Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра геометрии и математического анализа

М.Н. Подоксёнов, Т.Л. Сурин

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Методические рекомендации

Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2020

УДК 517.911(075.8)
ББК 22.161.61я73
П44

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 1 от 22.10.2020.

Авторы: заведующий кафедрой геометрии и математического анализа ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук, доцент **М.Н. Подоксёнов;** доцент кафедры геометрии и математического анализа ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук, доцент **Т.Л. Сурин**

Р е ц е н з е н т :
доцент кафедры высшей математики
и информационных технологий УО «ВГТУ»,
кандидат физико-математических наук, доцент *Т.В. Никонова*

Подоксёнов, М.Н.

П44 Дифференциальные уравнения первого порядка : методические рекомендации / М.Н. Подоксёнов, Т.Л. Сурин. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2020. – 48 с.

Данное учебное издание подготовлено для студентов первой ступени высшего образования факультета МиИТ в соответствии с учебными программами по дисциплинам «Дифференциальные уравнения» (специальности «Прикладная математика и МПМиИ», «Прикладная информатика (по направлениям)», «Математика и информатика», «Компьютерная безопасность»), «Математика» (специальности «Программное обеспечение информационных технологий», «Информационные системы и технологии») и «Высшая математика» (специальность «Управление информационными ресурсами»). Излагаются теоретический материал, примеры решения задач.

УДК 517.911(075.8)
ББК 22.161.61я73

Содержание

Введение

Настоящее учебное издание предназначено для студентов, изучающих дисциплину «Дифференциальные уравнения» (специальности «Математика и информатика», «Прикладная математика», «Прикладная информатика (по направлениям)», «Компьютерная безопасность»). Оно также охватывает разделы, посвященные дифференциальным уравнениям и входящие в предметы «Математика» (специальности «Программное обеспечение информационных технологий», «Информационные системы и технологии ») и «Высшая математика» (специальность «Управление информационными ресурсами»).

Основное назначение издания – помочь студентам факультета МиИТ в освоении курса дифференциальных уравнений. По этой дисциплине существует ряд хороших учебников, список которых приведен в конце пособия. Однако, из-за слишком большого объема, в них зачастую трудно ориентироваться и выбрать нужный материал для подготовки к экзамену.

Издание состоит из двух частей и списка литературы. В первой части изучаются обыкновенные дифференциальные уравнения, разрешенные относительно производной, во второй части – уравнения, не разрешенные относительно производной. В них достаточно подробно излагается теоретический материал по теории обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка: основные понятия, типы уравнений, методы их решения, теоремы существования и единственности решения, геометрические свойства решений. Рассматриваются примеры решения задач, а также необходимые сведения по теории преобразований плоскости и дифференциальной геометрии.

Материал каждой части излагается в простой доступной для самостоятельного изучения форме.

В конце данного издания приведен список основной и дополнительной литературы, необходимой для изучения вышеназванных разделов дифференциальных уравнений.

Материал теоретического и практического содержания, приведенный в пособии, соответствует учебным программам по дифференциальным уравнениям для вышеперечисленных специальностей.

Методические рекомендации могут быть полезными для студентов других специальностей, изучающих высшую математику.

ЧАСТЬ 1. Основные понятия. ОДУ-1, разрешенные относительно производной

1. Основные понятия. Простейшие уравнения

Определение. *Дифференциальным уравнением* называется уравнение для отыскания неизвестной функции, содержащее производные или дифференциалы этой функции.

Порядок старшей производной или старшего дифференциала, входящих в состав уравнения называется *порядком* уравнения.

Дифференциальное уравнение называется *обыкновенным* (ОДУ), если искомая функция зависит только от одной переменной. Если искомая функция зависит от нескольких переменных, то дифференциальное уравнение называется *уравнением в частных производных* (ДУЧП).

В общем виде ОДУ n-го порядка записывается так:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{1}$$

В частности, уравнение первого порядка имеет вид:

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1'}$$

***Пример* 1.** $y'' = \dfrac{y'}{x+4}$. Это обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка.

***Пример* 2.** $(2xy-1)dx + (3y^2 + x^2)dy = 0$. Это обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка в дифференциальной форме.

***Пример* 3.** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Это дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных. В этом уравнении нужно найти неизвестную функцию $u(t,x)$, где t – время. ДУЧП такого типа изучаются в курсе «Уравнения математической физики»

Определение. *Решением* дифференциального уравнения (ОДУ или ДУЧП) называется функция, которая имеет непрерывные производные до порядка уравнения включительно, и при её подстановке в уравнение мы получаем тождество (предполагается, что эта функция определена при тех же значениях переменной x, что и функции, задающие уравнение).

Простейшее дифференциальное уравнение первого порядка имеют вид $y' = f(x)$. Из математического анализа известно, что если функция $f(x)$ непрерывна на некотором интервале (a,b), то решением уравнения является функция $y = \int f(x)dx$ +С. Совокупность решений, содержащую произвольную постоянную, называется *общим* решением.

Замечание. В дифференциальных уравнениях обычно под $\int f(x)dx$ понимают некоторую конкретную первообразную, а множество первообразных записывают как $\int f(x)dx$ +C.

Пусть $y=y(x)$ – решение ОДУ. Тогда график этой функции – это кривая на плоскости, которая называется *интегральной кривой* данного ОДУ.

Пример **4.** Найти решение уравнения $y'=2x$.

Решение. Это простейшее дифференциальное уравнение первого порядка . Его решение есть функция $y=x^2+C$. Каждое конкретное решение задаёт интегральную кривую – параболу.

Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется *разрешением* уравнения или (поскольку процесс нахождения решения сводится к вычислению интегралов) *интегрированием* этого уравнения.

Не всегда решение является элементарной функцией.

Пример **5**. Решить уравнение $y'=\frac{\sin x}{x}$.

Решение. Это простейшее ОДУ первого порядка. Его решение $y=\int\frac{\sin x}{x}dx$ + C. Известно, что интеграл $\int\frac{\sin x}{x}dx$ является неберущимся, т.е. решение не является элементарной функцией.

Говорят, что дифференциальное уравнение *решается (интегрируется) в квадратурах*, если его общее решение выражается через один или несколько интегралов.

2. Задача Коши. Краевая задача

Каждое уравнение описывает закон, которому подчиняется целая совокупность различных процессов, поэтому каждое уравнение имеет множество различных решений. Чтобы из этих решений выделить конкретное, т.е. то, которому удовлетворяет исследуемый процесс, задают дополнительные условия. Если дополнительные условия относятся к одному и тому же значению аргумента, то их называют *начальными* условиями, если к различным значениям – то *граничными*. Начальные и граничные условия в совокупности называют *краевыми*. Дифференциальное уравнение вместе с краевыми условиями определяют *краевую задачу* (*начальную задачу*, *граничную задачу*).

Условия вида

$$y(x_o)=y_o,\ y'(x_o)=y'_o,\dots,\ y^{(n-1)}(x_o)=y_o^{(n-1)}$$

для ОДУ n-го порядка называются *условиями Коши.* Задача нахождения частного решения дифференциального уравнения. удовлетворяющего таким условиям, называется *задачей Коши*.

Для дифференциального уравнения первого порядка условие Коши имеет вид: $y(x_o)=y_o$. Геометрически это означает, что дана точка на плоскости с координатами (x_o, y_o) и необходимо найти ту интегральную кривую, которая проходит через эту точку.

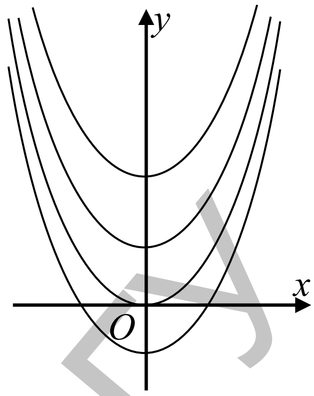

рис. 1

***Пример* 6.** Найти решение уравнения $y'=2x$, удовлетворяющее условию $y(1)=2$.

Решение. Его общее решение есть функция $y=x^2+C$. Все интегральные кривые представляют собой параболы и изображены на рисунке 1.

Подставляем в общее решение $x=1$, $y=2$: $2=1^2+C$. Находим, что $C=1$. Решение задачи Коши: $y=x^2+1$.

3. ОДУ-1 в нормальной форме

Дифференциальное уравнение первого порядка в общем виде записывается следующим образом

$$F(x, y, y')=0.$$

Если его удаётся разрешить относительно производной, то это уравнение принимает вид

$$y'=f(x,y). \qquad (2)$$

Предполагается, что функция $f(x,y)$ определена и непрерывна в некоторой области $D \in \boldsymbol{R}^2$.

Дифференциальное уравнение, записанное в виде (2), называют *дифференциальным уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной* y' или *дифференциальным уравнением первого порядка в нормальной форме.*

Решением уравнения (2) на интервале (a,b) называется функция $y=y(x)$ определенная и непрерывно дифференцируемая на этом интервале и обращающая уравнение (2) в тождество: $y'(x)\equiv f(x,y(x))$.

Если существует число C, такое что $f(x,C)\equiv 0$, то уравнение (2) имеет, очевидно, решение $y=C$.

В дифференциальных уравнениях часто пользуются тем, что запись производной в виде $\dfrac{dy}{dx}$ можно понимать как отношение дифференциалов. Равенство, которое связывает производную и дифференциалы: $dy=y'dx$, где y' – производная функции y от x, dx – дифференциал аргумента, dy – дифференциал функции называется *основным дифференциальным тождеством.*

Основное дифференциальное равенство может быть записано по-другому: $\dfrac{dy}{dx}=y'$ или $dx=\dfrac{dy}{y'}$.

Если в некоторой точке (x_o, y_o) функция $f(x,y)$ обращается в бесконечность, то вместе с уравнением (2) будем рассматривать, так называемое, перевёрнутое уравнение:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x,y)} . \qquad (2')$$

Совокупность этих точек будем присоединять к области определения уравнения (2), а решения $x = x(y)$ уравнения (2′) будем добавлять к решениям уравнения (2).

Если в рассматриваемой области функция $f(x,y)$ не обращается в 0 или $\pm\infty$, то решения уравнений (2) и (2′) равносильны в этой области.

Уравнениям (2) и (2′) равносильно уравнение

$$dy - f(x,y)\,dx = 0 . \qquad (3)$$

Обычно будем рассматривать уравнения более общего вида:

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 , \qquad (4)$$

где функции P и Q предполагаются непрерывными в рассматриваемой области. Это уравнение называют уравнением в *дифференциальной форме.* Оно равносильно уравнениям

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \quad \text{и} \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{Q(x,y)}{P(x,y)} . \qquad (5)$$

В точках, где $P(x,y) = Q(x,y) = 0$, уравнения (5) не заданы, их правые части обращаются в неопределённость $\frac{0}{0}$, и мы тогда считаем, что уравнение (4) в этих точках тоже не определено.

Уравнением в симметрической форме называется уравнение вида

$$\frac{dx}{M(x,y)} = \frac{dy}{N(x,y)} \qquad (6)$$

Из всех рассмотренных форм записи ОДУ первого порядка наиболее важными считаются (2) и (4). Преимущество (4) заключается в том. что переменные x и y входят в уравнение равноправно.

Определение. *Общим решением* дифференциального уравнения первого порядка называется функция $y = y(x, C)$, которая зависит от одной постоянной C, и удовлетворяет следующим условиям:

а) при любом фиксированном значении C она является решением дифференциального уравнения;

б) каково бы ни было начальное условие $y(x_o) = y_o$, можно найти такое значение C_o, что функция $y = y(x, C_o)$ удовлетворяет начальному условию.

Частным решением дифференциального уравнения первого порядка называется решение, полученное из общего решения при конкретном значении произвольной постоянной C.

В процессе отыскания общего решения нередко приходят к соотношению вида $\Phi(x, y, C)=0$, неразрешённому относительно y. Такое соотношение называется *общим интегралом* дифференциального уравнения. Если постоянной придать конкретное значение C_o, то получим *частный интеграл*.

Иногда решение получаем в параметрическом виде:

$$x = x(t),\ y = y(t).$$

Пример 7. Решением уравнения $xdx + ydy = 0$ в параметрическом виде являются функции:

$$x = C \cdot \cos t,\ y = C \cdot \sin t,$$

а в неявном виде:

$$x^2 + y^2 = C.$$

Интегральные кривые – это окружности.

4. Геометрическая интерпретация решений дифференциального уравнения. Поле направлений

Рассмотрим уравнение (2)

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y),$$

где функция $f(x,y)$ определена и непрерывна в некоторой области $D \subseteq \boldsymbol{R}^2$. Решение $y=\varphi(x,C)$ уравнения (2) с геометрической точки зрения представляет из себя некоторую кривую на плоскости (интегральную кривую), которая в каждой точке имеет касательную. Рассмотрим вопрос, как, не зная решения уравнения (2), построить хотя бы приблизительно, его интегральную кривую.

Возьмём произвольную точку $(x,y) \in D$. В этой точке мы можем найти значение $f(x,y)$, а, следовательно, найти значение $\frac{dy}{dx}$. Это означает, что в каждой точке мы можем найти значение углового коэффициента касательной к проходящему через эту точку графику решения уравнения (2), т.е. $\frac{dy}{dx} = \text{tg}\alpha$.

Если в каждой точке (x,y) области D представить направление касательной, определяемое значением $f(x,y)$, в виде некоторого единичного отрезка с центром в этой точке, то получим *поле направлений*.

Таким образом, задавая дифференциальное уравнение (2), мы задаем поле направлений, и задачу нахождения решения дифференциального уравнения можно сформулировать так: требуется найти кривую $y=\varphi(x)$, которая в каждой своей точке имеет заданную уравнением (2) касательную или заданное уравнением (2) направление. Это и есть *интегральная кривая*. Таких кривых получается множество.

Решить задачу Коши с геометрической точки зрения – это значит из всего множества интегральных кривых, составляющих общее решение дифференциального уравнения, нужно найти ту интегральную кривую, которая проходит через точку (x_o, y_o).

Таким образом, можно приблизительно указать решение дифференциального уравнения, если известно поле направлений. Возникает вопрос: как изобразить поле направлений? Для удобства построения будем искать такие кривые, в каждой точке которых направление поля одно и то же. Такие кривые называются *изоклинами*. На практике поступают следующим образом. Положим $f(x,y)=k$ и будем придавать различные значения $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$ Равенством $f(x,y)=k$ неявно задаётся кривая, на которой направление поля будет $\frac{dy}{dx}=k=\operatorname{tg}\alpha$.

Пример. Рассмотрим уравнение $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$. Данное уравнение задано всюду, кроме точки $(0,0)$. Пусть $-\frac{y}{x}=k=\operatorname{tg}\alpha$. Рассматриваем различные значения

1) $-\frac{y}{x}=0$, $x=0$, $(y\neq0)$, $\alpha=0$;

2) $-\frac{y}{x}=1$, $y=-x$, $\alpha=\frac{\pi}{4}$;

3) $-\frac{y}{x}=-1$, $y=x$, $\alpha=-\frac{\pi}{4}$;

4) $-\frac{y}{x}=2$, $y=-\frac{1}{2}x$, $\alpha=\operatorname{arctg}2$;

5) $-\frac{y}{x}=2$, $y=\frac{1}{2}x$,

$\alpha=-\operatorname{arctg}2$.

Все эти значения изображены на рисунке 2.

Из рисунка можно заметить, что интегральные кривые – это окружности $x^2+y^2=C$ (в дальнейшем мы это покажем).

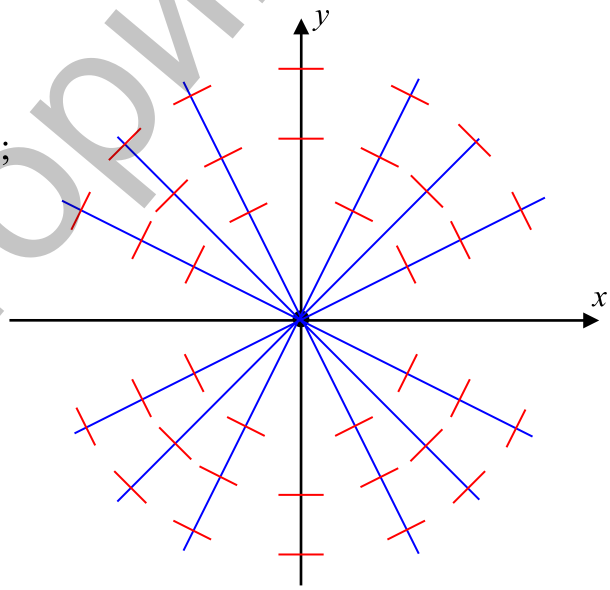

рис. 2

5. Механическая интерпретация задачи Коши

Пусть точка движется по оси Ox, $x=x(t)$ – закон изменения положения точки, и скорость движения – есть известная функция, зависящая от времени t и положения точки: $v=f(t,x)$. Тогда движение описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x). \tag{7}$$

Если существует значение x_o, такое, что при всех t выполнено $f(t,x_o)=0$, то $x\equiv x_o$ будет решением уравнения (7). Такое решение будем называть состоянием покоя.

Начальное условие для уравнения (7) выглядит так: $x(t_o)=x_o$, т.е. необходимо найти такое движение, при котором в заданный момент времени точка занимает заданное положение.

6. Существование решения задачи Коши

Основной задачей теории дифференциальных уравнений является нахождение всех решений данного уравнения и изучение свойств этих решений. Но, так как найти решение уравнения даже в квадратурах удается только в исключительных случаях, то рассматривается задача нахождения условий существования решения задачи Коши, а также единственности найденного решения.

Для существования решения задачи Коши достаточно, чтобы правая часть уравнения (2) была непрерывна в окрестности начальной точки (x_o, y_o). Тогда решение $y=y(x)$ будет определено и непрерывно дифференцируемо в некоторой окрестности точки x_o.

Теорема Пеано. *Пусть правая часть уравнения* (2) *определена и непрерывна в прямоугольнике*

$$|x-x_o|\le a,\ |y-y_o|\le b,\ (a>0,\ b>0),\tag{8}$$

а, следовательно, ограничена в этом прямоугольнике: $|f(x,y)|\le M=\mathrm{const}>0$, *тогда уравнение* (2) *имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее начальному условию* $y(x_o)=y_o$, *заведомо определённое на интервале*

$$(x_o-h, x_o+h),\ \text{где}\quad h=\min\{a, b/M\}.\tag{9}$$

Пример 8. Рассмотрим уравнение $y'=2\sqrt{|y|}$ с начальными данными $y(0)=0$. Через точку $(0,0)$ проходят интегральные кривые

$$1)\ y=0;\ \ 2)\ y=\begin{cases}-x^2, x\le 0,\\ x^2, x>0,\end{cases}\quad 3)\ y=\begin{cases}0, x\le 0,\\ x^2, x>0,\end{cases}\quad 4)\ y=\begin{cases}-x^2, x\le 0,\\ 0, x>0.\end{cases}$$

Все решения непрерывно дифференцируемые.

Для единственности решения задачи Коши непрерывности правой части уравнения (2) недостаточно. Справедлива

Теорема Пикара. *Пусть правая часть уравнения* (2) *определена в прямоугольнике* (8) *и удовлетворяет условиям*:

1) $f(x,y)$ *непрерывна*;

2) $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *существует и ограничена*: $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|\le K=\mathrm{const}>0$.

Тогда уравнение (2) *имеет одно и только одно решение, удовлетворяющее начальному условию* $y(x_o)=y_o$, *заведомо определённое на интервале* (9) *и не выходящее из прямоугольника* (8).

7. Особые решения задачи Коши

Определение. Точка (x_0, y_0) называется *регулярной* для уравнения (2), если в ней имеет место единственность решения задачи Коши. Точка, в которой нарушается единственность решения задачи Коши, называется *особой* точкой. Точка, в которой нарушается существование решения задачи Коши, называется *существенно особой* точкой.

Решение, которое получается из формулы общего решения при замене произвольной постоянной на конкретное число, мы назвали частным. Каждая точка интегральной кривой, которую это решение определяет, является регулярной.

Определение. Решение $y = y(x)$ уравнения (2) называется *особым*, если оно целиком состоит из особых точек.

Если уравнение (2) удовлетворяет во всей области определения условиям теоремы Пикара, то это уравнение не имеет особых решений. В частности, уравнения (2), у которых правая часть есть полином или отношение полиномов, удовлетворяют теореме Пикара. Также уравнения вида (4), где $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ есть полиномы, удовлетворяют теореме Пикара.

Если в уравнении (2) правая часть непрерывна и имеет частную производную по y, то особыми решениями могут быть только те кривые, во всех точках которых $\partial f/\partial y$ имеет бесконечный предел. Такие кривые называются *подозрительными на особое решение*.

Особыми могут оказаться решения, которые теряются в процесс преобразования уравнения. Примеры мы рассмотрим в следующем параграфе.

8. Уравнения с разделёнными и с разделяющимися переменными

Определение. Дифференциальным уравнением *с разделёнными переменными* называется уравнение вида (4), в котором функции P и Q зависят соответственно только от x и только от y, т.е.

$$P(x)\,dx + Q(y)\,dy = 0. \qquad (10)$$

Предположим, что $y = y(x)$ – решение уравнения (10). Подставив $y = y(x)$ в уравнение, получим тождество, интегрируя которое, имеем:

$$\int P(x)\,dx + \int Q(y)\,dy = C.$$

Если при этом $P(x_0)$ и $Q(y_0)$ не равны нулю одновременно, то решение задачи Коши с начальным условием $y(x_0) = y_0$ задаётся формулой

$$\int_{x_0}^{x} P(x)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(y)\,dy = 0.$$

***Пример* 9.** Рассмотрим уравнение

$$e^{-x^2}dx+\frac{1}{y}dy=0 \quad (y>0).$$

Решение. Общий интеграл уравнения

$$\int_0^x e^{-x^2}dx+\int_1^y \frac{1}{y}dy=C \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^x e^{-x^2}dx+\ln y=C.$$

Пусть дано начальное условие: $y(0)=1$. Тогда решением задачи Коши будет

$$\int_0^x e^{-x^2}dx+\ln y=0.$$

Определение. Уравнение вида (4), где функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ являются произведениями двух функций, зависящих только от одной переменной каждая, называется *уравнением с разделяющимися переменными*. Т.е, уравнение с разделяющимися переменными имеет вид:

$$p_1(x)q_1(y)dx+p_2(x)q_2(y)dy=0. \tag{11}$$

Предположим, что в рассматриваемой области определения все функции p_1, q_1, p_2, q_2 непрерывны и $p_2(x)$, $q_1(y)$ не обращаются в ноль. Тогда разделим уравнение (11) на произведение $p_2(x)q_1(y)$:

$$\frac{p_1(x)}{p_2(x)}dx+\frac{q_2(y)}{q_1(y)}dy=0.$$

Мы получили уравнение с разделёнными переменными. Как его решать, мы уже знаем.

Отдельно стоит рассмотреть случай, когда уравнения $p_2(x)=0$, $q_1(y)=0$ имеют вещественные корни $x=a$ и $y=b$ соответственно. Это даст дополнительные решения вида $x=a$ $(y\neq b)$, $y=b$ $(x\neq a)$. Эти решения могут оказаться особыми.

***Пример* 10.** Рассмотрим уравнение

$$2x\sqrt{y}dx+(1-x^2)dy=0 \quad (y\geq 0).$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{2x}{1-x^2}dx+\frac{dy}{\sqrt{y}}dy=0, \quad (1-x^2\neq 0, \sqrt{y}\neq 0).$$

$$\int\frac{2x}{1-x^2}dx+\int\frac{dy}{\sqrt{y}}dy=C.$$

Общий интеграл:

$$-\ln|1-x^2|+2\sqrt{y}=C.$$

Мы делили на $1-x^2$. Поэтому следует отдельно рассмотреть случай $1-x^2=0$. Получаем решения $x=1$ и $x=-1$ $(y\neq 0)$. Проверьте самостоятельно подстановкой, что это действительно решения. Кроме этого, решением является функция $y = 0$ ($x \neq 1$, $x \neq -1$). Это решение является особым.

В тех точках, где $2x\sqrt{y} = 1 - x^2 = 0$ поле направлений не определено. Это точки $(1,0)$ и $(-1,0)$. Это существенно особые точки. К ним примыкают решения $y = 0$, $x = 1$ и $x = -1$. Тем не менее, решения через эти точки не проходят.

Предположим, что поставлено условие: найти интегральную кривую, которая проходит через точку $M(0,1)$. Подставляем в общий интеграл $x = 0$ и $y = 1$. Найдём $C = 2$. Из равенства

$$-\ln|1 - x^2| + 2\sqrt{y} = 2$$

можно получить решение в явном виде:

$$2\sqrt{y} = 2 + \ln|1 - x^2| \quad \Leftrightarrow \quad y = \left(1 + \frac{1}{2}\ln|1 - x^2|\right)^2$$

Упражнение. Почему уравнение

$$x(y^2 - 1)dx + y(x^2 - 1)dy = 0$$

не имеет особых решений?

9. Однородные уравнения

Определение. Функция $f(x,y)$ называется *однородной степени* m, если

$$f(tx, ty) \equiv t^m f(x,y) \qquad (12)$$

для всех (x,y) из области определения функции. Если это равенство выполняется только для $t>0$, то функция называется *положительно однородной*.

Определение. Уравнение вида

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0, \qquad (13)$$

называется *однородным*, если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ являются однородными одной и той же степени.

Положим в тождестве (12) $t = \frac{1}{x}$. Тогда получим

$$f\left(\frac{1}{x}\cdot x, \frac{1}{x}\cdot y\right) \equiv \frac{1}{x^m} f(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad f(x,y) = x^m f\left(1, \frac{y}{x}\right). \qquad (14)$$

Однородное уравнение можно привести к уравнению с разделяющимися переменными с помощью подстановки $y = ux$, где $u = u(x)$ – новая неизвестная функция. Тогда $dy = u\,dx + x\,du$. Подставим это в (13):

$$P(x, ux)\,dx + Q(x, ux)(u\,dx + x\,du) = 0.$$

Воспользуемся формулой (14):

$$x^m P(1,u)\,dx + x^m Q(1,u)(u\,dx + x\,du) = 0.$$

Делим уравнение на x^m и группируем:

$$(P(1,u)+uQ(1,u))dx+xQ(1,u)du=0.$$

При этом надо учесть, что $x=0$ тоже может оказаться решением. Мы получили уравнение с разделяющимися переменными. Разделяем переменные:

$$\frac{dx}{x}+\frac{Q(1,u)\,du}{P(1,u)+uQ(1,u)}=0.$$

Интегрируем:

$$\ln|x|+\int\frac{Q(1,u)\,du}{P(1,u)+uQ(1,u)}=\ln|C_1|.$$

Отсюда

$$x=Ce^{\psi(u)},\text{ где }\ \psi(u)=\int\frac{Q(1,u)\,du}{P(1,u)+uQ(1,u)},\ C=\pm|C_1|.$$

Заменяем u на $\frac{y}{x}$, получаем общий интеграл уравнения (13) в виде

$$x=Ce^{\psi\left(\frac{y}{x}\right)} \tag{15}$$

***Пример* 11.** Найти общее решение уравнения

$$(y^2-2xy)dx+x^2\,dy=0.$$

Решение. Покажем, что данное уравнение является однородным. Находим

$$P(tx,ty)=(ty)^2-2\,tx\,ty=t^2(y^2-2xy)=t^2P(x,y),$$
$$\mathrm{Q}(tx,ty)=(tx)^2=t^2x^2=t^2Q(x,y).$$

Так как функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ являются однородными одной и той же степени, то рассматриваемое уравнение является однородным. Сделаем подстановку $y=ux$, где $u=u(x)-$новая неизвестная функция. Тогда $dy=u\,dx+x\,du$. Подставим это в уравнение:

$$((ux)^2-2xux)dx+x^2\ (u\,dx+x\,du\,)=0.$$

Сократим на x^2 (x=0?). Получаем

$$(u^2-2u)dx+\ (u\,dx+x\,du\,)=0,\ \text{ или}$$
$$(u^2-u)dx+x\,du=0.$$

Разделив переменные и проинтегрировав уравнение, получаем

$$\ln|x|+1\mathrm{n}\frac{|y\text{-}x|}{|y|}=\ln|C| \qquad \text{или} \qquad \frac{x(y-x)}{y}=C.$$

Это общий интеграл уравнения. При делении на x^2 мы могли потерять решение $x=0$ $(y\neq0)$. Эта функция является решением, причем это частное решение.

Чаще всего ОДУ-1 задается в виде $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ (2). Пользуясь формулой (14) мы можем уравнение (13) привести к виду

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right) . \qquad (16)$$

Действительно,

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}=-\frac{x^m P\left(1,\frac{y}{x}\right)}{x^m Q\left(1,\frac{y}{x}\right)}=-\frac{P\left(1,\frac{y}{x}\right)}{Q\left(1,\frac{y}{x}\right)}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

При этом, наряду с уравнением (16) следует рассматривать и перевёрнутое уравнение. Таким образом, уравнение (2) является однородным, если $f(x,y)$ является однородной функцией нулевой степени однородности.

Пусть дано однородное уравнение $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$. При его интегрировании тоже применяется подстановка $y=ux$, где $u=u(x)$ – новая неизвестная функция. Тогда $y' = u+x\cdot u'$. При подстановке в уравнение, получаем

$$u+x\cdot u'=f(1,u).$$

Это уравнение с разделяющимися переменными.

Пример **12.** Найти общее решение дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx}=\frac{xy}{x^2-y^2} \qquad (17)$$

Решение. Проверим, что данное уравнение является однородным.

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2-y^2},\quad f(tx,ty)=\frac{txty}{(tx)^2-(ty)^2}=\frac{xy}{x^2-y^2}=f(x,y).$$

Следовательно, функция $f(x,y)$ является однородной, нулевой степени однородности, и, поэтому, уравнение является однородным. Делаем замену $y=ux$, тогда

$$u+x\cdot u'=\frac{u}{1-u^2}.$$

Мы получили ОДУ-1 с разделяющимися переменными. Решаем его:

$$x\cdot\frac{du}{dx}=\frac{u}{1-u^2}-u,$$

$$x\cdot\frac{du}{dx}=\frac{u^3}{1-u^2},\qquad \frac{1-u^2}{u^3}du=\frac{dx}{x},$$

$$\int\frac{1-u^2}{u^3}du=\int\frac{dx}{x},$$

$$\int\left(\frac{1}{u^3}-\frac{1}{u}\right)du=\int\frac{dx}{x},\qquad -\frac{1}{2u^2}-\ln|u|=\ln|x|+C_1.$$

Для того, чтобы упростить ответ, в подобной ситуации удобнее представить постоянную величину в виде $C_1 = \ln|C|$. Далее мы возвращаемся исходным переменным, т.е. вместо u пишем y/x:

$$-\frac{x^2}{2y^2} - \ln\left|\frac{y}{x}\right| = \ln|x| + \ln|C|.$$

Применяем свойства логарифма:

$$-\frac{x^2}{2y^2} - \ln|y| + \ln|x| = \ln|x| + \ln|C|, \quad -\frac{x^2}{2y^2} = \ln|y| + \ln|C|.$$

Окончательно получаем общий интеграл:

$$\frac{x^2}{2y^2} + \ln|Cy| = 0.$$

В уравнении (17) обе функции xy и $x^2 - y^2$ обращаются в ноль только в начале координат. Если знаменатель в (17) равен нулю, то получаем: $x = \pm y$. При подстановке в перевернутое уравнение убеждаемся, что решений такого вида не существует.

При разделении переменных могли потерять решения $x = 0$ и $u = 0$, т.е. $y = 0$. Очевидно, что $y = 0$ $(x \neq 0)$ является решением уравнения.

10. Геометрическое свойство интегральных кривых однородного ОДУ-1

Определение. *Гомотетией с центром в точке* A называется преобразование плоскости, которое каждой точке M плоскости сопоставляет точку M' так, что

$$\overrightarrow{AM'} = t\overrightarrow{AM},$$

(18)

где $\lambda \neq 0$. Число λ называется *коэффициентом гомотетии*.

На рисунках 3 и 4 показано, как строится $\Delta A'B'C'$ гомотетичный данному ΔABC с коэффициентами 2 и –2, если центр гомотетии находится в начале координат.

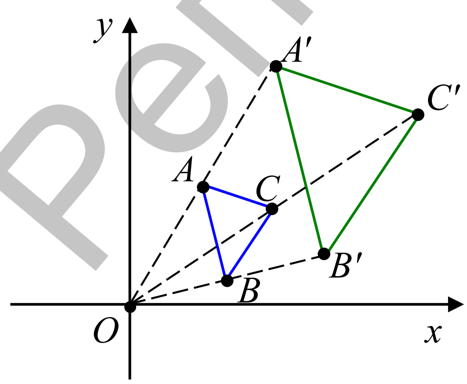

рис. 3

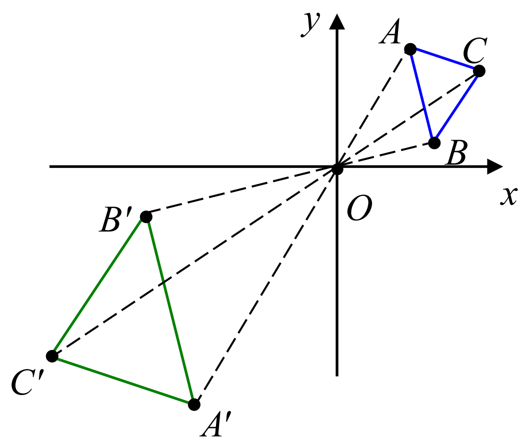

рис. 4

При гомотетии с коэффициентом λ точка $M(x,y)$ переходит в точку $M'(\lambda x,\lambda y)$.

Рассмотрим однородное ОДУ-1. В предыдущем параграфе показано, что однородное уравнение всегда можно привести к виду (16)

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

При этом, наряду с уравнением (16) следует рассматривать и перевёрнутое уравнение. Из уравнения (16) следует, что в начале координат однородное уравнение не задает поле направлений, и поэтому через начало координат не проходит ни одна интегральная кривая. Интегральные кривые могут только примыкать к началу координат.

Пусть функция $\varphi(z)$ определена на интервале (a,b). Тогда правая часть уравнения (16) определена в области, которая определяется неравенством $a<\frac{y}{x}<b$. Эта область изображена на рисунке 5. Она ограничена прямыми $y=ax$ и $y=bx$.

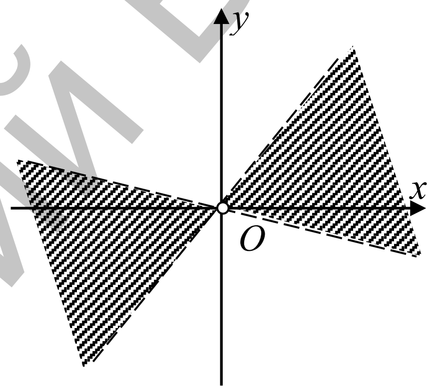

рис. 5

Из уравнения (16) также следует, что в начале координат однородное уравнение не задает поле направлений, и поэтому через начало координат не проходит ни одна интегральная кривая. Интегральные кривые могут только примыкать к началу координат.

Изоклинами являются полупрямые $y=kx$ ($x>0$ или $x<0$), выходящие из начала координат. Действительно, во всех точках таких полупрямых правая часть уравнения (16) принимает одно и то же значение $\varphi(k)$.

Пусть γ – произвольная интегральная кривая уравнения (16), а $M(x,y)$ – её произвольная точка. Напомним, что вектор $\overrightarrow{OM}$ называется радиус-вектором точки M. Если мы умножим этот вектор на любое число $\lambda\neq 0$, то получим вектор $\overrightarrow{OM'}$, где $M'(\lambda x,\lambda y)$. Пусть γ' – интегральная кривая, проходящая через точку M'. Значения правой части уравнения (16) в точках M и M' одинаково, и поэтому направление касательных к интегральным кривым в этих точках одинаковое. Следовательно, под действием гомотетии с центром в начале координат кривая γ переходит в кривую γ' (рисунок 6).

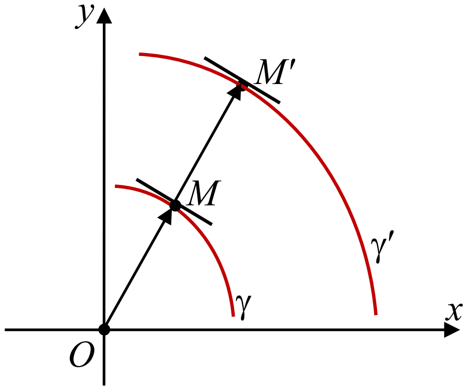

рис. 6

Итак, все интегральные кривые однородного ОДУ-1 обладают следующим свойством. *Всякая кривая, полученная из интегральной кривой под действием гомотетии с центром в начале координат, тоже является интегральной кривой*.

Впрочем, это свойство получается из вида общего интеграла уравнения (16). Кривые

$$x = C_1 e^{\psi\left(\frac{y}{x}\right)} \quad \text{и} \quad x = C_2 e^{\psi\left(\frac{y}{x}\right)}$$

получаются одна из другой в результате гомотетии.

Из сформулированного выше свойства вытекают следующие утверждения относительно интегральных кривых однородного ОДУ-1.

1. Пусть интегральная кривая γ отлична от полупрямой $y=kx$ ($x>0$ или $x<0$), выходящей из начала координат. Тогда она на некотором участке заключена между двумя полупрямыми $y=k_1x$ и $y=k_2x$. Если кривая γ примыкает на этом участке к началу координат, то и все интегральные кривые, заключённые между указанными выше полупрямыми, тоже примыкают к началу координат (рисунок 7).

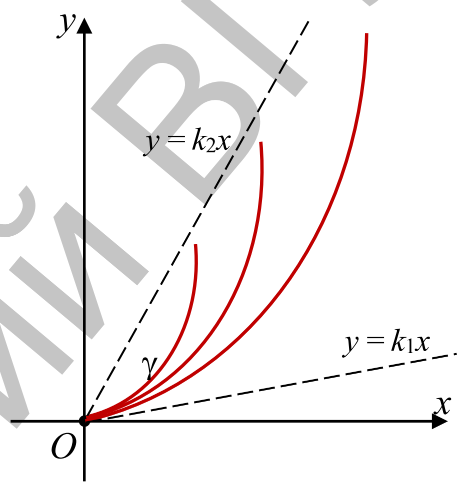

рис. 7

2. Если кривая γ является интегральной кривой, то и кривая симметричная ей относительно начала координат, тоже является интегральной кривой (рисунок 8).

3. Если одна из интегральных кривых замкнута, то и все интегральные кривые замкнуты (рисунок 8).

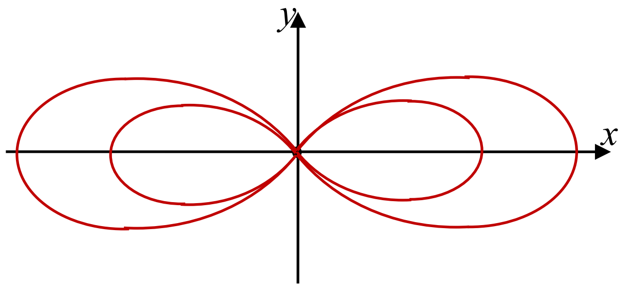

рис. 8

11. Уравнения, приводящиеся к однородным

1. Рассмотрим уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right). \tag{19}$$

Если $c_2 = c_1 = 0$, то уравнение можно привести к виду (16), и поэтому оно является однородным. Пусть хотя бы один из коэффициентов c_2, c_1 не равен нулю.

1 случай. Пусть

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \tag{20}$$

Сделаем замену переменных по формулам $x = x_0+t$, $y=y_0+z$, где x_0 и y_0 – некоторые пока что неизвестные числа, а t и z новые переменные. Тогда $dy=dz$, $dx=dt$. Подставим новые переменные в уравнение (19). Получаем

$$\frac{dz}{dt} = f\left(\frac{a_1t+b_1z + a_1x_o+b_1y_o+ c_1}{a_2t+b_2z + a_2x_o + b_2y_o + c_2}\right).$$

Возьмем в качестве x_o и y_o решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_1x_o+b_1y_o = 0\,, \\ a_2x_o + b_2y_o = 0\,, \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение, так как $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. Таким образом, мы придем к уравнению

$$\frac{dz}{dt} = f\left(\frac{a_1t+b_1z_1}{a_2t+b_2z}\right),$$

которое является однородным. Проинтегрируем его, и вернёмся к исходным переменным x и y. Получим общий интеграл уравнения (19).

2 случай. Пусть $\Delta = 0$. Тогда строки в этом определителе пропорциональны и будет выполняться $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k.$ Уравнение (19) имеет вид:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x+b_1y + c_1}{k\,(a_1x + b_1y) + c_2}\right).$$

Это уравнение можно привести к уравнению с разделяющимися переменными, если сделать замену $z= a_1x+b_1y$. Тогда $\frac{dz}{dx} = a_1+b_1\frac{dy}{dx}$ и получим уравнение $\frac{dz}{dx} = a_1+b_1\, f\left(\frac{z+ c_1}{kz + c_2}\right)$.

2. ***Обобщенное однородное уравнение.*** Уравнение

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

называется обобщенным однородным, если существует такое число k, при котором левая часть этого уравнения становится однородной функцией от величин x, y, dx, dy в предположении, что они имеют соответственно первое, k-ое, нулевое и $(k-1)$-е измерения. При $k = 1$ обобщенное однородное уравнение является обычным однородным уравнением.

Обобщенное однородное уравнение при помощи подстановки $y=zx^k$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

***Пример* 13.** Найти решение уравнения $2x^4ydy=(4x^6-y^4)dx.$

Решение. Покажем, что это уравнение является обобщенным однородным. Предположим, что величины x, y, dx, dy имеют соответственно первое, k-ое, нулевое и $(k-1)$-е измерения. Тогда выражения $2x^4ydy$, $4x^6dx$ и y^4dx имеют $(2k+3)$-е, шестое и $4k$-ое измерения. Должно выполняться $2k + 3 = 6 = 4k.$ Отсюда получаем, что $k = 3/2$.

Упражнение. Сделать подстановку $y = zx^{3/2}$ и найти решение уравнения.

Ответ. $x^5(y^2 - x^3)/(y^2 + 4x^3) = C.$

12. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение. *Линейным дифференциальным уравнением первого порядка* называется уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x), \tag{21}$$

где функции $p(x)$ и $q(x)$ непрерывны на интервале (a,b) (возможно, что $a = -\infty$, $b = +\infty$).

Если при этом, правая часть равна нулю, то уравнение называется *линейным однородным*, а если правая часть не равна нулю – *то линейным неоднородным*.

Однородное линейное уравнение имеет вид:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0. \tag{21′}$$

Очевидно, что в области

$$a < x < b,\ -\infty < y < +\infty \tag{22}$$

выполнены все условия теоремы Пикара, поэтому через каждую точку полосы (22) проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения (21).

Если уравнение однородно, то, очевидно, $y=0$ является решением. Поэтому через каждую точку $(x_o,0)$ на оси Ox $(x_o \in (a,b))$ проходит только это решение. Оно называется нулевым. Из этого следует, что решения однородного линейного уравнения не могут пересекать ось Ox и не могут касаться ее.

Решение однородного уравнения можем выписать в явном виде:

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}. \tag{23}$$

Свойства решений однородного линейного уравнения.

1) Если $y = y_1(x)$ – произвольное решение однородного уравнения, то $y = Cy_1(x)$ – тоже решение этого уравнения.

2) Если $y = y_1(x)$ – произвольное ненулевое решение, то в формуле $y = Cy_1(x)$ содержатся все решения.

Теорема. *Если $y=y_1(x)$ – частное решение неоднородного уравнения* (21), *а $z=Ce^{-\int p(x)dx}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения* (21′), *то $y=y_1(x)+z(x)$ есть общее решение неоднородного уравнения.*

Проверить это можно подстановкой. Рассмотрим два метода нахождения решения уравнения (21).

Метод Лагранжа вариации произвольной постоянной.

Вначале решаем однородное уравнение. Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными и его решение легко найти в виде (23). Решение неоднородного уравнения ищется в том же виде, как и решение соответствующего однородного, но постоянную представляем, как функцию от x:

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}. \tag{23'}$$

Тогда

$$y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)\left(e^{-\int p(x)dx}\right)' =$$

$$= C'(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)e^{-\int p(x)dx}\left(-\int p(x)dx\right)' =$$

$$= C'(x)e^{-\int p(x)dx} - p(x)\,C(x)e^{-\int p(x)dx}.$$

Подставим это выражение в неоднородное уравнение и получим:

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x).$$

Находим отсюда $C(x)$:

$$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C.$$

Получаем окончательно общее решение:

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right).$$

***Пример* 14.** Найти решение дифференциального уравнения

$y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \dfrac{1}{\cos x}$,

удовлетворяющее условию $y(\pi) = 1$.

Решение. Решаем однородное уравнение $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = 0$. Разделив переменные и проинтегрировав это уравнение, получим:

$$y = Ce^{-\int \mathrm{tg}\,x\,dx} = Ce^{\ln|\cos x|} = C|\cos x| = \pm C\cos x.$$

Но $\pm C$ – это тоже произвольная постоянная. Поэтому $\pm C$ можем переобозначить как C. Далее, превращая произвольную постоянную в функцию, имеем

$$y = C(x)\cos x.$$

$$y' = C'(x)\cos x - C(x)\sin x.$$

Подставляем это в исходное уравнение:

$$C'(x)\cos x - C(x)\sin x + C(x)\cos x \cdot \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}.$$

$$C'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \Rightarrow \quad C(x) = \operatorname{tg} x + C_1.$$

Общее решение: $y = (\operatorname{tg} x + C_1)\cos x$. Подставляем сюда начальные данные:

$$1 = (\operatorname{tg}\pi + C_1)\cos\pi \quad \Rightarrow \quad C_1 = -1.$$

Ответ: $y = (\operatorname{tg} x - 1)\cos x$.

Метод Бернулли.

Решение неоднородного уравнения будем искать в виде произведения двух неизвестных функций: $y = u(x)\cdot v(x)$. Тогда $y' = u'\cdot v + u\cdot v'$. Подставляем эту замену в уравнение:

$$u'\cdot v + u\cdot v' + p(x)u\cdot v = q(x).$$

Теперь сгруппировать второе слагаемое с третьим и вынести за скобки u. Получаем

$$u'\cdot v + u(v' + p(x)\cdot v) = q(x). \tag{24}$$

Функцию $v(x)$ будем искать из условия, чтобы выражение в скобках равнялось нулю:

$$v' + p(x)\cdot v = 0. \tag{25}$$

Это уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dv}{dx} = -p(x)\cdot v, \quad \frac{dv}{v} = -p(x)\cdot dx, \quad \ln|v| = -\int p(x)dx.$$

Нас интересует лишь какое-нибудь одно частное ненулевое решение уравнения (25). Поэтому, постоянной, которая появится при вычислении интеграла, можно придать любое значение, которое нас более всего устраивает. Окончательно,

$$v = e^{-\int p(x)\cdot dx}.$$

Напомним, что при таком выборе функции $v(x)$ выражение в скобках в уравнении (24) равно нулю. Поэтому для нахождения функции $u(x)$ у нас остаётся уравнение

$$u'\cdot v(x) = q(x).$$

Решаем его:

$$\frac{du}{dx} = \frac{q(x)}{v(x)} = q(x)\, e^{\int p(x)\cdot dx}, \quad u = \left(q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right).$$

Мы нашли две функции $u(x)$ и $v(x)$, а значит, окончательно нашли решение

$$y = u(x)\cdot v(x) = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right).$$

***Пример* 15.** Найти общее решение дифференциального уравнения $y'-\frac{y}{x}=2xe^{x}$ $(x\neq 0)$.

Решение. Совершаем замену $y=u\cdot v$, $y'=u'\cdot v+u\cdot v'$, группируем 2 и 3 слагаемое:

$$u'\cdot v+u\cdot v'-\frac{uv}{x}=2xe^{x},\quad u'\cdot v+u(v'-\frac{v}{x})=2xe^{x}.$$

Приравниваем выражение в скобках к нулю и из получившегося уравнения находим функцию $v(x)$:

$$v'-\frac{v}{x}=0,$$

$$\frac{dv}{dx}=\frac{v}{x},\quad \frac{dv}{v}=\frac{dx}{x},\quad \int\frac{dv}{v}=\int\frac{dx}{x},$$

$$\ln|v|=\ln|x|+\ln|C|,$$

$$\ln|v|=\ln(|x||C|),\quad v=Cx.$$

В качестве C берём любое число, например 1, т.е. нас устраивает решение $v=x$. Теперь для нахождения функции $u(x)$ мы имеем уравнение

$$u'\cdot x=2xe^{x}.$$

Решаем его:

$$u'=2e^{x},\ u=2\int e^{x}dx,\ u=2e^{x}+C.$$

***Ответ*:** $y=x(2e^{x}+C)$.

Часто встречаются линейные дифференциальные уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами: $y'+ay=b$. Оно может быть решено описанным выше способом, но проще его решить, как уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{dx}=-ay+b,\ \frac{dy}{-ay+b}=dx,\ -\frac{1}{a}\ln|-ay+b|=x+C_1,$$

$$\ln|-ay+b|=-ax+C_2,\ \text{где}\ C_2=-aC_1,$$

$$-ay+b=e^{-ax+C_2}.$$

Можем обозначить $C=-\frac{1}{a}e^{C_2}$. Тогда

$$y=Ce^{-ax}+\frac{b}{a}.$$

13. Уравнение Бернулли

Уравнение Бернулли имеет вид

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)y^{n},\tag{26}$$

где n – любое действительное число, $n\neq 0$, $n\neq 1$.

Предположим, что функции $p(x)$ и $q(x)$ непрерывны на интервале (a,b) (возможно, что $a=-\infty$, $b=+\infty$). Пользуясь теоремой Пикара, выясним вопрос существования и единственности решения задачи Коши.

Перепишем уравнение (26) в нормальной форме:

$$y'=-p(x)y+q(x)y^n$$

и обозначим правую часть $f(x,y)$. Тогда

$$\frac{df}{dy}=-p(x)+nq(x)y^{n-1}.$$

Мы видим, что выполнение условий теоремы Пикара в точке $(x_о,y_о)$ зависит от показателя степени y^{n-1} и от значения $y_о$.

Если $y_о\neq 0$, то условия теоремы Пикара выполнены при любом n. Если $y_о=0$, то условия теоремы Пикара выполнены при $n>1$. В последнем случае единственным решением будет $y = 0$ на интервале (a,b). Если $y_о=0$ и $n<1$, то единственность решения не гарантируется и решение $y=0$, $x\in(a,b)$ может быть особым.

Решить уравнение Бернулли можно следующим способом. Разделим обе части уравнения на y^n:

$$y^{-n}\,y'=-p(x)y^{1-n}+q(x) \tag{27}$$

Введём новую неизвестную функцию: $z=y^{1-n}$. Тогда $z'=(1-n)y^{-n}y'$. Умножим (27) на $1-n$:

$$(1-n)y^{-n}\,y'=-(1-n)p(x)y^{1-n}+(1-n)q(x) \tag{28}$$

Получаем линейное уравнение:

$$z'+(1-n)p(x)z=(1-n)q(x).$$

При делении на y^n, если $n>0$, может потеряться решение $y=0$. Это решение будет частным, если $n>1$(мы это уже выясняли выше) и может быть особым, если $0<n<1$.

***Пример* 16.** Найти общее решение уравнения

$$y'+2e^x y=2e^x\sqrt{y}.$$

Решение. Для данного уравнения $n=\dfrac{1}{2}$. Поэтому делаем замену $z=y^{1-n}=\sqrt{y}$, $z'=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}y'$. Умножаем данное уравнение на $1-n=\dfrac{1}{2}$ и делим на $y^n=\sqrt{y}$.

$$\frac{1}{2\sqrt{y}}y'+\frac{1}{2\sqrt{y}}e^x y=e^x \quad\Leftrightarrow\quad z'+e^x z=e^x.$$

Получили линейное уравнение. Решим его методом Бернулли. Замена: $z = u \cdot v$, $z' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

$$u' \cdot v + u \cdot v' + e^x u \cdot v = e^x; \quad u' \cdot v + u(v' + e^x v) = e^x.$$

Приравниваем скобку к нулю и решаем получившееся уравнение:

$$\frac{dv}{dx} = -e^x v, \ \frac{dv}{v} = -e^x dx, \ \int \frac{dv}{v} = -\int e^x dx, \ \ln|v| = -e^x.$$

Произвольную константу считаем равной 0, поскольку нас интересует только одно частное решение.

$$v = e^{-e^x}.$$

Теперь получаем новое уравнение

$$u' \cdot e^{-e^x} = e^x \Leftrightarrow u' = e^x e^{e^x}.$$

$$u = \int e^x e^{e^x} dx = \int e^{e^x} de^x = e^{e^x} + C.$$

$$z = u \cdot v = e^{-e^x}\left(e^{e^x} + C\right) = 1 + Ce^{-e^x}.$$

Ответ: $y = \left(1 + Ce^{-e^x}\right)^2$.

Замечание. Уравнение Бернулли можно решить, не прибегая к делению на y^n и сведению уравнения к линейному, а сразу применяя подстановку $y = u \cdot v$.

14. Уравнение в полных дифференциалах

Пусть дано уравнение (4) $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$. Если левая часть уравнения представляет собой полный дифференциал некоторой функции двух переменных, то оно называется *уравнением в полных дифференциалах*.

В этом случае найдется функция $U = U(x,y)$ такая, что будет выполняться

$$dU(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy. \tag{29}$$

С другой стороны,

$$dU(x,y) = \partial U/\partial x \ dx + \partial U/\partial y \, dy.$$

Тогда

$$P = \partial U/\partial x, \ Q = \partial U/\partial y.$$

Пусть функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$ непрерывны, у них существуют частные производные $\partial P/\partial y$, $\partial Q/\partial x$, и эти частные производные непрерывны. Тогда

$$\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x, \tag{30}$$

поскольку смешанные производные $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$ должны совпадать. И обратно, если выполнено (30), то левая часть уравнения (29) есть полный дифференциал некоторой функции $U(x,y)$. Условие (30) называют *условием полной дифференцируемости*.

Так как в этом случае уравнение принимает вид $dU(x,y)=0$, то общим интегралом будет $U(x,y)=C$, где функция $U(x,y)$ удовлетворяет двум условиям: $\partial U/\partial x = P(x,y)$, $\partial U/\partial y = Q(x,y)$.

Функция $U(x,y)$ восстанавливается следующим образом. Из первого условия находим

$$U(x,y)=\int P(x,y)\,dx+\varphi(y), \tag{31}$$

где $\varphi(y)$ – некоторая функция, которая предполагается дифференцируемой. Найдем теперь от обеих частей равенства (31) частную производную по y и заменим $\partial U/\partial y$ на Q:

$$Q(x,y)=\partial\left(\int P(x,y)\,dx\right)/\partial y+\varphi'(y) \;\Leftrightarrow\; \varphi'(y)=Q(x,y)-\partial\left(\int P(x,y)\,dx\right)/\partial y.$$

Находим функцию $\varphi(y)$ и подставляем в (31).

***Пример* 17.** Найти решение уравнения

$$(2xy-1)dx+(3y^2+x^2)dy=0.$$

Решение. Проверяем условие полной дифференцируемости:

$$(2xy-1)'_y=2x, \quad (3y^2+x^2)'_x=2x.$$

Так как $\partial P/\partial y\equiv\partial Q/\partial x$, то это уравнение в полных дифференциалах. Воспользуемся равенством

$$\partial U/\partial x=P(x,y), \text{ т.е. } \partial U/\partial x=2xy-1.$$

$$U(x,y)=\int(2xy-1)dx+\varphi(y)=x^2y-x+\varphi(y).$$

Найдем частную производную по y: $\partial U/\partial y=x^2+\varphi'(y)$. Получившееся выражение приравняем к $Q(x,y)$.

$$x^2+\varphi'(y)=3y^2+x^2,$$

$$\varphi'(y)=3y^2,$$

$$\varphi(y)=y^3+C.$$

Окончательно получаем: $U(x,y)=x^2y-x+y^3+C$. Общий интеграл уравнения можно записать в виде $x^2y-x+y^3=C$.

Замечание. Решение уравнения в полных дифференциалах можно найти, пользуясь криволинейными интегралами. Функция $U(x,y)$ будет равна

$$U(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy+C,$$

где (x_o,y_o) – произвольная фиксированная точка из области определения уравнения (в этой точке должно быть задано поле направлений). Мы её выбираем так, чтобы ответ получился как можно проще. Пользуясь тем, что данный интеграл не зависит от пути интегрирования, и, выбирая в качестве пути интегрирования отрезки, параллельные осям координат и соединяющие точки (x_o,y_o) и (x,y), получим формулы

$$U(x,y)=\int\limits_{x_o}^{x}P(x,y)\,dx+\int\limits_{y_o}^{y}Q(x_o,y)\,dy+C,\quad \text{или}$$

$$U(x,y)=\int\limits_{x_o}^{x}P(x,y_o)\,dx+\int\limits_{y_o}^{y}Q(x,y)\,dy+C.$$

Общий интеграл может быть записан записать в одном из следующих видов:

$$\int\limits_{x_o}^{x}P(x,y)\,dx+\int\limits_{y_o}^{y}Q(x_o,y)\,dy=C,\qquad \int\limits_{x_o}^{x}P(x,y_o)\,dx+\int\limits_{y_o}^{y}Q(x,y)\,dy=C\ .$$

Если в точке (x_o,y_o) функции P и Q не равны нулю одновременно, то решение задачи Коши с начальными данными $y(x_o)=y_o$ задаётся этими же формулами при $C=0$. Это решение единственно.

Пример **17** может быть решен, пользуясь записанными формулами.

Выберем точку $(0,0)$, принадлежащую области определения уравнения. В этой точке задано поле направлений, так как $P(0,0)=-1$. Ищем общий интеграл:

$$\int\limits_{0}^{x}(2xy-1)dx+\int\limits_{0}^{y}3y^2dy=C\quad\Leftrightarrow\quad x^2y-x+y^3=C.$$

Предположим, что к уравнению добавлены начальные условия $y(0)=0$. Тогда решением будет

$$x^2y-x+y^3=0. \tag{32}$$

Поскольку в точке $(0,0)$ выполнено $P(0,0)=-1$, то это решение единственно. Причём, мы можем рассматривать уравнение (32), как квадратное уравнение относительно неизвестной x и можем в явном виде найти решение

$$x=\frac{1-\sqrt{1-4y^4}}{2y},$$

которое имеет устранимый разрыв в точке $(0,0)$.

15. Интегрирующий множитель

Мы видели, что уравнение в полных дифференциалах всегда интегрируется в квадратурах. Предположим, что мы имеет уравнение

$$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0, \tag{4}$$

которое не является уравнением в полных дифференциалах. Возникает вопрос: нельзя ли найти такую функцию $\mu=\mu(x,y)$, после умножения на которую уравнение (4) станет уравнением в полных дифференциалах

$$\mu(x,y)P(x,y)\,dx+\mu(x,y)Q(x,y)\,dy=0\,? \tag{33}$$

Следовательно, должно выполняться

$$\mu(x,y)P(x,y)\,dx+\mu(x,y)Q(x,y)\,dy=dU(x,y).$$

Такая функция $\mu=\mu(x,y)$ называется *интегрирующим множителем*, а функция $U(x,y)$ называется *соответствующим ему интегралом* уравнения (4).

Относительно функций $P(x,y)$, $Q(x,y)$ мы сохраням предположение, что они непрерывны, у них существуют частные производные $\partial P/\partial y$, $\partial Q/\partial x$, и эти частные производные непрерывны в области определения уравнения, а также функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$ не обращаются в ноль одновременно ни в одной точке этой области.

Применим условие полной дифференцируемости (30) к уравнению (33):

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}.$$

По правилу дифференцирования произведения:

$$\frac{\partial\mu}{\partial y}P+\mu\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial\mu}{\partial x}Q+\mu\frac{\partial Q}{\partial x};$$

$$Q\frac{\partial\mu}{\partial x}-P\frac{\partial\mu}{\partial y}=\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\mu. \qquad (34)$$

Мы получили уравнение с частными производными первого порядка относительно неизвестной функции $\mu=\mu(x,y)$. Задача интегрирования этого уравнения, как правило, не легче, чем задача интегрирования уравнения (4). Тем не менее, в некоторых случаях удается легко найти его решение.

Допустим, что уравнение (4) имеет интегрирующий множитель $\mu=\mu(x)$, который зависит только от x. Тогда $\partial\mu/\partial y=0$ и уравнение (34) имеет вид

$$Q\frac{d\mu}{dx}=\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\mu.$$

Если $Q\neq 0$, то оно преобразуется в уравнение

$$\frac{\mu'}{\mu}=\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right).$$

В этом уравнении левая часть зависит только от x, поэтому правая часть должна быть функцией только от x:

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\psi(x). \qquad (35)$$

Решая уравнение $\dfrac{\mu'}{\mu}=\psi(x)$, находим

$$\mu=Ce^{\int\psi(x)dx}.$$

Мы можем выбрать любое значение произвольной постоянной, например, $C=1$. Поэтому можем взять интегрирующий множитель

$$\mu=e^{\int\psi(x)dx}. \qquad (36)$$

Аналогично, если интегрирующий множитель зависит только от y, мы можем найти его по формуле

$$\mu = e^{\int \psi(y)dy}.$$

Для этого должно быть выполнено условие

$$-\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \psi(y).$$

***Пример* 18.** Найдём интегрирующий множитель линейного уравнения

$$y' + p(x)y = q(x).$$

Перепишем уравнение в виде

$$(p(x)y - q(x))dx + dy = 0.$$

Здесь $P(x,y) = p(x)y - q(x)$, $Q \equiv 1$. Подставляя это в условие (35), находим что $\psi(x) = p(x)$. Значит, интегрирующий множитель линейного уравнения:

$$\mu = Ce^{\int p(x)dx}.$$

ЧАСТЬ 2. ОДУ-1, не разрешенные относительно производной

1. Основные понятия. Простейшие уравнения

ОДУ-1 *не разрешенное относительно производной* имеет вид

$$F(x,y,y')=0. \tag{1}$$

Решением уравнения (1) на интервале (a,b) называется функция $y=y(x)$, определённая и непрерывно дифференцируемая на этом интервале и обращающая при подстановке в (1) это уравнение в тождество.

Часто найти решение в явном виде бывает затруднительно, и ограничиваются нахождением решения в неявном виде $\Phi(x,y)=0$ или в параметрическом виде: $x=x(t)$, $y=y(t)$.

График решения называется интегральной кривой. Из определения решения следует, что все интегральные кривые являются гладкими.

В некоторых случаях уравнение (1) разрешимо так, что получаем несколько уравнений вида $y'=f_k(x,y)$, $(k=1,2,\ldots,n)$, решение которых было рассмотрено в главе 1.

***Пример* 1.** Найти общее решение уравнения

$$y'^2-4y=0. \tag{2}$$

Решение. Выражая y', получаем два уравнения: $y'=2\sqrt{y}$, или $y'=-2\sqrt{y}$. Поэтому имеем два семейства решений:

$$\sqrt{y}=x+C \ \ (x+C\geq 0) \ \text{ или } \ \sqrt{y}=-x+C \ \ (-x+C\geq 0).$$

$$y=(x+C)^2 \ \ (x\geq -C) \ \text{ или } \ y=(x+C)^2 \ \ (x\leq -C). \tag{3}$$

(в последнем случае мы заменили $-C$ на C). Тем самым, интегральными кривыми являются все параболы, получающиеся из параболы $y=x^2$ сдвигом по оси Ox (рисунок 9).

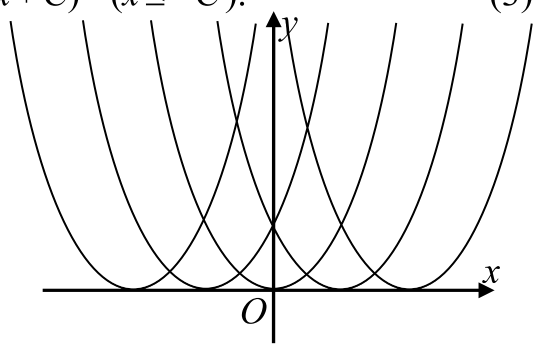

рис. 9

Кроме того, решением будет $y=0$, а также существует бесконечное число решений получающихся склейкой особого решения $y=0$ с другими решениями. Например,

$$y=\begin{cases} 0, & x\leq 1 \\ (x-1)^2, & x>1. \end{cases}$$

$$y=\begin{cases} (x+1)^2, & x<1 \\ 0, & x\leq 1 \\ (x-1)^2, & x>1. \end{cases}$$

(рисунок 10)

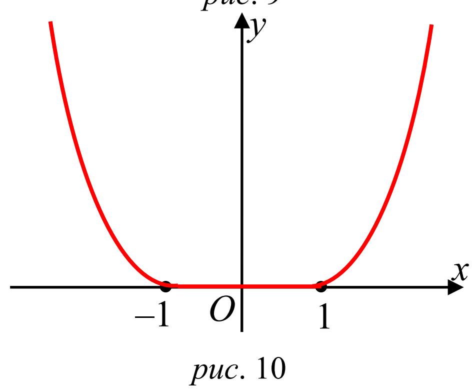

рис. 10

2. Поле направлений. Единственность решения задачи Коши

Уравнение (1) задаёт на плоскости поле направлений. Через каждую (x,y) мы можем провести прямую, тангенс угла наклона которой равен значению y' в этой точке. Для того, чтобы найти все возможные направления поля в точке $(x_о,y_о)$ надо найти все возможные решения уравнения

$$F(x_о,y_о,y')=0. \tag{4}$$

Пример 2. Найдем направления поля для уравнения (2).

$$y'^2-4y_о=0,$$

$$y_1'=2\sqrt{y_о},\quad y_2'=-2\sqrt{y_о}.$$

Тем самым, если $y_о\neq 0$, то через точку $(x_о,y_о)$ проходят две прямые, задающие два направления, а через точку на оси Ox проходит только одна прямая – сама ось Ox.

Пример 3. Уравнение $y'^3+1=0$ задаёт в каждой точке только одно направление посредством прямой с угловым коэффициентом –1, а уравнение $y'^2+1=0$ не задаёт ни одного направления в любой точке.

Определение. Совокупность точек (x,y), в которых уравнение задаёт хотя бы одно направление, называется *областью определения направления*.

Определение. Говорят, что решение задачи Коши с начальными данными $(x_о,y_о)$ *единственно*, если существует такая окрестность точки $x_о$, что

1) число интегральных кривых, определенных в этой окрестности и проходящих через точку $(x_о,y_о)$, равно числу направлений поля, определяемых данным уравнением вида (1) точке $(x_о,y_о)$;

2) каждому направлению поля соответствует ровно одна интегральная кривая, касательная к которой совпадает с направлением поля.

Пример 4. Пусть для уравнения (2) задано начальное условие $y(0)=1$. Подставим в общие решения (3) начальные условия:

$$1=(0+C)^2 \;\Rightarrow\; C=\pm 1.$$

Получаем два решения: $y=(x+1)^2$ и $y=(x-1)^2$. В точке $(0,1)$ имеем два направления: $y_1'=2$, $y_2'=-2$. Поэтому считаем, что единственность решения не нарушается.

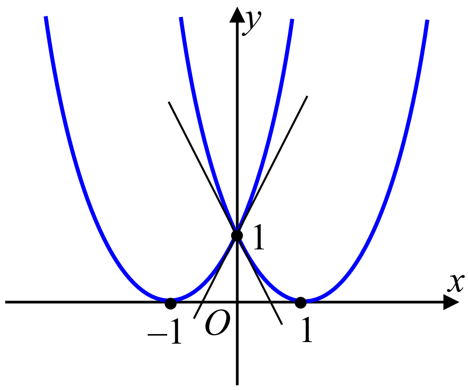

рис. 11

Пример 5. Пусть для уравнения (2) задано начальное условие $y(1)=0$. Тогда этому условию удовлетворяют решения $y\equiv 0$, $y=(x+1)^2$, а также комбинации этих решений (при $x<1$ – одно из них, при $x>1$ – другое). При этом, уравнение задаёт только одно направление в этой точке. Единственность решения задачи Коши нарушается (рисунок 11).

***Пример* 6.** Найти решение уравнения

$$y'^2 = 4x^2, \tag{5}$$

удовлетворяющее начальному условию $y(0) = y_o$.

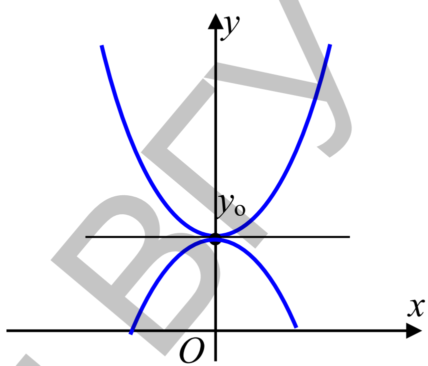

рис. 12

Решение. Выражая y', получаем два уравнения:

$$y' = 2x, \text{ или } y' = -2x.$$

Отсюда получаем два семейства интегральных кривых:

$$y = x^2 + C, \text{ или } y = -x^2 + C.$$

Через точку $(0, y_o)$ проходят интегральные кривые (рисунок 12)

$$y = x^2 + y_o, \text{ или } y = -x^2 + y_o,$$

а также решения, составленные их частей этих решений: (при $x < 0$ – одно из них, при $x > 0$ – другое). При этом направление поля определяется уравнением $y'^2 = 0$, которое даёт только одно решение: прямую параллельную оси Ox. Следовательно, единственность решения нарушается.

Следующая теорема даёт достаточные условия, при выполнении которых существует единственная интегральная кривая, проходящая через данную точку (x_o, y_o) и соответствующая заранее выбранному полю направлений.

Теорема. *Пусть* y_o' *– одно из решений уравнения* (4), *и пусть левая часть уравнения* (1) *удовлетворяет следующим условиям*:

1) *функция* $F(x, y, y')$ *непрерывна вместе со своими частными производными в некоторой замкнутой окрестности точки* (x_o, y_o, y_o');

2) *выполнено* $F(x_o, y_o, y') = 0$;

3) *частная производная* $F'_{y'}$ *в рассматриваемой точке не равна нулю. Тогда существует единственное решение* $y = y(x)$ *уравнения* (1), *удовлетворяющее начальному условию* $y(x_o) = y_o$, *и такое что* $y'(x_o) = y_o'$.

***Пример* 7.** Проверим, выполнены ли условия теоремы для уравнения (2) $y'^2 - 4y = 0$ в точке $(0, 1)$. Мы уже выяснили, что в этой точке существуют два направления поля $y_1' = 2$, $y_2' = -2$. Выберем первое. Имеем точку $(x_o, y_o, y') = (0, 1, 2)$. В этой точке $F'_{y'} = 2y' = 4 \neq 0$. Значит, условие (3) теоремы выполнено. Проверьте сами, что условия 1) и 2) тоже выполняются. Значит, направлению поля $y_1' = 2$ соответствует единственное решение, проходящее через точку $(0, 1)$.

***Пример* 8.** Проверим, выполнены ли условия теоремы для уравнения

$$(y' - 1)(y'^2 - 4y) = 0 \tag{6}$$

с начальными условиями $y(x_o)=0$. В точке $(x_o,0)$ имеем уравнение для направлений: $(y'-1)y'^2=0$, которое имеет два решения $y'=1$, $y'=0$.

Для первого направления выполнены условия 1 и 2 теоремы. Проверяем третье условие:

$$F'_{y'}=y'^2-4y+(y'-1)\cdot 2y'; \quad F'_{y'}(x_o,0,1)=1.$$

Значит, через точку $(x_o,0)$ проходит по направлению $y'=1$ только одна интегральная кривая.

Для второго направления $F'_{y'}(x_o,0,0)=0$. Поэтому существование и единственность решения теорема не гарантирует. В примере 2 мы выяснили, что единственности решения нет.

3. Отступление из дифференциальной геометрии

Определение. Пусть на плоскости задано семейство кривых $\{\gamma_t\}$. Пусть кривая ω в каждой своей точке касается одной из кривых семейства (т.е. имеет с ней общую касательную). Тогда ω называется *огибающей семейства кривых* γ_t (рисунок 13).

Пусть семейство кривых $\{\gamma_t\}$ задано с помощью уравнения в неявном виде

$$F(x,y,t)=0\,, \tag{8}$$

где t – параметр семейства, а кривая ω – параметрическим уравнением $\vec{\mathbf{r}}=\boldsymbol{c}(t)$, причём так, чтобы в точке $\boldsymbol{c}(t)$ она касалась кривой γ_t (т.е. в качестве параметра у кривой ω выступает «номер» линии с которой она касается в данной точке). При таком определении параметра точка $\boldsymbol{c}(t)=(x(t),\,y(t))$ принадлежит кривой γ_t, а значит, выполняется тождество

$$F(x(t),y(t),t)\equiv 0\,. \tag{9}$$

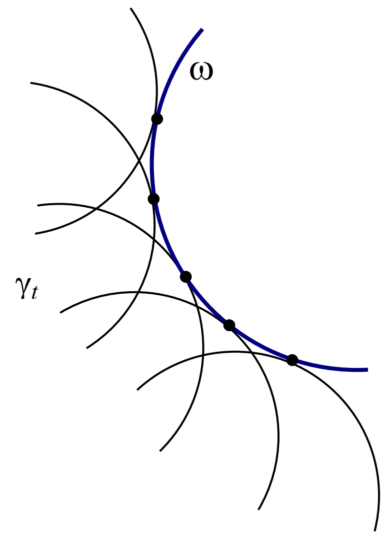

рис. 13

Продифференцируем это тождество по t:

$$\frac{\partial F}{\partial x}x'(t)+\frac{\partial F}{\partial y}y'(t)+\frac{\partial F}{\partial t}\equiv 0\,. \tag{10}$$

В уравнении (8) для каждой отдельной кривой γ_t параметр t выступает в качестве постоянной. Поэтому вектор $\mathbf{grad}\,F$ будет вектором нормали для кривой γ_t. Но кривая ω имеет вместе с γ_t общую касательную, поэтому $\mathbf{grad}\,F$ будет вектором нормали и для кривой ω. Следовательно, выполнено $\mathbf{grad}\,F\cdot\boldsymbol{c}'(t)=0$, т.е

$$\frac{\partial F}{\partial x}x'(t)+\frac{\partial F}{\partial y}y'(t)=0\,.$$

Поэтому (10) принимает вид: $\partial F/\partial t \equiv 0$. Объединяя это тождество и (9), получаем, что функции $(x(t), y(t))$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} F(x, y, t) = 0, \\ F_t(x, y, t) = 0. \end{cases} \qquad (11)$$

Множество точек, которые удовлетворяют этой системе называется *дискриминантной линией*. Оно не всегда является кривой.

***Пример* 11.** Для семейства прямых $y - tx = 0$ система (11) имеет вид

$$\begin{cases} y = tx, \\ x = 0. \end{cases}$$

Дискриминантная линия состоит только из одной точки $(0, 0)$.

***Пример* 12.** Для семейства окружностей, изображённого на рисунке 14 (центры окружностей находятся на единичной окружности с центором O, а радиусы равны 1) система (11) имеет вид

$$\begin{cases} (x - \cos t)^2 + (y - \sin t)^2 = 1, \\ (x - \cos t) \cdot \sin t - (y - \sin t) \cdot \cos t = 0. \end{cases}$$

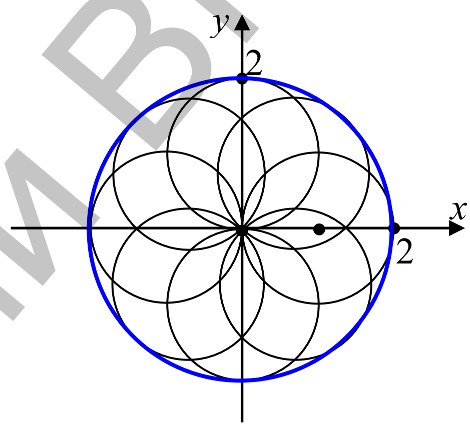

рис. 14

Она имеет два решения (проверьте подстановкой)

$$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t. \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Только первое решение задаёт кривую.

Примем без доказательства, что если в каждой точке дискриминантной линии $\partial F/\partial x$ и $\partial F/\partial y$ одновременно в ноль не обращаются, то дискриминантная линия является огибающей кривой.

В теории дифференциальных уравнений вместо параметра семейства t используется произвольная постоянная C.

4. Особые решения. Дискриминантная кривая

Определение. Точка (x_o, y_o) называется *регулярной*, если в ней сохраняется единственность решения задачи Коши.

Решение дифференциального уравнения (1) будем называть частным, если каждая его точка является регулярной.

Определение. Точка (x_o, y_o) называется *особой*, если в ней нарушается единственность решения задачи Коши.

Решение дифференциального уравнения (1) будем называть особым, если каждая его точка является особой.

Особые решения можно найти следующим образом. Пусть левая часть уравнения (1) имеет частную производную по y'. Составим систему уравнений

$$\begin{cases} F(x,y,y')=0, \\ F'_{y'}(x,y,y')=0. \end{cases} \tag{12}$$

Исключая y', получим уравнение вида $\Phi(x,y)=0$. Оно задаёт, так называемую, *дискриминантную линию* уравнения (1). Дискриминантная кривая может оказаться одной точкой, а может оказаться особым решением или просто кривой.

***Пример* 13.** Для уравнения (2) $y'^2-4y=0$ система (12) выглядит так:

$$\begin{cases} y'^2-4y=0, \\ 2y'=0. \end{cases}$$

Решением будет дискриминантная кривая $y=0$, т.е. ось Ox. Она является особым решением.

***Пример* 14.** Для уравнения (5) $y'^2=4x^2$ система (12) выглядит так:

$$\begin{cases} y'^2-4x^2=0, \\ 2y'=0. \end{cases}$$

Решением будет дискриминантная кривая $x=0$, т.е. ось Oy. Она не является особым решением. На ней расположены точки прикосновения решений из двух различных семейств.

Подойдём к тому же уравнению с другой стороны.

***Пример* 15.** Уравнение (5) $y'^2=4x^2$ имеет два семейства интегральных кривых: $y=x^2+C$, $y=-x^2+C$. Их можно записать вместе с помощью одного уравнения:

$$(y-x^2-C)(y+x^2-C)=0 \quad \Leftrightarrow \quad (y-C)^2-x^4=0.$$

Система для нахождения дискриминантной кривой:

$$\begin{cases} (y-C)^2-x^4=0, \\ 2(y-C)=0. \end{cases}$$

Решением опять будет дискриминантная кривая $x=0$, т.е. ось Oy. Мы уже знаем, что она не является особым решением.

Но огибающая семейства интегральных кривых является особым решением. Мы рассмотрим пример в следующем параграфе.

5. Уравнения *n*-ой степени

Определение. Уравнением *первого порядка n-ой степени* называется уравнение вида

$$y'^n+A_1(x,y)y'^{n-1}+\ldots+A_{n-1}(x,y)y'+A_{n-1}(x,y)=0. \tag{13}$$

Если это уравнение получится разрешить в элементарных функциях относительно y', то мы можем получить несколько уравнений вида

$$y' = f_k(x, y),\ (k = 1, \dots, m,\ m \le n). \tag{14}$$

Предположим, что для каждого из уравнений (14) найден общий интеграл

$$\psi_k(x, y) = C,$$

тогда общим интегралом уравнения (13) является

$$(\psi_1(x, y) - C)(\psi_2(x, y) - C) \dots\ (\psi_k(x, y) - C) = 0.$$

Особым решением уравнения (13) может быть только его дискриминантная линия, если она является кривой.

Пусть данное уравнение является квадратным относительно y':

$$y'^2 + 2P(x, y)y' + Q(x, y) = 0 \tag{15}$$

и задано в области $P^2(x, y) - Q(x, y) \ge 0$. Разрешаем его относительно y':

$$y' = -P(x, y) \pm \sqrt{P^2(x, y)y' - Q(x, y)}.$$

Тем самым, получим одно или два уравнения, разрешённых относительно производной. Дискриминантной линией будет

$$P^2(x, y) - Q(x, y) = 0.$$

Только она может оказаться особым решением.

***Пример* 16.** Найти общий интеграл уравнения

$$y'^2 - \left(2x + \frac{1}{y}\right)y' + \frac{2x}{y} = 0.$$

Решение. Разрешив данное уравнение относительно y', получаем:

$$y' = 2x \text{ или } y' = \frac{1}{y}.$$

Отсюда находим два общих интеграла

$$y - x^2 = C,\ x - \frac{y^2}{2} = C.$$

Их можно записать вместе с помощью одного уравнения:

$$(y - x^2 - C)\left(x - \frac{y^2}{2} - C\right) = 0.$$

Область определения уравнения: $\left(2x - \frac{1}{y}\right)^2 \ge 0, y \ne 0$. Первое неравенство выполнено всегда. Дискриминантная кривая (гипербола) имеет уравнение

$$2x - \frac{1}{y} = 0 \iff y = \frac{1}{2x}.$$

На рисунке 15 два изображены два семейства решений. Выделены точки дискриминантной линии. В этих точках уравнение определяет только одно направление, но через них проходит по два решения. Дискриминантная кривая не является решением уравнения.

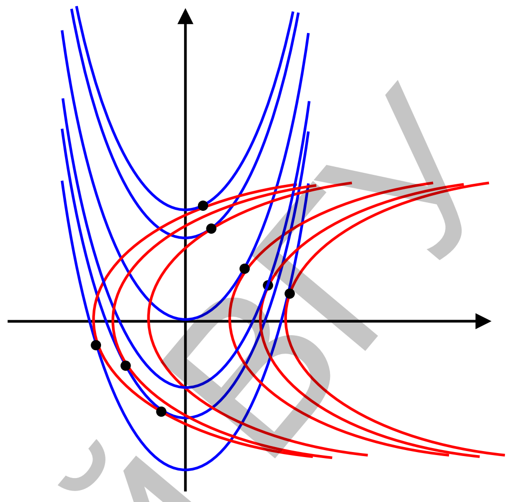

рис. 15

***Пример* 17.** Найти общий интеграл уравнения

$$y'^2-2y'+1-y+x=0.$$

Решение. Поскольку уравнение можно переписать как $(y'-1)^2=y-x$, то область определения уравнения $y-x\geq 0$. Эта область изображена на рисунке 16.

Разрешив данное уравнение относительно y', получаем:

$$y'=1+\sqrt{y-x} \quad \text{или} \quad y'=1-\sqrt{y-x}\,. \tag{16}$$

Подстановкой можно убедиться, что имеем два семейства интегральных кривых:

$$y=x+\frac{(x+C)^2}{4}\ (x\geq -C),\quad y=x+\frac{(x+C)^2}{4}\ (x\leq -C).$$

Каждое из решений представляет собой ветвь параболы. По одной кривой из каждого семейства сливаются вместе в одну кривую. Дискриминантная кривая $y=x$ является особым решением. Действительно, подстановка в уравнение даёт тождество, и уравнения (16) при $y=x$ определяют только одно направление $y'=1$.

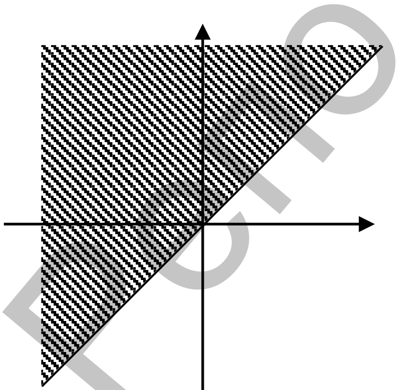

рис. 16

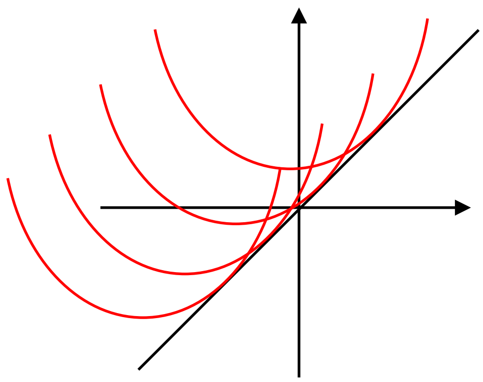

рис. 17

6. Неполные уравнения

1. Рассмотрим уравнение вида

$$F(y')=0\,. \tag{17}$$

Будем рассматривать его так же, как алгебраическое уравнение, относительно неизвестного y'. Если оно имеет хотя бы одно действительное решение y', то можно легко найти все интегральные этого уравнения.

Пусть $y' = a_k,\ k = 1, 2, \ldots$ есть действительные решения уравнения (17), тогда находим решения $y = a_k x + C \Rightarrow a_k = \dfrac{y-C}{x}$. Подставляем в (17) и получаем общий интеграл

$$F\left(\frac{y-C}{x}\right) = 0.$$

Замечание. Сказанное выше верно только тогда, когда алгебраическое уравнение (17) имеет изолированные корни.

***Пример* 18.** Найти общий интеграл уравнения

$$y'^3 + y'^2 - y' + 1 = 0.$$

Ответ: $\left(\dfrac{y-C}{x}\right)^3 + \left(\dfrac{y-C}{x}\right)^2 - \dfrac{y-C}{x} + 1 = 0.$

2. Рассмотрим уравнение, ***не содержащее искомой функции***:

$$F(x, y') = 0. \tag{18}$$

Если оно оказывается разрешимым в элементарных функциях относительно y', т.е $y' = f_k(x),\ k=1,2\ldots$, то мы можем выписать решения в явном виде:

$$y = \int f_k(x)dx + C,\ k=1,2\ldots.$$

Кроме этого, могут существовать решения вида $x=a$, которые могут оказаться особыми.

***Пример* 19.** Найти все решения уравнения

$$y'^2 - \frac{1}{x} = 0.$$

Решение. Рассмотрим решение в области $x > 0$. Данное уравнение распадается на два уравнения:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x}},\ y' = -\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Получаем два решения:

$$y = 2\sqrt{x} + C,\ y = -2\sqrt{x} + C.$$

Напомним, что наряду с данным уравнением, мы должны рассмотреть «перевёрнутое» уравнение: $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \sqrt{x}$ и $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -\sqrt{x}$. Тогда, кроме указанных выше решений, мы найдем особое решение $x=0$.

Если уравнение (18) неразрешимо относительно y', то можно попытаться подобрать такие функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, что $F(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0$. Тогда уравнение (18) можно переписать в виде

$$x = \varphi(t),\ y' = \psi(t). \tag{19}$$

Говорят, что (19) это есть параметрическое представление уравнения (18).

Допустим, что уравнение допускает параметрическое представление. Тогда мы можем найти $dx = \varphi'(t)dt$ и подставить это в основное дифференциальное тождество $dy = y'dx$:

$$dy = \psi(t)\varphi'(t)dt. \tag{20}$$

Отсюда получаем $y = \int \psi(t)\varphi'(t)d\,t + C$. Теперь записываем уравнение интегральных кривых в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C. \end{cases}$$

***Пример* 20.** Найти решение уравнения

$$y'^2 + x^2 - 4 = 0.$$

Решение. Очевидно, подстановка x=2cos$t$, y' = 2sin$t$ обращает данное уравнение в тождество. По формуле (20)

$$dy = -4\sin^2 t\,dt,$$

$$y = -4\int \sin^2 t\,dt = -4\int \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = -2t + \sin 2t + C.$$

Ответ: $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = -2t + \sin 2t + C. \end{cases}$

Принимаем без доказательства, что если существует конечное число a, такое что

$$\lim_{x\to a,\ y'\to+\infty} F(x,y') = 0 \ \text{ или } \ \lim_{x\to a,\ y'\to-\infty} F(x,y') = 0,$$

то прямая $x = a$ является решением уравнения (18). Это решение может оказаться особым.

3. Рассмотрим теперь уравнение, ***не содержащее независимой переменной:***

$$F(y,y') = 0. \tag{21}$$

Предположим, что это уравнение разрешимо относительно y': $y' = f_k(y)$, k=1,2…. Тогда оно имеет общий интеграл

$$\int \frac{dy}{f_k(y)} = x + C,\ k=1,2\ldots.$$

Если имеет место равенство $F(a,0) = 0$, то уравнение имеет решение $y = a$, которое может оказаться особым.

Если не удаётся разрешить (21) относительно y', то можно попытаться найти параметрическое представление

$$y = \varphi(t),\ y' = \psi(t). \tag{22}$$

Важно отметить, что y' – это производная по x, и поэтому неверно, что $\psi(t)=\varphi'(t)$. Подставим (22) в основное дифференциальное тождество $dy=y'dx$:

$$\varphi'(t)dt=\psi(t)dx \;\Leftrightarrow\; \frac{dx}{dt}=\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}. \qquad (23)$$

Отсюда получаем общий интеграл в параметрической форме:

$$\begin{cases} x=\int\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt+C, \\ y=\varphi(t). \end{cases}$$

***Пример* 21.** Найти решение уравнения

$$y=\sqrt{y'^2+1}\;.$$

Решение. Очевидно, подстановка $y=\mathrm{ch}\,t$, $y'=\mathrm{sh}\,t$ обращает данное уравнение в тождество. Тогда $\mathrm{sh}\,t\,dt=\mathrm{sh}\,t\,dx \Rightarrow dx/dt=1$. Получаем общее решение

$$\begin{cases} x=t+C, \\ y=\mathrm{ch}\,t. \end{cases}$$

Выразим t из первого уравнения и подставим во второе: $y=\mathrm{ch}(x–C)$. Получаем семейство равных друг другу интегральных кривых, получающихся из одной $y=\mathrm{ch}x$ сдвигом (рисунок 18). Напомним, что график гиперболического косинуса является цепной линией. Кроме этого, уравнению удовлетворяет $y'=0$, $y=1$. Это есть особое решение.

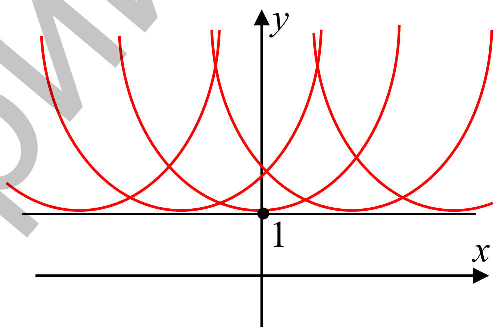

рис. 18

7. Параметрическое представление полного уравнения

Предположим, что полное ОДУ-1 не разрешенное относительно производной

$$F(x,y,y')=0 \qquad (1)$$

допускает параметрическое представление

$$x=\varphi(u,v),\; y=\psi(u,v),\; y'=\theta(u,v), \qquad (24)$$

где u,v – параметры. Тогда его можно свести к уравнению, разрешенному относительно производной. Подставим (24) в основное дифференциальное тождество $dy=y'dx$:

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}du+\frac{\partial\psi}{\partial v}dv=\theta(u,v)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}du+\frac{\partial\varphi}{\partial v}dv\right).$$

Теперь можем выразить из этого уравнения

$$\frac{dv}{du}=f(u,v). \tag{25}$$

Предположим теперь, что найдено общее решение в явном виде уравнения (25): $v=w(u,C)$. Тогда мы можем выписать общее решение уравнения (1) в параметрическом виде:

$$x=\varphi(u,w(u,C)),\ y=\psi(u,w(u,C)). \tag{26}$$

Если уравнение (25) имеет особое решение $v=\ w_1(u)$, то решение

$$x=\varphi(u,w_1(u)),\ y=\psi(u,w_1(u))$$

может оказаться особым решением уравнения (1).

Если уравнение (1) можно разрешить относительно x или y, то за параметры можно взять оставшиеся переменные.

I случай. Пусть удалось разрешить (1) относительно y:

$$y=\varphi(x,y'). \tag{27}$$

Тогда за параметры берём x и y', причём введём обозначение $y'=p$.

$$y=\varphi(x,p),\ y'=p. \tag{28}$$

Подставляя это в основное дифференциальное тождество $dy=y'dx$, получаем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial p}dp=pdx. \tag{29}$$

Подчеркнём, что здесь $\varphi(x,p)$ – это уже известная функция и уравнение не содержит частных производных от неизвестной функции. Из этого уравнения легко выразить dp/dx:

$$\frac{dp}{dx}=\left(p-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right):\frac{\partial\varphi}{\partial p}. \tag{30}$$

Допустим, что мы нашли его общее решение $p=p(x,C)$. Тогда, подставив его в первое уравнение из (28), получаем общее решение

$$y=\varphi\big(x,p(x,C)\big)\ .$$

Допустим, что мы нашли общее решение уравнения (30) в виде $x=x(p,C)$. Тогда, подставив его в первое уравнение из (28) получаем общее решение в параметрической форме:

$$x=x(p,C),\ y=\varphi\big(x(p,C),p\big)\ .$$

Если уравнение (30) имеет особое решение $p=p(x)$, то $y=\varphi(x,p(x))$ может быть особым решением уравнения (26).

II случай. Пусть удалось разрешить (1) относительно x:

$$x=\varphi(y,y'). \tag{31}$$

Тогда параметрическое представление выглядит так:

$$x=\varphi(y,p),\ y'=p. \tag{32}$$

Подставляя это в основное соотношение, получаем:

$$dy = p\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial p}dp\right). \tag{33}$$

Допустим, что мы нашли общее решение этого уравнения: $p = p(y, C)$. Тогда, подставив его в первое уравнение из (32), получаем общее решение

$$x = \varphi(y, p(y, C)).$$

Допустим, что мы нашли общее решение уравнения (33) в виде $y = y(p, C)$. Тогда, подставив его в первое уравнение из (32) получаем общее решение в параметрической форме:

$$x = \varphi(y(p, C), p),\ y = y(p, C).$$

Если уравнение (33) имеет особое решение $p = p(y)$, то $x = \varphi(y, p(y))$ может быть особым решением уравнения (31).

8. Уравнение Лагранжа

Предположим, что полное ОДУ-1 линейно зависит от x и y:

$$A(y')y + B(y')x + C(y') = 0. \tag{34}$$

Тогда оно, очевидно, может быть разрешено, и относительно y, и относительно x. Выразим y:

$$y = \varphi(y')x + \psi(y'). \tag{35}$$

Если в уравнении (35) $\varphi(y')$ не равно тождественно y', то это уравнение называется *уравнением Лагранжа*.

Параметрическое представление уравнения (35) имеет вид:

$$y = \varphi(p)x + \psi(p),\ \ y' = p. \tag{36}$$

Подставляем (36) в основное дифференциальное тождество $dy = y'dx$:

$$\varphi(p)dx + x\varphi'(p)dp + \psi'(p)dp = pdx \ \Leftrightarrow$$

$$(\varphi(p) - p)dx + (x\varphi'(p) + \psi'(p))dp = 0.$$

Из этого уравнения можем выразить dx/dp:

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}x = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}. \tag{37}$$

Мы получили линейное уравнение относительно неизвестной функции $x = x(p)$. Найдём общее решение уравнения (37) $x = x(p, C)$ и подставим в первое из уравнений (36). Получим общее решение уравнения Лагранжа в параметрическом виде:

$$x = q(p)C + r(p),\ y = q_1(p)C + r_1(p).$$

Предположим, что уравнение $\varphi(p) - p = 0$ имеет действительные корни $p_1, \ldots, p_k$. Подставим их в первое уравнение из уравнений (36). Получим уравнения прямых

$$y = p_i x + \psi(p_i),\ i = 1,\dots,k.$$

Эти прямые всегда являются решениями уравнения Лагранжа (35). Они могут быть особыми решениями.

***Пример* 22.** Найти общее решение и особые решения уравнения

$$y = x - \frac{4}{9}y'^2 + \frac{8}{27}y'^3.$$

Решение. Параметризация уравнения:

$$y = x - \frac{4}{9}p^2 + \frac{8}{27}p^3,\ \ y' = p. \qquad (38)$$

Подставляем её в основное дифференциальное тождество $dy = y'dx$:

$$dx + \left(-\frac{8}{9}p + \frac{8}{9}p^2\right)dp = p\,dx \ \Leftrightarrow\ -\frac{8}{9}p(1-p)\,dp = (p-1)\,dx \ \Leftrightarrow$$

$$(1-p)dx - \frac{8}{9}p(1-p)\,dp = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1-p)\left(dx - \frac{8}{9}p\,dp\right).$$

Уравнение распадается на два уравнения:

$$dx - \frac{8}{9}p\,dp = 0 \quad \text{или} \quad 1-p=0. \qquad (39)$$

Из первого уравнения находим $x = \frac{4}{9}p^2 + C$. Подставляем это в первое из уравнений (38) и получаем общее решение в параметрической форме:

$$x = \frac{4}{9}p^2 + C,\ \ y = \frac{8}{27}p^3 + C.$$

Кривая $x = t^2,\ y = t^3$ – это полукубическая парабола (рисунок 19). Интегральные кривые рассматриваемого уравнения – это полукубические параболы, только с вершиной, смещённой в точку (C, C) (изображены только верхние половины полукубических парабол) (рисунок 20). Исключая параметр p, получаем общий интеграл

$$(y-C)^2 = (x-C)^3.$$

Второе из уравнений (39) даёт $p = 1$, $y = x - \frac{4}{27}$. Это будет особое решение. На рисунке 20 это огибающая семейства интегральных кривых.

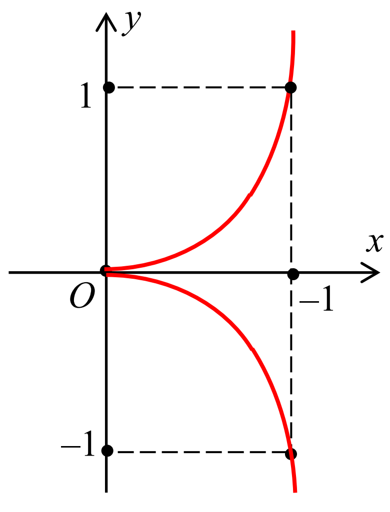

рис. 19

Интегральные кривые – это не только полукубические параболы, но и кривые, которые получаются склеиванием частей одной или двух полукубических парабол и огибающей прямой, так чтобы не оставалось изломов. Одна из таких кривых нарисована на 21.

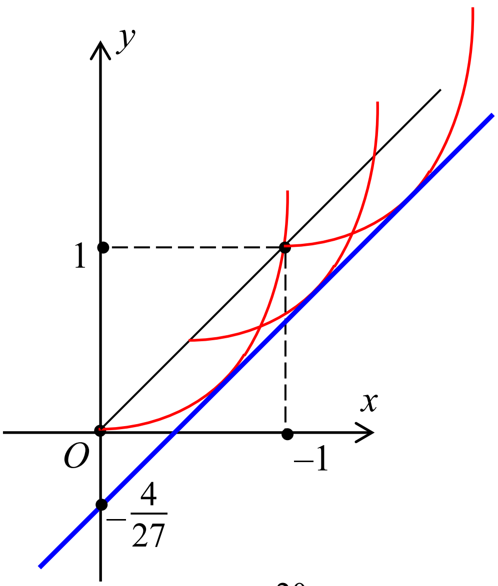

рис. 20

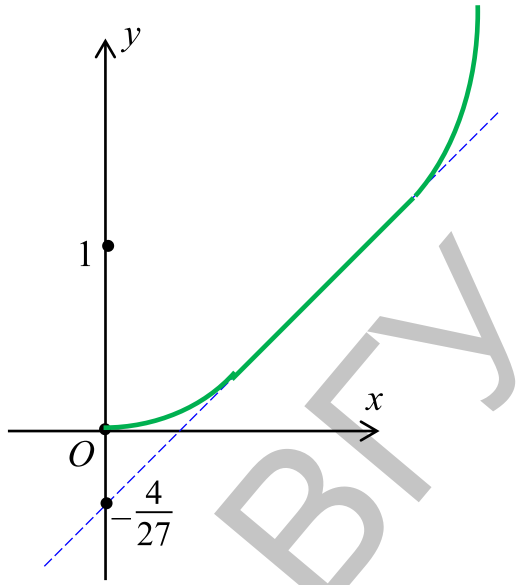

рис. 21

9. Уравнение Клеро

Уравнение вида

$$y = xy' + \psi(y'). \tag{40}$$

называется *уравнением Клеро*.

Будем интегрировать по той же схеме, что и уравнение Лагранжа:

$$y = xp + \psi(p), \quad y' = p. \tag{41}$$

Подставляем (41) в основное дифференциальное тождество $dy = y'dx$:

$$pdx + xdp + \psi'(p)dp = pdx \iff$$

$$(x + \psi'(p))dp = 0.$$

Это уравнение распадается на два уравнения:

$$dp = 0 \quad \text{или} \quad x + \psi'(p) = 0. \tag{42}$$

Первое уравнение даёт $p = C$. Подставляем это в первое уравнение из (41), получаем общее решение

$$y = xC + \psi(C). \tag{43}$$

Интегральные кривые – это прямые линии. Для того чтобы получить это решение, достаточно заменить в уравнении (40) y' на C. Второе из уравнений (42) даёт

$$x = -\psi'(p), \quad y = -\psi'(p)p + \psi(p). \tag{44}$$

Это решение будет особым, если $\psi(p)$ дважды непрерывно дифференцируема и $\psi''(p)$ не меняет знака. Действительно, найдём дискриминантную кривую для семейства прямых (43):

$$\begin{cases} y = xC + \psi(C), \\ 0 = x + \psi'(C). \end{cases}$$

(напомним, что второе уравнение получается в результате нахождения частной производной первого уравнения по C). Из второго уравнения находим $x = -\psi'(C)$, и подставляя в первое получаем $y = -\psi'(C)C + \psi(C)$. Это то же решение, что и (43).

Для того, чтобы эта дискриминантная кривая была огибающей, необходимо, чтобы она была дифференцируемой, а при вычислении производных dx/dC и dy/dC возникает $\psi''(C)$:

$$\frac{dx}{dC} = -\psi''(C), \frac{dy}{dC} = -\psi''(C)C - \psi'(C) + \psi'(C) = -\psi''(C)C.$$

Если $\psi''(C)$ меняет знак, то в некоторой точке $\psi''(C) = 0$. В этой точке нарушается регулярность кривой, т.е. касательный вектор $\left(\frac{dx}{dC}, \frac{dy}{dC}\right)$ обращается в нулевой, и кривая меняет направление на противоположное. Другими словами, получает «клюв», как у полукубической параболы.

***Пример* 23.** Найти общее решение и особые решения уравнения

$$y'^2 - xy' + y = 0.$$

Решение. Это уравнение является квадратным относительно y', и одновременно это есть уравнение Клеро. Перепишем его так:

$$y = xy' - y'^2.$$

Общее решение:

$$y = Cx - C^2. \tag{45}$$

Найдём дискриминантную кривую для семейства прямых (45):

$$\begin{cases} y = Cx - C^2, \\ 0 = x - 2C. \end{cases}$$

Отсюда

$$x = 2C,\ y = C^2. \tag{46}$$

Исключая C, получаем уравнение в явном виде: $y = \frac{1}{4}x^2$. Для исходного уравнения $\psi(p) = -p^2$, $\psi''(p) = -2$ не меняет знак. Поэтому дискриминантная кривая является огибающей. Она изображена вместе с семейством прямых на рисунке 22.

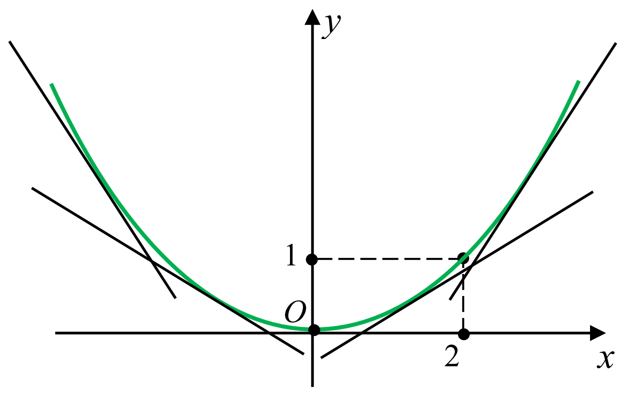

рис. 22

Литература

1. Карташев А. П., Рождественский Б.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. – М.: Наука, 1980.
2. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – Минск: Вышэйшая школа, 1974.
3. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1970.
4. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1974.
5. Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения. − М.: Наука, 1985.

Учебное издание

ПОДОКСЁНОВ Михаил Николаевич
СУРИН Татьяна Леонидовна

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Методические рекомендации

Технический редактор *Г.В. Разбоева*
Компьютерный дизайн *Л.Р. Жигунова*

Подписано в печать .12.2020. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 2,79. Уч.-изд. л. 1,91. Тираж экз. Заказ .

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Свидетельство о государственной регистрации в качестве издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/255 от 31.03.2014.

Отпечатано на ризографе учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».
210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.