb{R}^3$.

Ответ: *а*) является; *б*) при $k \neq 0$ не является;

при $k = 0$ является тождественным оператором.

Задача 2.

Отображение A векторного пространства $\mathbb{R}^n$ определено равенством $Ax=x+x_0$, где $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — фиксированный ненулевой вектор. Является ли отображение A линейным оператором пространства $\mathbb{R}^n$?

Решение.

Из равенств $Ax=x+x_0$, $Ay=y+x_0$, $A(x+y)=x+y+x_0$, $A(x+y)=Ax+Ay$ заключаем, что $x+y+x_0=(x+x_0)+(y+x_0)$. Отсюда следует, что $x_0=0$, но это противоречит условию. Следовательно, отображение A не является линейным оператором векторного пространства $\mathbb{R}^n$.

Ответ: не является.

Задача 3.

Дано векторное пространство геометрических векторов. Отображение A состоит в замене каждого вектора его составляющей по оси Ox. Является ли это отображение линейным оператором?

Решение.

Пусть $a=x_1i+y_1j+z_1k$ и $b=x_2i+y_2j+z_2k$ – произвольные векторы, а λ – произвольное действительное число. Так как

$a+b=(x_1+x_2)i+(y_1+y_2)j+(z_1+z_2)k$, $\lambda a=\lambda x_1 i+\lambda y_1 j+\lambda z_1 k$,

то

$A(a+b)=(x_1+x_2)i=x_1i+x_2i=Aa+Ab$, $A(\lambda a)=\lambda x_1 i=\lambda Aa$.

Итак, A – линейный оператор.

Ответ: является.

Задача 4.

Доказать, что существует, и притом только одно, отображение, являющееся линейным оператором n-мерного векторного пространства L, переводящее данные линейно независимые векторы $a_1, a_2, ..., a_n \in L$ соответственно в данные векторы $b_1, b_2, ..., b_n \in L$.

Решение.

По условию система n векторов $a_1, a_2, ..., a_n$ линейно независима, а поэтому она является базисом n-мерного векторного пространства L и любой вектор $x \in L$ можно единственным образом разложить по векторам этого базиса:

$$x = x_1a_1 + x_2a_2 + ... + x_na_n.$$

Определим отображение φ следующим образом:

$$\varphi(x) = x_1b_1 + x_2b_2 + ... + x_nb_n. \qquad (1.1.1)$$

Так как $a_1 = 1 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + ... + 0 \cdot a_n$, то, в частности, согласно (1.1.1) получим:

$$\varphi(a_1) = 1 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + ... + 0 \cdot b_n = b_1.$$

Аналогично $\varphi(a_2)=b_2, ..., \varphi(a_n)=b_n$. Таким образом, φ переводит данные векторы $a_1, a_2, ..., a_n$ соответственно в векторы $b_1, b_2, ..., b_n$.

Докажем, что найденное отображение является линейным оператором вещественного векторного пространства L.

Так как $\lambda x = \lambda x_1 a_1 + \lambda x_2 a_2 + \ldots + \lambda x_n a_n$, то, согласно (1.1.1), получаем:

$$\varphi(\lambda x) = \lambda x_1 b_1 + \lambda x_2 b_2 + \ldots + \lambda x_n b_n = \\ = \lambda(x_1 b_1 + x_2 b_2 + \ldots + x_n b_n) = \lambda\varphi(x). \qquad (1.1.2)$$

Кроме того, если y – любой другой вектор из L, т.е. $y = y_1 a_1 + y_2 a_2 + \ldots + y_n a_n$, то

$$x + y = (x_1 + y_1)a_1 + (x_2 + y_2)a_2 + \ldots + (x_n + y_n)a_n$$

и по формуле (1.1.1) имеем:

$$\varphi(x+y) = (x_1 + y_1)b_1 + (x_2 + y_2)b_2 + \ldots + (x_n + y_n)b_n = \\ = (x_1 b_1 + x_2 b_2 + \ldots + x_n b_n) + (y_1 b_1 + y_2 b_2 + \ldots + y_n b_n) = \varphi(x) + \varphi(y). \qquad (1.1.3)$$

Из результатов (1.1.2) и (1.1.3) следует, что отображение φ — линейный оператор векторного пространства L.

Допустим теперь, что некоторый линейный оператор ψ пространства L в себя также переводит векторы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ соответственно в $b_1, b_2, \ldots, b_n$, т.е. $\psi(a_1) = b_1, \psi(a_2) = b_2, ..., \psi(a_n) = b_n$. Тогда для любого вектора $x = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n \in L$, ввиду того, что ψ — линейный оператор, имеем:

$$\psi(x) = \psi(x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n) = x_1\psi(a_1) + x_2\psi(a_2) + \ldots + x_n\psi(a_n) = \\ = x_1 b_1 + x_2 b_2 + \ldots + x_n b_n,$$

а это означает, что отображение ψ совпадает с отображением φ.

Задача 5.

Является ли линейным оператором отображение f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, если для любого вектора $x \in \mathbb{R}^2$ имеет место $f(x) = i - 3j$?

Решение.

Имеем $f(x_1) = i - 3j$;

$f(x_2) = i - 3j$;

$f(x_1 + x_2) = i - 3j$.

Следовательно, $f(x_1) + f(x_2) = 2i - 6j \neq f(x_1 + x_2)$. Таким образом, отображение f не является линейным оператором векторного пространства $\mathbb{R}^2$.

Ответ: не является.

Упражнения

1. Дан линейный оператор f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Каков геометрический смысл условий линейности оператора: $f(x_1+x_2) = f(x_1)+ f(x_2)$;

$$f(\lambda x) = \lambda f(x)?$$

2. Может ли линейный оператор перевести пару ненулевых коллинеарных векторов в пару неколлинеарных?

3. Является ли линейным оператором замена каждого геометрического вектора его зеркальным отображением относительно координатной плоскости xOy?

4. Является ли линейным оператором умножение каждого геометрического вектора на его длину?

5. Показать, что отображение φ пространства вещественных функций, определенных и непрерывных на отрезке $[a, b]$, ставящее в соответствие каждой функции $f(x)$ из этого пространства функцию $\int_a^b f(x)\, dx$, является линейным оператором.

6. Выяснить, будет ли линейным оператором отображение φ пространства $\mathbb{R}^3$ в себя, если для любого вектора $x=(x_1, x_2, x_3)\in \mathbb{R}^3$:

а) $\varphi(x)=(x_1+3, x_2, x_3)$; *б*) $\varphi(x)=(x_1-x_2+x_3, x_3, x_2)$.

7. Показать, что отображение пространства A_3 (трехмерных строк действительных чисел над полем $\mathbb{R}$), переводящее строку (x_1, x_2, x_3) в строку:

а) $(0, 0, x_3)$;

б) (x_1, x_2, ax_3), где $a\in\mathbb{R}$;

в) $(x_1, -x_2, x_3)$;

г) $(x_1\cos\varphi - x_2\sin\varphi, x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi, x_3)$,

является линейным оператором.

8. Является ли линейным каждый из операторов f: $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, заданный следующим образом для любого α из $\mathbb{R}^n$:

а) $f(\alpha) = 3\alpha$; *г*) $f(\alpha) = \alpha^3$;

б) $f(\alpha) = 2^{\alpha}$; *д*) $f(\alpha) = \dfrac{\alpha}{5}$?

в) $f(\alpha) =2\alpha +5$;

9. Является ли линейным оператор f, переводящий всякий вектор $x = (\alpha_1,\alpha_2)$ в вектор y, заданный своими координатами в том же базисе, что и вектор x, если:

а) $y = (\alpha_1+\alpha_2, \alpha_1-\alpha_2)$; *г*) $y = (1, \alpha_1+\alpha_2)$;

б) $y = (\alpha_1, \alpha_1, \alpha_2,)$; *д*) $y = (\alpha_1^3,\alpha_2^2)$?

в) $y = (2\alpha_1+3\alpha_2, \alpha_2)$;

10. Является ли линейным оператор f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, если для любого вектора $x \in \mathbb{R}^3$:

а) $f(x) = |x|\, i$; *б*) $f(x) = 2i+3j - k$;

в) $f(x) = (i, x)\, x$; *г*) $f(x) = (i, x)\, j$;

д) $f(x) = (a, x)\, a$, где a — фиксированный вектор этого пространства;

е) $f(x) = [a, x]$, где a — фиксированный вектор этого пространства?

11. Показать, что в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ геометрических векторов, исходящих из начала координат O, ортогональное проектирование φ на некоторую плоскость, проходящую через точку O, является линейным оператором пространства $\mathbb{R}^3$ в себя.

12. В каком случае отображение A является линейным оператором, если $Ax=x_0$, где x — произвольный вектор векторного пространства $\mathbb{R}^n$, а x_0 — фиксированный вектор?

13. Пусть A — линейный оператор. Доказать, что отображение B, определяемое равенством $Bx=Ax-2x$, является линейным оператором.

14. Является ли линейным оператор f: $\mathbb{R}_{n\times n} \to \mathbb{R}_{n\times n}$, если для любой матрицы $A \in \mathbb{R}_{n\times n}$:

а) $f(A) = E + A$, где E — единичная матрица порядка n;

б) $f(A) = \alpha A$ ($\alpha \in \mathbb{R}$);

в) $f(A) = A^2$; *г*) $f(A) = A^{\mathrm{T}}$;

д) $f(A) = AB$, где B — фиксированная квадратная матрица порядка n?

15. Является ли линейным оператор f: $\mathbb{R}_n(x) \to \mathbb{R}_n(x)$, если для любого многочлена $P(x) = \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \ldots + \alpha_n$ имеет место $f(P(x)) = P'(x)$?

16. Построить линейный оператор пространства A_3, который бы оставлял на месте:

а) прямую $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$

б) плоскость $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$.

1.2 Матрица линейного оператора

Пусть f – линейный оператор векторного пространства V, причём $\dim V = n$. Рассмотрим некоторый базис $v_1, v_2, \ldots, v_n$ векторного пространства V. Подействуем линейным оператором f на базисные векторы. Получим систему векторов $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)$.

Согласно определению базиса, каждый из полученных векторов можно представить в виде линейной комбинации базисных векторов, т.е.

$$\begin{cases} f(v_1) = \alpha_{11}v_1 + \alpha_{21}v_2 + \ldots + \alpha_{n1}v_n \\ f(v_2) = \alpha_{12}v_1 + \alpha_{22}v_2 + \ldots + \alpha_{n2}v_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(v_n) = \alpha_{1n}v_1 + \alpha_{2n}v_2 + \ldots + \alpha_{nn}v_n \end{cases}. \qquad (1.2.1)$$

Определение. *Матрицей линейного оператора* f в базисе $v_1, v_2, \ldots, v_n$ называется матрица, столбцами которой являются координатные столбцы образов базисных векторов $(f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n))$.

***Обозначение*:**

$$M(f) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$ – матрица линейного оператора.

Выводы.

1. Таким образом, каждому линейному оператору соответствует матрица линейного оператора в данном базисе.

2. Справедливо и обратное: всякой квадратной матрице порядка n соответствует линейный оператор n-мерного векторного пространства.

3. Равенство (1.2.1) можно записать в следующей матричной форме:

$$(f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)) = (v_1, v_2, \ldots, v_n)M(f). \qquad (1.2.2)$$

Пример 2.

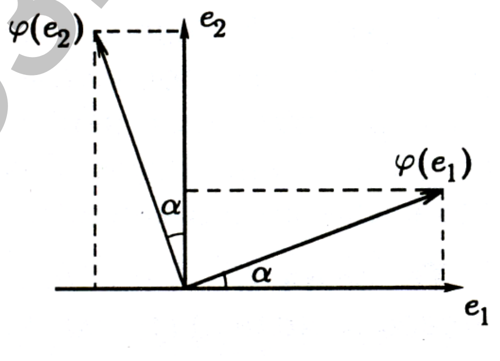

Рис. 2

В пространстве E^2 выберем ортонормированный базис e_1, e_2. Пусть φ – поворот на угол α (см. пример 1, рис. 2). Тогда

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = e_1\cos\alpha + e_2\sin\alpha, \\ \varphi(e_2) = -e_1\sin\alpha + e_2\cos\alpha. \end{cases}$$

Следовательно, матрица линейного отображения $\varphi : V \to U$ есть

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в данном случае $V = U$ и мы использовали один и тот же базис e_1, e_2. в двух качествах: как базис пространства V и как базис пространства U, хотя, согласно определению, не обязаны были это делать.

Задача 1.

Является ли линейным оператором отображение φ векторного пространства A_2 (двумерных строк действительных чисел над полем $\mathbb{R}$), переводящее строку (x_1, x_2) в строку:

а) $(k\,x_1, k\,x_2)$;

б) (x_1+k, x_2+k),

где k — фиксированное действительное число? В случае, если φ — линейный оператор, указать геометрическую интерпретацию и найти его матрицу в базисе $e_1=(1, 0)$, $e_2=(0, 1)$.

Решение.

По определению φ есть линейный оператор векторного пространства L над полем $\mathbb{R}$, если выполняются два условия:

$$1)\ c\varphi(a)= \varphi(ca),\ 2)\ \varphi(a + b) = \varphi(a)+ \varphi(b)$$

для любых $c\in\mathbb{R}$, a, $b\in L$. Проверим эти условия в наших случаях *а*) и *б*).

Пусть $a=(a_1, a_2)$ и $b=(b_1, b_2)$ — произвольные строки из A_2. Тогда в случае *а*) имеем:

$$c\varphi(a)= c(ka_1; ka_2)=(cka_1; cka_2)= (kca_1; kca_2)= \varphi(ca);$$

$$\varphi(a + b) = (k(a_1 +b_1); k(a_2 +b_2)) = (ka_1; ka_2)+(kb_1; kb_2) = \varphi(a)+ \varphi(b).$$

Таким образом, в случае *а*) требования 1) — 2) выполнены, и, следовательно, оператор φ — линейный оператор векторного пространства L.

Если геометрическим образом строки (a_1, a_2) считать радиус-вектор с концом в точке (a_1, a_2), то φ будет растяжением с коэффициентом растяжения $|k|$ с одновременным зеркальным отражением от начала координат в случае, когда $k < 0$.

При $k = 0$ образом каждой строки будет нулевая строка, т.е. φ будет нулевым оператором векторного пространства A_2.

Найдем матрицу этого линейного оператора. Так как $(x_1, x_2)=x_1e_1+x_2e_2$, то x_1, x_2 являются координатами вектора (x_1, x_2) в базисе e_1, e_2. Теперь, учитывая, что

$$\varphi(e_1) = (k, 0) = ke_1+0e_2,$$
$$\varphi(e_2) = (0, k) = 0e_1+ke_2,$$

получим

$$A=\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}.$$

В случае *б*) имеем:

$$c\varphi(a)= c(a_1+k,\ a_2+k)=(c(a_1+k),\ c(a_2+k)),$$
$$\varphi(ca) = (ca_1+k,\ ca_2+k)$$

и

$$c\varphi(a)\neq \varphi(ca) \text{ при } c\neq 1,$$

если $k\neq 0$. Следовательно, при $k\neq 0$ φ не является линейным оператором векторного пространства A_2. При $k = 0$ отображение φ тождественно, т.е. $\varphi(a)=a$, а поэтому является линейным оператором векторного пространства A_2.

Ответ: *а*) является, матрица линейного оператора $A=\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$;

б) при $k\neq 0$ отображение φ не является линейным оператором векторного пространства A_2; при $k = 0$ отображение φ является линейным оператором векторного пространства A_2.

Задача 2.

Найти матрицу тождественного оператора E в n-мерном векторном пространстве A_n.

Решение.

Тождественный оператор не меняет базисных векторов, т.е. $e_1' = e_1,\ e_2' = e_2,\ \ldots, e_n' = e_n$. Поэтому

$$\begin{cases} e_1' = 1e_1 + 0e_2 + \ldots + 0e_n, \\ e_2' = 0e_1 + 1e_2 + \ldots + 0e_n, \\ \quad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\ e_n' = 0e_1 + 0e_2 + \ldots + 1e_n. \end{cases}$$

Следовательно, матрицей линейного оператора E служит единичная матрица n-го порядка.

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: E – единичная матрица n-го порядка.

Задача 3.

В четырехмерном векторном пространстве рассматривается линейный оператор A**.** Записать линейный оператор A

а) в матричной форме (1.2.2);

б) в координатной форме,

если $Ae_1=e_3+e_4$, $Ae_2=e_1+e_4$, $Ae_3=e_1+e_2$, $Ae_4=e_2+e_3$.

Решение.

Согласно условию, имеем:

$$Ae_1=e_3+e_4=(0,0,1,0)+(0,0,0,1)=(0,0,1,1);$$
$$Ae_2=e_1+e_4=(1,0,0,1);$$
$$Ae_3=e_1+e_2=(1,1,0,0);$$
$$Ae_4=e_2+e_3=(0,1,1,0).$$

Поэтому матрица линейного оператора A имеет вид:

$$M(A)=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\0&0&1&1\\1&0&0&1\\1&1&0&0\end{pmatrix}.$$

а) в матричной форме (1.2.2) линейный оператор A задается следующим образом:

$$(Ae_1, Ae_2, Ae_3, Ae_4)=(e_1, e_2, e_3, e_4)M(A)$$

или

$$(Ae_1, Ae_2, Ae_3, Ae_4)=(e_1, e_2, e_3, e_4)\begin{pmatrix}0&1&1&0\\0&0&1&1\\1&0&0&1\\1&1&0&0\end{pmatrix}.$$

б) линейный оператор A в координатной форме записывается так:

$$\begin{cases}x_1'=x_2+x_3,\\x_2'=x_3+x_4,\\x_3'=x_1+x_4,\\x_4'=x_1+x_2.\end{cases}$$

Ответ: *а*) $(Ae_1, Ae_2, Ae_3, Ae_4)=(e_1, e_2, e_3, e_4)\begin{pmatrix}0&1&1&0\\0&0&1&1\\1&0&0&1\\1&1&0&0\end{pmatrix}$;

$$б)\ \begin{cases} x_1' = x_2 + x_3, \\ x_2' = x_3 + x_4, \\ x_3' = x_1 + x_4, \\ x_4' = x_1 + x_2. \end{cases}$$

Задача 4.

Известно, что

$a_1 = (0, 0, 1), \quad a_2 = (0, 1, 1), \quad a_3 = (1, 1, 1)$

$b_1 = (2, 3, 5), \quad b_2 = (1, 0, 0), \quad b_3 = (0, 1, -1)$ —

векторы векторного пространства *L*, заданные своими координатами в некотором базисе e_1, e_2, e_3. В том же базисе найти матрицу линейного оператора φ, переводящего векторы a_1, a_2, a_3 соответственно в векторы b_1, b_2, b_3.

Решение.

Система векторов a_1, a_2, a_3 — ступенчатая, а потому линейно независимая, следовательно (см. задачу 4 из п. 1.1.), требуемое отображение φ существует и единственно. Для нахождения матрицы линейного оператора φ в базисе e_1, e_2, e_3 нужно образы базисных векторов $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3)$ линейно выразить через векторы базиса e_1, e_2, e_3.

Выразим сначала векторы e_1, e_2, e_3 через векторы a_1, a_2, a_3. По условию

$$\begin{cases} a_1 = \qquad\qquad e_3, \\ a_2 = \qquad e_2 + e_3, \\ a_3 = e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

Откуда

$$\begin{cases} e_1 = -a_2 + a_3, \\ e_2 = -a_1 + a_2, \\ e_3 = \qquad\quad a_1. \end{cases}$$

Следовательно

$$\varphi(e_1) = -\varphi(a_2) + \varphi(a_3) = -b_2 + b_3 = -e_1 + (e_2 - e_3) = -e_1 + e_2 - e_3,$$

$$\varphi(e_2) = -\varphi(a_1) + \varphi(a_2) = -b_1 + b_2 = -(2e_1 + 3e_2 + 5e_3) + e_1 = -e_1 - 3e_2 - 5e_3,$$

$$\varphi(e_3) = \varphi(a_1) = b_1 = 2e_1 + 3e_2 + 5e_3.$$

Записывая последние три равенства в матричной форме, получаем:

$$(\varphi(e_1),\ \varphi(e_2),\ \varphi(e_3))=(e_1\ e_2\ e_3)\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 1 & -3 & 3\\ -1 & -5 & 5\end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 1 & -3 & 3\\ -1 & -5 & 5\end{pmatrix}$$

будет искомой матрицей отображения φ в базисе e_1, e_2, e_3.

Результат можно проверить, пользуясь тем, что координатные столбцы X и Y любого вектора x и его образа $y=\varphi(x)$ связаны равенством $Y=AX$.

Например, для векторов a_1 и $b_1=\varphi(a_1)$ имеем верное равенство

$$\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 1 & -3 & 3\\ -1 & -5 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Ответ: $A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 1 & -3 & 3\\ -1 & -5 & 5\end{pmatrix}.$

Задача 5.

Линейный оператор совокупности всех векторов на плоскости xOy заключается в повороте каждого вектора против часовой стрелки на угол α. Найти матрицу этого линейного оператора в координатной форме.

Решение.

Так как $\begin{cases} Ai = \ \ i\cos\alpha + j\sin\alpha, \\ Aj = -i\sin\alpha + j\cos\alpha, \end{cases}$

то матрица линейного оператора

$$M(A)=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}.$$

Таким образом, рассматриваемый линейный оператор имеет вид:

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha, \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha, \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{cases}$

Задача 6.

Показать, что дифференцирование является линейным оператором векторного пространства многочленов степени $\le n-1$ с одним неизвестным (вместе с нулевым многочленом) над полем $\mathbb{R}$ и найти матрицу линейного оператора в базисе

$$1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}.$$

Решение.

Пусть $f'(x)$ есть производная многочлена $f(x)$. Так как

$(cf(x))' = c\,f'(x)$ и $(f_1(x) + f_2(x))' = f_1'(x) + f_2'(x)$,

то рассматриваемый оператор является линейным. Найдем его матрицу A. Так как

$$\begin{cases} 1' = 0 = 0\cdot 1 + 0\cdot x + \ldots + 0\cdot x^{n-1}, \\ x' = 1 = 1\cdot 1 + 0\cdot x + \ldots + 0\cdot x^{n-1}, \\ (x^2)' = 2x = 0\cdot 1 + 2\cdot x + \ldots + 0\cdot x^{n-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \ \ldots\ldots\ \ \ldots\ldots \\ (x^{n-1})' = (n-1)x^{n-2} = 0\cdot 1 + 0\cdot x + \ldots + (n-1)x^{n-2} + 0\cdot x^{n-1}, \end{cases}$$

то

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$

Упражнения

1. Выяснить, является ли линейным оператор f: $E_2 \to E_2$, и в случае линейности оператора найти его матрицу в базисе i, j, если для любого вектора $x \in E_2$:

а) $f(x) = \lambda x$, где λ — фиксированное вещественное число;

б) $f(x)$ — вектор, симметричный вектору x относительно оси ординат;

в) $f(x)$ — вектор, симметричный вектору x относительно начала координат;

г) $f(x)=x+a$, где a — фиксированный вектор этого пространства;

д) $f(x)$ — ортогональная проекция вектора x на биссектрису первого и третьего координатных углов.

2. Показать, что отображение φ пространства $\mathbb{R}^3$ в себя, переводящее любой вектор $x=(x_1, x_2, x_3)$ в вектор $\varphi(x)=(x_2+x_3,\ 2x_1+x_3,\ 3x_1-x_2+x_3)$, является линейным оператором. Найти его матрицу в базисе

$$e_1=(1, 0, 0),\ e_2=(0, 1, 0),\ e_3=(0, 0, 1).$$

3. Рассматривается векторное пространство, состоящее из векторов $x=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3+x_4e_4$, где x_1, x_2, x_3, x_4 – всевозможные действительные числа. Доказать, что отображение A, определяемое равенством $Ax=x_2e_1+x_3e_2+x_4e_3+x_1e_4$, является линейным оператором, и найти его матрицу.

4. Доказать, что если $a=(1,2,3)$ — вектор из евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ над полем $\mathbb{R}$ и для любого $x=(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ $\varphi(x)=(x,a)a=(x_1+2x_2+3x_3)\,a$, то отображение φ является линейным оператором. Найти его матрицу:

а) в базисе $e_1=(1, 0, 0)$, $e_2=(0, 1, 0)$, $e_3=(0, 0, 1)$;

б) в базисе $b_1=(1, 0, 1)$, $b_2=(2, 0, -1)$, $b_3=(1, 1, 0)$.

5. Доказать, что если $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ — некоторая матрица из векторного пространства M_2 квадратных матриц порядка 2 над полем P, то отображения φ_1 и φ_2 пространства M_2, определяемые формулами $\varphi_1(A)=A\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ и $\varphi_2(A)=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}A$, являются линейными операторами. Найти матрицы этих линейных операторов в базисе

$$e_{1_1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Линейный оператор пространства $\mathbb{R}^4$ переводит векторы $a_1=(0, 1, -1, 2)$, $a_2=(1, 2, -3, 1)$, $a_3=(0, 0, 0, 1)$, $a_4=(-2, 0, 1, -1)$ соответственно в векторы $b_1=(7,6,-11,-10)$, $b_2=(0,7,-8,1)$, $b_3=(4, 2,-3,-6)$, $b_4=(-1, 3, -3, 9)$. Найти матрицу этого оператора в базисе a_1, a_2, a_3, a_4.

7. Найти матрицу линейного оператора, переводящего любой вектор $x=(a_1, a_2, a_3, a_4)$ в вектор y, заданный координатами в том же базисе, что и вектор x, если:

а) $y=(2a_1+3a_2-a_3+a_4,\ a_2+a_3,\ a_1, a_2)$;

б) $y=(a_2-a_3+a_4,\ a_1+a_4,\ a_2+2a_3-a_4,\ a_3+a_4)$;

в) $y=(a_1-a_4,\ a_2+a_3+a_4,\ a_1-2a_2+a_3,\ 2a_1+a_2-2a_3+3a_4)$.

8. Дан линейный оператор f: $\mathbb{R}_{2\times 2}\to\mathbb{R}_{2\times 2}$, переводящий любую матрицу $A\in\mathbb{R}_{2\times 2}$ в вектор

$$f(A)=A\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}.$$

Найти матрицу этого оператора в базисе

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

9. Найти в базисе i, j, k матрицу линейного оператора f: $E_3\to E_3$, переводящего каждый вектор x в вектор $y=[x, a]$, если:

а) $a=2i+j-k$; *б*) $a=-i+2j+3k$.

10. Найти в ортонормированном базисе e_1, e_2, e_3, e_4 матрицу линейного оператора f евклидова пространства, переводящего каждый вектор x в вектор $f(x)=(a, x)a$, если:

а) $a = e_1+ e_2+ e_3+ e_4$;

б) $a =2e_1-3e_2 + 4e_3- e_4$.

11. Пусть $a_1=(2, 0, 3)$, $a_2=(4, 1, 5)$, $a_3=(3, 1, 2)$, $b_1=(1, 2, -1)$, $b_2=(4, 5, -2)$, $b_3=(1, -1, 1)$ — векторы пространства L, заданные своими координатами в некотором базисе e_1, e_2, e_3. Определить, существует ли линейный оператор, переводящий векторы a_1, a_2, a_3 соответственно в векторы b_1, b_2, b_3, и если существует, то найти его матрицу в базисе e_1, e_2, e_3.

12. Пусть φ — ортогональное проектирование трехмерного пространства V^3 на ось, образующую равные углы с осями прямоугольной системы координат, а e_1, e_2, e_3 — единичные векторы, направленные по осям координат. Найти матрицу линейного оператора φ в базисе e_1, e_2, e_3.

13. Доказать, что если e_1, e_2, e_3 — векторы, направленные по осям пространственной системы координат, то проектирование трехмерного пространства на координатную ось вектора e_1 параллельно координатной плоскости векторов e_2 и e_3 является линейным оператором. Найти его матрицу в базисе e_1, e_2, e_3.

1.3 Связь между координатами вектора и его образа

Пусть вектор x имеет координаты x_1, x_2, …, x_n в базисе e_1, e_2, …, e_n , т.е.

$$x = x_1e_1+x_2e_2+\ldots+x_ne_n.$$

Рассмотрим линейный оператор f с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Подействуем линейным оператором f на вектор x. Найдем координаты $y_1, y_2, \ldots, y_n$ вектора $f(x)$ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Имеем

$$f(x)= y_1e_1+y_2e_2+\ldots+y_ne_n. \qquad (1.3.1)$$

С другой стороны,

$$f(x)= f(x_1e_1+x_2e_2+\ldots+x_ne_n) = x_1 f(e_1)+x_2 f(e_2)+\ldots+x_n f(e_n)=$$
$$= x_1(\alpha_{11} e_1+\alpha_{21} e_2+\ldots+\alpha_{n1} e_n)+ x_2(\alpha_{12} e_1+\alpha_{22} e_2+\ldots+\alpha_{n2} e_n)+\ldots+$$
$$+ x_n(\alpha_{1n} e_1+\alpha_{2n} e_2+\ldots+\alpha_{nn} e_n)=(\alpha_{11} x_1+\alpha_{12} x_2+\ldots+\alpha_{1n} x_n)e_1+$$
$$+(\alpha_{21}x_1+\alpha_{22} x_2+\ldots+\alpha_{2n} x_n)e_2+\ldots+(\alpha_{n1} x_1+\alpha_{n2} x_2+\ldots+\alpha_{nn} x_n)e_n.$$

Сравнивая последнее выражение с равенством (1.3.1), получим

$$\begin{cases} y_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n, \\ y_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{nn}x_n. \end{cases} \qquad (1.3.2)$$

Формулы (1.3.2) можно записать в матричном виде:

$$Y=AX, \qquad (1.3.3)$$

где

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Обозначение: если $y=f(x)$, где f — линейный оператор, имеющий в некотором базисе матрицу A, то будем писать

$$y=Ax.$$

Замечания.

1. Если учесть уравнение (1.3.3) , то условия 1 и 2, содержащиеся в определении линейного оператора, можно записать в виде

$$A(X_1+ X_2) = AX_1+AX_2, \quad A(\lambda X)= \lambda (AX).$$

2. Если переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ связаны с переменными $y_1, y_2, \ldots, y_n$ соотношениями (1.3.2), то будем говорить, что задано *линейное преобразование переменных с матрицей* A, переводящее переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в переменные $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Оно обладает теми же свойствами, что и линейный оператор векторного пространства.

Задача 1.

В двумерном евклидовом пространстве дан ортонормированный базис $e = (e_1, e_2)$ и линейный оператор φ, который вектор e_1 растягивает вдвое и поворачивает на угол π, а вектор e_2 поворачивает по часовой стрелке на угол $\frac{\pi}{2}$. Найти образ вектора $a = 2e_1+3e_2$ под действием φ.

Решение.

I способ. Из геометрических соображений устанавливаем, что $\varphi(e_1)=-2e_1$, $\varphi(e_2)=e_1$. Так как линейный оператор переводит линейную комбинацию векторов в линейную комбинацию их образов с теми же коэффициентами, то $\varphi(a) = 2\varphi(e_1)+3\varphi(e_2) = -4e_1+3e_1 = -e_1$, т.е. в базисе e вектор $\varphi(a)$ имеет координаты $(-1, 0)$.

II способ. Найдем матрицу A оператора φ в базисе e. Для этого образы базисных векторов выразим через базис e:

$$\varphi(e_1)=-2e_1=-2e_1+0e_2;\ \varphi(e_2)=e_1 = e_1+ 0e_2.$$

В более краткой записи:

$$\varphi(e)=(e_1, e_2)\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=eA,$$

где $A=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

В базисе e вектор a по условию имеет координаты $(2, 3)$. Поэтому $\varphi(a)$ имеет координаты, равные произведению матрицы линейного оператора в базисе e на столбец координат вектора a в том же базисе:

$$A\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

т.е. $\varphi(a)=e\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}=(e_1, e_2)\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}=-e_1$.

Ответ: $\varphi(a)=-e_1$.

Задача 2.

Дана матрица

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

линейного оператора f в базисе e_1, e_2, e_3. Найти $f(x)$, если $x=2e_1-e_2+3e_3$.

Решение.

I способ. Известно, что координаты образа $f(x)$ и прообраза x связаны соотношением $Y=AX$, где Y — столбец из координат образа, X — столбец из координат прообраза. В данном случае

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 15 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, $f(x)= 9e_1+3e_2+15e_3$.

II способ. Используя определение матрицы оператора f в базисе e_1, e_2, e_3, имеем: $f(e_1) = e_1+2e_2$, $f(e_2) = -e_1+e_2$, $f(e_3) = 2e_1+5e_3$. Так как оператор f линейный, то

$$f(x)=f(2e_1-e_2+3e_3)=2f(e_1)-f(e_2)+3f(e_3).$$

Подставляя $f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$ в последнее равенство, находим

$$f(x)=2(e_1+2e_2)-(-e_1+e_2)+3(2e_1+5e_3)$$

или $f(x)= 9e_1+3e_2+15e_3$.

Ответ: $f(x)= 9e_1+3e_2+15e_3$.

Задача 3.

Пусть линейный оператор φ пространства $\mathbb{R}^n$ переводит линейно независимые вектора $a_1, a_2,\ldots, a_n$ в векторы $b_1, b_2, \ldots, b_n$ соответственно. Доказать, что матрица A_e этого оператора в некотором базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ равна BA^{-1}, где столбцы матриц A и B состоят из координат векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и, соответственно, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Решение.

Пусть X_i — столбец координат вектора a_i в базисе $e_1, e_2,\ldots, e_n$,

Y_i — столбец координат вектора b_i в базисе $e_1, e_2,\ldots, e_n$.

Так как по условию $b_i = \varphi(a_i)$, то по формуле (1.3.3) получаем:

$$Y_1=A_e X_1,\ Y_2=A_e X_2,\ \ldots,\ Y_n=A_e X_n.$$

Отсюда следует, что матрица, составленная из столбцов $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ равна произведению A_e на матрицу, составленную из столбцов $X_1, X_2, \ldots, X_n$, т.е.

$$B=A_e A.$$

А так как система векторов $a_1, a_2,\ldots, a_n$ по условию линейно независима, то матрица A невырожденная и, следовательно, обратима. Значит,

$$A_e = BA^{-1}.$$

Упражнения

В задачах 1–11 даны в некотором базисе матрица A линейного оператора f и вектор x. Найти в том же базисе координаты вектора $y = f(x)$:

1. $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $x = e_1$.

2. $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $x = e_1$.

3. $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $x = (2, -1, 3)$.

4. $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $x = (1, 1, -1)$.

5. $A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $x = 2e_1+4e_2-e_3$.

6. $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $x = -e_1+2e_2+e_3$.

7. $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $x = 2e_1+e_2-e_3+e_4$.

8. $A=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $x = (2, -1)$.

9. $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $x = (3, 2)$.

10. $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $x = (-1,7)$.

11. $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $x = (1, 2, -1, 0, 3)$.

В задачах 12—15 даны в некотором базисе матрица A линейного оператора f и вектора x и y. Найти в том же базисе координаты вектора $f(\alpha x+\beta y)$:

12. $A=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $x = (2, -1)$, $y = (3, 2)$, $\alpha = 1$, $\beta = 2$.

13. $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $x = (-1, 1, -1)$, $y = (-1, 1, -1)$, $\alpha = 2$, $\beta = -3$.

14. $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $x = (2, 0, -1)$, $y = (1, 2, 3)$, $\alpha = 3$, $\beta = 1$.

15. $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $x=(-1,0,2,0)$, $y=(0,2,0,1)$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$.

16. Дан линейный оператор f: $E_2 \to E_2$ с матрицей

$$A=\begin{bmatrix} ch\,\varphi & sh\varphi \\ sh\varphi & ch\,\varphi \end{bmatrix} \ (\varphi = \text{const},\ \varphi \in \mathbb{R})$$

в базисе i, j. Доказать, что векторы, параллельные прямым $y=x$, $y=-x$, переходят в векторы, параллельные этим прямым.

1.4 Связь между матрицами линейного оператора в различных базисах

Пусть V − n-мерное векторное пространство над полем F. Возьмем в этом пространстве два базиса:

$$e_1, e_2, \ldots, e_n, \qquad (1.4.1)$$

$$e_1', e_2', \ldots, e_n'. \qquad (1.4.2)$$

Разложим вектора базиса (1.4.2) по векторам базиса (1.4.1):

$$\begin{cases} e_1' = \alpha_{11}e_1 + \alpha_{21}e_2 + \ldots + \alpha_{n1}e_n \\ e_2' = \alpha_{12}e_1 + \alpha_{22}e_2 + \ldots + \alpha_{n2}e_n \\ \quad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\ e_n' = \alpha_{1n}e_1 + \alpha_{2n}e_2 + \ldots + \alpha_{nn}e_n \end{cases}. \qquad (1.4.3)$$

Определение 2. Матрица, столбцами которой являются коэффициенты разложения (1.4.3) векторов базиса (1.4.2) по векторам базиса (1.4.1) называется *матрицей перехода* от базиса (1.4.1) к базису (1.4.2).

Обозначение: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ − матрица перехода от базиса (1.4.1) к базису (1.4.2).

Пусть вектор x имеет следующие разложения в базисах (1.4.1) и (1.4.2) соответственно:

$$x=x_1e_1+x_2e_2+\ldots+x_ne_n,$$
$$x = x_1'e_1' + x_2'e_2' + \ldots + x_n'e_n'.$$

Теорема 1 (связь между координатами вектора относительно различных базисов). Столбец координат вектора x в базисе (1.4.2) получается умножением слева столбца координат вектора x в базисе (1.4.1) на матрицу, обратную матрице перехода от базиса (1.4.1) к базису (1.4.2), т.е. если

$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ − столбец координат вектора x в базисе (1.4.1), $X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$ − столбец координат вектора x в базисе (1.4.2), A − матрица перехода от базиса (1.4.1) к базису (1.4.2), то

$$X' = A^{-1}X.$$

Заметим, что матрица A^{-1} является матрицей перехода от базиса (1.4.2) к базису (1.4.1).

Теорема 2. Пусть f — линейный оператор векторного пространства V и $M(f)$ — матрица линейного оператора f в базисе (1.4.1). Тогда матрица $M'(f)$ линейного оператора f в базисе (1.4.2) имеет вид

$$M'(f) = A^{-1}M(f)A,$$

где A — матрица перехода от базиса (1.4.1) к базису (1.4.2).

Следствие 1. Если линейный оператор имеет в некотором базисе невырожденную матрицу, то и в другом любом базисе матрица этого оператора является невырожденной.

Следствие 2. Ранг матрицы линейного оператора f векторного пространства V не изменяется при переходе от одного базиса к другому.

Пример 3. Поворот на угол α является линейным оператором пространства E^2 (см. примеры 1 и 2). В примере 2 мы доказали, что его матрицей в ортонормированном базисе e_1, e_2 является матрица

$$M(\varphi)=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}.$$

В частности, поворот на $\dfrac{\pi}{2}$ имеет в таком базисе матрицу

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Найдем его матрицу A' в базисе $e_1'=2e_2$, $e_2'=e_1-e_2$.

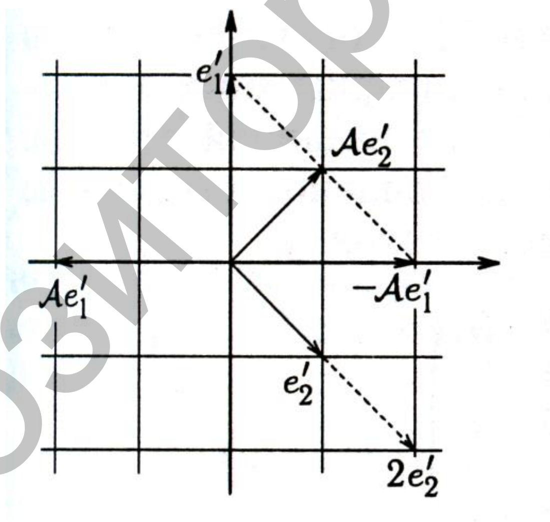

Рис. 3

Как видно из рисунка 3,

$$\begin{cases}\varphi(e_1')=-e_1'-2e_2',\\ \varphi(e_2')=\quad e_1'+e_2'.\end{cases}$$

Это означает, что

$$A'=\begin{pmatrix}-1 & 1 \\ -2 & 1\end{pmatrix}.$$

С другой стороны, согласно теореме 2, найдем матрицу A' по формуле

$$A' = C^{-1}AC,$$

где C – матрица перехода от базиса e_1, e_2 к базису e_1', e_2'.

Согласно заданию базиса e_1', e_2', получаем

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Откуда

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$A' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 1.

Дана матрица $T=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ перехода от базиса e_1, e_2 к базису e_1', e_2'. Найти координаты вектора $a=4e_1+e_2$ в базисе e_1', e_2'.

Решение.

Известно, что $X' = T^{-1}X$, где X и X' — матрицы-столбцы из координат вектора a соответственно в базисах e_1, e_2 и e_1', e_2'. Так как

$$T^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix},$$

то

$$X' = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 10 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, координатами вектора a в базисе e_1', e_2' будут $\frac{5}{4}, -\frac{1}{8}$.

Ответ: $\frac{5}{4}, -\frac{1}{8}$.

Задача 2.

Найти матрицу перехода от базиса e_1, e_2, e_3 к базису e_1', e_2', e_3' пространства A_3, и обратно, если

$e_1=(1, 2, 1)$, $e_1'=(3, 1, 4)$,

$e_2=(2, 3, 3)$, $e_2'=(5, 2, 1)$,

$e_3=(3, 7, 1)$, $e_3'=(1, 1, -6)$.

Решение.

Найдем линейные выражения векторов $e_1',\ e_2', e_3'$ через векторы e_1, e_2, e_3. Так как по условию векторы e_1, e_2, e_3 образуют базис пространства A_3, то эти линейные представления существуют и единственны. Следуя (1.4.3), составляем векторные уравнения:

$$\begin{cases} e_1' = \alpha_{11}e_1 + \alpha_{12}e_2 + \alpha_{31}e_3, & (1.4.4) \\ e_2' = \alpha_{12}e_1 + \alpha_{22}e_2 + \alpha_{32}e_3, & (1.4.5) \\ e_3' = \alpha_{13}e_1 + \alpha_{23}e_2 + \alpha_{33}e_3. & (1.4.6) \end{cases}$$

Запишем уравнение (1.4.4) в виде

$$\alpha_{11}(1, 2, 1)+ \alpha_{21}(2, 3, 3)+ \alpha_{31}(3, 7, 1)= (3, 1, 4), \text{ т.е.}$$

$$(\alpha_{11}+2\alpha_{21}+3\alpha_{31},\ 2\alpha_{11}+3\alpha_{21}+7\alpha_{31},\ \alpha_{11}+3\alpha_{21}+\alpha_{31})=(3, 1, 4).$$

Согласно определению равных векторов получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_{11} + 2\alpha_{21} + 3\alpha_{31} = 3, \\ 2\alpha_{11} + 3\alpha_{21} + 7\alpha_{31} = 1, \\ \alpha_{11} + 3\alpha_{21} + \alpha_{31} = 4. \end{cases} \quad (1.4.7)$$

Аналогично уравнения (1.4.5) и (1.4.6) дадут соответственно следующие системы уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_{12} + 2\alpha_{22} + 3\alpha_{32} = 5, \\ 2\alpha_{12} + 3\alpha_{22} + 7\alpha_{32} = 2, \\ \alpha_{12} + 3\alpha_{22} + \alpha_{32} = 1. \end{cases} \quad (1.4.8)$$

$$\begin{cases} \alpha_{13} + 2\alpha_{23} + 3\alpha_{33} = 1, \\ 2\alpha_{13} + 3\alpha_{23} + 7\alpha_{33} = 1, \\ \alpha_{13} + 3\alpha_{23} + \alpha_{33} = -6. \end{cases} \quad (1.4.9)$$

Левые части систем (1.4.7), (1.4.8), (1.4.9) отличаются лишь обозначениями неизвестных, а правые части различны. Поэтому процесс отыскания решений методом Гаусса можно записать одновременно для всех систем по следующей матричной схеме:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 4 & 1 & -6 \end{array}\right) \begin{matrix} \times(-2)\ \ \times(-1) \\ + \\ + \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & -8 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -4 & -7 \end{array}\right) \begin{matrix} + \\ \times(2) \\ + \end{matrix} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & -7 & -11 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -12 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -27 & -71 & -41 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & 20 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 12 & 8 \end{array}\right).$$

Заметим, что 2-ю и 3-ю строки мы умножили на (-1).

Отсюда

$$\begin{cases} e_1' = -27e_1 + 9e_2 + 4e_3, \\ e_2' = -71e_1 + 20e_2 + 12e_3, \\ e_3' = -41e_1 + 9e_2 + 8e_3. \end{cases}$$

Поэтому матрица перехода от базиса e_1, e_2, e_3 к базису e_1', e_2', e_3' имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}.$$

Обратная к ней матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 52 & 76 & 181 \\ -36 & -52 & -126 \\ 28 & 40 & 99 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 19 & \dfrac{181}{4} \\ -9 & -13 & -\dfrac{63}{2} \\ 7 & 10 & \dfrac{99}{4} \end{pmatrix}$$

является матрицей перехода от базиса e_1', e_2', e_3' к базису e_1, e_2, e_3.

Ответ: $A = \begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}$ – матрица перехода от базиса e_1, e_2, e_3 к базису e_1', e_2', e_3';

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 13 & 19 & \dfrac{181}{4} \\ -9 & -13 & -\dfrac{63}{2} \\ 7 & 10 & \dfrac{99}{4} \end{pmatrix}$ – матрица перехода от базиса e_1', e_2', e_3' к базису e_1, e_2, e_3.

Задача 3.

Даны два базиса e_1, e_2 и e_1', e_2' векторного пространства и матрица $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ линейного оператора f в базисе e_1, e_2. Найти матрицу этого оператора в базисе e_1', e_2', если $e_1' = e_1 - e_2$, $e_2' = 3e_1 - 4e_2$.

Решение.

I способ. Известно, что если A — матрица оператора f в базисе e_1, e_2, а T — матрица перехода от базиса e_1, e_2 к базису e_1', e_2', то матрица B оператора f в базисе e_1', e_2' находится по формуле $B=T^{-1}AT$. В нашем случае

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}, \ T^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 17 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

II способ. Для того, чтобы найти матрицу оператора f в базисе e_1', e_2', надо сначала найти образы $f(e_1)$, $f(e_2)$ этих векторов. Используя линейность оператора, получим:

$$f(e_1') = f(e_1 - e_2) = f(e_1) - f(e_2),$$
$$f(e_2') = f(3e_1 - 4e_2) = 3f(e_1) - 4f(e_2).$$

Так как в столбцах матрицы A оператора f в базисе e_1, e_2 расположены координаты $f(e_1)$, $f(e_2)$ в базисе e_1, e_2, то $f(e_1) = e_1 + e_2$, $f(e_2) = -2e_1 + 3e_2$. Следовательно,

$$f(e_1') = (e_1 + e_2) - (-2e_1 + 3e_2),$$
$$f(e_2') = 3(e_1 + e_2) - 4(-2e_1 + 3e_2)$$

или $f(e_1') = 3e_1 - 2e_2$, $f(e_2') = 11e_1 - 9e_2$.

Из системы $\begin{cases} e_1' = e_1 - e_2, \\ e_2' = 3e_1 - 4e_2. \end{cases}$ находим $e_1 = 4e_1' - e_2'$, $e_2 = 3e_1' - e_2'$. Следовательно, $f(e_1') = 3(4e_1' - e_2') - 2(3e_1' - e_2')$, $f(e_2') = 11(4e_1' - e_2') - 9(3e_1' - e_2')$ или $f(e_1') = 6e_1' - e_2'$, $f(e_2') = 17e_1' - 2e_2'$. Таким образом, $\begin{bmatrix} 6 & 17 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ – матрица оператора f в базисе e_1', e_2'.

Ответ: $B = \begin{bmatrix} 6 & 17 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ – матрица оператора f в базисе e_1', e_2'.

Задача 4.

Линейный оператор φ векторного пространства $\mathbb{R}^3$ имеет в базисе $e_1=(8, -6, 7)$, $e_2=(-16, 7, -13)$, $e_3=(9, -3, 7)$ матрицу

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу B того же оператора в базисе

$e_1'=(1, -2, 1)$, $e_2'=(3, -1, 2)$, $e_3'=(2, 1, 2)$.

Решение.

Сначала находим матрицу перехода от базиса e_1, e_2, e_3 к базису e_1', e_2', e_3'. Имеем по определению:

$$(e_1', e_2', e_3')=(e_1, e_2, e_3)T,$$

что равносильно матричному равенству

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & -16 & 9 \\ -6 & 7 & -3 \\ 7 & -13 & 7 \end{pmatrix}T.$$

Выражая отсюда T ,получим:

$$T=\begin{pmatrix} 8 & -16 & 9 \\ -6 & 7 & -3 \\ 7 & -13 & 7 \end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Найдем обратную к T матрицу:

$$T^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицу B данного отображения в базисе e_1', e_2', e_3' находим по известной формуле:

$$B=T^{-1}AT=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$

Задача 5.

В евклидовом пространстве на плоскости векторы i и j образуют ортонормированный базис. Векторы $u_1=3i+4j$, $u_2=-2i+7j$ также образуют базис. Проверить это и найти в базисе $u=(u_1, u_2)$ матрицу оператора (преобразования) симметрии относительно оси Ox (на ней лежит вектор i).

Решение.

Пусть $e=(i, j)$. Тогда $u=eT$, где $T=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ — матрица перехода.

Очевидно, что T — невырожденная матрица, т.е. u — базис. Пусть φ — оператор симметрии относительно оси Ox. Тогда из геометрических соображений $\varphi(i)=i$, $\varphi(j)=-j$, т.е. $\varphi(e)=eA$, где $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Пусть $\varphi(u)=uB$. Тогда

$$B=T^{-1}AT=\frac{1}{21+8}\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}=\frac{1}{29}\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{29}\begin{bmatrix} 13 & -28 \\ -24 & -13 \end{bmatrix}.$$

Ответ: $B=\frac{1}{29}\begin{bmatrix} 13 & -28 \\ -24 & -13 \end{bmatrix}$.

Упражнения

1. Дана матрица перехода $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ от базиса e_1, e_2 к базису e_1', e_2'. Найти координаты векторов e_1', e_2' в базисе e_1, e_2.

2. Дана матрица перехода $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ от базиса e_1, e_2, e_3 к базису e_1', e_2', e_3'. Найти координаты вектора e_2' в базисе e_1, e_2, e_3.

3. Найти матрицу перехода от базиса e_1, e_2, e_3 к базису e_2, e_3, e_1.

4. Найти матрицу перехода от базиса e_1, e_2, e_3, e_4 к базису e_3, e_4, e_2, e_1.

5. Даны два базиса $a = e_1+e_2$, $b = -4e_1+e_2$ и $c = 5e_2$, $d = e_1+3e_2$. Является ли матрица $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ матрицей перехода от базиса a, b к базису c, d?

6. Даны два базиса $a = e_1+e_2-e_3$, $b=e_1+e_2$, $c=2e_1$ и $a_1=e_1-e_2$, $b_1=2e_1-e_2$, $c_1= e_1+e_2-e_3$. Является ли матрица $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ матрицей перехода от базиса

a, b, c к базису a_1, b_1, c_1?

7. Найти матрицу перехода от базиса e_1, e_2, e_3 к базису a, b, c и матрицу перехода от базиса a, b, c к базису e_1, e_2, e_3, если:

а) $a=2e_1+2e_3$, $b=3e_3-e_2$, $c=3e_1+e_3$;

б) $a= e_1+e_2+e_3$, $b=e_3$, $c= e_1+2e_2+3e_3$;

в) $a= e_1-3e_2+2e_3$, $b=2e_1+4e_2+ e_3$, $c=3e_2$;

г) $a=5e_2$, $b=2e_1+3e_2+e_3$, $c=2e_2 -e_1-2e_3$.

8. Линейный оператор φ в некотором базисе e_1, e_2, e_3, e_4 имеет матрицу

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу этого оператора в базисе:

а) e_1, e_2, e_4, e_3;

б) $a_1= e_1$, $a_2= e_1+ e_2$, $a_3= e_2+ e_3$, $a_4 = e_3+ e_4$;

в) $b_1= e_1$, $b_2= 3e_1+e_2$, $b_3= -5e_1+2e_2+ e_3$, $b_4=7e_1-3e_2+ 2e_3+ e_4$.

В задачах 9-19 даны два базиса $e_1, e_2,\dots, e_n$ и $e_1', e_2', \dots, e_n'$ векторного пространства и матрица A линейного оператора в базисе $e_1, e_2,\dots, e_n$. Найти матрицу этого оператора в базисе $e_1', e_2', \dots, e_n'$.

9. $A=\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $e_1' = e_2$, $e_2' = e_1+e_2$.

10. $A=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$, $e_1' = e_2-2e_1$, $e_2' = 2e_1-4e_2$.

11. $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -4\end{bmatrix}$, $e_1'=3e_1+2e_2$, $e_2'=2e_1+2e_2$.

12. $A=\begin{bmatrix}0 & -2 & 1\\ 3 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix}$, $e_1'=3e_1+e_2+2e_3$,

$e_2'=2e_1+e_2+2e_3$, $e_3'=-e_1+2e_2+5e_3$.

13. $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1 & 0\\ -3 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$, $e_1'=e_1$, $e_2'=e_1+e_2$, $e_3'=e_1+e_2+e_3$, $e_4'=e_1+e_2+e_3+e_4$.

14. $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$, $e_1'=2e_1+e_2-e_3$, $e_2'=2e_1-e_2+2e_3$, $e_3'=3e_1+e_3$.

15. $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix}$, $e_1=3e_1'-e_2'$, $e_2=e_1'+e_2'$.

16. $A=\begin{bmatrix}-1 & 4\\ 5 & 0\end{bmatrix}$, $e_1=e_1'+e_2'$, $e_2=2e_1'$.

17. $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 3 & 1\\ -1 & 2 & 5\end{bmatrix}$, $e_1=e_1'$, $e_2=3e_1'+e_2'$, $e_3=2e_1'+e_2'+2e_3'$.

18. $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$, $e_1=2e_1'+e_2'-e_3'$, $e_2=2e_1'-e_2'+2e_3'$, $e_3=3e_1'+e_3'$.

19. $A=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 0 & 1\\ -3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\end{bmatrix}$, $e_1=e_1'$, $e_2=e_1'+e_2'$, $e_3=e_1'+e_2'+e_3'$,
$e_4=e_1'+e_2'+e_3'+e_4'$.

20. Линейный оператор φ пространства $\mathbb{R}^3$ в базисе $a_1=(0, 0, 1)$, $a_2=(0, 1, 1)$, $a_3=(1, 1, 1)$ имеет матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Найти матрицу B того же оператора в базисе $b_1 = (2, 3, 5)$, $b_2 = (0, 1, 2)$, $b_3 = (1, 0, 0)$.

21. В евклидовом пространстве на плоскости $u_1=i-j$, $u_2=2i+j$, где векторы i и j образуют ортонормированный базис. Найти в базисе $u=(u_1, u_2)$ матрицу оператора (преобразования) ортогонального проектирования на ось Oy (на ней лежит вектор j).

22. В евклидовом пространстве на плоскости даны два вектора $u_1=3i+4j$, $u_2=-2i+7j$, образующие базис. Найти в базисе $u=(u_1, u_2)$ матрицу:

а) оператора (преобразования) симметрии относительно оси Ox;

б) оператора (преобразования) симметрии относительно оси Oy;

в) оператора, ортогонально проектирующего всякий вектор r этого пространства на ось Ox;

г) оператора, ортогонально проектирующего всякий вектор r этого пространства на ось Oy.

23. В евклидовом пространстве даны векторы $a=i-j$, $b=j+2k$, $c=2i+j$. Найти в базисе a, b, c матрицу:

а) оператора, переводящего всякий вектор r этого пространства в вектор kr, где k — фиксированное вещественное число, отличное от нуля;

б) оператора, ортогонально проектирующего всякий вектор r этого пространства на плоскость xOy;

в) оператора, ортогонально проектирующего всякий вектор r этого пространства на плоскость xOz;

г) оператора, переводящий всякий вектор r этого пространства в вектор, симметричный вектору r относительно плоскости xOz.

1.5 Действия над линейными операторами

Пусть V — векторное пространство над полем F, а f и φ — линейные операторы векторного пространства V.

Сумма линейных операторов

Определение 1. *Суммой* линейных операторов f и φ называется отображение векторного пространства V в себя ($V \to V$), которое обозначается $f+\varphi$ и ставит в соответствие каждому вектору $x \in V$ сумму векторов $f(x)+\varphi(x)$, т.е.

$$(f+\varphi)(x) = f(x)+\varphi(x).$$

Обозначение: $f+\varphi$ – сумма линейных операторов f и φ.

Умножение на скаляр

Определение 2. *Произведением линейного оператора f на скаляр λ* ($\lambda \in F$) называется отображение векторного пространства V в себя ($V \to V$), которое обозначается λf и ставит в соответствие каждому вектору $x \in V$ вектор $\lambda f(x)$, т.е.

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Обозначение: λf – произведение линейного оператора f на скаляр λ.

Произведение линейных операторов

Определение 3. *Произведением линейных операторов f и φ* (или композицией линейных операторов) называется отображение векторного пространства V в себя ($V \to V$), которое обозначается $f \cdot \varphi$ и ставит в соответствие каждому вектору $x \in V$ вектор $f(\varphi(x))$, т.е.

$$(f\varphi)(x) = f(\varphi(x)).$$

Обозначение: $f \cdot \varphi$ — произведение линейных операторов f и φ.

Замечания.

1. Произведение линейных операторов f и φ состоит в последовательном применении сначала второго оператора φ, а затем первого оператора f, т.е. запись

$$(f\varphi)(x) = f(\varphi(x))$$

означает, что сначала на вектор x действует линейный оператор φ, а затем на полученный вектор $\varphi(x)$ действует линейный оператор f.

2. Произведение линейных операторов в общем случае некоммутативно, т.е.

$$f\varphi \neq \varphi f.$$

Теорема 1. Пусть f и φ – линейные операторы векторного пространства V. Справедливы следующие утверждения:

1. Сумма $f+\varphi$ линейных операторов f и φ есть линейный оператор векторного пространства V.
2. Произведение линейного оператора f на скаляр λ, т.е. λf – линейный оператор векторного пространства V.
3. Произведение линейных операторов f и φ, т.е. $f \cdot \varphi$ есть линейный оператор векторного пространства V.

Как выполняются операции над линейными операторами в матричной форме, позволяет установить

Теорема 2. Пусть линейные операторы f и φ векторного пространства V заданы в некотором базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ матрицами $M(f)$ и $M(\varphi)$ соответственно. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. $M(f+\varphi) = M(f) + M(\varphi)$, т.е. матрице суммы линейных операторов соответствует сумма их матриц.

2. $M(\lambda f)=\lambda M(f)$, т.е. матрице произведения линейного оператора на скаляр соответствует произведение матрицы этого оператора на указанный скаляр.
3. $M(f\varphi)=M(f)M(\varphi)$, т.е. матрице произведения линейных операторов соответствует произведение их матриц.

Обратный оператор

Определение 4. Линейный оператор называется *невырожденным*, если его матрица невырожденная. В противном случае линейный оператор называется *вырожденным*.

Определение 5. Линейный оператор, при котором каждый вектор пространства является образом в точности одного вектора, называется *взаимно однозначным*.

Определение 6. Линейный оператор f векторного пространства V называется обратимым, если существует такой линейный оператор φ, что

$$f\varphi = \varphi f = E, \tag{1.5.1}$$

где E – тождественный оператор;
или

$$f\varphi(x) = \varphi f(x) = x \tag{1.5.2}$$

для любого вектора x из V.

Замечания.

1. Если какой-либо линейный оператор φ удовлетворяет равенствам (1.5.1) (или равенствам (1.5.2)), то его называют обратным линейному оператору f и обозначают f^{-1}. Тем самым равенства (1.5.1) записываются в виде

$$f f^{-1} = f^{-1} f = E. \tag{1.5.3}$$

2. Из определения 6 следует, что если линейный оператор φ является обратным линейному оператору f, то оператор f является обратным оператору φ. Линейные операторы f и φ, удовлетворяющие равенствам (1.5.1) или (1.5.2) называется *взаимно обратными*.

3. Линейный оператор f обратим тогда и только тогда, когда он взаимно однозначен.

4. Пусть взаимно обратные линейные операторы f и φ имеют в некотором базисе матрицы A и B соответственно. Поскольку алгебра линейных операторов изоморфна алгебре ($n\times n$)-матриц над полем F, то равенствам (1.5.1) будут соответствовать матричные равенства

$$AB=BA=E,$$

т.е. A и B – взаимно обратные матрицы.

Выводы.

1. Для того, чтобы линейный оператор был обратим, необходимо и достаточно, чтобы он был невырожденным.

2. Для данного невырожденного линейного оператора с матрицей A в некотором базисе существует единственный обратный оператор с матрицей A^{-1} в том же базисе.

Задача 1.

В некотором базисе арифметического трехмерного пространства линейные операторы f и φ заданы соответственно матрицами A и B. Проверить вычислением известный из теории факт, что линейный оператор $f-2\varphi$ в том же базисе задается матрицей A–$2B$:

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Решение.

Пусть e_1, e_2, e_3 —данный базис. Вычислим образы базисных векторов под действием линейных операторов φ**,** f и затем $f-2\varphi$:

$$f(e_1, e_2, e_3)=(e_1, e_2, e_3)\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}=(5e_1-2e_2,\ 4e_1+e_2-e_3,\ 3e_1+2e_2).$$

Аналогично $\varphi(e) = eB = (e_1+e_2+3e_3,\ -e_1+2e_3,\ -2e_1+3e_2+4e_3)$. Второе равенство удваиваем и вычитаем из первого:

$$(f-2\varphi)(e)=(3e_1-4e_2-6e_3,\ 6e_1+e_2-5e_3,\ 7e_1-4e_2-8e_3).$$

Очевидно, что

$$(f-2\varphi)(\mathrm{e})=(e_1, e_2, e_3)\begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ -4 & 1 & -4 \\ -6 & -5 & -8 \end{bmatrix}.$$

С другой стороны,

$$A-2B=\begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ -4 & 1 & -4 \\ -6 & -5 & -8 \end{bmatrix},$$

т. е. $(f-2\varphi)(e)=e(A-2B)$.

Ответ: $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ -4 & 1 & -4 \\ -6 & -5 & -8 \end{bmatrix}$.

Задача 2.

Пусть u и e — два базиса двумерного пространства, причем $u_1=2e_1+e_2$, $u_2=e_1-e_2$. Линейные операторы f и φ заданы в этих базисах матрицами: $f(u)=u\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$; $\varphi(e)=e\begin{bmatrix}3 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix}$. Вычислить $(f\varphi)(b)$, где $b=e_1+e_2$, $f\varphi$ — произведение операторов φ и f.

Решение.

I способ. Вычислим матрицу оператора f в базисе e и затем перемножим соответствующие матрицы: $u=e\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}=eT$. Обозначим $A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix}$.

Тогда $f(u)=uA=eTA$. С другой стороны, $f(u)=f(e)T$. Из равенства $f(e)T=eTA$ следует $f(e)= eTAT^{-1}$. Вычислим матрицу TAT^{-1}:

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}\cdot -\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & -2\\ -4 & -1\end{bmatrix}.$$

Далее, $(f\varphi)(e) = f(\varphi(e)) = f(eB) = f(e)B= eTAT^{-1}B$.

Вычислим матрицу $TAT^{-1}B$:

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & -2\\ -4 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}7 & 1\\ -10 & -4\end{bmatrix}.$$

Поэтому $(f\varphi)(b)$ в базисе e имеет столбец координат

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix}7 & 1\\ -10 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}8\\ -14\end{bmatrix}.$$

Итак, $(f\varphi)(b)=\frac{8}{3}e_1-\frac{14}{3}e_2$.

II способ. Вычислим сначала $\varphi(b)$:

$$\begin{bmatrix}3 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ -2\end{bmatrix},$$

т. е. $\varphi(b)=4e_1-2e_2$. Найдем координаты $\varphi(b)$ в базисе u, т. е. решим уравнение $\varphi(b)=u_1x + u_2y$. Получаем: $4e_1-2e_2=(2e_1+e_2)x+(e_1-e_2)y$. После преобразований имеем $e_1(4 - 2x - y) + e_2(-2-x + y)=0$, откуда

$$\begin{cases}2x+y=4;\\ x-y=-2;\end{cases}$$

$$x=\frac{2}{3};\ y=\frac{8}{3}.$$

Вычислим координаты $f(\varphi(b))$ в базисе u:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{8}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Итак, $f(\varphi(b))=(f\,\varphi)(b)= -\frac{2}{3}u_1 + 4u_2 = -\frac{2}{3}\ (2e_1 + e_2) + 4(e_1 - e_2) = \frac{8}{3}e_1 - \frac{14}{3}e_2.$

Ответ: $(f\varphi)(b)= \frac{8}{3}e_1 - \frac{14}{3}e_2.$

Задача 3.

Линейный оператор φ пространства $\mathbb{R}^2$ в базисе $a_1=(2,1)$, $a_2=(1,1)$ имеет матрицу

$$A_a = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

а линейное отображение ψ пространства $\mathbb{R}^2$ в базисе $b_1 = (5,\ 2)$, $b_2 = (1,\ 0)$ имеет матрицу $B_b = \begin{pmatrix} 7,5 & 3,5 \\ 4,5 & 1,5 \end{pmatrix}$.

Найти матрицы линейных операторов $(\varphi + \psi)$ и $\varphi\psi$ в базисе b_1, b_2.

Решение.

Задача сводится к нахождению матрицы A_b линейного оператора φ в базисе $b_1 b_2$ по формуле

$$A_b=T^{-1}A_aT,$$

где матрица T есть матрица перехода от базиса a_1, a_2 к базису b_1, b_2. Для нахождения T выразим векторы b_1, b_2 через a_1, a_2. Имеем последовательно:

$$b_1 = (5,\ 2) = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = (2\lambda_1 + \lambda_2,\ \lambda_1 + \lambda_2),$$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = 5, \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 2. \end{cases}$$

Отсюда $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -1,\ b_1 = 3a_1 - a_2$.

Аналогично получаем $b_2 = a_1 - a_2$.

Отсюда

$T=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ – матрица перехода от базиса a_1, a_2 к базису b_1, b_2;

$T^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -3\end{pmatrix}$ – матрица перехода от базиса b_1, b_2 к базису a_1, a_2.

Следовательно, $A_b=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 5\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}7 & -3\\ -13 & 5\end{pmatrix}$.

Известно, что матрица суммы (произведения) двух линейных операторов в некотором базисе является суммой (произведением) матриц этих операторов в том же базисе. Поэтому матрицей линейного оператора $\varphi+\psi$ в базисе b_1, b_2 будет матрица

$$A_b+B_b=\begin{pmatrix}3{,}5 & -1{,}5\\ -6{,}5 & 2{,}5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7{,}5 & 3{,}5\\ 4{,}5 & 1{,}5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 2\\ -2 & 4\end{pmatrix},$$

а матрицей линейного отображения $\varphi\psi$ в базисе b_1, b_2 будет матрица

$$A_bB_b=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}7 & -3\\ -13 & 5\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}15 & 7\\ 9 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{39}{2} & 10\\ -\dfrac{75}{2} & -19\end{pmatrix}.$$

Ответ: $A_b+B_b=\begin{pmatrix}11 & 2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$, $A_bB_b=\begin{pmatrix}\dfrac{39}{2} & 10\\ -\dfrac{75}{2} & -19\end{pmatrix}$.

Задача 4.

Линейный оператор f в базисе e_1, e_2 имеет матрицу $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{bmatrix}$, а линейный оператор g в базисе $e_1'=e_1-e_2$, $e_2'=e_1+e_2$ — матрицу $B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 3\end{bmatrix}$.

Найти матрицу оператора:

а) $f+g$ в базисе e_1', e_2'; *б*) $f\circ g$ в базисе e_1, e_2.

Решение.

а) Матрица D оператора $f+g$ в базисе e_1', e_2' равна сумме матриц операторов f и g в этом базисе. Так как оператор f задан матрицей A в базисе e_1, e_2 **,** то сначала найдем матрицу C этого оператора в базисе e_1', e_2'. Формула, выражающая зависимость между матрицами A и C оператора f соответственно в базисах e_1, e_2 и e_1', e_2' имеет вид $C=T^{-1}AT$, где T— матрица перехода от базиса e_1, e_2 к базису e_1', e_2'. Так как $e_1' = e_1 - e_2$, $e_2' = e_1 + e_2$, то $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Тогда

$$T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{11}{2} \end{bmatrix}.$$

Таким образом,

$$D = C + B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{11}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{17}{2} \end{bmatrix}.$$

б) Матрица H оператора $f \circ g$ в базисе e_1, e_2 равна AS, где S — матрица оператора g в базисе e_1, e_2. Матрицу S находим по формуле $S = T_1^{-1}BT$, где T_1— матрица перехода от базиса e_1', e_2' к базису e_1, e_2. Таким образом, $T_1 = T^{-1}$, а $T_1^{-1} = T$. Тогда

$$S = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$H = AS = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 8 & 19 \end{bmatrix}.$$

Ответ: *а*) $D = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{17}{2} \end{bmatrix}$, *б*) $H = \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 8 & 19 \end{bmatrix}$.

Задача 5.

Линейный оператор A осуществляет поворот каждого вектора плоскости xOy на угол $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Найти в координатной форме оператор $A+E$.

Решение.

Имеем

$$\begin{cases} Ai = i\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + j\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)i + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)j, \\ Aj = -i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + j\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)i + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)j. \end{cases}$$

Следовательно,

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Так как $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, то

$$A+E = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2}+1 & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2}+1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, линейное преобразование $A+E$ можно записать с помощью равенств

$$\begin{cases} x' = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1\right)x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}y, \\ y' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1\right)y. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x' = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1\right)x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}y, \\ y' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1\right)y. \end{cases}$

Задача 6.

Линейный оператор A осуществляет поворот каждого вектора плоскости xOy на угол α. Найти матрицу линейного оператора A^2 (т. е. AA).

Решение.

Так как $\begin{cases} Ai = i\cos\alpha + j\sin\alpha, \\ Aj = -i\sin\alpha + j\cos\alpha, \end{cases}$

то

$$A=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$A^2=\begin{pmatrix} \cos^2\alpha-\sin^2\alpha & -2\sin\alpha\cos\alpha \\ 2\sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha-\sin^2\alpha \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Таким образом, преобразование A^2 в координатной форме определяется равенствами

$$\begin{cases} x' = x\cos 2\alpha - y\sin 2\alpha, \\ y' = x\sin 2\alpha + y\cos 2\alpha. \end{cases}$$

Эти результаты могут быть получены и из чисто геометрических соображений.

Ответ: $A^2=\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$

Задача 7.

Дано пространство геометрических векторов. Пусть линейный оператор A осуществляет поворот пространства вокруг оси Oz на угол $\frac{\pi}{4}$, а линейный оператор B осуществляет поворот пространства вокруг оси Ox на тот же угол. Найти матрицу линейного оператора AB.

Решение.

Имеем,

$$\begin{cases} Ai = i\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)i + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)j, \\ Aj = -i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + j\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)i + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)j, \\ Ak = k; \end{cases}$$

$$\begin{cases} Bi = i, \\ Bj = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)j + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)k, \\ Bk = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)j + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)k. \end{cases}$$

Следовательно,

$$A=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},\ AB=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Ответ: $AB=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$

Задача 8.

Линейный оператор A осуществляет поворот на угол $\frac{\pi}{4}$ каждого вектора плоскости xOy**.** Найти матрицу линейного оператора $B=A^2+\sqrt{2}\,A+E$

Решение.

$$A=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$A^2=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Итак,

$$B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $B=2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

Задача 9.

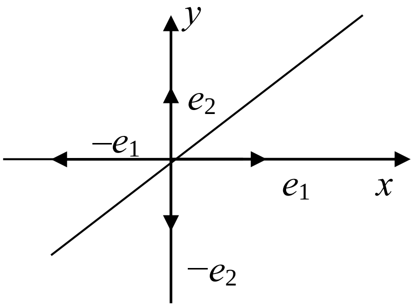

Рис. 4

На плоскости дана прямоугольная декартова система координат. Пусть f есть симметрия относительно оси Ox; φ — поворот на угол $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки, h — симметрия относительно биссектрисы первого координатного угла (рис. 4). Вычислить матрицу оператора $f\varphi h$, установить геометрический смысл этого оператора.

Решение.

Из рисунка видно, что

$$f(e_1)=e_1,\ \ f(e_2)=-e_2, \text{ т.е. } f(e)=e\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=eA.$$

Далее, $\varphi(e_1)=e_2$, $\varphi(e_2)=-e_1$, т.е.

$$\varphi\ (e)=e\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=eB.$$

Затем получаем $h(e_1)=e_2$, $h(\mathrm{e}_2)=e_1$, т.е.

$$h(e)=e\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=eC.$$

В том же базисе оператор $f\varphi h$ задается матрицей

$$ABC=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},$$

т.е. $f\varphi h(e)=e\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=(-e_1,-e_2)$.

Оператор $f\varphi h$ каждый базисный вектор переводит в противоположный, т.е. он любой вектор переводит в противоположный. Очевидно, что $f\varphi h$ есть симметрия относительно начала координат.

Ответ: $ABC=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$.

Задача 10.

Дано преобразование переменных

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 - 3x_2, \\ y_2 = -x_1 + 5x_2. \end{cases}$$

Найти преобразование, обратное данному, если оно существует.

Решение.

Матрица

$$B=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

данного преобразования невырожденная, так как $det\,B=7\neq 0$.

Матрица обратного преобразования

$$B^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{5}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}.$$

Следовательно, преобразование, обратное данному, имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{7}y_1 + \frac{3}{7}y_2, \\ x_2 = \frac{1}{7}y_1 + \frac{2}{7}y_2. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x_1 = \frac{5}{7}y_1 + \frac{3}{7}y_2, \\ x_2 = \frac{1}{7}y_1 + \frac{2}{7}y_2. \end{cases}$

Упражнения

1. Даны линейные операторы f, g, h. Доказать, что:

а) $f+g=g+f$; *б*) $(f+g)+h=f+(g+h)$;

в) $f\circ(g+h)=f\circ g+f\circ h$; *г*) $f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h$.

2. Пусть в пространстве E_2 даны прямые l_1 и l_2, пересекающееся под углом α, f — оператор симметрии относительно l_1, g— оператор симметрии относительно l_2. Доказать, что $f\circ g$— оператор поворота на угол 2α.

3. Даны линейные операторы f и g соответственно с матрицами

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

в некотором базисе. Найти в этом же базисе матрицу оператора:

а) $f+g$; *б*) $f\circ g$; *в*) $g\circ f$.

4. Оператор f в базисе e_1, e_2 имеет матрицу $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, а оператор g в базисе $e_1' = 2e_1 - e_2$, $e_2' = e_1 - e_2$ — матрицу $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Найти матрицу оператора:

а) $f + g$ в базисе e_1, e_2; *б*) $f + g$ в базисе e_1', e_2';

в) $f \circ g$ в базисе e_1, e_2; *г*) $f \circ g$ в базисе e_1', e_2'.

5. Пусть в пространстве E_2 f — оператор поворота на угол $\alpha \neq 0$, g — симметрия относительно оси Oy. Равны ли между собой операторы $f \circ g$ и $g \circ f$?

6. Пусть в пространстве E_2 f— симметрия относительно оси Ox, g— симметрия относительно оси Oy, h— симметрия относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов, φ — поворот на угол α. По данному вектору a построить вектор b и найти матрицу указанного оператора в базисе i, j, если:

а) $b = f \circ g(a)$; *б*) $b = g \circ f(a)$;

в) $b = f \circ h(a)$; *г*) $b = g \circ \varphi(a)$;

д) $b = \varphi \circ g(a)$; *е*) $b = (\varphi \circ g) \circ f(a)$.

7. Пусть в пространстве E_3 f — симметрия относительно плоскости Oxy, h — оператор, ортогонально проектирующей всякий вектор на плоскость Oyz, g — оператор, переводящий всякий вектор x в вектор λx, где $\lambda \in \mathbb{R}$. В базисе i, j, k найти матрицу оператора:

а) $f \circ g$; *б*) $g \circ f$; *в*) $f \circ h$; *г*) $h \circ f$;

д) $g \circ h$; *е*) $f \circ (g \circ f)$; *ж*) $(h \circ f) \circ g$.

8. Является ли невырожденным линейный оператор $f : V \to V$, если:

а) существует ненулевой вектор $x \in V$, для которого $f(x) = 0$;

б) $f \circ f = I$, где I — тождественный оператор;

в) $f(x) = 0$ только в том случае, если $x = 0$.

9. Является ли невырожденным линейный оператор $f : E_3 \to E_3$, если для фиксированного ненулевого вектора $a \in E_3$ и любого вектора $x \in E_3$:

а) $f(x) = [x, a]$; *б*) $f(x) = (a, x)a$.

10. Даны два линейных преобразования:

$$\begin{cases} x' = x + 2y + 3z, \\ y' = 4x + 5y + 6z, \\ z' = 7x + 8y + 9z, \end{cases} (A) \quad \text{и} \quad \begin{cases} x' = x + 3y + 4{,}5z, \\ y' = 6x + 7y + 9z, \\ z' = 10{,}5x + 12y + 13z. \end{cases} (B)$$

Найти $3A - 2B$.

11. Пусть над совокупностью векторов $u = xi + yj$ на плоскости xOy производятся два линейных преобразования: A – замена вектора его составляющей по оси Ox; B — зеркальное отображение вектора относительно биссектрисы I и III координатных углов. Найти преобразования AB и BA.

1.6 Ортогональные матрицы. Ортогональный оператор

Задача 1. Выяснить, является ли ортогональным оператор f: $E_3 \to E_3$, заданный в некотором ортогональном базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}.$$

Решение. Оператор является ортогональным тогда и только тогда, когда в некотором ортонормированном базисе его матрица ортогональна, т. е. выполняются условия

$$\sum_{k=1}^{n} a_{kj}a_{ki} = \begin{cases} 0, & \text{при } i \neq j, \\ 1, & \text{при } i = j. \end{cases}$$

Так как

$$\sum_{k=1}^{3} a_{k1}a_{k2} = \frac{1}{\sqrt{6}}\frac{2}{\sqrt{5}} + \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}}\cdot 0 = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{3} a_{k1}a_{k3} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(-\frac{1}{\sqrt{30}}\right) + \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\frac{2}{\sqrt{30}} + \frac{1}{\sqrt{6}}\frac{5}{\sqrt{30}} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{3} a_{k2}a_{k3} = \frac{2}{\sqrt{5}}\left(-\frac{1}{\sqrt{30}}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{2}{\sqrt{30}} + 0\cdot\frac{5}{\sqrt{30}} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{3} a_{k1}a_{k1} = \frac{1}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}} + \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right) + \frac{1}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}} = 1,$$

$$\sum_{k=1}^{3} a_{k2}a_{k2} = \frac{2}{\sqrt{5}}\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{5}} = 1,$$

$$\sum_{k=1}^{3} a_{k3}a_{k3} = \left(-\frac{1}{\sqrt{30}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{30}}\right) + \frac{2}{\sqrt{30}}\frac{2}{\sqrt{30}} + \frac{5}{\sqrt{30}}\frac{5}{\sqrt{30}} = 1,$$

то оператор является ортогональным.

Ответ: оператор является ортогональным.

Задача 2. Выяснить, является ли ортогональным оператор симметрии относительно плоскости *Oyz* в пространстве свободных векторов.

Решение. Ясно, что оператор симметрии сохраняет длину. Но всякий оператор, сохраняющий длину, является ортогональным. Таким образом, данный оператор является ортогональным.

Ответ: оператор является ортогональным.

Упражнения

1. Выяснить, является ли матрица A ортогональной, и если является, то найти обратную ей:

$$а)\ A=\begin{bmatrix}1 & 4\\ -2 & 2\end{bmatrix};\quad б)\ A=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}}\\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}}\end{pmatrix};$$

$$в)\ A=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{30}}\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{5}{\sqrt{30}}\\ \frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{30}}\end{pmatrix};$$

$$г)\ A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix};\quad д)\ A=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{13}} & 0 & -\frac{3}{\sqrt{13}}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{3}{\sqrt{13}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{13}}\end{pmatrix};$$

$$е)\ A=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}.$$

2. Какому условию должны удовлетворять α и β (α, $\beta \in \mathbb{R}$), чтобы матрица $A=\begin{bmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{bmatrix}$ была ортогональной?

3. Выяснить, является ли ортогональным оператор f: $E_2 \to E_2$, если

а) f — симметрия относительно оси Oy;

б) f — оператор, переводящий всякий вектор x в вектор λx, где $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$;

в) f — поворот на угол α;

г) $f = g \circ h$, где g — симметрия относительно оси Ox, h — поворот на угол α.

4. В пространстве $\mathbb{R}_3(t)$ многочленов не выше второй степени скалярное произведение определено равенством $(x, y) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3$, где $x = \alpha_1 t^2 + \alpha_2 t + \alpha_3$; $y = \beta_1 t^2 + \beta_2 t + \beta_3$. Оператор f: $\mathbb{R}_3(t) \to \mathbb{R}_3(t)$ задан следующим образом: $f(t^2) = -t^2$, $f(t) = -1$, $f(1) = t$ (t^2, t, 1 — базис пространства $\mathbb{R}_3(t)$). Используя определение, доказать, что f является ортогональным.

5. В евклидовом пространстве задан ортогональный оператор f. Чему равна длина вектора $f(x)$, если длина вектора x равна трем?

6. Пусть f: $E_n \to E_n$ и g: $E_n \to E_n$ — ортогональные операторы соответственно с матрицами A и B в некотором базисе. Чему равен $\det AB$?

7. Оператор f: $E_3 \to E_3$ в некотором ортонормированным базисе задан матрицей A. Выяснить, является ли оператор f ортогональным, если:

$$а)\ A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};\quad б)\ A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{6}{\sqrt{70}} & \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{3}{\sqrt{70}} & -\frac{1}{\sqrt{14}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{70}} & \frac{3}{\sqrt{14}} \end{pmatrix};$$

$$в)\ A = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

8. При каких условиях диагональная матрица будет ортогональной?

9. Доказать, что каждое собственное значение ортогонального оператора по модулю равно единице.

10. Будет ли ортогональным оператор f: $E_3 \to E_3$, если $f(x) = [x, a]$, где a – фиксированный вектор пространства E_3?

2. ЯДРО И ОБРАЗ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА. ИНВАРИАНТНОЕ ПОДПРОСТРАНСТВО

Пусть f – линейный оператор векторного пространства V. Каждый вектор x из V переводится линейным оператором f в некоторый новый вектор $f(x)$ – образ вектора x, причем $f(x)$ принадлежит V.

Определение 1. Совокупность образов *всех* векторов из V называется *образом* или *областью значений* линейного оператора f.

Обозначение: $Im\, f = \{f(x) \mid \forall\ x \in V\}$ – образ линейного оператора f.

Определение 2. *Ядром* линейного оператора f векторного пространства V называют совокупность всех векторов пространства V, которые оператор f переводит в нулевой вектор.

Обозначение: $Ker\, f = \{x \in V \mid f(x) = 0_v\}$ – ядро линейного оператора f.

Теорема 1. Ядро и образ линейного оператора f векторного пространства V являются подпространствами пространства V.

Определение 3. Размерность образа линейного оператора f векторного пространства V называется *рангом* линейного оператора f.

Поскольку ранг матрицы линейного оператора векторного пространства V не зависит от выбора базиса в нем, а зависит только от самого линейного оператора, то получаем

Определение 4. *Рангом* линейного оператора f векторного пространства V называется ранг его матрицы.

Обозначение: $rank\, f = dim(Im\, f)$ – ранг линейного оператора f.

Определение 5. Размерность ядра линейного оператора f векторного пространства V называется *дефектом* линейного оператора f.

Обозначение: $d = dim(Ker\, f)$ – дефект линейного оператора f.

Теорема 2. Пусть f – линейный оператор векторного пространства V.

Тогда справедливо следующее утверждение:

$$dim\, V = d + rank\, f.$$

ИНВАРИАНТНОЕ ПОДПРОСТРАНСТВО

Определение 6. Пусть φ – линейный оператор векторного пространства V. Подпространство $L \subset V$ называется *инвариантным* относительно оператора φ, если из $x \in L$ следует $\varphi(x) \in L$.

Замечания.

1. В случае инвариантности подпространства L можно говорить о линейном операторе φ_1 с *областью определения* L. Оператор φ_1 называется *индуцированным оператором*.

2. Если $x \in L$, то $\varphi(x) = \varphi_1(x)$; если же $x \notin L$, то $\varphi(x)$ существует, а $\varphi_1(x)$ не определено. Различие операторов φ и φ_1 состоит лишь в различии между их областями применения.

Задача 1.

Найти ядро, образ, ранг, дефект, базисы ядра и образа линейного оператора $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, если для любого вектора $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ имеем:

а) $f(x) = (0, 0, x_3)$;

б) $f(x) = (x_1 - x_2, 0, x_3)$.

Решение.

а) Согласно условию $Im\, f = \{(0, 0, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\}$. Поскольку справедливо равенство

$$(0, 0, x_3) = x_3(0, 0, 1) = x_3 e_3,$$

то $e_3 = (0, 0, 1)$ – базис образа. Значит, $rank\, f = 1$.

По определению ядра линейного оператора

$$Ker\, f = \{(x_1, x_2, x_3) \mid f(x) = (0, 0, 0)\} = \{(x_1, x_2, 0) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Поскольку справедливо равенство $(x_1, x_2, 0) = x_1(1, 0, 0) + x_2(0, 1, 0) = x_1 e_1 + x_2 e_2$, то $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ – базис ядра. Значит, $d = 2$. Согласно теореме 2, $dim\, \mathbb{R}^3 = d + rank\, f$. Действительно, 3=2+1.

б) По условию $Im\, f = \{(x_1 - x_2, 0, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$.

Поскольку

$$(x_1 - x_2, 0, x_3) = (x_1 - x_2)(1, 0, 0) + x_3(0, 0, 1) = (x_1 - x_2)\, e_1 + x_3 e_3,$$

то $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ — базис образа. Значит, $rank\, f = 2$. По определению ядра линейного оператора

$$Ker\, f = \{(x_1, x_2, x_3) \mid (x_1 - x_2, 0, x_3) = (0, 0, 0)\}, \text{ т.е.}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ x_3 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Поэтому $Ker\, f = \{(x_1, x_1, 0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$.

Поскольку

$$(x_1, x_1, 0) = x_1(1, 1, 0),$$

то $e = (1, 1, 0)$ – базис ядра. Значит, $d = 1$. По формуле из теоремы 2 3=1+2.

Ответ: *а*) $Ker\, f = \{(x_1, x_2, 0) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ – ядро линейного оператора f, $Im\, f = \{(0, 0, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\}$ – образ линейного оператора f, $rank\, f = 1$ – ранг линейного оператора f, $d = 2$ – дефект линейного оператора f, $e_3 = (0, 0, 1)$ – базис образа линейного оператора f, $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ – базис ядра линейного оператора f;

б) $Ker\, f = \{(x_1, x_1, 0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$ – ядро линейного оператора f, $Im\, f = \{(x_1 - x_2, 0, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ – образ линейного оператора f, *rank f* =2 – ранг линейного оператора *f*, *d*=1 – дефект линейного оператора *f*, e_1 = (1, 0, 0), e_3 = (0, 0, 1) – базис образа линейного оператора *f*, *e* = (1, 1,0) – базис ядра линейного оператора *f*.

Задача 2.

Линейный оператор φ векторного пространства *L* задан матрицей

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1 & -3\\ 1 & 2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 5\end{pmatrix}$$

в некотором базисе e_1, e_2, e_3, e_4. Найти ядро и дефект оператора φ.

Решение.

По определению, ядро оператора φ, или *Ker* φ, есть множество всех тех векторов *x*, которые оператор φ переводит в нулевой вектор: $\varphi(x)=0$. Это означает, что *Ker* φ состоит в точности из тех же векторов *x*, координаты которых x_1, x_2, x_3, x_4 (в базисе e_1, e_2, e_3, e_4) удовлетворяют условию:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1 & -3\\ 1 & 2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

т.е. *Ker* φ соответствует пространству L_1 решений системы

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_4=0,\\ x_2+x_3-3x_4=0,\\ x_1+2x_2+x_3-x_4=0,\\ x_1-x_3+5x_4=0.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2+2x_4=0,\\ x_2+x_3-3x_4=0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-5x_4+x_3,\\ x_2=\ \ 3x_4-x_3.\end{cases}$$

Для матрицы *A* системы имеем:

$$A\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1 & -3\\ 0 & 1 & 1 & -3\\ 0 & -1 & -1 & 3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1 & -3\end{pmatrix},$$

Фундаментальная система решений:

x_1	x_2	x_3	x_4
1	–1	1	0
–5	3	0	1

Следовательно, $Ker\ \varphi = \{k_1(1, -1, 1, 0) + k_2(-5, 3, 0, 1) \mid k_1, k_2 \in \mathbb{R}\}$. Значит, ранг r матрицы A равен 2 и $dim\ L_1 = n - r = 4-2 = 2$.
Таким образом, дефект оператора φ равен 2.

Ответ: $Ker\ \varphi = \{k_1(1, -1, 1, 0) + k_2(-5, 3, 0, 1) \mid k_1, k_2 \in \mathbb{R}\}$, $d = 2$.

Задача 3.

Найти ядро, образ, ранг, дефект, базисы ядра и образа линейного оператора f: $V \to V$, заданного в некотором базисе e_1, e_2, e_3 матрицей

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Решение.

Ядро линейного оператора f векторного пространства V — совокупность всех векторов пространства V, которые оператор f переводит в нулевой вектор. Поэтому, если x принадлежит ядру, то

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

где x_1, x_2, x_3 — координаты вектора x в базисе e_1, e_2, e_3.

Ранг матрицы полученной однородной системы, равен двум. Решив эту систему, получим $x_1 = -3c$, $x_2 = 3c$, $x_3 = -3c$, где $c \in \mathbb{R}$ или $x_1 = -t$, $x_2 = t$, $x_3 = -t$, где $t \in \mathbb{R}$. Таким образом, ядро оператора является одномерным пространством

$$\{(-t, t, -t) \mid \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Совокупность образов всех векторов из V называется образом (или областью значений) линейного оператора. Следовательно, если a_1, a_2, a_3 — координаты в базисе e_1, e_2, e_3 произвольного вектора $x \in V$, b_1, b_2, b_3 — координаты его образа в том же базисе, то

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

или

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} a_1 + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} a_2 + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} a_3.$$

Так как

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

и столбцы

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

линейно независимы, то область значений оператора f есть пространство размерности 2. В качестве базиса этого пространства можно взять векторы $e_1' = -e_1 + e_2$, $e_2' = 3e_1 + 3e_3$.

Ответ: $Ker\, f = \{(-t, t, -t) \mid \forall t \in \mathbb{R}\}$; $d=1$; $rank\, f = 2$;

Im f $= \{x \mid x = \lambda_1 e_1' + \lambda_2 e_2',\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$, $(-1, 1, -1)$ – базис ядра;

$e_1' = -e_1 + e_2$, $e_2' = 3e_1 + 3e_3$. – базис образа.

Задача 4.

Пусть L – вещественное векторное пространство многочленов $f(x)$ над полем $\mathbb{R}$ степени $\le n-1$ и φ – линейный оператор, заключающийся в дифференцировании многочленов из L. Найти образ, ядро, ранг, дефект, базисы ядра и образа оператора φ.

Решение.

Производная многочлена степени $\le n-1$ есть многочлен степени $\le n - 2$. С другой стороны, если

$$f_1(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_{n-2}x^{n-2}$$

– любой многочлен степени $\le n-2$, то найдется многочлен $f(x)$ степени $\le n - 1$ такой, что $f'(x) = f_1(x)$. Таким многочленом является, например,

$$f(x)=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\ldots+\frac{a_{n-2}}{n-1}x^{n-1}.$$

Значит, образом пространства L при отображении φ является множество всех многочленов из L степени $\le n-2$.

Ядром оператора φ будет само поле коэффициентов $\mathbb{R}$, так как производная многочлена $f(x)$ равна нулю тогда и только тогда, когда $f(x)$ есть многочлен нулевой степени или $f(x) \equiv 0$.

Заметим, что размерность ядра равна 1 (его базисом служит многочлен $f(x)\equiv 1$), а размерность образа L равна $n-1$(его базис: $1, x, \ldots, x^{n-2}$).

Ответ: $rank\ \varphi = n-1$; $d=1$;

$Im\ \varphi=\{y \mid y=a_0+a_1x+\ldots+a_{n-2}x^{n-2},\ a_0, a_1,\ldots, a_{n-2}\in\mathbb{R}\}$;

$1, x, \ldots, x^{n-2}$ — базис образа;

$Ker\ \varphi=\{c \mid c\in\mathbb{R}\}$; 1 – базис ядра.

Задача 5.

а) Найти ядро, дефект, ранг и область значений линейного оператора φ пространства M_2 вещественных матриц порядка 2 над полем $\mathbb{R}$, если φ задан матрицей

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 13 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

в базисе

$$e_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ e_2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_3=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ e_4=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

б) Выяснить, принадлежит ли вектор

$y=\begin{pmatrix} -22 & -4 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$ из M_2 подпространству $Ker\ \varphi$.

Решение.

а) По определению областью значений линейного оператора φ пространства M_2 является образ $\varphi(M_2)$ этого пространства, получаемый в результате действия линейного оператора φ. Этим образом будет подпространство, натянутое на векторы $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$, $\varphi(e_3)$, $\varphi(e_4)$, координатные столбцы которых являются столбцами матрицы A. Имеем:

$$A\sim\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & -7 & -1 \\ 0 & -10 & -14 & -2 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -5 & -7 & -1 \end{pmatrix},$$

откуда ранг r матрицы A, а значит, и ранг оператора φ равен 2.

Следовательно, базис подпространства $\varphi(M_2)$ состоит из двух векторов. Если учесть при этом, что первые два столбца матрицы непропорциональны, то за базис подпространства $\varphi(M_2)$ можно принять, например, векторы

$$\varphi(e_1) = e_1 + 2e_2 + 4e_3 + 3e_4 = = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$$

и

$$\varphi(e_2) = 3e_1 + e_2 + 7e_3 - e_4 = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$\varphi(M_2) = \left\{ x \mid x = \lambda_1 \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R} \right\}.$$

Ядро оператора φ соответствует (см. задачи 1, 3) пространству решений системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 0, \\ \quad -5x_2 - 7x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Находим фундаментальную систему решений данной системы линейных однородных уравнений и соответствующие векторы базиса ядра:

$$a_1 = (4, -7, 5, 0),\ a_1' = -4e_1 - 7e_2 + 5e_3 = \begin{pmatrix} -11 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix},$$

$$a_2 = (-2, -1, 0, 5),\ a_2' = -2e_1 - e_2 + 5e_4 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$Ker\varphi = \left\{ x \mid x = \lambda_1 \begin{pmatrix} -11 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R} \right\}.$$

б) Вектор $y = \begin{pmatrix} -22 & -4 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} \in Ker\varphi$ тогда и только тогда, когда найдутся такие $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, что

$$\begin{pmatrix} -22 & -4 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} -11 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11\lambda_1 - 3\lambda_2 & -2\lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 & 5\lambda_1 + 5\lambda_2 \end{pmatrix}.$$ Отсюда имеем систему:

$$\begin{cases} -11\lambda_1 - 3\lambda_2 = -22, \\ -2\lambda_1 - \lambda_2 = -4, \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 = 2, \\ 5\lambda_1 + 5\lambda_2 = 10, \end{cases}$$

решая которую получаем $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 0$. Следовательно, $y \in Ker\varphi$.

Ответ: *а*) $\varphi(M_2) = \left\{ x \mid x = \lambda_1 \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 9 & 6 \end{pmatrix},\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R} \right\}$ – образ линейного оператора φ; ранг оператора φ равен 2;

$Ker\varphi = \left\{ x \mid x = \lambda_1 \begin{pmatrix} -11 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix},\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R} \right\}$ – ядро линейного оператора φ; дефект оператора φ равен 2;

б) принадлежит.

Задача 6.

В арифметическом пространстве $\mathbb{R}^4$ линейный оператор φ задан матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 7 & -1 \\ 5 & 3 & 13 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Найти базисы ядра и образа, ранг и дефект линейного оператора. Найти операторы, индуцированные в ядре и образе.

Решение.

Чтобы иметь возможность отождествить вектор и его столбец координат, будем считать , что оператор φ задан в единичном базисе, т.е. в базисе (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1).

Обозначим этот базис через *е*.

Пусть I — ядро и $x \in I$, т.е. $\varphi(x)=0$. Поэтому $AX=0$, где X, 0 – столбцы координат векторов x и 0 соответственно.

Решая систему линейных однородных уравнений $AX = 0$, находим ядро как множество всех решений и базис ядра как фундаментальный набор решений:

$$\begin{cases} x_1 + \ 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + \ \ x_2 + 7x_3 \ \ - x_4 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + 13x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + \ \ \ x_2 + 3x_3 + x_4 \ \ = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -2x_1 - 5x_3, \\ x_4 = \ \ \ \ \ x_1 + 2x_3. \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 7 & \boxed{-1} \\ 5 & 3 & 13 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 10 & 5 & 25 & 0 \\ 3 & 1 & 7 & -1 \\ 8 & \boxed{4} & 20 & 1 \\ 4 & 2 & 10 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Найдем фундаментальную систему решений:

$$a_1 = (1, -2, 0, 1),\ a_2 = (0, -5, 1, 2).$$

Итак, базис ядра состоит из векторов a_1, a_2, дефект равен 2. Очевидно, что в I линейный оператор φ индуцирует нулевой оператор.

Так как линейный оператор отображает линейную комбинацию векторов на линейную комбинацию их образов, то образ линейного оператора φ натянут на образы базисных векторов $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4)$, т.е. образ натянут на столбцы матрицы *A*, так как при умножении *A* на столбцы координат единичных векторов e_1, e_2, e_3, e_4 будут получаться соответствующие столбцы матрицы *A*. Применим элементарные преобразования к системе столбцов матрицы *A*, чтобы выделить базис подпространства, порожденного этими столбцами:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 7 & -1 \\ 5 & 3 & 13 & 1 \\ \boxed{1} & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \boxed{1} & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & -4 \\ 5 & -2 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 0 & 0 \\ 7 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Итак, образ *T* натянут на векторы $u_1 = (0, 5, 7, 1)$, $u_2 = (1, -2, -2, 0)$, ранг оператора равен 2.

Проверка: $rank\ \varphi + d = 2 + 2 = 4 = \dim \mathbb{R}^4$.

Найдем образы векторов u_1 и u_2 и выразим их в базисе (u_1, u_2) подпространства *T*. Это даст возможность задать оператор, индуцированный в *T* оператором φ относительно базиса $u = (u_1, u_2)$. Для этого умножим матрицу *A* на столбцы координат векторов u_1, u_2 (одновременно):

$$\begin{bmatrix}1&2&4&3\\3&1&7&-1\\5&3&13&1\\1&1&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\5&-2\\7&-2\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}41&-11\\53&-13\\107&-27\\27&-7\end{bmatrix},$$

т.е. $\varphi(u_1)=c_1=(41, 53, 107, 27)$, $\varphi(u_2)=c_2=(-11, -13, -27, -7)$. Чтобы найти координаты векторов c_1, c_2 в базисе u_1, u_2, решим две системы линейных уравнений (пакетом):

$$\left[\begin{array}{cc|cc}0&\boxed{1}&41&-11\\5&-2&53&-13\\7&-2&107&-27\\1&0&27&-7\end{array}\right]\Leftrightarrow\left[\begin{array}{cc|cc}0&1&41&-11\\5&0&135&-35\\2&0&54&-14\\\boxed{1}&0&27&-7\end{array}\right]\Leftrightarrow\left[\begin{array}{cc|cc}0&1&41&-11\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&27&-7\end{array}\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&27&-7\\0&1&41&-11\end{array}\right],$$

т.е. $c_1=27u_1+41u_2$, $c_2=-7u_1-11u_2$.

Поэтому

$$\varphi(u)=u\begin{bmatrix}27&-7\\41&-11\end{bmatrix}.$$

Итак, в образе T линейным оператором φ индуцирован, очевидно, невырожденный оператор, который в базисе u задается матрицей

$$\begin{bmatrix}27&-7\\41&-11\end{bmatrix}.$$

Ответ: базис ядра $a_1=(1, -2, 0, 1)$, $a_2=(0, -5, 1, 2)$; $\varphi(u)=u\begin{bmatrix}27&-7\\41&-11\end{bmatrix}$; ранг оператора равен 2; дефект равен 2; базис образа $u_1=(0, 5, 7, 1)$, $u_2=(1, -2, -2, 0)$.

Задача 7.

Линейный оператор φ пространства M_2 квадратных матриц порядка 2 над полем $\mathbb{R}$ задан в базисе

$$e_1=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}, e_4=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$$

матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 13 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти для вектора $x_0 = -e_1 + 2e_2 + 4e_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ его образ $y_0 = \varphi(x_0)$ и полный прообраз вектора y_0.

Решение.

Для координат y_1, y_2, y_3, y_4 вектора y_0 имеем:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 13 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 22 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$\varphi(x_0) = y_0 = 9e_1 + 4e_2 + 22e_3 - e_4 = \begin{pmatrix} 13 & 26 \\ 30 & 21 \end{pmatrix}.$$

Так как координаты x_1, x_2, x_3, x_4 любого прообраза вектора y_0 удовлетворяют уравнению

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 13 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 22 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad (2.1)$$

то полному прообразу y_0 соответствует многообразие решений неоднородной системы уравнений, эквивалентной уравнению (2.1). Координатный столбец вектора x_0 является частным решением этой системы, а общее решение соответствующей однородной системы

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 13 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

отвечает ядру оператора φ. Если воспользоваться найденным в задаче 5 базисом ядра φ, то полный прообраз вектора y_0 можно представить в виде

$$x_0 + Ker\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \left\{ x \mid x = \lambda_1 \begin{pmatrix} -11 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix},\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R} \right\}.$$

Ответ: $y_0 = \varphi(x_0) = \begin{pmatrix} 13 & 26 \\ 30 & 21 \end{pmatrix}$ – образ вектора x_0 под действием оператора φ;

$$x_0 + Ker\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \left\{ x \mid x = \lambda_1 \begin{pmatrix} -11 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix},\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R} \right\} -$$

полный прообраз вектора y_0.

Задача 8.

Доказать эквивалентность следующих определений невырожденности линейного оператора. Линейный оператор φ
n-мерного векторного пространства L называется *невырожденным*, если:

а) определитель матрицы оператора φ в каком-нибудь (а значит, и в любом) базисе отличен от нуля;

б) ядро I оператора φ является нулевым (подпространством в L): I=(0);

с) отображение φ взаимно однозначно.

Решение.

Пусть $A=(a_{ij})$ есть матрица оператора φ в некотором базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ принадлежит ядру I оператора φ тогда и только тогда, когда $Ax=0$, т.е. когда его координаты удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что I=(0) тогда и только тогда, когда определитель матрицы A не равен нулю: $|A| \neq 0$, т.е. определения *а*) и *б*) эквивалентны.

Теперь докажем эквивалентность определений *б*) и *с*). Напомним, что отображение φ взаимно однозначно, если: 1) $\varphi(L)=L$ и 2) из $a \neq b$ следует $\varphi(a) \neq \varphi(b)$.

Если $I \neq (0)$, то найдется вектор $a \neq 0$ такой, что $\varphi(a)=0$. Тогда имеем: $a \neq 0$ и $\varphi(a) = \varphi(0)$, т.е. отображение φ не взаимно однозначно.

Пусть $I = (0)$, т.е. из $\varphi(a) = 0$ следует $a = 0$. Следовательно, система векторов

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = a_1, \\ \varphi(e_2) = a_2, \\ \dots \ \dots \ \dots \\ \varphi(e_n) = a_n, \end{cases}$$

линейно независима. В самом деле, если $c_1a_1 + c_2a_2 + \ldots + c_n a_n = 0$, где хотя бы одно $c_i \neq 0$, то для $a = c_1a_1 + c_2a_2 + \ldots + c_n a_n$ имеем $\varphi(a) = 0$, тогда как из линейной независимости системы векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ следует $a \neq 0$. Таким образом, $I \neq (0)$, что противоречит условию. Значит, система $a_1, a_2, \ldots, a_n$ линейно независима, а потому является базисом L. Отсюда следует, что любой вектор $b \in L$ можно представить в виде $b = c_1a_1 + c_2a_2 + \ldots + c_n a_n$ и $\varphi(c_1a_1 + c_2a_2 + \ldots + c_n a_n) = b$, т.е. для каждого вектора b найдется вектор a такой, что $\varphi(a) = b$. Это означает, что $\varphi(L) = L$. Условие 2) взаимной однозначности оператора φ очевидно. В самом деле, если $a \neq b$, но $\varphi(a) = \varphi(b)$, то $a-b \neq 0$ и $\varphi(a-b) = \varphi(a) - \varphi(b) = 0$, т.е. $a-b \in I$, а потому $I \neq 0$, что противоречит условию.

Таким образом, $I = (0)$ тогда и только тогда, когда отображение φ взаимно однозначно, т.е. определения *б*) и *с*) эквивалентны. Отсюда, из эквивалентности определений *а*) и *б*), следует эквивалентность *а*) и *с*).

Задача 9.

а) Пусть φ — линейный оператор векторного пространства L размерности n, a — ненулевой вектор из L и L_1 — минимальное подпространство в L, инвариантное относительно оператора φ и содержащее a. Доказать, что размерность L_1 равна рангу системы векторов

$$a,\ \varphi(a),\ \varphi^2(a),\ \ldots,\ \varphi^{n-1}(a). \tag{2.2}$$

б) Найти размерность и базис L_1 в случае, когда $L = \mathbb{R}^4$, $a = (1, 1, 0, 1)$ и φ имеет (в том же базисе, в котором задан вектор a) матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение.

а) Так как L_1 инвариантно относительно φ, то вместе с каждым вектором оно обязано содержать его образ при отображении φ. Отсюда и из того, что $a \in L_1$, следует, что L_1 содержит множество векторов

$$a = \varphi^0(a),\ \ \varphi(a),\ \ \varphi^2(a),\ \dots, \tag{2.3}$$

а потому и все подпространство L', порожденное этими векторами. С другой стороны, L' инвариантно относительно оператора φ.

В самом деле, пусть $b \in L'$, т.е. b есть линейная комбинация каких-либо векторов из (2.3):

$$b = c_1\varphi^{k_1}(a) + c_2\varphi^{k_2}(a) + \ldots + c_m\varphi^{k_m}(a).$$

Тогда

$$\varphi(b) = c_1\varphi^{k_1+1}(a) + c_2\varphi^{k_2+1}(a) + \ldots + c_m\varphi^{k_m+1}(a).$$

Отсюда, учитывая, что подпространство L' – минимальное инвариантное подпространство, имеем: $L = L'$. Найдем базис L'. Пусть k – наименьшее натуральное число, такое, что система векторов

$$a,\ \varphi(a),\ \varphi^2(a),\ \dots,\ \varphi^{k-1}(a) \tag{2.4}$$

линейно независима, а

$$\varphi^k(a)=c_1a+ c_2\varphi(a)+\ldots+c_k\varphi^{k-1}(a). \tag{2.5}$$

Поскольку размерность пространства L равна n, а ряд векторов (2.3) бесконечен, то найдется такое k, что $k \le n$. Индукцией по m докажем, что вектор $\varphi^m(a)$ линейно выражается через систему векторов (2.4) при любом m.

Для $m = 0, 1, \dots, k-1$ это так. Допустим, что

$$\varphi^m(a)=b_1a+ b_2\varphi(a)+\ldots+b_{k-1}\varphi^{k-2}(a)+ b_k\varphi^{k-1}(a).$$

Тогда

$$\varphi^{m+1}(a)=b_1\varphi(a)+ b_2\varphi^2(a)+\ldots+b_{k-1}\varphi^{k-1}(a)+ b_k\varphi^k(a).$$

Отсюда, с учетом равенства (2.5), получим:

$$\varphi^{m+1}(a)=b_kc_1a+ (b_kc_2+b_1)\varphi(a)+\ldots+ (b_kc_k+ b_{k-1})\varphi^{k-1}(a).$$

Таким образом, векторы ряда (2.3), а потому и все векторы подпространства L' линейно выражаются через линейно независимую систему векторов (2.4). Следовательно, система (2.4) является базисом пространства L' и размерность L' равна k. А так как число k не превосходит n, то оно равно рангу системы векторов (2.2).

б) В данном случае a=(1, 1, 0, 1),

$$\varphi(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (1, 1, 1, 0),$$

$$\varphi^2(a) = \varphi(\varphi(a)) = (0, 0, 1, 1),$$
$$\varphi^3(a) = \varphi(\varphi^2(a)) = (1, 1, 0, 1).$$

Ранг системы векторов $a,\ \varphi(a),\ \varphi^2(a),\ \varphi^3(a)$, или ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

равен 3. Значит, и ранг подпространства L_1 равен 3. Базисом подпространства L_1 может служить система векторов:

$$a = (1, 1, 0, 1),\ \ \varphi(a) = (1, 1, 1, 0),\ \ \varphi^2(a) = (0, 0, 1, 1).$$

Ответ: *б*) $rank\ L_1 = 3$; $a = (1, 1, 0, 1)$, $\varphi(a) = (1, 1, 1, 0)$, $\varphi^2(a) = (0, 0, 1, 1)$ – базис L_1.

Задача 10.

В пространстве $\mathbb{R}^3$ линейный оператор φ переводит любой вектор $t = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ в вектор $\varphi(t) = (-x, y, z)$. Дать геометрическую интерпретацию заданного отображения и описать все подпространства $\mathbb{R}^3$, инвариантные относительно отображения φ.

Решение.

Выберем в трехмерном пространстве прямоугольную систему координат $Oxyz$ и будем понимать каждый набор (x, y, z) из $\mathbb{R}^3$ как вектор, идущий из начала координат в точку с координатами x, y, z. Все одномерные и двумерные подпространства $\mathbb{R}^3$ будут тогда центральными (т.е. проходящими через центр O) прямыми и плоскостями, а оператор φ будет означать симметрию относительно плоскости yOz. Следовательно, векторы этой плоскости будут переходить в себя. Понятно также, что если центральная плоскость проходит через ось Ox (т.е. если она перпендикулярна плоскости yOz), то любой вектор этой плоскости переходит в вектор этой же плоскости. Таким образом, все двумерные инвариантные подпространства $\mathbb{R}^3$ – это плоскость yOz и все перпендикулярные ей центральные плоскости.

Рассуждая аналогично, получим, что все одномерные инвариантные подпространства – это все центральные прямые плоскости yOz и перпендикулярная этой плоскости центральная прямая Ox.

Ответ: инвариантные подпространства $\mathbb{R}^3$ – плоскость yOz и все перпендикулярные ей центральные плоскости, а также центральные прямые плоскости yOz и перпендикулярная этой плоскости центральная прямая Ox.

Задача 11.

Пусть φ – линейный оператор n-мерного пространства L в себя, a – любой ненулевой вектор из L, а L_1 – подпространство L, порожденное векторами

$$a,\ \varphi(a),\ \varphi^2(a),\ \ldots, \varphi^{n-1}(a), \tag{2.6}$$

где $\varphi^2(a) = \varphi(\varphi(a))$, $\varphi^3(a) = \varphi(\varphi^2(a))$, …, $\varphi^{n-1}(a) = \varphi(\varphi^{n-2}(a))$.

а) Показать, что L_1 – инвариантное подпространство относительно φ.

б) Найти базис L_1, если L есть пространство M_2 вещественных квадратных матриц порядка 2 над полем $\mathbb{R}$, $a = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, а оператор φ задан в базисе

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

а) Покажем сначала, что вектор $\varphi^n(a)$ линейно выражается через векторы системы (2.6). Система

$$a,\ \varphi(a),\ \dots, \varphi^{n-1}(a),\ \varphi^n(a) \qquad (2.7)$$

линейно зависима в L, так как она состоит из (n+1)-го вектора. Поэтому найдутся такие числа λ_0, λ_1, …, λ_{n-1}, λ_n, не равные одновременно нулю, что

$$\lambda_0 a + \lambda_1 \varphi(a) + ... + \lambda_{n-1}\varphi^{n-1}(a) + \lambda_n \varphi^n(a) = 0. \qquad (2.8)$$

Пусть λ_k – последнее отличное от нуля число в последовательности чисел $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$. Ясно, что $\lambda_k \neq \lambda_0$, так как $a \neq 0$. Мы имеем из (2.8):

$$\lambda_0 a + \lambda_1 \varphi(a) + ... + \lambda_k \varphi^k(a) = 0.$$

Отсюда следует, что вектор $\varphi^k(a)$ линейно выражается через предшествующие векторы системы (2.7):

$$\varphi^k(a) = \mu_0 a + \mu_1\varphi(a) + ... + \mu_{k-1}\varphi^{k-1}(a). \qquad (2.9)$$

Применяя (n–k) раз оператор φ к обеим частям равенства (2.9), получим:

$$\varphi^n(a) = \mu_0\varphi^{n-k}(a) + \mu_1\varphi^{n-k+1}(a) + ... + \mu_{k-1}\varphi^{n-1}(a).$$

Пусть теперь b – любой вектор из L_1:

$$b = k_0 a + k_1\varphi(a) + \dots + k_{n-1}\varphi^{n-1}(a).$$

Тогда

$$\varphi(b) = k_0\varphi(a) + k_1\varphi^2(a) + \dots + k_{n-1}(\mu_0\varphi^{n-k}(a) + \dots + \mu_{k-1}\varphi^{n-1}(a)) \in L_1,$$

т.е. L_1 – инвариантное относительно оператора φ подпространство.

б) Учитывая, что числа 3, 0, 0, 0 являются координатами вектора *a*, находим координаты a_1, a_2, a_3, a_4 вектора $\varphi(a)$:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычисляя таким же образом векторы $\varphi^2(a)$ и $\varphi^3(a)$, находим, что система (2.6) в данном случае будет состоять из векторов

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Базис этой системы, а значит, и L_1 составляют, очевидно, векторы

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ: *б*) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ – базис L_1.

Задача 12.

В арифметическом трехмерном пространстве в единичном базисе линейный оператор φ задан матрицей *A*. Установить, является ли инвариантной относительно φ линейная оболочка векторов a_1, a_2 и определить, каков ранг индуцированного в ней оператора, если

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \; a_1 = (1, 1, 0), \; a_2 = (1, 0, -1).$$

Решение.

I способ. Пусть $L = \langle a_1, a_2 \rangle$. Требуется доказать, что для любого $b \in L$ имеет место $\varphi(b) \in L$. Очевидно, $b = c_1 a_1 + c_2 a_2$, где c_1 и c_2 – произвольные числа, т.е. $b = (c_1 + c_2, c_1, -c_2)$ – общий вид вектора из *L*. Тогда $\varphi(b)$ вычисляем, умножая *A* на столбец координат вектора *b*:

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 + c_2 \\ c_1 \\ -c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c_1 + 2c_2 \\ 2c_1 \\ -2c_2 \end{bmatrix}, \text{ т.е. } \varphi(b) = 2b, \; \varphi(b) \in L.$$

Так как под действием φ каждый вектор из *L* удваивается, то база переходит в базу, т.е. φ индуцирует в *L* невырожденный оператор (гомотетию в данном случае) ранга 2.

II способ. Вычислим $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$ и проверим, выражаются ли они линейно через a_1 и a_2:

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},$$

т.е. $\varphi(a_1)$ = (2, 2, 0), $\varphi(a_2)$ = (2, 0, –2). Решаем пакет двух систем линейных уравнений:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right],$$

т.е. $\varphi(a_1) = 2a_1 + 0a_2$, $\varphi(a_2) = 0a_1 + 2a_2$, $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2) \in L$.
Видно, что $\varphi(a_1)$ и $\varphi(a_2)$ линейно независимы, т.е. φ индицирует оператор ранга 2.

Ответ: является; ранг индуцированного оператора равен 2.

Упражнения

1. Найти ядро и образ тождественного оператора.

2. В каком случае ядро линейного оператора f векторного пространства V состоит только из нулевого вектора?

3. Доказать, что линейный оператор n-мерного векторного пространства L в себя является взаимно однозначным отображением тогда и только тогда, когда при этом отображении любой базис пространства L переходит снова в базис.

4. Доказать, что если φ и ψ – линейные операторы пространства L, такие, что $Ker\varphi = Ker\psi = \{0\}$, то $Ker(\varphi\psi) = \{0\}$.

5. Найти ядро и образ, линейного оператора $f: V \to V$, если для любого вектора $x \in V$ имеет место $f(x)=0$.

6. *а*) Найти ядро и образ, ранг, дефект, базисы ядра и образа линейного оператора φ пространства $\mathbb{R}^3$, если φ задан формулой $\varphi(x) = 2x$. Найти матрицу этого оператора в каком-нибудь базисе e_1, e_2, e_3 пространства $\mathbb{R}^3$. Показать, что φ является изоморфным оператором пространства $\mathbb{R}^3$ на себя.

б) Найти ядро и образ, ранг, дефект оператора f: $E_3 \to E_3$, если для любого вектора $x \in E_3$ имеет место $f(x)=kx$, где k — фиксированное вещественное число $(k \neq 0)$.

7. Показать, что отображение пространства A_3, переводящее строку (x_1, x_2, x_3) в строку:

а) $(0, 0, x_3)$;

б) (x_1, x_2, ax_3), где $a \in \mathbb{R}$;

в) $(x_1, -x_2, x_3)$;

г) $(x_1 \cos\varphi - x_2 \sin\varphi, x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi, x_3)$,

является линейным оператором. В каждом случае найти матрицу линейного оператора в базисе $e_1=(1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$; образ и ядро. Указать геометрическую интерпретацию.

8. В пространстве $\mathbb{R}^3$ задан некоторый базис a_1, a_2, a_3, а в пространстве M_2 вещественных квадратных матриц 2-го порядка над полем $\mathbb{R}$ заданы некоторый базис e_1, e_2, e_3, e_4 и вектор $b=e_1+2e_2+3e_3+ 4e_4$; φ — отображение $\mathbb{R}^3$ в M_2, такое, что для всякого вектора $x=x_1a_1+ x_2a_2 + x_3a_3$ имеет место $\varphi(x) = x_1b$.

а) Доказать, что отображение φ является линейным оператором, и найти его матрицу в заданных базисах.

б) Найти базисы ядра и образа оператора φ.

9. Найти матрицу, образ и ядро линейного оператора φ пространства $\mathbb{R}^3$ в базисе $e_1=(1, 0, 0)$, $e_2=(0, 1, 0)$, $e_3=(0, 0, 1)$, если известно, что он любой вектор $x = (x_1, x_2, x_3)$ переводит в вектор:

$$а)\ \varphi(x) = (x_1, -x_2, 2x_3); \quad б)\ \varphi(x) = (x_1 - x_3, x_1 + x_2, 0).$$

10. Пусть a — фиксированный ненулевой вектор евклидова пространства E_3. Найти ядро и образ, ранг, дефект линейного оператора f: $E_3 \to E_3$, если для любого вектора $x \in E_3$:

а) $f(x)=(x, a)a$; *б*) $f(x)=[x, a]$.

11. Линейный оператор φ пространства M_2 квадратных матриц 2-го порядка над полем $\mathbb{R}$ каждую матрицу $A \in M_2$ переводит в матрицу $\varphi(A) = A\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу φ в базисе

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а также по одному базису для ядра и образа φ.

12. Чему равен дефект d линейного оператора φ пространства $\mathbb{R}^3$, если φ в некотором базисе задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

Является ли φ взаимно однозначным отображением пространства $\mathbb{R}^3$ на себя?

13. Найти ядро и образ, ранг, дефект линейного оператора $f : V \to V$, матрица которого равна A, если:

$$а)\ A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1\\ 3 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix};\ б)\ A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 1 & -1\\ 4 & 0 & 1\end{bmatrix};$$

$$в)\ A=\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\ 8 & 2 & 4\\ 12 & 3 & 6\end{bmatrix};\ г)\ A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

14. Линейный оператор φ пространства $\mathbb{R}^3$ в базисе $a_1 = (0, 0, 1)$, $a_2 = (0, 1, 1)$, $a_3 = (1, 1, 1)$ задан матрицей

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

а) Существует ли для φ обратное отображение φ^{-1}? Если существует, то какова его матрица в заданном базисе?

б) Найти полный прообраз вектора $y = -a_1 + 2a_3$ при заданном отображении φ.

15. Доказать, что полный прообраз любого вектора a при линейном отображении пространства $\mathbb{R}^4$ является линейным многообразием в $\mathbb{R}^4$.

16. Линейный оператор φ пространства $\mathbb{R}^4$ задан в некотором базисе e_1, e_2, e_3, e_4 матрицей

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 4 & 7\\ 4 & -3 & 11 & -2\\ -5 & 3 & -13 & 1\\ 7 & -2 & 16 & 3\end{pmatrix}.$$

Найти многообразие M пространства $\mathbb{R}^4$, которое служит полным прообразом вектора $y= -3e_1+13e_2-14e_3+13e_4$.

17. В пространстве E_2 дан линейный оператор f, ортогонально проектирующий всякий вектор a этого пространства на ось Ox. Найти ядро и образ оператора f.

18. В пространстве E_3 дан линейный оператор f, ортогонально проектирующий всякий вектор a этого пространства на плоскость Oxy. Найти ядро и образ, ранг, дефект оператора f.

19. *а*) Исходя из геометрических соображений, найти ядро, дефект, образ и ранг линейного оператора φ – ортогонального проектирования пространства V_3 на плоскость xOy прямоугольной системы координат, где e_1, e_2, e_3 – векторы, направленные по осям координат.

б) Исходя из геометрических соображений, найти ядро, дефект, образ и ранг линейного оператора φ – проектирования трехмерного пространства на координатную ось вектора e_1 параллельно координатной плоскости векторов e_2 и e_3, где e_1, e_2, e_3 – векторы, направленные по осям пространственной системы координат.

20. Найти ядро, дефект, область значений и ранг линейного оператора φ – ортогонального проектирования пространства V_3 на ось, образующую равные углы с осями прямоугольной системы координат.

21. Доказать, что ядро линейного оператора φ n-мерного векторного пространства L в себя является нулевым подпространством тогда и только тогда, когда в любом базисе матрица оператора является невырожденной.

22. Пусть линейный оператор φ пространства F_n многочленов степени $\leq n-1$ над полем $\mathbb{R}$ состоит в дифференцировании многочленов из F_n. Найти образ и ядро оператора φ.

3. СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ И СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА И МАТРИЦЫ

Пусть L – векторное пространство над полем F, f – линейный оператор пространства L, A – квадратная матрица порядка n над полем F. Если X – столбец высоты n, то произведение AX имеет смысл и также является столбцом высоты n. При рассмотрении ряда вопросов для данной матрицы A приходится разыскивать ненулевые столбцы X, для которых умножение на A слева равносильно умножению на некоторое число λ, т.е. для которых имеет место равенство

$$AX = \lambda X. \tag{3.1}$$

Нулевой столбец, конечно, при любом λ удовлетворяет этому соотношению. Однако ненулевые столбцы, удовлетворяющие условию (3.1), существуют далеко не при всяком λ.

Определение 1. Число λ называется *собственным значением* или *собственным числом* квадратной *матрицы* A, если существует ненулевой столбец X такой, что $AX=\lambda X$.

Если λ – собственное значение матрицы A, то всякий столбец X (в том числе и нулевой), удовлетворяющий условию $AX=\lambda X$, называется *собственным столбцом матрицы* A, соответствующим собственному значению λ.

Займемся выяснением вопроса, что же представляют собой собственные значения данной квадратной матрицы (и существуют ли они вообще).

Пусть

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n}\\ & \dots & \dots & \dots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn}\end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}.$$

Матричное равенство (3.1) равносильно системе n равенств

$$\begin{cases}\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\ldots+\alpha_{1n}x_n=\lambda x_1,\\ \alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\ldots+\alpha_{2n}x_n=\lambda x_2,\\ \quad\dots\qquad\dots\qquad\dots\\ \alpha_{n1}x_1+\alpha_{n2}x_2+\ldots+\alpha_{nn}x_n=\lambda x_n,\end{cases} \tag{3.2}$$

которые можно также переписать в виде

$$\begin{cases}(\alpha_{11}-\lambda)x_1+\alpha_{12}x_2+\ldots+\alpha_{1n}x_n=0,\\ \alpha_{21}x_1+(\alpha_{22}-\lambda)x_2+\ldots+\alpha_{2n}x_n=0,\\ \quad\dots\qquad\dots\qquad\dots\\ \alpha_{n1}x_1+\alpha_{n2}x_2+\ldots+(\alpha_{nn}-\lambda)x_n=0.\end{cases} \tag{3.3}$$

Существование ненулевого столбца X, удовлетворяющего условию (3.1), равносильно существованию ненулевого решения у системы n линейных однородных уравнений (3.3) с n неизвестными. Но система (3.3) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю, т.е. когда

$$\begin{vmatrix}\alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda & \dots & \alpha_{2n}\\ \dots & \dots & & \dots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn}-\lambda\end{vmatrix}=0. \tag{3.4}$$

Следовательно, собственные значения λ матрицы A характеризуются тем, что для них обращается в нуль определитель (3.4).

Определение 2. Пусть t – переменная. Определитель

$$\varphi_A(t)=\begin{vmatrix}\alpha_{11}-t & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-t & \dots & \alpha_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn}-t\end{vmatrix}=|A-tE| \tag{3.5}$$

называется *характеристическим многочленом матрицы A*, уравнение $|A-tE|=0$ называется *характеристическим уравнением матрицы A*. Корни характеристического уравнения называются *характеристическими корнями матрицы A*.

Тот факт, что определитель (3.5) является многочленом от переменной t, очевиден (любое из $n!$ произведений, из которых составлен этот определитель, является многочленом от t). Произведение элементов главной диагонали определителя (3.5) является, очевидно, многочленом от t степени n; при этом коэффициент при t^n равен $(-1)^n$. Все же другие произведения, входящие в состав этого определителя, будут многочленами от t степени, строго меньшей n. Следовательно, степень характеристического многочлена $\varphi_A(t)$ равна порядку n матрицы A и его старший коэффициент равен $(-1)^n$.

Предыдущие наши утверждения позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. Все собственные значения квадратной матрицы совпадают с корнями ее характеристического многочлена $\varphi_A(t)$.

Действительно, если λ – собственное значение матрицы A, то, как мы видели, обращается в нуль определитель (3.4), а значит, λ – корень многочлена (3.5). Наоборот, если λ – корень характеристического многочлена, т.е. $\varphi_A(t) = 0,$ то ввиду (3.4) система (3.3) имеет ненулевое решение, и следовательно, существует ненулевой столбец, удовлетворяющий условию (3.1); последнее же означает, что λ – собственное значение матрицы A.

Согласно теореме 1, чтобы найти собственные значения квадратной матрицы, надо составить ее характеристический многочлен и найти его корни.

Чтобы найти все собственные столбцы матрицы A, соответствующие данному собственному значению λ, надо, очевидно, найти все решения системы (3.3). Эти решения будут удовлетворять и системе (3.2), а значит, столбцы из решений будут собственными столбцами матрицы A.

По теореме 2 пункта 1.4 матрицы одного и того же линейного оператора f относительно различных базисов подобны. Поэтому они будут иметь одно и то же характеристическое уравнение, которое называется *характеристическим уравнением оператора* f, а собственные значения матрицы оператора f называются *собственными значениями оператора* f. Напомним, что две квадратные матрицы A и B порядка n над полем F называются *подобными*, если существует такая квадратная матрица T порядка n над полем F, которая обратима и $A=T^{-1}BT$.

Задача 1.

Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования A, определяемого уравнениями $x' = 5x + 4y$, $y' = 8x + 9y$.

Решение.

Матрицу преобразования можно записать следующим образом: $A=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 8 & 9-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \lambda^2 - 14\lambda + 13 = 0;$$

собственные значения $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 13$.

Для определения координат собственных векторов получаем две системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} (5-\lambda_1)\xi_1 + 4\xi_2 = 0, \\ 8\xi_1 + (9-\lambda_1)\xi_2 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} (5-\lambda_2)\xi_1 + 4\xi_2 = 0, \\ 8\xi_1 + (9-\lambda_2)\xi_2 = 0. \end{cases}$$

Так как $\lambda_1 = 1$, то первую систему можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} 4\xi_1 + 4\xi_2 = 0, \\ 8\xi_1 + 8\xi_2 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, значения ξ_1 и ξ_2 должны удовлетворять уравнению $\xi_1 + \xi_2 = 0$, или $\xi_2 = -\xi_1$. Следовательно, решение этой системы имеет вид $\xi_1 = c_1$, $\xi_2 = -c_1$, где c_1 – произвольная величина. Поэтому собственному значению $\lambda = 1$ соответствует семейство собственных векторов $u = c_1e_1 - c_1e_2$, т.е. $u = c_1(e_1 - e_2)$.

Значение $\lambda_2 = 13$ приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} -8\xi_1 + 4\xi_2 = 0, \\ 8\xi_1 - 4\xi_2 = 0, \end{cases}$$

т.е. $\xi_2 = 2\xi_1$. Полагая $\xi_1 = c_2$, получаем $\xi_2 = 2c_2$. Следовательно, собственному значению $\lambda = 13$ соответствует семейство собственных векторов $v = c_2(e_1 + 2e_2)$.

Итак, придавая в равенствах $u = c_1(e_1 - e_2)$, $v = c_2(e_1 + 2e_2)$ величинам c_1 и c_2 всевозможные числовые значения, будем получать всевозможные собственные векторы линейного преобразования A.

Ответ: собственные значения: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 13$; собственные векторы: $u = c_1(e_1 - e_2)$; $v = c_2(e_1 + 2e_2)$.

Задача 2.

Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования с матрицей $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение.

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

т.е.

$$(1-\lambda)\left((2-\lambda)^2-1\right)=0, \text{ или } (1-\lambda)^2(3-\lambda)=0,$$

откуда $\lambda_{1,2}=1,\ \lambda_3=3$.

Если $\lambda=1$, то для определения координат собственного вектора получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \xi_1-\xi_2+\xi_3=0, \\ -\xi_1+\xi_2-\xi_3=0, \\ \xi_3=0. \end{cases}$$

Таким образом, собственному значению $\lambda=1$ соответствует семейство собственных векторов $u=c_1(e_1+e_2)$.

Если $\lambda=3$, то для определения координат собственного вектора получаем систему уравнений

$$\begin{cases} -\xi_1-\xi_2+\xi_3=0, \\ -\xi_1-\xi_2+\xi_3=0, \\ \xi_3=0. \end{cases}$$

Семейство собственных векторов, соответствующее этому собственному значению, определяется равенством $v=c_2(e_1-e_2)$.

Ответ: семейство собственных векторов $u=c_1(e_1+e_2)$ соответствует собственному значению $\lambda_{1,2}=1$;

семейство собственных векторов $v=c_2(e_1-e_2)$ соответствует собственному значению $\lambda_3=3$.

Задача 3.

Найти собственные векторы и собственные значения линейного оператора φ пространства $\mathbb{R}^4$ над полем $\mathbb{R}$, заданного в некотором базисе матрицей

$$M(\varphi)=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & -5 & -3\\ 4 & -1 & 3 & 1\end{pmatrix}.$$

Решение.

Так как мы рассматриваем линейный оператор φ пространства $\mathbb{R}^4$ над полем $\mathbb{R}$, то собственными значениями оператора φ будут являться лишь действительные корни его характеристического уравнения $|A-\lambda E|=0$. Вычислим определитель матрицы $A-\lambda E$:

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}3-\lambda & -1 & 0 & 0\\ 1 & 1-\lambda & 0 & 0\\ 3 & 0 & -5-\lambda & -3\\ 4 & -1 & 3 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -1 & 0 & 0\\ \lambda^2-4\lambda+4 & 1-\lambda & 0 & 0\\ 3 & 0 & -5-\lambda & -3\\ 1+\lambda & -1 & 3 & 1-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda^2-4\lambda+4 & 0 & 0\\ 3 & -5-\lambda & -3\\ 1+\lambda & 3 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda^2-4\lambda+4)\begin{vmatrix}-5-\lambda & -3\\ 3 & 1-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=(\lambda-2)^2(\lambda+2)^2.$$

Поскольку характеристическое уравнение $(\lambda-2)^2(\lambda+2)^2=0$ имеет действительные корни $\lambda_{1,2}=2$ и $\lambda_{3,4}=-2$, то собственными значениями линейного оператора φ являются числа 2 и –2.

Рассмотрим $\lambda_{1,2}=2$. Собственными векторами, соответствующими собственному значению 2, будут те и только те ненулевые векторы $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$, записанные своими координатами в том же базисе, что и матрица $M(\varphi)$, которые удовлетворяют матричному уравнению

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & -7 & -3\\ 4 & -1 & 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

т.е. системе линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 & = 0, \\ x_1 - x_2 & = 0, \\ 3x_1 \quad - 7x_3 - 3x_4 & = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 & = 0, \end{cases}$$

или равносильной ей системе

$$\begin{cases} x_1 - x_2 & = 0, \\ \quad 3x_2 - 7x_3 - 3x_4 & = 0, \\ \quad\quad 5x_3 + \ x_4 & = 0. \end{cases}$$

Фундаментальная система решений этой системы состоит из одного вектора, например, таким вектором является $(8, 8, -3, 15)$, а поэтому собственному значению $\lambda_{1,2} = 2$ соответствуют собственные векторы вида $\alpha(8, 8, -3, 15)$, где α – любое отличное от нуля действительное число.

При $\lambda_{3,4} = -2$ имеем:

$$A - \lambda E = A + 2E = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

поэтому координаты собственных векторов должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 & = 0, \\ \quad x_2 & = 0, \\ \quad\quad x_3 + x_4 & = 0. \end{cases}$$

Фундаментальная система решений этой системы состоит из одного вектора, например, таким вектором является $(0, 0, -1, 1)$. Поэтому собственному значению $\lambda_{3,4} = -2$ соответствуют собственные векторы вида $\beta(0, 0, -1, 1)$, где β – любое отличное от нуля действительное число.

Ответ: $\alpha(8, 8, -3, 15)$ – собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_{1,2} = 2$, где α – любое отличное от нуля действительное число; $\beta(0, 0, -1, 1)$ – собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_{3,4} = -2$, где β – любое отличное от нуля действительное число.

Задача 4.

Найти собственные значения и собственные столбцы матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Находим характеристический многочлен $\varphi_A(t)=|A-tE|$. Он равен $(t–1)(t–2)^3$. Значит, матрица имеет два собственных значения: $\lambda_1=1$ и $\lambda_2=2$. Для каждого λ составляем теперь систему (3.3):

$$\begin{cases} -x_2-x_3-x_4=0, \\ x_2 \qquad\qquad =0, \\ x_4=0, \\ x_3+2x_4=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} -x_1-x_2-x_3-x_4=0, \\ 0=0, \\ -x_3-x_4=0, \\ x_3+x_4=0. \end{cases}$$

Решая эти системы, получаем, что собственными столбцами матрицы A для собственных значений $\lambda_1=1$ и $\lambda_2=2$ соответственно являются столбцы

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ \beta \\ -\beta \end{pmatrix},$$

где α и β – произвольные числа.

Ответ: собственные значения: $\lambda_1=1$ и $\lambda_2=2$;

собственные столбцы $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ \beta \\ -\beta \end{pmatrix}$,

где α и β – произвольные числа.

Задача 5.

Доказать, что если $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ – симметрическая матрица, а действительные числа $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$, то все корни характеристического уравнения матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\dfrac{\alpha}{\beta} & a_{13}\dfrac{\alpha}{\gamma} \\ a_{21}\dfrac{\beta}{\alpha} & a_{22} & \alpha_{23}\dfrac{\beta}{\gamma} \\ a_{31}\dfrac{\gamma}{\alpha} & a_{32}\dfrac{\gamma}{\beta} & a_{33} \end{pmatrix}$$

являются действительными числами.

Решение.

В базисе e_1, e_2, e_3 рассмотрим линейное преобразование с матрицей A.

Тогда

$$\begin{cases} Ae_1 = a_{11}e_1 + \left(a_{21}\dfrac{\beta}{\alpha}\right)e_2 + \left(a_{31}\dfrac{\gamma}{\alpha}\right)e_3, \\ Ae_2 = \left(a_{12}\dfrac{\alpha}{\beta}\right)e_1 + a_{22}e_2 + \left(a_{32}\dfrac{\gamma}{\beta}\right)e_3, \\ Ae_3 = \left(a_{13}\dfrac{\alpha}{\gamma}\right)e_1 + a_{23}\left(\dfrac{\beta}{\gamma}\right)e_2 + a_{33}e_3 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} A(\alpha e_1) = a_{11}\alpha e_1 + a_{21}\beta e_2 + a_{31}\gamma e_3, \\ A(\beta e_2) = a_{12}\alpha e_1 + a_{22}\beta e_2 + a_{32}\gamma e_3, \\ A(\gamma e_3) = a_{13}\alpha e_1 + a_{23}\beta e_2 + a_{33}\gamma e_3. \end{cases}$$

Полагая $\alpha e_1 = e_1', \beta e_2 = e_2', \gamma e_3 = e_3',$ имеем

$$\begin{cases} Ae_1' = a_{11}e_1' + a_{21}e_2' + a_{31}e_3', \\ Ae_2' = a_{12}e_1' + a_{22}e_2' + a_{32}e_3', \\ Ae_3' = a_{13}e_1' + a_{23}e_2' + a_{33}e_3'. \end{cases}$$

Таким образом, матрицей линейного преобразования в базисе e_1', e_2', e_3' служит симметрическая матрица

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, характеристическое уравнение линейного преобразования в базисе e_1', e_2', e_3' имеет только действительные корни. Так как при переходе к базису e_1, e_2, e_3 собственные значения не меняются, то те же корни имеет и характеристическое уравнение матрицы A.

Упражнения

1. В векторном пространстве $\mathbb{R}^3$ задан базис

$$a_1 = (1, 1, 0),\ a_2 = (1, 1, 1),\ a_3 = (0, 2, 2),$$

а оператор φ переводит произвольный вектор $x \in \mathbb{R}^3$, причем $x = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3$, в вектор $\varphi(x) = x_1a_1$. Выяснить, какие из векторов

$$b_1 = (-2, -2, 0),\ b_2 = (5, 5, 0),\ b_3 = (2, 2, 2),\ b_4 = (2, 8, 8),\ b_5 = (2, 2, 1)$$

являются собственными векторами линейного оператора φ и каким собственным значениям они отвечают.

2. В некотором базисе даны матрица $M(f)$ линейного оператора f и векторы x_1, x_2, x_3. Определить в каждом из случаев, какие из указанных векторов являются собственными векторами линейного оператора f:

а) $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},\ x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix},\ x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix};$

б) $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix},\ x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix},\ x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix},\ x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix};$

в) $M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},\ x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix},\ x_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix};$

г) $M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix},\ x_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

3. Найти собственные векторы и собственные значения линейного оператора φ векторного пространства $\mathbb{R}^3$, переводящего строку (x_1, x_2, x_3) в строку:

а) $(0, 0, x_3)$;

б) (x_1, x_2, ax_3);

в) $(x_1, -x_2, x_3)$;

г) $(x_1 \cos\varphi - x_2 \sin\varphi,\ x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi,\ x_3)$.

4. Найти собственные значения и собственные столбцы матриц:

$$а)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix};\ б)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ с)\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

5. Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования с матрицей:

$$а)\ A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix};\quad б)\ A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix};\quad в)\ A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix};$$

$$г)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix};\quad д)\ A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix};\quad е)\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Найти собственные векторы и собственные значения линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицами:

$$а)\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix};\ б)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix};\ в)\ \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix};$$

$$г)\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 6 & -3 & 1 \end{pmatrix};\ д)\ \begin{pmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 6 & 3 & 8 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix};\ е)\ \begin{pmatrix} -6 & 12 & -4 \\ -6 & 11 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$ж)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ з)\ \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

7. Доказать, что любая линейная комбинация собственных столбцов матрицы, соответствующих одному и тому же собственному значению λ, является также собственным столбцом для того же собственного значения λ.

8. Пусть X является собственным столбцом для двух квадратных матриц n-го порядка A и B (собственные значения различны). Доказать, что тогда X является собственным столбцом и для матриц AB, $A+B$, αA. Чему равны соответствующие собственные значения?

9. Пусть X – собственный столбец квадратной матрицы A, λ – соответствующее собственное значение и $f(t)$ – произвольный многочлен. Основываясь на предшествующей задаче, показать, что X является также собственным столбцом матрицы $f(A)$, соответствующим собственному значению $f(\lambda)$.

10. Линейный оператор φ пространства $\mathbb{R}^3$ задан невырожденной матрицей

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные значения оператора φ^{-1}.

11. Зная собственные значения линейного преобразования A, найти собственные значения обратного линейного преобразования A^{-1}. Показать, что из уравнения $\left|A^{-1} - \lambda E\right| = 0$ следует $\left|A - \left(\frac{1}{\lambda}\right)E\right| = 0$.

12. Выразить собственные значения и собственные векторы невырожденного линейного преобразования φ через собственные значения и собственные векторы преобразования φ^{-1}.

13. Доказать, что если φ и ψ – невырожденные линейные преобразования некоторого векторного пространства, то преобразования $\varphi\psi$ и $\psi\varphi$ имеют одни и те же собственные значения.

Указание. Заметьте, что матрицы преобразований $\varphi\psi$ и $\psi\varphi$ подобны.

14. Линейное преобразование A заключается в повороте пространства на угол $\frac{\pi}{3}$ вокруг оси Oz. Найти собственные значения и собственные векторы этого преобразования. Показать, что матрица этого линейного преобразования имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

15. Доказать, что собственными значениями треугольной матрицы являются ее диагональные элементы.

16. Доказать, что все собственные значения квадратной матрицы A отличны от нуля тогда и только тогда, когда матрица обратима.

17. В некотором базисе пространства $\mathbb{R}^2$ линейный оператор φ задан матрицей:

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix};\quad б)\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Убедитесь непосредственно, что в случае *а*) собственных векторов не существует, а в случае *б*) каждый вектор является собственным.

18. Квадратная матрица A называется кососимметричной, если $A' = -A$. Доказать, что все собственные значения вещественной кососимметричной матрицы имеют вид $\lambda = bi$ с вещественным b (т.е. расположены на мнимой оси).

19. Квадратная матрица A (с комплексными элементами) называется эрмитовской, если $A' = \overline{A}$. Доказать, что все собственные значения эрмитовской матрицы вещественны.

20. Квадратная матрица C (с комплексными элементами) называется унитарной, если $C'\overline{C} = E$. Доказать, что все собственные значения унитарной матрицы по модулю равны единице ($|\lambda| = 1$).

Указание. Для собственного столбца X рассмотреть произведение $X'C'\overline{C}\overline{X}$.

4. ПРИВЕДЕНИЕ МАТРИЦЫ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА К ДИАГОНАЛЬНОМУ ВИДУ

Определение 1. Набор всех собственных значений линейного оператора f называется его *спектром.*

Если все собственные значения оператора f различны, то спектр называется *простым.*

Для линейного оператора с простым спектром имеет место следующая

Теорема 1. Если вектора некоторого базиса пространства L являются собственными векторами некоторого оператора f, то матрица оператора f в этом базисе диагональна. Если в некотором базисе пространства L матрица оператора f диагональна, то вектора этого базиса будут собственными векторами оператора f.

Определение 2. Говорят, что матрица A *приводится к диагональному виду,* если существует такая матрица C, что матрица CAC^{-1} является диагональной.

Теорема 2. Всякая квадратная матрица порядка n, имеющая n различных характеристических корней, приводится к диагональному виду.

Теорема 3. Матрица линейного оператора приводится к диагональному виду тогда и только тогда, когда всякому характеристическому корню матрицы соответствует столько линейно независимых собственных векторов оператора матрицы, какова кратность характеристического корня.

Задача 1

Выяснить, можно ли матрицу A линейного оператора φ вещественного пространства L привести к диагональному виду путём перехода к новому базису, и если можно, то найти этот базис и соответствующую ему диагональную матрицу:

$$a)\ A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix};\quad б)\ A=\begin{pmatrix}5 & 0 & -2\\ 8 & 1 & -4\\ 12 & 0 & -5\end{pmatrix};$$

$$в)\ A=\begin{pmatrix}6 & -5 & -3\\ 3 & -2 & -2\\ 2 & -2 & 0\end{pmatrix};\quad г)\ A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 6\\ 3 & 2 & 6\\ -3 & -2 & -7\end{pmatrix}.$$

Решение.

а) Находим характеристический многочлен матрицы A:

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 0 & 2\\ 1 & 1-\lambda & -1\\ 0 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+2\lambda^2+\lambda-2=-(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+1).$$

Он имеет три корня 1, 2 и –1, т.е. отображение φ имеет столько различных собственных значений из поля $\mathbb{R}$, какова размерность пространства L над полем $\mathbb{R}$. Следовательно, его матрица приводится к диагональной форме – элементами её главной диагонали будут собственные значения 1, 2 и –1:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Для отыскания базиса нужно найти собственные векторы, отвечающие полученным собственным значениям, из соответствующих систем уравнений:

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases}-2x_1+2x_3=0,\\ x_1-x_3=0,\\ x_3=0;\end{cases}$$

$$\text{(II)} \begin{cases} -3x_1 \qquad + 2x_3 = 0, \\ \quad x_1 - x_2 - x_3 = 0; \end{cases} \qquad \text{(III)} \begin{cases} \qquad\qquad 2x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ \qquad\qquad 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Фундаментальные системы решений всех трех систем содержат по одному вектору: a_1=(0, 1, 0) (система I), a_2=(2, –1, 3) (система II), a_3=(2, –1, 0) (система III) – все векторы заданы своими координатами в том же базисе, в котором задана матрица A. Эти векторы составляют искомый базис.

б) Находим характеристический многочлен матрицы A:

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & -2 \\ 8 & 1-\lambda & -4 \\ 12 & 0 & -5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = -(\lambda-1)^2(\lambda+1).$$

Так как у многочлена $f(\lambda)$ имеется квадратный корень $\lambda=1$, т.е. не все корни различные, то сразу на поставленный в задаче вопрос ответить нельзя, надо сначала найти сумму размерностей собственных подпространств $K(1)$ и $K(-1)$, отвечающих собственным значениям $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = -1$.

Для $\lambda_1 = 1$ собственные векторы находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 + 0x_2 - 2x_3 = 0, \\ 8x_1 + 0x_2 - 4x_3 = 0, \\ 12x_1 + 0x_2 - 6x_3 = 0, \end{cases}$$

фундаментальная система решений, которой состоит из двух решений, например, векторов $b_1 = (1, 0, 2)$, $b_2 = (0, 1, 0)$.
Таким образом, $dim\,K(1)=2$.

Для $\lambda_2 = -1$ получаем следующую систему:

$$\begin{cases} 6x_1 + 0x_2 - 2x_3 = 0, \\ 8x_1 + 0x_2 - 4x_3 = 0, \\ 12x_1 + 0x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Её фундаментальная система решений состоит из одного вектора, например, вектора b_3 = (1, 2, 3), отсюда $dim\,K(-1)=1$. Итак, $dim\,K(1)+ dim\,K(-1) =2+1=3= dim\,L$. Поэтому матрица A приводится к диагональной форме, а именно, в базисе b_1, b_2, b_3 она принимает вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

в) В этом случае характеристический многочлен

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix} 6-\lambda & -5 & -3 \\ 3 & -2-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-2)(\lambda-1)^2$$

также имеет кратный корень $\lambda = 1$. Подпространство $K(1)$ задается системой уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \end{cases}$$

для которой фундаментальная система решений состоит из одного вектора, откуда $dim\,K(1)=1$.

Подпространство $K(2)$ задаётся системой

$$\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0; \end{cases}$$

Её фундаментальная система решений также состоит из одного вектора, поэтому $dim\,K(2)=1$.

Итак, $dim\,K(1) + dim\,K(-1) = 2 < 3$, а значит, матрица линейного оператора φ к диагональному виду не приводима.

г) Характеристический многочлен $f(\lambda) = (\lambda+3)(\lambda^2-\lambda+1)$ имеет корни $\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, не принадлежащие полю $\mathbb{R}$. Поэтому матрица к диагональному виду не приводится.

Ответ: *а*) приводима к диагональной форме $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ в базисе $a_1=(0, 1, 0)$, $a_2=(2, -1, 3)$, $a_3=(2, -1, 0)$; *б*) приводима к диагональной форме $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ в базисе $b_1=(1, 0, 2)$, $b_2=(0, 1, 0)$, $b_3=(1, 0, 2)$; *в*) не приводима к диагональной форме; *г*) не приводима к диагональной форме.

Задача 2

Линейный оператор вещественного пространства в некотором базисе задан матрицей

$$A=\begin{pmatrix}-10 & 54 & 36\\ 0 & -1 & 0\\ -3 & 18 & 11\end{pmatrix}.$$

Показать, что данный оператор диагонализируем. Найти матрицу T, диагонализирующую матрицу A.

Решение.

Известно, что оператор векторного пространства диагонализируем, если выполняются следующие условия: все его характеристические числа вещественные и кратность m_i каждого корня λ_i совпадает с числом $n - r(A- \lambda_i E)$, где n – порядок матрицы A; $r(A - \lambda_i E)$ – ранг матрицы $A - \lambda_i E$. Решив характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix}-10-\lambda & 54 & 36\\ 0 & -1-\lambda & 0\\ -3 & 18 & 11-\lambda\end{vmatrix}=0,$$

найдем собственные значения $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$, кратность которых равна соответственно $m_1 = 2$, $m_2 = 1$. Таким образом, все собственные значения – действительные числа. Так как ранг матрицы

$$A - \lambda_1 E = A - (-1)E=\begin{pmatrix}-9 & 54 & 36\\ 0 & 0 & 0\\ -3 & 18 & 12\end{pmatrix}$$

равен единице, то $n - r(A- \lambda_1 E) = 3 - 1 = 2$ и $m_1= n - r(A- \lambda_1 E)$. Легко убедиться в том, что и $m_2= n - r(A- \lambda_2 E)$. Таким образом, данный оператор диагонализируем.

Матрица T, диагонализирующая матрицу A, в данном случае есть матрица третьего порядка, столбцами которой являются координаты трех линейно независимых собственных векторов матрицы A.

Координаты α_1, α_2, α_3 собственных векторов, соответствующих собственному значению $\lambda_1 = -1$ найдем из системы

$$\begin{cases}-9\alpha_1+54\alpha_2+36\alpha_3=0,\\ 0\alpha_1+\ \ 0\alpha_2+0\alpha_3=0,\\ -3\alpha_1+18\alpha_2+12\alpha_3=0.\end{cases}$$

Имеем $\alpha_1=6\alpha_2+4\alpha_3$. Таким образом,

$$\{(6s+4t, s, t) \mid \forall s, t \in \mathbb{R},\ \ |s|+|t| \neq 0\}$$

есть множество собственных векторов с собственным значением
$\lambda_1 = -1$.

Координаты β_1, β_2, β_3 собственных векторов с собственным значением $\lambda_2 = 2$ найдем из системы

$$\begin{cases} -12\beta_1 + 54\beta_2 + 36\beta_3 = 0, \\ \qquad\quad -3\beta_2 \qquad\quad = 0, \\ -3\beta_1 + 18\beta_2 + \ \ 9\beta_3 = 0. \end{cases}$$

Имеем $\beta_2 = 0$, $\beta_1 = 3\beta_3$. Таким образом,

$$\{(3p,\ 0,\ p)\ \ \forall p \in \mathbb{R},\quad p \neq 0\}$$

есть множество собственных векторов с собственным значением $\lambda_2 = 2$. Положив $s = 0$, $t = 1$, затем $s = 1$, $t = 0$ и $p = 1$, получим линейно независимые собственные векторы (4, 0, 1), (6, 1, 0), (3, 0, 1). Следовательно,

$$T = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: матрица, диагонализующая матрицу A такова: $T = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Упражнения

1. Выяснить, какие из следующих матриц линейных операторов можно привести к диагональному виду путём перехода к новому базису. Найти этот базис и соответствующую ему матрицу:

$$а)\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix};\quad б)\begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Выяснить, какие из следующих матриц линейных операторов можно привести к диагональному виду путём перехода к новому базису. Найти этот базис и соответствующую ему матрицу:

$$а)\begin{pmatrix} 4 & 1 & -6 \\ 4 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & -6 \end{pmatrix};\qquad б)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$в)\ \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & -8 & 5 & 4 \\ 6 & -12 & 8 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \qquad г)\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Выяснить, приводима ли в вещественном пространстве матрица линейного оператора к диагональному виду (в случае приводимости записать диагональный вид матрицы с точностью до расположения диагональных элементов):

$$а)\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad б)\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}; \qquad в)\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$$г)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad д)\ \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad е)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$ж)\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \qquad з)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad и)\ \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

4. В некотором базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ линейный оператор f задан матрицей A. В вещественном векторном пространстве найти базис, в котором матрица оператора f имеет диагональный вид, если:

$$а)\ A=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \qquad б)\ A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}; \qquad в)\ A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$$г)\ A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 6 \\ -4 & -4 & -8 \end{pmatrix}; \quad д)\ A=\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}; \quad е)\ A=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$ж)\ A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \qquad з)\ A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Найти матрицу T, диагонализирующую данную матрицу A, и записать соответствующую диагональную матрицу, если:

$$а)\ A=\begin{pmatrix}1&4\\4&1\end{pmatrix};\quad б)\ A=\begin{pmatrix}6&2\\2&3\end{pmatrix};\quad в)\ A=\begin{pmatrix}4&-2&0\\-2&3&-2\\0&-2&2\end{pmatrix};$$

$$г)\ A=\begin{pmatrix}-9&54&36\\0&0&0\\-3&18&12\end{pmatrix};\quad д)\ A=\begin{pmatrix}-1&-2&-3\\-2&-1&-3\\2&2&4\end{pmatrix};\quad е)\ A=\begin{pmatrix}5&-6&2\\6&-7&2\\6&-6&1\end{pmatrix};$$

$$ж)\ A=\begin{pmatrix}2&0&-3&-3\\0&2&2&2\\0&0&-1&-3\\0&0&2&4\end{pmatrix}.$$

6. Найти диагональную матрицу над полем $\mathbb{R}$, подобную матрице

$$\begin{pmatrix}8&15&-36\\8&21&-46\\5&12&-27\end{pmatrix}.$$

5. СОПРЯЖЕННЫЙ И САМОСОПРЯЖЕННЫЙ ОПЕРАТОРЫ

Определение 1. Линейный оператор $g\colon E_n \to E_n$ называется *сопряженным* оператору $f\colon E_n \to E_n$, если для любых $x, y \in E_n$ выполняется условие $(f(x), y) = (x, g(y))$.

Обозначение: f^* – оператор, сопряженный оператору f.

Теорема 1. Сопряженный оператор обладает следующими свойствами:

1. $(f^*)^* = f$;
2. $(fg)^* = g^*f^*$;
3. $(f+g)^* = f^*+g^*$;
4. $(\alpha f)^* = \alpha f^*$;
5. $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$, если оператор f невырожденный.

Определение 2. Линейный оператор $f\colon E_n \to E_n$ называется *самосопряженным* или *симметрическим*, если для любых $x, y \in E_n$ выполняется условие $(f(x), y)=(x, f(y))$. Таким образом, если f – самосопряженный оператор, то $f = f^*$.

Заметим, что матрица самосопряженного оператора в ортонормированном базисе является симметрической.

Задача 1. Найти ортогональную матрицу T, диагонализирующую симметрическую матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Решение.

Известно, что ортогональная матрица T, диагонализирующая симметрическую матрицу A третьего порядка, имеет следующее строение: в столбцах ее расположены координаты трех ортонормированных собственных столбцов матрицы A. Решив уравнение

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

получаем $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$. Координаты α_1, α_2, α_3 собственного столбца матрицы A с собственным значением $\lambda_1 = 2$ находятся из системы

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

или

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим $\alpha_3 = -\alpha_1$, где $\alpha_1 \in \mathbf{R}$, $\alpha_2 = 0$. Следовательно,

$X_1 = \begin{bmatrix} k \\ 0 \\ -k \end{bmatrix}$ – собственный столбец матрицы A с собственным значением $\lambda_1 = 2$, где $\forall k \in \mathbf{R}, k \neq 0$.

Аналогично находим собственные столбцы

$$X_2 = \begin{bmatrix} m \\ m \\ m \end{bmatrix}, \quad X_3 = \begin{bmatrix} l \\ -2l \\ l \end{bmatrix}$$

с собственными значениями, соответственно $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$, где $\forall m \in \mathbf{R}, m \neq 0, \forall l \in \mathbf{R}, l \neq 0$.

Нормируя X_1, X_2, X_3, получаем

$$X_1^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad X_2^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad X_3^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Ответ: $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

Упражнения

1. Пусть f: $E_n \to E_n$ и g: $E_n \to E_n$ – линейные операторы. Доказать справедливость следующих равенств:

а) $(f+g)^* = f^* + g^*$; *б*) $(\alpha f)^* = \alpha f^*$ $(\alpha \in \mathbf{R})$;

в) $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$, где f – невырожденный оператор.

2. Пусть f: $E_n \to E_n$ и g: $E_n \to E_n$ – линейные операторы. Доказать, что если $f \circ g = g \circ f$, то и $f^* \circ g^* = g^* \circ f^*$.

3. Пусть f: $E_1 \to E_1$ – линейный оператор. Найти сопряженный с ним оператор f^*.

4. Оператор f: $E_n \to E_n$ имеет в некотором ортонормированном базисе матрицу A. Найти матрицу сопряженного оператора в том же базисе, если:

а) $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$; *б*) $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$; *в*) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -5 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

5. Пусть f: $E_2 \to E_2$ – оператор поворота на угол α. Найти сопряженный с ним оператор f^*.

6. Оператор f: $E_n \to E_n$ имеет в некотором ортонормированном базисе матрицу A. Выяснить, является ли оператор f самосопряженным, если:

$$а)\ A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix};\ б)\ A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix};\ в)\ A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix};$$

$$г)\ A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

7. При каком значении α оператор, заданный матрицей A в некотором ортонормированном базисе, является одновременно ортогональным и самосопряженным, если:

$$а)\ A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \alpha \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix};\ \ б)\ A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \alpha & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}?$$

8. Пусть f: $E_2 \to E_2$ – оператор проектирования на ось Ox. Доказать, что f – самосопряженный оператор.

9. Пусть f: $E_3 \to E_3$ – оператор проектирования на плоскость Oxy. Доказать, что f – самосопряженный оператор.

10. Пусть x – собственный вектор с собственным значением λ_1 оператора f: $E_n \to E_n$, y – собственный вектор с собственным значением λ_2 $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ оператора f^*. Доказать, что векторы x и y ортогональны.

11. Линейный оператор f: $E_n \to E_n$ в некотором ортонормированном базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ имеет матрицу A. Найти матрицу сопряженного оператора f^* в ортонормированном базисе $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$, если:

$$а)\ A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix},\ \ e'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\, e_2,\ \ e'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\, e_2;$$

$$б)\ A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},\ \ e'_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\, e_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\, e_2,\ \ e'_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}\, e_1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\, e_2;$$

$$в)\ A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix},\ \ e'_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(e_1 + e_2 + e_3),\ \ e'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(-e_1 + e_2),$$

$$e'_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\,(-e_1 - e_2 + 2e_3).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Алгебра и теория чисел. Под ред. Н.Я. Виленкина. – Ч.3.– М.: Просвещение, 1974.
2. Аносов, Д.В. Лекции по линейной алгебре / Д.В. Аносов. – Ижевск: РХД. Удмуртский госуниверситет, 1999. – 112 с.
3. Апатенок, Р.Ф. Элементы линейной алгебры / Р.Ф. Апатенок, А.М. Маркина, Н.В. Попова, В.Б. Хейнман; Под общ. ред. Р.Ф. Апатенок. – Мн.: Вышэйшая школа, 1977. – 257 с.
4. Апатенок, Р.Ф. Элементы алгебры и аналитической геометрии / Р.Ф. Апатенок, А.М. Маркина, Н.В. Попова, В.Б. Хейнман. – Мн.: Вышэйшая школа, 1986. – 272 с.
5. Архангельский, А.В. Конечномерные векторные пространства / А.В. Архангельский. – М.: Изд-во МГУ, 1982. – 248 с.
6. Беклемишева, Л.А. и др. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре / Л.А. Беклемишева, А.Ю. Петрович, И.А. Чубаров. – М.: Наука, 1987. – 496 с.
7. Беллман, Р. Введение в теорию матриц / Р. Беллман. – М.: Наука, 1969. – 368 с.
8. Боревич, З.И. Определители и матрицы / З.И. Боревич. – М.: Наука, 1988. – 183 с.
9. Ван-дер-Варден, Б.Л. Алгебра / Б.Л. Ван-дер-Варден. – М.: Мир, 1976. – 649 с.
10. Векторные пространства и их приложения. Учебно-методическое пособие / Сост. Воробьев Н.Н. – Витебск: Изд-во УО «ВГУ им. П.М. Машерова». – 2004. – 78 с.
11. Винберг, Э.Б. Курс алгебры / Э.Б. Винберг. – М.: Изд-во «Факториал Пресс», 2001. – 544 с.
12. Виславский, М.Н. Линейная алгебра и линейное программирование / М.Н. Виславский – М.: Высшая школа, 1966. – 222 с.
13. Воеводин, В.В. Линейная алгебра / В.В. Воеводин. – М.: Наука, 1974. – 336 с.
14. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1988. – 548 с.
15. Гельфанд, И.М. Лекции по линейной алгебре / И.М. Гельфанд. – М.: МЦНМО, 1998. – 320 с.
16. Глухов, М.М. Задачник-практикум по высшей алгебре / М.М. Глухов, А.С. Солодовников. – М.: Просвещение, 1969. – 278 с.
17. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – Ч. 1. – 6-е изд. – М.: Издательский дом «ОНИКС 21 век»: Мир и Образование, 2002. – 304 с.
18. Ефимов, Н.В. Линейная алгебра и многомерная геометрия / Н.В. Ефимов, Э.Р. Розендорн. – М.: Наука, 1970. – 528 с.
19. Золотаревская, Д.И. Сборник задач по линейной алгебре / Д.И. Золотаревская. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 184 с.
20. Ильин, В.А. Линейная алгебра / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – М.: Наука, 1974. – 296 с.

21. Квадратичные формы: пособие / Сост. Н.Н. Воробьев. – Витебск: Изд-во УО «ВГУ им. П.М. Машерова», 2006. – 56 с.
22. Квадратичные формы и их применение: практикум / Сост. Н.Н. Воробьев. – Витебск: Изд-во УО «ВГУ им. П.М. Машерова», 2006. – 108 с.
23. Контрольные работы по алгебре. Учебно-методическое пособие / Сост. Воробьев Н.Н. – Витебск: Изд-во УО «ВГУ им. П.М. Машерова», 2004. – 115 с.
24. Кострикин, А.И. Введение в алгебру / А.И. Кострикин. – М.: Физ.-мат. лит., 2000. – Ч. 2: Линейная алгебра. – 2000. – 367 с.
25. Кострикин, А.И. Линейная алгебра и геометрия / А.И. Кострикин, Ю.И. Манин. – М.: Наука, 1986. – 302 с.
26. Куликов, Л.Я. Алгебра и теория чисел / Л.Я. Куликов. – М.: Высшая школа, 1979. – 562 с.
27. Куликов, Л.Я. Сборник задач по алгебре и теории чисел / Л.Я. Куликов, А.И. Москаленко, А.А. Фомин. – М.: Просвещение, 1993. – 288 с.
28. Курош, А.Г. Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. – М.: Наука, 1975. – 431 с.
29. Ленг, С. Алгебра / С. Ленг. – М.: Мир, 1968. – 575 с.
30. Линейные сравнения в кольце целых чисел. Учебно-методическое пособие / Сост. Залеская Е.Н. – Витебск: Изд-во УО «ВГУ им. П.М. Машерова», 2007. – 47 с.
31. Ляпин, Е.С. Алгебра и теория чисел: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов в 2 ч. / Е.С. Ляпин, А.Е. Евсеев. – М.: Просвещение, 1978. – 450 с.
32. Мальцев, А.И. Основы линейной алгебры / А.И. Мальцев. – М.: Наука, 1970. – 402 с.
33. Маркус, М., Обзор по теории матриц и матричных неравенств/ М. Маркус, Х. Минк. – М.: Наука, 1972. – 233 с.
34. Математический энциклопедический словарь / Гл. ред. Ю.В. Прохоров; ред. кол.: С.И. Адян, Н.С. Бахвалов, В.И. Битюцков, А.П. Ершов, Л.Д. Кудрявцев, А.Л. Онищик, А.П. Юшкевич. – М.: Сов. энциклопедия, 1988. – 847 с.
35. Матрицы и определители. Учебно-методическое пособие / Авт.-сост. Воробьев Н.Н. – Витебск: Изд-во УО «ВГУ им. П.М. Машерова». – 2003. – 78 с.
36. Милованов, М.В. Алгебра и аналитическая геометрия. Часть 2 / М.В. Милованов, М.М. Толкачев, Р.И. Тышкевич, А.С. Феденко. – Мн., 2001. – 352 с.
37. Окунев, Л.Я. Высшая алгебра / Л.Я. Окунев. – М.: Высшая школа, 1966. – 335 с.
38. Понтрягин, Л.С. Алгебра / Л.С. Понтрягин. – 2 изд., стер. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 133 с.
39. Постников, М.М. Линейная алгебра и дифференциальная геометрия / М.М. Постников. – М.: Наука, 1979. – 311 с.
40. Прасолов, В.В. Задачи и теоремы линейной алгебры / В.В. Прасолов. – М.: Наука, 1996. – 303 с.

41. Проскуряков, И.В. Сборник задач по линейной алгебре / И.В. Проскуряков – М.: Наука, 1978. – 384 с.
42. Проскуряков, И.В. Сборник задач по линейной алгебре / И.В. Проскуряков. – 9-е издание. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005. – 383 с. (Классический университетский учебник.)
43. Радьков, А.М. Алгебра и теория чисел / А.М. Радьков, Б.Д. Чеботаревский. – Мн.: Вышэйшая школа, 1992. – 285 с.
44. Сборник задач по алгебре: Учебное пособие / Под ред. А.И. Кострикина. – М.: Наука, 1987. – 354 с.
45. Солодовников, А.С. Введение в линейную алгебру и линейное программирование / А.С. Солодовников. – М.: Просвещение, 1966. – 181 с.
46. Теория делимости в кольце целых чисел. Учебно-методическое пособие / Сост. Залесская Е.Н. – Витебск: Изд-во УО «ВГУ им. П.М. Машерова», 2006. – 45 с.
47. Тышкевич, Р.И. и др. Линейная алгебра и аналитическая геометрия / Р.И. Тышкевич, А.С. Феденко. – Мн.: Вышэйшая школа, 1976. – 544 с.
48. Фаддеев, Д.К. Вычислительные методы линейной алгебры / Д.К. Фаддеев, В.Н. Фаддеева. – М., 1963. – 734 с.
49. Фаддеев, Д.К. Лекции по алгебре: Учебное пособие для вузов / Д.К.Фаддеев. – М.: Наука, 1984. – 416 с.
50. Фаддеев, Д.К. Задачи по высшей алгебре / Д.К.Фаддеев, И.С. Соминский. – СПб.: Лань, 1999. – 286 с.
51. Федорчук, В.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / В.В. Федорчук. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 329 с.
52. Халмош, П. Конечномерные векторные пространства / П. Халмош. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. – 264 с.
53. Хорн, Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 666 с.
54. Чарин, В.С. Линейные преобразования и выпуклые множества / В.С. Чарин – Київ: Вища школа, 1978. – 191 с.
55. Шилов, Г.Е. Математический анализ. Конечномерные линейные пространства / Г.Е. Шилов. – М., 1969. – 428 с.
56. Шилов, Г.Е. Введение в теорию линейных пространств / Г.Е. Шилов. – М.: Гостехиздат, 1956. – 304 с.
57. Шнеперман, Л.Б. Сборник задач по алгебре и теории чисел / Л.Б. Шнеперман. – Мн.: Вышэйшая школа, 1982. – 223 с.
58. Шнеперман, Л.Б. Сборник задач по алгебре и теории чисел / Л.Б. Шнеперман. – Мн.: дизайн ПРО, 2000. – 240 с.

Учебное издание

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Сборник заданий

Составитель

ВОРОБЬЁВ Николай Николаевич

Технический редактор *Г.В. Разбоева*

Компьютерный дизайн *Л.И. Ячменёва*

Подписано в печать 2020. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.

Усл. печ. л. 5,71. Уч.-изд. л. 2,66. Тираж экз. Заказ .

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Свидетельство о государственной регистрации в качестве издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/255 от 31.03.2014.

Отпечатано на ризографе учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». 210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.