Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра геометрии и математического анализа

**Ю.В. Трубников,
М.Н. Подоксёнов, М.М. Чернявский**

МЕТОДОЛОГИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Методические рекомендации

*Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2020*

УДК 51:001.891(075.8)
ББК 22.1в631я73
Т77

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 6 от 18.06.2020.

Авторы: профессор кафедры геометрии и математического анализа ВГУ имени П.М. Машерова, доктор физико-математических наук, профессор **Ю.В. Трубников;** заведующий кафедрой геометрии и математического анализа ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук, доцент **М.Н. Подоксёнов;** преподаватель-стажер кафедры геометрии и математического анализа ВГУ имени П.М. Машерова **М.М. Чернявский**

Р е ц е н з е н т :
профессор кафедры «Информационные системы
и автоматизация производства» УО «ВГТУ»,
доктор физико-математических наук, профессор *А.А. Корниенко*

Трубников, Ю.В.

Т77 Методология математических исследований : методические рекомендации / Ю.В. Трубников, М.Н. Подоксёнов, М.М. Чернявский. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2020. – 42 с.

Данное учебное издание подготовлено для студентов второй ступени высшего образования факультета МиИТ в соответствии с учебной программой по дисциплине «Методология математических исследований» (специальность «Математика и компьютерные науки»). Излагаются теоретический материал и упражнения для самостоятельного решения.

УДК 51:001.891(075.8)
ББК 22.1в631я73

Содержание

Введение

Процесс решения математической задачи представляет собой поиск выхода из затруднения или поиск пути обхода препятствия, – это процесс достижения цели, которая первоначально не кажется сразу доступной. Решение задач является специфической особенностью интеллекта, а интеллект – это одно из самых характерных проявлений мыслительной деятельности. Разобраться в характере этой деятельности, найти средства для развития соответствующих способностей – это цель методологии математических исследований.

Решение математических задач – это искусство, научиться ему можно, только подражая хорошим образцам и постоянно практикуясь. К сожалению, не существует волшебного ключа, открывающего все математические двери, но методология даст много полезных образцов для подражания и возможностей поупражняться. Если вы хотите научиться плавать, то смело входите в воду, а если вы хотите научиться решать задачи, то постоянно решайте их. Подмечайте в каждой решаемой задаче сильные и слабые стороны применяемых рассуждений, степень их общности и возможность распространения на другие ситуации. Решение, найденное в результате собственных усилий или то, с которым вы познакомились в учебнике, или то, которое вы услышали на лекции (но обязательно с живым интересом и стремлением проникнуть в суть дела), может превратиться в **метод,** в образец, которому можно подражать при решении других подобных задач.

Конечно, подражать уже известным методам существенно легче, чем разрабатывать новые, но всегда требуются определённые усилия, чтобы разобраться в терминологии, привыкнуть к понятиям, научиться применять нужные теоремы. На протяжении веков многие математики стремились создать универсальный метод, но классы решаемых задач постоянно расширялись, возможности вычислительной техники стремительно росли, а создание универсального метода становилось ещё более несбыточным, чем много лет назад. Может быть, искусственный интеллект продвинет возможности человека в этом направлении математической деятельности.

Представляет интерес точка зрения некоторых известных математиков на связь математики с развитием языка и культуры, с возникновением и развитием естественных и гуманитарных наук. Приведём цитаты из книги Ю.И. Манина «Математика как метафора» [6]. «Большая часть того, что меня занимало в математике, связана с алгебраической геометрией. Ее основная тема – изучение решений систем полиномиальных уравнений со многими неизвестными. Если уравнения выбраны и зафиксированы, мы представляем себе множество всех их решений, состоящее из n-ок комплексных чисел, в виде геометрического образа, формы, размещенной в n-мерном (или $2n$-мерном) пространстве. В одних направлениях эта форма уходит в бесконечность, а в других прихотливо замыкается на себе. Разнообразие и сложность таких форм бесконечно богаче, чем все, что можно увидеть на современных выставках абстрактного искусства. Математики научились находить регулярности, взаимосвязи и закономерности в этом огромном мире. Меня больше всего привлекали приложения алгебраической геометрии к теории чисел и к физике. Одна из старейших задач теории чисел, восходящая к древней Греции и до сих пор носящая имя Диофанта Александрийского, также касается решений полиномиальных уравнений, но на этот раз мы постулируем, что коэффициенты полиномов суть целые числа, и спрашиваем: Существуют ли решения, у которых все координаты тоже целые (или рациональные)? Насколько их много? На заре нашей науки, когда математики античности только учились ставить такие вопросы и находить на них ответы, даже простейшие уравнения приносили глубокие озарения. Тот факт, что уравнение $x^2 - 2y^2 = 0$ не имеет других целочисленных решений, кроме $x = y = 0$, открыл глаза на то, что мир геометрических величин много больше мира «рационально измеримых» величин (диагональ квадрата несоизмерима с его стороной). По существу, евклидова геометрия была также началом теоретической физики – кинематики идеально твердых тел в двумерном или трехмерном гравитационном вакууме, – а попытки связать формы с числами привели много позже к кристаллизации алгебраического, аналитического и вычислительного аппарата физики. Диагональ единичного квадрата $\sqrt{2}$, сторона куба с объемом 2 и длина окружности единичного диаметра π были изначально физическими константами, а привычные нам вещественные числа в истории математики медленно осознавались как огромное потенциальное вместилище для значений всех физических величин. Целых и рациональных чисел для познания мира не хватало. С другой стороны, для описания и физического мира, и мира идей, для передачи от учителя к ученику того, что уже понято, для сохранения от забвения в следующих поколениях, люди нуждались в словах, символах, знаках, в жестких правилах для обращения с ними. Силлогизмы Аристотеля оказались таким же зачатком теории языка науки, как пифагорейские открытия –зачатком теоретической физики. Медленно, через схоластов, Лейбница, Буля, Гёделя, фон Неймана и многих других, развивалось осознание того, что с текстами на языке науки можно обращаться так же, как с целыми числами. Теория познания, принадлежа философии, находится за пределами нашего обсуждения, но можно вообразить и ее технические задачи, скажем, можно ли из данного компендиума знаний логически извлечь ответ на новый вопрос, или это требует расширения базы знаний? Через две с лишним тысячи лет после Диофанта и Пифагора выяснилось, что в принципе любая такая задача сводится к одной, которую мы уже сформулировали: есть ли решение у данной системы диофантовых уравнений? Взаимодействие алгебраической геометрии с теорией чисел привело к пониманию удивительного и фундаментального принципа: ответы на Диофантовы вопросы о системе уравнений критически зависят от геометрической формы пространства всех комплексных решений этой системы. Например, пространство всех комплексных решений может выглядеть (топологически) как сфера, или тор, или сфера с несколькими ручками. Количество ручек называется родом, это очень устойчивый инвариант системы уравнений, и кажется, что он имеет мало общего с арифметическими тонкостями и дискретными точками решетки целочисленных векторов (в проективном пространстве различие между целыми и рациональными точками стирается). Тем не менее, род определяет, когда множество всех рациональных решений может быть бесконечным: только если ручек не больше одной. Это – содержание знаменитой гипотезы Морделла, которой я занимался в шестидесятые годы. Позже я попытался наметить контуры программы, которая прояснила бы взаимоотношения между геометрическими и диофантовыми свойствами в любой размерности. В рабочий инструментарий теоретической физики до недавнего времени входили только рудименты алгебраической геометрии. Положение стало меняться в шестидесятые годы прошлого века, когда аппарат квантовой теории поля и особенно теории струн вывел алгебраическую геометрию на первый план. Привычный образ мировой линии точечной элементарной частицы был замещен образом мирового листа маленькой струны. Такой лист выглядит как (риманова) поверхность, и ее род – число ручек – соответствует числу петель в выражениях для фейнмановских амплитуд, которые с сороковых годов стали центральным теоретическим и вычислительным средством квантовой физики.»

1. Взгляд на то, что изучает математика

Приведём точку зрения Ю.И. Манина. «Чистая математика – это огромный организм, построенный полностью и исключительно из идей, возникающих в умах математиков и в этих умах живущих. У того, кто захочет избавиться от чувства дискомфорта, вызываемого таким заявлением, есть по крайней мере три пути отхода. Во-первых, можно попросту отождествить математику с содержанием математических рукописей, книг, статей и докладов, со все время растущей сетью из теорем, определений, доказательств, конструкций, гипотез (может быть, и математических компьютерных программ) – с тем, что современные математики рассказывают на конференциях, хранят в библиотеках и электронных архивах, чем они гордятся, за что они друг друга награждают. Короче говоря, математика – это просто то, чем занимаются математики, так же как музыка—это то, чем занимаются музыканты.

Во-вторых, можно возразить, что математика – это вид человеческой деятельности, глубоко укорененный в реальности и постоянно к этой реальности возвращающийся. От счета на пальцах до высадки на Луне и поисковой системы Google – мы занимаемся математикой, чтобы понимать и создавать реальные объекты и оперировать ими, и возможно, именно это понимание является математикой, а не трудноуловимое бормотание сопутствующих абстракций.

При таком подходе математики становятся более или менее ответственными деятелями истории человечества, подобно Архимеду, помогавшему защищать Сиракузы, Алану Тьюрингу, анализировавшему перехваченные шифрованные послания маршала Роммеля в Берлин, или Джону фон Нейману, предложившему детонацию на больших высотах в качестве эффективной тактики бомбометания. Если принять такую точку зрения, то математики могут защищать свое ремесло, подчеркивая его общественную полезность. Математик в такой роли может сталкиваться с моральными проблемами так же, как и любой другой человек» … В некоторых случаях математика может также оказаться совершенно незаменимым инструментом. Так, когда изучалось воздействие кассетных бомб на человека, но испытания на свиньях были невозможны по соображениям гуманности, в игру вступило математическое моделирование».

В-третьих, имеется грандиозная картина великого Замка Математики, возвышающегося где-то в платоновском мире идей, каковой замок, мы скромно и преданно исследуем (а не конструируем). Величайшим математикам удается ухватить какие-то контуры Великого замысла, но даже тем, кому открылся всего лишь узор плитки на кухне, это открытие может принести счастье и блаженство. Тот, кто предпочитает выразить эту же мысль иными словами, с помощью семиотической метафоры, мог бы сказать, что математика – это прототекст, существование которого только постулируется, но который тем не менее лежит в основе тех его искаженных и фрагментарных копий, с которыми мы обречены иметь дело. О личности автора этого прототекста (или строителя Замка) все могут только строить догадки, но Георг Кантор с его виденьем бесконечности бесконечностей как напрямую вдохновленной Богом и Курт Гёдель с его «онтологическим доказательством» сомнений на этот счет, кажется, не испытывали.

Различные оттенки и комбинации этих трех подходов, социальных позиций и вытекающих из этого выборов стратегии индивидуального поведения окрашивают все дальнейшее обсуждение. Единственная цель этого краткого предисловия – продемонстрировать читателю те внутренние напряжения, которые будут присутствовать в нашем изложении, а вовсе не имитировать (отсутствующее) ясное понимание и не предложить (отсутствующие) определенные суждения. Наше последнее предупреждение касается присутствующих в нашем изложении исторических экскурсов.

Есть два разных способа читать старые тексты: при одном способе читатель стремится понять время, когда они были написаны, и культуру, к которой этот текст относился, при другом читатель стремится пролить свет на ценности и предрассудки нашего времени. В истории математики эти подходы представлены историей в стиле «этноматематика» и историей в стиле Бурбаки соответственно”.

2. Декарт и его идея об универсальном методе

Рене Декарт (1596–1650) был одним из величайших умов человечества. Многие считают его отцом современной философии. Его труды изменили лицо математики, кроме того, его имя занимает почетное место в истории физики. Одна из его работ имеет непосредственное отношение к методологии математических исследований, называлась она “Правила для руководства ума”. В этой работе Декарт стремился разработать схему универсального метода, пригодного для решения любых задач. Вот основные положения этой схемы.

1. Задача любого вида сводится к математической задаче.
2. Математическая задача любого вида сводится к задаче алгебраической.
3. Любая алгебраическая задача сводится к решению одного единственного уравнения.

Чем больше объём наших знаний, тем больше пробелов мы можем усмотреть в этой программе. С течением времени сам Декарт вынужден был признать, что имеются случаи, когда его схема оказывается непригодной. Как бы то ни было, “Правила” остались незаконченными, а некоторые соображения Декарт включил в свою более позднюю работу “Рассуждения о методе”.

В намерении, положенном в основу схемы Декарта, можно усмотреть нечто глубоко правильное. Однако претворить в жизнь это намерение оказалось очень трудно: здесь возникло гораздо больше препятствий и осложнений, чем это первоначально представлял себе полный энтузиазма Декарт. Проект Декарта потерпел неудачу, однако это был великий проект, и, даже оставшись нереализованным, он оказал большее влияние на науку, чем тысячи малых проектов, в том числе таких, которые удалось реализовать.

Хотя схема Декарта неприменима во всех, без исключения, случаях, она, тем не менее, эффективна во многих реальных ситуациях. И когда ученик средней школы пытается решить “словесную задачу” при помощи системы уравнений, он интуитивно применяет идею, лежащую в основе схемы Декарта.

Приведём примеры. На протяжении нескольких столетий в прошлом в сборниках занимательных задач для учеников начальных классов имелась следующая задача. *У фермера имеются куры и кролики. У этих кур и кроликов 50 голов и 140 ног. Сколько кур и кроликов имеет фермер?*

Следуя схеме Декарта, надо составить систему уравнений. Обозначив через x количество кур, а через y количество кроликов, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 50, \\ 2x + 4y = 140. \end{cases}$$

Полученная система имеет единственное решение $x = 30$, $y = 20$. Как правило, после решения любой конкретной задачи следует этап обобщения. Конкретную систему уравнений можно записать в более общем виде

$$\begin{cases} x + 2y = \dfrac{l}{2}, \\ x + y = h. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получаем $y = \dfrac{l}{2} - h.$ Затем из второго уравнения находим x.

3. Составление уравнений

Составляя уравнение или систему уравнений, мы переводим условие задачи с обычного языка на алгебраический язык символов. Но иногда возникают случаи, когда такое преобразование требует большего опыта или большей изобретательности, или большей затраты труда. Вопрос: в чем должен заключаться этот труд? Декарт и на этот счет формулирует несколько рекомендаций.

1. *Хорошо разобравшись в задаче, прежде всего приведите её к нахождению некоторых неизвестных количеств.* Было бы неразумно тратить время на задачу, которая нам не ясна. Поэтому наша первая и очевидная обязанность состоит в том, чтобы понять задачу, её смысл, её назначение. Разобравшись в задаче в целом, мы переносим наше внимание на главнейшие её составные части. Мы должны совершенно ясно различать: какого рода объект требуется найти (*что представляет собой неизвестное или неизвестные в данной задаче*); что дано или известно (*каковы данные*); а далее установить, *с помощью каких соотношений неизвестные и данные связаны друг с другом.*

2. *Исследуйте задачу наиболее естественным путём, допуская, что она решена, и постарайтесь, в соответствующем порядке, наглядно представить все соотношения, которые согласно условию, должны иметь место между неизвестными и данными.* (Правило XVII). Мы допускаем, что неизвестные количества имеют значения, полностью удовлетворяющие условию задачи; это существенно опирается на предположение о том, что задача решена.

3. *Выделите часть условия, позволяющую выразить одно и то же количество двумя разными способами. Чтобы получить таким образом уравнение, связывающее неизвестные. В случае необходимости надо получить столько уравнений, сколько имеется неизвестных.* (Правило XIX).

Переход к системе уравнений, содержащей столько же уравнений, сколько и неизвестных, представлялся Декарту наиболее логичным, так как системы с числом уравнений, отличающемся от числа неизвестных в, то время были почти не изучены. Такой переход должен сопровождаться внимательным изучением всех связей между переменными задачи.

Задачи, в которых решение существует и единственно, называют обычно корректными. Всегда полезен предварительный анализ корректности задачи. Нахождение примеров, в которых задача является некорректной и контрпримеров, позволяет лучше осознать все трудности дальнейших рассуждений и вычислений.

Рассмотрим следующую задачу. Некто ходил пешком 5 часов. Сначала его путь пролегал по горизонтальной дороге, затем он поднимался в гору, после чего по тому же самому маршруту он возвратился в исходный пункт. По горизонтальной дороге его скорость составляла 4 км в час, в гору – 3 км в час, а спускался с горы он со скоростью 6 км в час. Требуется найти пройденное им расстояние.

Возникает вопрос: корректна ли эта задача? Проведём следующие рассуждения: пусть w – скорость пешехода по горизонтальной дороге, u – его скорость при подъёме в гору, v – его скорость при спуске с горы, x – длина всего пути, y – длина наклонной части, тогда

$$\frac{x-2y}{w}+\frac{y}{u}+\frac{y}{v}=5,$$

Далее

$$\frac{x}{w}+\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}-\frac{2}{w}\right)y=5\,.$$

Получилось уравнение прямой, и на данном этапе исследования можно было бы сделать вывод, что решений существует бесконечное множество. Однако, при дальнейшем анализе видно, что если коэффициент $\frac{1}{u}+\frac{1}{v}-\frac{2}{w}$ равен нулю, то решение существует и единственно. В данной формулировке

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-\frac{2}{4}=0.$$

Следовательно, $x=20$

Рассмотрим задачу о нахождении сумм вида

$$S_p \;=\; 1^p+2^p+\ldots+n^p.$$

Очевидно, что

$$S_0=n,\quad S_1=\frac{1}{2}n\left(n+1\right)\left(\textit{сумма арифметической прогрессии}\right).$$

Для нахождения S_2 запишем семейство равенств:

$$(1+1)^3 - 1^3 = 3\cdot1^2\cdot1 + 3\cdot1\cdot1^2+1^3,$$

$$(2+1)^3 - 2^3 = 3\cdot2^2\cdot1 + 3\cdot2\cdot1^2 + 1^3,$$

Сложив эти равенства, получаем

$$(n+1)^3-1^3 = 3\cdot S_2 + \frac{3}{2}n(n+1) + n.$$

Выражая из последнего равенства S_2, получаем, что

$$S_2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Равенства, в которых элемент последовательными выражается через элементы с меньшими индексами, называются рекуррентными. В нашем случае таким равенством является равенство

$$(n+1)^3 - 1^3 = 3S_2 + 3S_1 + S_0.$$

Такие равенства играют важную роль во многих доказательствах. Интересным примером рекуррентного равенства является равенство

$$C_{n+1}^{k+1}=C_n^k+C_n^{k+1},\ где\ \ C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Заметим, что многие алгебраические формулы допускают геометрическую или комбинаторную трактовку. Возьмем, к примеру, формулу бинома Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{j=n} C_n^j a^{n-j}b^j = (a+b)(a+b)...(a+b).$$

Возникает вопрос: с каким коэффициентом в этой сумме встречается произведение $a^{n-j}b^j$? Выбирая в каждой скобке в качестве множителя a или b так, чтобы множитель b встречался j раз, мы получаем число сочетаний C_n^j.

Весьма полезны разные подходы к одним и тем же формулам. Вернёмся к равенству

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n + 1).$$

Аналогичное равенство для суммы кубов можно было бы получить и другими рассуждениями. Рассмотрим последовательность

$$s_k = 1^3 + 2^3 + ... + n^3.$$

Прямым вычислением можно доказать, что

$$s_{n+5}-5s_{n+4} + 10s_{n+3} - 10s_{n+2} + 5s_{n+1} - s_n = 0.$$

Последнее равенство представляет собой разностное уравнение, в котором неизвестным объектом выступает последовательность s_n. Теория разностных уравнений напоминает теорию линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Надо составить характеристическое алгебраическое уравнение

$$\lambda^5 - 5\lambda^4 + 10\lambda^3 - 10\lambda^2 + 5\lambda - 1 = 0,$$

это уравнение имеет кратный корень $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_5 = 1$. Общее решение разностного уравнения будет иметь вид

$$s_k = c_0 + c_1 k + c_2 k^2 + c_3 k^3 + c_4 k^4.$$

Константы $c_j\,(j=0,1,...,4)$ можно найти, применяя СКА Maple

```
> s0:=0; s1:=1^3;
```

$$s0 := 0$$

$$s1 := 1$$

```
> s2:=1^3+2^3;
```

$$s2 := 9$$

```
> s3:=1^3+2^3+3^3;
```

$$s3 := 36$$

```
> s4:=s3+4^3;
```

$$s4 := 100$$

```
> g1:=subs(k=1,c1*k+c2*k^2+c3*k^3+c4*k^4)=s1;
```

$$g1 := c1 + c2 + c3 + c4 = 1$$

```
> g2:=subs(k=2,c1*k+c2*k^2+c3*k^3+c4*k^4)=s2;
```

$$g2 := 2\,c1 + 4\,c2 + 8\,c3 + 16\,c4 = 9$$

```
> g3:=subs(k=3,c1*k+c2*k^2+c3*k^3+c4*k^4)=s3;
```

$$g3 := 3\,c1 + 9\,c2 + 27\,c3 + 81\,c4 = 36$$

```
> g4:=subs(k=4,c1*k+c2*k^2+c3*k^3+c4*k^4)=s4;
```

$$g4 := 4\,c1 + 16\,c2 + 64\,c3 + 256\,c4 = 100$$

```
> solve({g1,g2,g3,g4},[c1,c2,c3,c4]);
```

$$\left[\left[c1 = 0,\ c2 = \frac{1}{4},\ c3 = \frac{1}{2},\ c4 = \frac{1}{4}\right]\right]$$

```
> factor((1/4)*n^2+(1/2)*n^3+(1/4)*n^4);
```

$$\frac{(n+1)^2\,n^2}{4}$$

Таким образом

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

Всё это говорит о пользе разных подходов к известным и новым фактам. Аналогично можно получить формулы и для других степенных сумм, например,

```
> factor(sum((2*k+1)^2,k=0..n));
```

$$\frac{1}{3}((2n+3)(2n+1)(n+1))$$

```
> factor(sum((2*k+1)^3,k=0..n));
```

$$(n+1)^2(2n^2+4n+1)$$

```
> factor(sum((2*k+1)^4,k=0..n));
```

$$\frac{1}{15}((2n+3)(2n+1)(n+1)(12n^2+24n+5))$$

Вопросы для самопроверки

1. Как представлял Декарт схему универсального метода?
2. Какие отрицательные стороны этой схемы проявились в ходе дальнейшего развития математики?
3. Какие положения этой схемы остались актуальными в настоящее время?
4. Какой математический объект, по мнению Декарта, является основным в процессе решения любой задачи?
5. Как пояснял Декарт способ рассуждений, который в настоящее время называют анализом?
6. Какие методы предлагал Декарт для составления уравнений или систем уравнений?
7. Какие равенства называются рекуррентными?
8. Какие задачи относятся к классу корректных задач?

4. Экстремальные задачи

Экстремальные задачи – задачи на максимум и минимум – во все времена привлекали внимание учёных. Из попыток решить ту или иную экстремальную задачу возникали и развивались новые теории, а иногда и целые направления математики. В чём причина такого интереса?

Во-первых, среди задач на максимум и минимум много красивых задач, которые интересно и приятно решать. Но люди занимаются ими отнюдь не только из любви к искусству. Много экстремальных задач, ложащихся на письменный стол учёного, приходит из практики. Максимумы и минимум постоянно возникают в инженерных расчётах, в архитектуре, экономике... Кроме того, экстремальные задачи самым неожиданным образом находят применение в науках о природе: физике, химии, биологии. Давно уже было замечено, что окружающий мир в многом устроен по экстремальным законам. Леонард Эйлер (1707–1783), один из величайших математиков, говорил: «В мире не происходит ничего, в чём бы ни был виден смысл какого-нибудь максимума или минимума». С экстремальными задачами человек начинает знакомиться в средней школе. Вот, пожалуй, самая известная из них.

1. На плоскости дана прямая l и точки A и B по одну сторону о т неё. Найти на прямой точку M, для которой сумма $AM+BM$ наименьшая. Для решения отобразим точку B относительно прямой l, получим точку B' (рис. 1).

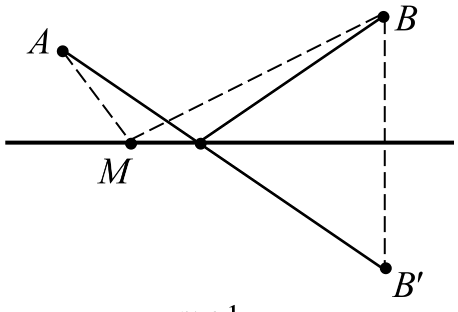


*рис.*1

Отрезок BM переходит при симметрии в отрезок $B'M$, следовательно, $AM+BM=AM+B'M$. Согласно неравенству треугольника, сумма $AM+B'M$ принимает наименьшее значение, когда точка M лежит на отрезке AB'. Таким образом, M – точка пересечения прямой l с отрезком AB'; для этой точки сумма $AM+BM$ равна длине отрезка AB', при другом выборе точки M эта сумма будет больше AB'.

Считается, что впервые задача о кратчайшем пути между двумя точками с заходом на прямую, или задача об отражении света, была решена древнегреческим математиком Героном Александрийским (I век н.э.) в трактате «О зеркалах». Поэтому её иногда называют задачей Герона. Её можно интерпретировать и как сугубо практическую: где на прямой дороге нужно поставить автобусную остановку, чтобы суммарный путь до неё от деревень A и B был наименьшим?

Однако обобщить задачу Герона и её решение не так-то просто. Что будет, например, если деревень не две, а три?

2. На плоскости дана прямая l и три точки A, B и C по одну сторону от неё. Найти на прямой точку M, для которой сумма $AM+BM+CM$ наименьшая. Все попытки решить эту задачу при помощи симметрии ни к чему не привели. Для решения этой и многих других задач на максимум и минимум математикам пришлось изобретать совершенно новый метод, называемый теперь вариационным.

А вот другой пример:

3. На плоскости дан выпуклый четырёхугольник. Найти точку, сумма расстояний от которой до его вершин наименьшая. Решение совсем просто: искомая точка M является точкой пересечения диагоналей четырёхугольника.

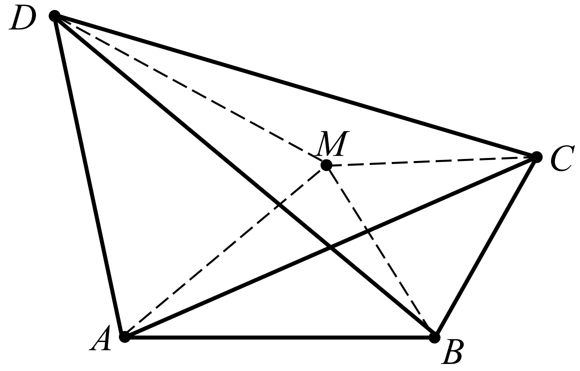


*рис.*2

В самом деле: по неравенству треугольника, сумма расстояний $AM+CM$ не меньше диагонали AC, а сумма расстояний $BM+DM$ не меньше BD. Поэтому минимум суммы расстояний равен $AC+BD$ и достигается в точке пересечения диагоналей (рис.2).

Та же задача, но для треугольника, требует более тонких рассуждений. Для формулировки ответа понадобится так называемая точка Торричелли треугольника. А для того чтобы решить эту задачу для произвольного многоугольника, вновь придётся прибегнуть к вариационному методу. При этом ответ может быть подсказан из физических соображений.

Рассмотрим другое обобщение:

4. Соединить вершины данного четырёхугольника системой дорог наименьшей суммарной длины. Решение этой задачи приведёт к понятию сети Штейнера для данной системы точек. Как видим, похожие между собой задачи на максимум и минимум могут требовать совершенно различных путей решения.

Вернёмся теперь к геометрическим решениям. Приём, которым решается задача Герона, можно назвать выстраиванием отрезков в прямую линию. Суть его проста: с помощью движений плоскости несколько отрезков выстраиваются в ломаную, которая, по неравенству треугольника, будет иметь наименьшую длину, когда её звенья лежат на одной прямой. Так, в задаче Герона в качестве движения использовалась симметрия относительно прямой l.

5. Внутри угла дана точка M. Найти на сторонах угла точки A и B (по одной на каждой стороне), для которых периметр треугольника MAB наименьший.

6. Внутри угла даны точки M и N. Найти на сторонах угла точки А и В (по одной на каждой стороне), для которых периметр четырёхугольника с вершинами в точках M, A, B, N наименьший.

7. Дана прямая l и точки A и B по разные стороны от неё. Найти на прямой точку M, для которой величина $|AM-BM|$ принимает наименьшее значение.

8. Деревни A и B разделены рекой, берега которой параллельны. Где на реке нужно поставить мост, чтобы путь из одной деревни в другую был наименьшим (мост перпендикулярен берегам реки)?

9. Деревни A и B разделены двумя параллельными реками разной ширины. На каждой реке нужно поставить по мосту так, чтобы путь из одной деревни в другую был наименьшим (мосты перпендикулярны берегам).

Вопросы для самопроверки.

1. Какое неравенство называется неравенством треугольника?
2. Сформулируйте задачу Герона.
3. В чем состоят обобщения задачи Герона?
4. Дайте определение понятию “локальный экстремум”.
5. Приведите формулировку необходимого условия локального экстремума для дифференцируемой функции.
6. Какие Вы знаете достаточные условия локальных экстремумов?
7. Дайте определение понятию “абсолютный экстремум”.

5. Наглядность

На рисунке 3 показано, как можно доказать формулу

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$$

А на рисунке 4 показано, как можно доказать теорему Пифагора

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

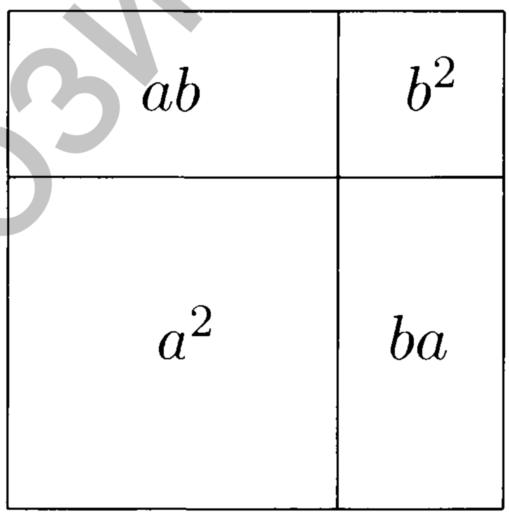
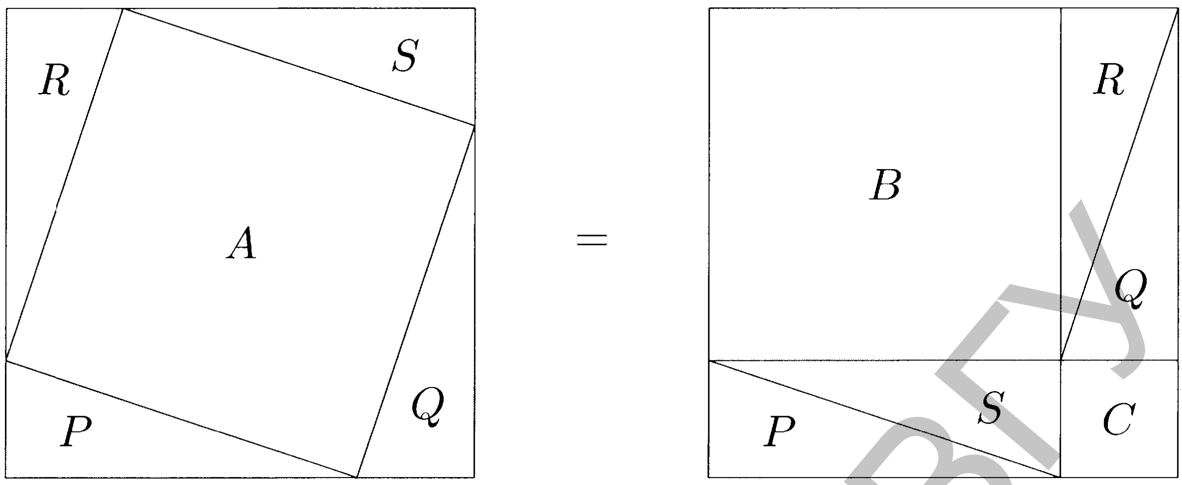


*рис.*3



6. Софизмы и парадоксы

История математики полна неожиданных и своеобразных софизмов и парадоксов. И часто их внимательный анализ приводил к новым открытиям, из которых, в свою очередь вырастали новые софизмы и парадоксы. Необходимо различать между собой парадоксы и софизмы.

Парадоксы – это справедливые, хотя и неожиданные утверждения, а софизмы – ложные результаты, полученные с помощью рассуждений, которые только кажутся правильными, но обязательно содержат ту или иную ошибку. Практика обучения математике показывает, что поиск заключенных в софизмах ошибок, а главное – понимание их причин, ведут к осмысленному постижению математики.

Обнаружение и анализ ошибки, заключенной в софизме, зачастую оказываются более поучительными, чем просто разбор безошибочных доказательств. Можно сколько угодно объяснять, что в алгебре операция деления на нуль невыполнима или что положительное значение квадратного корня из квадрата числа равно абсолютной величине этого числа, но новые поколения школьников и студентов продолжают совершать старые ошибки. В то же время эффектная демонстрация «доказательства» явно неверного результата, в чем и состоит смысл софизма, демонстрация того, к какой нелепице приводит пренебрежение тем или иным математическим правилом, и последующий поиск и разбор ошибки приведшей к нелепице, позволяют на эмоциональном уровне понять и усвоить то или иное математическое правило или утверждение. Такой подход при обучении математике способствует более глубокому ее пониманию и осмыслению и, кроме того, показывает, что математика – это живая наука, а не собрание закостенелых догм, выдуманных по чьей-то злой воле.

Приведем некоторые примеры.

Единица равна двум

Простым вычитанием легко убедиться в справедливости равенства $1-3=4-6$. Добавив к обеим частям этого равенства число $\dfrac{9}{4}$, получаем равенство

$$\left(1-\frac{3}{2}\right)^2 = \left(2-\frac{3}{2}\right)^2.$$

Извлекая из правой и левой частей полученного равенства квадратный корень, получаем, что

$$1-\frac{3}{2} = 2 - \frac{3}{2}, \text{ т.е. } 1 = 2.$$

Любые два неравных числа равны

Возьмем два произвольных, не равных друг другу числа x и z. Пусть $x+z=a$. Умножив обе части последнего равенства на $x-z$ получим

$$(x+z)(x-z)=a(x-z).$$

Раскроем скобки в обеих частях этого равенства

$$x^2 - z^2 = ax - az.$$

Затем перенесем ax из правой части в левую, а z^2 из левой части в правую. В результате получим

$$x^2 - ax = z^2 - az.$$

Прибавим к обеим частям число $a^2/4$, тогда

$$x^2 - ax + \frac{a^2}{4} = z^2 - az + \frac{a^2}{4}.$$

Заметим, что слева и справа в этом равенстве расположены полные квадраты

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 = \left(z-\frac{a}{2}\right)^2.$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей, получаем $x-\dfrac{a}{2} = z - \dfrac{a}{2}$, т. е. $x = z$.

7. Основная теорема алгебры

Вот что пишет об этой теореме Н. Бурбаки: «В течение XVII и XVIII математики постепенно приходят к убеждению, что комплексные числа, дающие возможность решать уравнения второй степени, позволяют также решать алгебраические уравнения любой степени. В XVIII веке были опубликованы многочисленные попытки доказательства этой теоремы: среди них не было ни одной, которая бы не вызывала серьезных возражений. В результате внимательного изучения всех попыток доказательств и детальной критики их пробелов Гаусс поставил целью своей диссертации (написанной в 1797 г., изданной в 1799 г.) дать, наконец, строгое доказательство.

Взяв за основу идею, высказанную мимоходом Даламбером, он замечает, что точки (a, b) плоскости, для которых для которых числа $a+bi$ являются корнями многочлена

$$P(x+yi) = X(x, y) + Y(x, y)i$$

представляют собой точки пересечения кривых

$$X(x, y) = 0 \text{ и } Y(x, y) = 0.$$

Путем качественного изучения этих кривых он показывает, что кривые пересекаются. Это доказательство по своей ясности и оригинальности представляет замечательный прогресс и является примером чисто топологического рассуждения, примененного к алгебраической проблеме.

Гаусс, критикуя рассуждения Даламбера, доказывает, что истинный стержень доказательства не затрагивается всеми этими возражениями. Действительно, с современной точки зрения эти пробелы в доказательстве Даламбера легко устранить. Суть этого доказательства такова. Пусть $p(z)$ – многочлен с комплексными коэффициентами. Рассмотрим точку a, в которой функция $|p(z)|$ достигает минимума. Тогда $p(a) = 0$, так как иначе можно было бы найти направление, при движении вдоль которого из точки a модуль функции $p(z)$ уменьшался бы. Здесь всё правильно, но почему $|p(z)|$ достигает минимума. Современный ответ краток: по соображениям компактности. Однако в 1746 году, когда появилось доказательство Даламбера, до теоремы Больцано–Вейерштрасса: всякая последовательность имеет предельную точку – оставалось ещё около века. Привычное же определение компактности: каждое открытое покрытие содержит конечное подпокрытие – появилось уже в двадцатом веке, когда П.С. Александров и П.С. Урысон приняли за определение свойство отрезка, установленное Борелем и Лебегом.

Доказательства Эйлера и Лагранжа также содержали «истинные стержни», но имели серьёзные упущения с точки зрения современных понятий строгости. Вообще говоря, то же можно сказать и о гауссовских доказательствах: использованные в них ”очевидные” топологические факты нуждаются в обосновании. Впрочем, во втором доказательстве Гаусса всё сводилось к минимуму: к тому, что вещественный полином нечетной степени имеет вещественный корень.

Сейчас известно более десяти различных доказательств основной теоремы алгебры. Разумеется, чтобы убедиться в истинности какого-либо утверждения в математике достаточно одного доказательства. Но цель методологии состоит как раз в том, чтобы показать разнообразие методов, которые можно применить для основной теоремы алгебры, и тем самым установить связи этой теоремы с топологией, комплексным анализом и другими областями математики.

Рассматриваемая теорема как никакая другая подходит для подобных целей. Эти доказательства сильно варьируются по уровню того, что предполагается известным, и поэтому не все они подходят для первоначального знакомства с теоремой. Некоторые доказательства опираются на минимум предварительных сведений, а в других доказательствах используется теория Галуа или теорема Лефшеца о неподвижной точке. Заинтересованный читатель найти необходимые сведения в цитируемой литературе.

В основе большинства доказательств основной теоремы алгебры лежит идея геометрического изображения комплексных чисел. Множество комплексных чисел отождествляется с плоскостью. Эта идея принадлежит Гауссу и развивает великую мысль Декарта о единстве алгебры и геометрии: каждой точке плоскости или пространства можно поставить в соответствие числа – её координаты, после чего язык алгебры и язык геометрии становятся взаимозаменяемыми. Сейчас это кажется настолько привычным, что трудно представить, насколько революционными были эти идеи в своё время.

Для произвольного поля K через $K[x]$ обозначается кольцо многочленов над K (или с коэффициентами из K). Многочлен с коэффициентами из K – это формальное выражение вида

$$p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \ (a_0, \ldots, a_n \in K).$$

Такой многочлен можно рассматривать как функцию из K в K, которая каждому $x \in K$ ставит в соответствие элемент $p(x) \in K$.

Корень многочлена $p(x)$ – это такое $x \in K$ для которого $p(x) = 0$. Степень ненулевого многочлена $p(x)$ – это такое целое число n, для которого

$$p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \ (a_n \neq 0).$$

Лемма 1. Число различных корней многочлена $p(x)$ не превосходит его степени.

Доказательство. Предположим, что многочлен $p(x)$ степени n имеет $n+1$ корень: $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$. Рассмотрим многочлен

$$q(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n).$$

Тогда $p \neq q$ т.к. $p(x_{n+1}) = 0 \neq q(x_{n+1})$. Т.е. разность $r = p - q$ является ненулевым многочленом степени $< n$, имеющем по меньшей мере n корней $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Это противоречит предположению индукции.

Многочлен нулевой степени отождествляется с ненулевыми элементами поля K и корней не имеет. Всякий ли многочлен степени ≥ 2 имеет хотя бы один корень? Ответ на этот вопрос зависит от поля K. Пусть R – поле действительных чисел. Многочлен x^2+1, рассматриваемый как элемент кольца $R[x]$ не имеет корней в R, и именно это обстоятельство мотивирует расширение поля R до поля комплексных чисел C в котором многочлен x^2+1 имеет корни i и $-i$.

Из каждого комплексного числа можно извлечь квадратный корень, поэтому известная формула для решения квадратного уравнения показывает, что всякий многочлен из $C[x]$ второй степени имеет корень в C. Если бы существовал многочлен p из $C[x]$ степени >2, не имеющий корней в C, то можно было бы построить конечное расширение поля C, в котором многочлен p имеет корень (по аналогии с тем, как само поле C получается присоединением к R корней многочлена x^2+1.

Конечное расширение поля K – это поле L, содержащее K в качестве подполя и такое, что L является конечномерным векторным пространством над K. Размерность векторного пространства L над K называется степенью расширения L и обозначается через $[L:K]$. Одна из эквивалентных формулировок основной теоремы алгебры заключается в том, что у поля C нет собственных (т.е. отличных от самого поля C) конечных расширений.

Теперь дадим общее определение: поле K называется алгебраически замкнутым, если всякий многочлен степени > 0 с коэффициентами в K имеет корень в K. Эквивалентно, поле K алгебраически замкнуто, если у него нет собственных конечных расширений. Удобно использовать для алгебраически замкнутых полей ещё две характеризации. Многочлен над K называется неприводимым, если он имеет степень > 0 и не представим в виде произведения двух многочленов из $K[x]$ степени > 0. Неприводимые многочлены в кольце $K[x]$ аналогичны простым числам в кольце Z целых чисел: всякий многочлен из $K[x]$ раскладывается в произведение неприводимых, причем разложение однозначно с точностью до порядка сомножителей и их умножения на элементы из K. Это свойство кольца $K[x]$ вытекает из того, что $K[x]$ является кольцом главных идеалов: каждый идеал порождается одним элементом. Все многочлены степени 1 неприводимы, а обратное верно тогда и только тогда, когда поле K алгебраически замкнуто.

Пусть E – векторное пространство над полем K и $A: E \to E$ – линейный оператор. Вектор $v \in E$ называется собственным вектором оператора A, если $v \neq 0$ и $Av = \lambda v$ для некоторого $\lambda \in K$

Теорема 1. Для всякого поля K следующие условия эквивалентны:

1) всякий многочлен из $K[x]$ степени >0 имеет корень в K (иными словами поле K алгебраически замкнуто);

2) если E – конечномерное векторное пространство над K, не сводящееся к нулю, то всякий линейный оператор $A: E \to E$ имеет собственный вектор;

3) поле K не имеет конечных расширений, отличных от K;

4) всякий неприводимый многочлен над K имеет степень 1.

Доказательство. $1) \Rightarrow 2)$ Пусть $A: E \to E$ – линейный оператор и $p(\lambda) = \det(\lambda \cdot 1_E - A)$ – характеристический многочлен оператора A. Здесь 1_E – тождественный оператор в E. Если K – алгебраически замкнуто, то многочлен $p(\lambda)$ имеет корень. Следовательно при некотором $\lambda \in K$ оператор $\lambda \cdot 1_E - A$ имеет нулевой определитель и потому $(\lambda \cdot 1_E - A)v = 0$ для ненулевого вектора $v \in E$. Тогда $Av = \lambda v$ так что v – собственный вектор оператора A.

$2) \Rightarrow 3)$ Пусть L – конечное расширение поля K. Зафиксируем $x \in L$ и пусть $A: L \to L$ линейный оператор умножения на x определенный формулой $A(y) = xy$. Согласно 2) у оператора A есть собственный вектор над K. Таким образом $xv = Av = \lambda v$ при некоторых $\lambda, v \in K$, $v \neq 0$. Следовательно $x = \lambda \in K$ и $L = K$.

$3) \Rightarrow 4)$. Если $p \in K[x]$ – неприводимый многочлен степени $n > 1$, то факторкольцо кольца $K[x]$ по идеалу, порожденному многочленом p, является собственным расширением поля K (степени n).

$4) \Rightarrow 1)$. Этот факт вытекает из того, что всякий многочлен разлагается в произведение неприводимых.

Мы видим, что основную теорему алгебры можно сформулировать так: поле комплексных чисел удовлетворяет эквивалентным условиям теоремы 1. Можно дать еще одну по существу эквивалентную формулировку, относящуюся уже к полю R действительных чисел: всякий неприводимый многочлен над R имеет степень ≤ 2. Это утверждение эквивалентно алгебраической замкнутости поля C.

Первое доказательство основной теоремы алгебры.

Пусть $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$ – многочлен степени $n \geq 1$ с комплексными коэффициентами. Предположим, что p не имеет корней и придем к противоречию.

Пусть z равномерно движется по окружности радиуса R в положительном направлении. Точка z^n будет при этом двигаться по окружности радиуса R^n с угловой скоростью, в n раз превосходящей угловую скорость точки z. Это следует из представления z в тригонометрической форме: если $z = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то $z^n = R^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$. Когда z

совершает один полный оборот, точка z^n совершает n оборотов вокруг нуля. Положим

$$b(z) = a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0.$$

При больших R число $b(z)$ пренебрежимо мало по сравнению с z^n, поэтому движение точки $p(z) = z^n + b(z)$,если наблюдать его издалека, будет практически неотличимо от движения точки z^n. Следовательно, точка $p(z)$ совершит столько же оборотов вокруг нуля, что и точка z^n, т.е. n оборотов. Существенно здесь то, что отрезок, соединяющий $p(z)$ и z^n не проходит через 0 (т.к. $|b(z)| < |z^n|$), поэтому движение точек $p(z)$ и z^n можно продеформировать одно в другое, не проходя при этом через 0 и тем самым не меняя числа оборотов.

С другой стороны, если z близко к нулю, то $p(z)$ близко к a_0. Когда z совершает полный оборот по окружности малого радиуса, $p(z)$ описывает замкнутую кривую вокруг a_0. Поскольку $a_0 \neq 0$ (иначе многочлен $p(z)$ имел бы корень 0), такая кривая не охватывает нуля, так что при малых R точка $p(z)$ совершает 0 оборотов вокруг нуля.

Будем теперь менять R и следить за тем, какое число $n(R)$ оборотов совершает точка $p(z)$ вокруг нуля, когда z делает один полный оборот по окружности радиуса R. Число оборотов точки $p(z)$ вокруг нуля было бы не определено, если бы эта точка при своем движении проходила через нуль. Так как мы предполагаем, что $p(z) \neq 0$ при всех z, то число $n(R)$ определено при всех R. Ясно, что $n(R)$ непрерывно зависит от R.

Вопросы для самопроверки.

1. Множество с какими свойствами называется кольцом?
2. Множество с какими свойствами называется полем?
3. Дайте определение понятию «кольцо многочленов над полем K» .
4. Сформулируйте определение корня многочлена.
5. Приведите различные формулировки основной теоремы алгебры многочленов.
6. На базе каких идей построены различные доказательства основной теоремы?
7. Каким свойством обладает непрерывная функция, принимающая только целочисленные значения?

8. Преобразования переменных

8.1 Неограниченная струна. Уравнение свободных колебаний однородной струны имеет вид

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}. \tag{8.1}$$

Положим

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at.$$

Так как

$$u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_\xi\xi_{xx} + u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\eta\eta_{xx} =$$
$$= u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta};$$
$$u_{tt} = u_{\xi\xi}\xi_t^2 + u_{\xi\eta}\xi_t\eta_t + u_\xi\xi_{tt} + u_{\xi\eta}\xi_t\eta_t + u_{\eta\eta}\eta_t^2 + u_\eta\eta_{tt} =$$
$$= u_{\xi\xi}(-a)^2 - 2u_{\xi\eta}a^2 + u_{\eta\eta}a^2,$$

то уравнение (8.1) в новых переменных запишется в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0 \tag{8.2}$$

или, переписав его в виде

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right) = 0,$$

будем иметь

$$\frac{\partial u}{\partial\xi} = \omega(\xi),$$

где $\omega(\xi)$ – произвольная функция от ξ. Интегрируя полученное уравнение по ξ и рассматривая η как параметр, находим, что

$$u = \int \omega(\xi)\,d\xi + \theta_2(\eta),$$

где $\theta_2(\eta)$ – произвольная функция от η. Полагая теперь

$$\int \omega(\xi)\,d\xi = \theta_1(\xi),$$

получаем

$$u = \theta_1(\xi) + \theta_2(\eta).$$

Возвращаясь к старым переменным (x, t) будем иметь

$$u(x,t) = \theta_1(x - at) + \theta_2(x + at). \tag{9.3}$$

Нетрудно проверить, что функция $u(x, t)$ определяемая равенством (8.3), является решением уравнения (8.1), если θ_1 и θ_2 – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции. Решение (8.3) уравнения (8.1) называется *решением Даламбера*.

8.2. Задача Коши. Найти решение уравнения (8.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$u\big|_{t=0} = \varphi_0(x),\ \ \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \varphi_1(x). \tag{8.5}$$

Ввиду неограниченности струны функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ заданы в интервале $(-\infty, \infty)$.

В решении (8.3) уравнения (8.1) нужно выбрать функции θ_1 и θ_2 так, чтобы удовлетворить начальным условиям:

$$\varphi_0(x) = \theta_1(x) + \theta_2(x), \qquad \varphi_1(x) = -a\left[\theta_1'(x) - \theta_2'(x)\right], \tag{8.6}$$

откуда, интегрируя второе равенство, получаем

$$\theta_1(x) + \theta_2(x) = \varphi_0(x),\ \ \theta_1(x) - \theta_2(x) = -\frac{1}{a}\int_0^x \varphi_1(z)\,dz + c, \tag{8.7}$$

где c – произвольная постоянная.

Из равенств (9.7) находим

$$\begin{aligned} \theta_1(x) &= \frac{1}{2}\varphi_0(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x \varphi_1(z)\,dz + \frac{c}{2}, \\ \theta_2(x) &= \frac{1}{2}\varphi_0(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x \varphi_1(z)\,dz - \frac{c}{2}. \end{aligned} \tag{8.8}$$

Подставляя (8.8) в (8.3), получим

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\varphi_0(x - at) - \frac{1}{2a}\int_0^{x-at} \varphi_1(z)\,dz + \frac{c}{2} +$$

$$+ \frac{1}{2}\varphi_0(x + at) + \frac{1}{2a}\int_0^{x+at} \varphi_1(z)\,dz - \frac{c}{2}$$

или окончательно

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\left[\varphi_0(x - at) + \varphi_0(x + at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \varphi_1(z)\,dz. \tag{8.9}$$

Равенство (8.9) даёт решение задачи Коши, если $\varphi_0(x)$ имеет непрерывные производные до второго порядка включительно, а $\varphi_1(x)$ – до первого.

Вопросы для самопроверки.

1. Какой функцией описывается состояние струны?
2. Какая подстановка применяется для преобразования уравнения струны?
3. К какому результату приводит эта подстановка?

9. Метрические пространства

9.1. Определение и основные примеры.

Одной из важнейших операций математического анализа является операция предельного перехода. В основе этой операции лежит тот факт, что на числовой прямой определено расстояние от одной точки до другой. Многие фундаментальные факты математического анализа не связаны с алгебраической природой рассматриваемых объектов, а опираются лишь на понятие расстояния. Обобщая представление о действительных числах как о множестве, в котором введено расстояние между элементами, мы приходим к понятию метрического пространства — одному из важнейших понятий современной физики и математики.

Множество X *называется метрическим пространством, если каждой паре элементов* $x, y \in X$ *поставлено в соответствие действительное число* $\rho(x,\, y)$, *называемое метрикой или расстоянием, так что выполняются следующие три аксиомы:*

1) $\rho(x,y) \ge 0$; $\rho(x,y) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x = y$;

2) *аксиома симметрии:* $\rho(x,y) = \rho(y,x)$;

3) *аксиома треугольника:* $\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(z,y)$.

Подчеркнём, что множество X в таком случае называется метрическим пространством, его элементы – точками, функция ρ метрикой на множестве X, а число $\rho(x,y)$ – расстоянием между x и y. Условие 1) *означает*, что расстояние между двумя разными точками положительно и что каждая точка находится на нулевом расстоянии от самой себя. Условие 2) утверждает, что расстояние не зависит от порядка точек x и y. Условие 3), называемое неравенством треугольника, утверждает, что сумма длин двух сторон треугольника, составленного из элементов множества X не меньше третьей стороны.

Таким образом, из определения метрического пространства следует, что метрическим пространством является пара (X, ρ) но этот объект иногда обозначают одним символом, например, $R = (X, \rho)$.

Приведем примеры метрических пространств.

1. Положив для элементов произвольного множества X

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y, \\ 1, & \text{если } x \ne y, \end{cases}$$

мы получим метрическое пространство. Его называют пространством изолированных точек.

Действительно, выполнение первых двух аксиом очевидно, а неравенство $\rho(x, y) \le \rho(x, z) + \rho(z, y)$ сводится к одному из следующих случаев:

$$0\le 0+0=0\left(x=y=z\right);\ 0\le 1+1=2\left(x=y, x\ne z, z\ne y\right);$$
$$1\le 1+0=1 \quad (x\ne y,\ y\ne z);$$
$$1\le 1+0=2;\ (x, y, z \text{ – попарно различны})$$

2. Множество действительных чисел с расстоянием
$$\rho(x,y)=|x-y|$$
образует метрическое пространство R^1.

3. Множество упорядоченных наборов из n действительных чисел $x=\left(x_1,\ x_2,...,\ x_n\right)$ с расстоянием
$$\rho\left(x,y\right)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(y_k-x_k\right)^2} \tag{9.1}$$
называется n-мерным арифметическим евклидовым пространством R^n. Справедливость аксиом 1) и 2) очевидна. Проверим выполнение аксиомы 3). Пусть $x=\left(x_1,\ x_2,...,\ x_n\right),\ y=\left(y_1,\ y_2,...,\ y_n\right),\ z=\left(z_1,\ z_2,...,\ z_n\right),$ тогда аксиома треугольника запишется в виде
$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(y_k-x_k\right)^2}\le\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(z_k-x_k\right)^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(y_k-z_k\right)^2}. \tag{9.2}$$
Полагая $z_k-x_k=a_k,\ y_k-z_k=b_k$, получаем, что
$$a_k+b_k=\left(z_k-x_k\right)+\left(y_k-z_k\right)=y_k-z_k,$$
а неравенство (2) принимает следующий вид
$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(a_k+b_k\right)^2}\le\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}. \tag{9.3}$$

Для доказательства неравенства (9.3) введем понятие нормы элемента пространства R^n:
$$\|x\|:=\rho\left(x,0\right)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}x_k^2}, \tag{9.4}$$
тогда неравенство (3) можно короче переписать в виде:
$$\|a+b\|\le\|a\|+\|b\|. \tag{9.5}$$

Следует обратить внимание, что: $\|x\|=0$ тогда и только тогда, когда $x=0$; $\|\lambda x\|=|\lambda|\cdot\|x\|$ для любого $x\in R^n$ и любого действительного числа λ.

Для элементов пространства R^n (в силу алгебраической структуры множества R^n их естественно называть векторами) можно ввести понятие косинуса и синуса угла между векторами $x,y\in R^n$:
$$\cos\angle(x,y):=\frac{(x,y)}{\|x\|\|y\|} \tag{9.6}$$

где $(x,y):=\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$;

$$\sin\angle(x,y) := \frac{1}{2}\left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\| \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| . \tag{9.7}$$

Лемма 1. Справедливо тождество

$$\| x+y \|^2 = \| x \|^2 + 2(x,y) + \| y \|^2 . \tag{9.8}$$

◊ Применяя равенство (9.4), получаем:

$$\| x+y \|^2 = \sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(x_k^2 + 2x_k y_k + y_k^2 \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} x_k y_k + \sum_{k=1}^{n} y_k^2 = \| x \|^2 + 2(x,y) + \| y \|^2 . \quad \blacklozenge$$

Лемма 2. Справедливо тождество

$$\cos^2\angle(x,y) + \sin^2\angle(x,y) \equiv 1 \tag{9.9}$$

◊ Применяя тождество (9.8), получаем

$$\frac{(x,y)^2}{\|x\|^2 \cdot \|y\|^2} + \frac{1}{4}\left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 \cdot \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 = \frac{(x,y)^2}{\|x\|^2 \cdot \|y\|^2} +$$

$$+ \frac{1}{4}\left[\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\|^2 + 2\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \right) + \left\| \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 \right]\left[\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\|^2 - 2\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \right) + \left\| \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 \right] =$$

$$= \frac{(x,y)^2}{\|x\|^2 \|y\|^2} + \frac{1}{4}\left[\left(\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\|^2 + \left\| \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 \right) - \frac{4(x,y)^2}{\|x\|^2 \|y\|^2} \right] =$$

$$= \frac{(x,y)^2}{\|x\|^2 \|y\|^2} - \frac{(x,y)^2}{\|x\|^2 \|y\|^2} + \frac{1}{4}(1+1)^2 = 1. \quad \blacklozenge$$

Умножая обе части равенства (9.9) на $\|x\|^2 \|y\|^2$, получаем тождество

$$\|x\|^2 \|y\|^2 = (x,y)^2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\|x\|^2 \|y\|^2} \| x\|y\| + y\|x\| \|^2 \cdot \| x\|y\| - y\|x\| \|^2 . \tag{9.10}$$

Запишем тождество (9.10) в координатной форме:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \right)^2 + \sum_{k<j} \left(x_k y_j - x_j y_k \right)^2 . \tag{9.11}$$

Тождество (9.11) представляет собой известное тождество Лагранжа, а его геометрический смысл содержится в формуле (9.9). Приведем некоторые частные случаи тождества (9.11). Пусть $x, y \in R^2$. тогда тождество (9.11) принимает следующий вид:

$$\left(x_1^2 + x_2^2 \right)\left(y_1^2 + y_2^2 \right) = \left(x_1 y_1 + x_2 y_2 \right)^2 + \left(x_1 y_2 - x_2 y_1 \right)^2 . \tag{9.12}$$

Если же $x, y \in R^3$, то

$$\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)\left(y_1^2+y_2^2+y_3^2\right)=\left(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3\right)^2+\left(x_1y_2-x_2y_1\right)^2+$$
$$+\left(x_1y_3-x_3y_1\right)^2+\left(x_2y_3-x_3y_2\right)^2. \qquad (9.13)$$

Если вспомнить, что числа $x_2y_3-x_3y_2$, $-(x_1y_3-x_3y_1)$, $x_1y_2-x_2y_1$ являются координатами векторного произведения $[x,y]$, то равенство (9.13) можно представить в виде

$$\|x\|^2\|y\|^2=\|[x,y]\|^2+(x,y)^2. \qquad (9.14)$$

Тождество Лагранжа, записанное в виде (14), применяется в некоторых задачах физики и астрономии.

Из тождества (9.14) очевидным образом следует неравенство Коши-Буняковского

$$|(x,y)|\le\|x\|\cdot\|y\|. \qquad (9.15)$$

Вернемся к доказательству неравенства (9.5).

Лемма 3. Пусть $a,b\in R^n$. Справедливо неравенство (9.5).

◊ Применяя тождество (9.8) и неравенство (9.15), получаем

$$\|a+b\|^2=\|a\|^2+\|b\|^2+2(a,b)\le\|a\|^2+\|b\|^2+2|(a,b)|\le$$
$$\le\|a\|^2+\|b\|^2+2\|a\|\cdot\|b\|=(\|a\|+\|b\|)^2.$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей последнего неравенства, получаем требуемый результат.

4. Множество $C_{[a,b]}$ всех непрерывных действительных функций, определенных на отрезке $[a,b]$ с метрикой

$$\rho(f,g):=\max_{a\le t\le b}|g(t)-f(t)| \qquad (9.16)$$

также образует метрическое пространство. Это пространство играет очень важную роль в математическом анализе.

9.2. Множества и функции в метрических пространствах

При рассмотрении основных понятий математического анализа можно заметить, что такие понятия, как предел, непрерывность, равномерная непрерывность, фундаментальная последовательность, можно сформулировать так, что они используют лишь расстояние между точками соответствующих множеств и, следовательно, имеют смысл в произвольных метрических пространствах.

Последовательность $x_n\ (n=1,2,...)$ *точек метрического пространства* X *называется сходящейся, если существует такой элемент* $a\in X$*, что* $\rho(x_n,a)\to0$ *при* $n\to\infty$*, т.е. для любого* $\varepsilon>0$ *существует та-*

кое $N(\varepsilon)$, *что для* $n \geq N(\varepsilon)$ *выполняется неравенство* $\rho(x_n, a) < \varepsilon$. *Точка* $a \in X$ *называется пределом последовательности* $x_n\ (n = 1, 2, ...)$.

В этом случае записываем $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ или $x_n \to a$.

Лемма 1. В метрическом пространстве сходящаяся последовательность имеет только один предел.

◊ Если $x_n \to a$ и $x_n \to b$, то по неравенству треугольника будем иметь

$$\rho(a,b) \leq \rho(a, x_n) + \rho(x_n, b) \to 0$$

при $n \to \infty$, т.е. $\rho(a,b) = 0$, и в силу аксиомы 1) метрики $a = b$. ♦

Отображение $f : (X, \rho) \to (X, \rho)$ *называется непрерывным в точке* $x_0 \in X$, *если*

$$\forall \varepsilon (>0) \exists (\delta > 0) \forall x \{\rho(x, x_0) < \delta \to \rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon\}. \tag{9.17}$$

Отображение f *называется непрерывным на* X *(на множестве* $M \subset X$ *), если оно непрерывно в каждой точке* $x_0 \in X\ (x_0 \in M)$.

Отображение f *называется равномерно непрерывным на множестве* $M \subset X$, *если*

$$\forall \varepsilon (>0) \exists (\delta > 0) \forall x (\in M) \forall y (\in M) \{\rho(x, y) < \delta \to \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon\}. \tag{9.18}$$

Последовательность $x_n\ (n = 1, 2, ...)$ *точек метрического пространства* (X, ρ) *называется фундаментальной последовательностью (или последовательностью Коши) в метрическом пространстве* (X, ρ) *если*

$$\forall \varepsilon (>0) \exists N = N(\varepsilon) \forall n (\geq N) \forall m (\geq N)\, \rho(x_n, x_m) < \varepsilon. \tag{9.19}$$

Рассмотрим связь между фундаментальными и сходящимися последовательностями.

Лемма 2. В любом метрическом пространстве сходящаяся последовательность является фундаментальной.

◊ Пусть $x_n \to x_0$. Тогда $\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x_0) + \rho(x_0, x_m) \to 0$ при $m, n \to \infty$, что и требовалось доказать. ♦

9.3. Шары, сферы, диаметр.

В теории метрических пространств удобно пользоваться геометрическим языком, на который наталкивает классическая геометрия. Этот язык позволяет придать результатам анализа максимальную наглядность и дать наиболее простые и наиболее отражающие суть дела доказательства.

Если дано метрическое пространство (X, ρ) точка $a \in X$ и действительное число $r > 0$, то открытый шар (соответственно замкнутый шар) с центром в точке a и радиусом r есть множество

$$B(a, r) := \{x \in X : \rho(a, x) < r\} \tag{9.20}$$

соответственно

$$\overline{B}(a, r) := \{x \in X : \rho(a, x) \le r\}. \tag{9.21}$$

Сфера с центром в точке a и радиусом r есть множество

$$S(a, r) := \{x \in X : \rho(a, x) = r\}. \tag{9.22}$$

Открытые и замкнутые шары с центром в точке a всегда содержат точку a, но сфера с центром в точке a может оказаться пустой.

На действительной числовой прямой открытый (соответственно замкнутый шар) с центром в точке a и радиусом r есть интервал $(a-r, a+r)$ (соответственно отрезок $[a-r, a+r]$); сфера с центром a и радиусом r состоит из двух точек : $a-r$ и $a+r$.

Пусть A, B два непустых подмножества пространства (X, ρ). Расстояние от A до B, по определению, есть положительное число

$$\rho(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} \rho(x, y).$$

Если A состоит из одной точки x то вместо $\rho(A, B)$ пишут также $\rho(x, B)$. Если $A \cap B \ne \varnothing$, то $\rho(A, B) = 0$, но обратное может и не иметь места. Вообще если $\rho(A, B) = t$, то не обязательно существует такие две точки $x \in A$, $y \in B$, для которых $\rho(x, y) = t$. Пусть например, на числовой прямой A – множество натуральных чисел, а B – множество всех чисел вида $n - \frac{1}{n}$ $(n = 2, 3, \ldots)$. Хотя A и B не имеют общих точек, но расстояние $\rho\left(n, n - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$ стремится к нулю при $n \to \infty$, поэтому $\rho(A, B) = 0$.

Лемма 3. *Если точка x не принадлежит открытому шару $B(a, r)$ (соответственно замкнутому шару $\overline{B}(a, r)$), то выполняется неравенство*

$$\rho(x, B(a, r)) \ge \rho(a, x) - r$$

(соответственно $\rho(x, \overline{B}(a, r)) \ge \rho(a, x) - r$).

◊ Действительно, из условия леммы следует, что $\rho(a, x) \ge r$. Для любой точки $y \in B(a, r)$ (соответственно $y \in \overline{B}(a, r)$) в силу неравенства треугольника

$$\rho(x, y) \ge \rho(a, x) - \rho(a, y) \ge \rho(a, x) - r. \blacklozenge$$

Лемма 4. Если A – непустое множество в метрическом пространстве (X, ρ) и x, y – две произвольные точки из (X, ρ) то выполняется неравенство

$$\left|\rho(x,A)-\rho(y,A)\right|\le\rho(x,y). \qquad (9.23)$$

◊ Для любой точки $z\in A$ имеем

$$\rho(x,z)\le\rho(x,y)+\rho(y,z),$$

поэтому

$$\rho(x,A)=\inf_{z\in A}\rho(x,z)\le\inf_{z\in A}\left(\rho(x,y)+\rho(y,z)\right)=$$
$$=\rho(x,y)+\inf_{z\in A}\rho(y,z)=\rho(x,y)+\rho(y,A).$$

Точно так же $\rho(y,A)\le\rho(x,y)+\rho(x,A)$. ♦

Диаметр произвольного непустого множества $A\subseteq X$ по определению, есть $d(A)=\sup\limits_{x\in A,\,y\in A}\rho(x,y)$; он может быть положительным действительным числом или равен $+\infty$. Из $A\subseteq B$ следует неравенство $d(A)\le d(B)$. Равенство $d(A)=0$ имеет место тогда и только тогда, когда A – одноточечное множество.

Лемма 5. *Для любого шара* $d\left(\overline{B}(a,r)\right)\le 2r$.

◊ В самом деле, если $\rho(a,x)\le r$ и $\rho(a,y)\le r$, то в силу неравенства треугольника $\rho(x,y)\le\rho(x,a)+\rho(a,y)\le r+r=2r$. ♦

Ограниченным множеством в (X,ρ) называется непустое множество, диаметр которого конечен.

Лемма 6. *Объединение двух ограниченных множеств A и B ограничено.*

◊ В самом деле, если $a\in A, b\in B$ и x,y – две любые точки объединения $A\cup B$, то возможны три случая: 1) $x,y\in A$, и тогда $\rho(x,y)\le d(A)$; 2) $x,y\in B$, и тогда $\rho(x,y)\le d(B)$; 3) $x\in A, y\in B$, и тогда в силу неравенства треугольника

$$\rho(x,y)\le\rho(x,a)+\rho(a,b)+\rho(b,y),$$

поэтому

$$d(A\cup B)\le\rho(a,b)+d(A)+d(B).$$

Поскольку это верно для любых $a\in A,\ b\in B$, то

$$d(A\cup B)\le\rho(A,B)+d(A)+d(B).$$

Из доказанного следует, что если множество A ограничено, то, какова бы ни была точка $x_0\in(X,\rho)$, множество A содержится в замкнутом шаре с центром x_0 и с радиусом $\rho(x_0,A)+d(A)$. ♦

9.4. Открытые множества. Окрестности.

Открытым множеством в метрическом пространстве (X, ρ) называется подмножество $A \subseteq (X, \rho)$, обладающее следующим свойством: для любой точки $x \in A$ существует такое $r > 0$, что $B(x, r) \subset A$.

Лемма 7. *Любой открытый шар является открытым множеством.*

◊ *Если* $x \in B(a, r)$, *то по определению открытого шара* $\rho(a, x) < r$; *поэтому из неравенства* $\rho(x, y) < r - \rho(a, x)$ *следует неравенство*

$$\rho(a, y) \leq \rho(a, x) + \rho(x, y) < r,$$

которое доказывает включение

$$B(x, r - \rho(a, x)) \subset B(a, r). \ ♦$$

Лемма 8. *Объединение любого семейства* $A_\lambda \, (\lambda \in L)$ *открытых множеств открыто*.

◊ Если $x \in A_\mu$ для некоторого $\mu \in L$, то существует такое $r > 0$, что

$$B(x, r) \subset A_\mu \subseteq \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda. \ ♦$$

Лемма 9. *Пересечение конечного числа открытых множеств открыто.*

◊ Достаточно доказать, что открыто пересечение двух открытых множеств A_1, A_2, а затем провести шаг индукции. Если $x \in A_1 \cap A_2$, то существуют такие $r_1 > 0$ и $r_2 > 0$, что $B(x, r_1) \subset A_1$ и $B(x, r_2) \subset A_2$; очевидно, что $B(x, r) \subset A_1 \cap A_2$, где $r = \min(r_1, r_2)$. ♦

Пересечение бесконечного семейства открытых множеств, вообще говоря, не будет открытым. Например, пересечение интервалов $\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ на числовой прямой — одноточечное множество $\{0\}$, которое не является открытым.

Если A – непустое множество в метрическом пространстве (X, ρ), то открытой окрестностью множества A называется любое открытое множество, содержащее A, а окрестностью множества A – любое множество, содержащее открытую окрестность A. В случае, когда A является одноточечным множеством $\{x\}$, обычно говорят об окрестностях точки x, а не множества $\{x\}$.

Лемма 10. *Для любого непустого множества* $A \subset X$ *и любого* $r > 0$ *множество* $V_r(A) = \{x \in X : \rho(x, A) < r\}$ *является открытой окрестностью* A.

◊ Если $\rho(x,A)<r$ и $\rho(x,y)<r-\rho(x,A)$, то из неравенства (7) следует, что $\rho(y,A)-\rho(x,A)\le\rho(x,\,y)$, но тогда $\rho(y,A)<\rho(x,A)+r-\rho(x,A)=r$; поэтому $V_r(A)$ открыто и содержит A.

9.5. Замкнутые множества

Множество A в метрическом пространстве (X,ρ) называется замкнутым, если его дополнение является открытым множеством. Пустое множество замкнуто, замкнуто и всё пространство (X,ρ). Промежутки $[a,\infty)$ и $(-\infty,a]$ и множество Z целых чисел – замкнутые множества на действительной прямой. Промежутки $[a,b)$ и $(a,b]$ не являются ни открытыми ни замкнутыми множествами.

Лемма 11. *Замкнутый шар есть замкнутое множество; сфера есть замкнутое множество.*

◊ В силу леммы 3 из $x\notin\overline{B}(a,r)$ следует неравенство

$$\rho\left(x,\,\overline{B}(a,\,r)\right)\ge\rho(a,x)-r>0.$$

Поэтому открытый шар с центром в точке x и радиусом $\rho(a,\,x)-r$ содержится в дополнении шара $\overline{B}(a,\,r)$; тем самым доказано, что это дополнение открыто. Дополнение сферы $S(a,r)$ является объединением шара $B(a,r)$ и дополнения шара $\overline{B}(a,r)$ и в силу леммы 8 является открытым. ♦

Лемма 12. *Пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто. Объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.*

◊ Так как дополнение пересечения любого семейства множеств совпадает с объединением дополнений, а оно (объединение дополнений) в силу леммы 8 является открытым множеством, то пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто. Вторая часть леммы также доказывается переходом к дополнениям. ♦

В частности, одноточечное множество $\{x\}$ замкнуто.

9.6. Полнота. Принцип сжимающих отображений

Пусть A – непустое подмножество метрического пространства (X,ρ). Сужение на декартово произведение $A\times A$ отображения $(x,y)\to\rho(x,y)$, очевидно является расстоянием в A называемым расстоянием, индуцированным в A метрикой ρ пространства (X,ρ). Метрическое пространство, определяемое этим индуцированным расстоянием, называется подпространством метрического пространства (X,ρ).

Если в метрическом пространстве (X,ρ) любая фундаментальная последовательность сходится (к точке пространства (X,ρ)), то это *пространство называется полным.* Действительная прямая R^1 является полным метрическим пространством.

Полнота евклидова пространства R^n является следствием полноты R^1. Действительно, пусть $\left(x_{p,1}, x_{p,2}, ..., x_{p,n}\right) = x_p\left(p=1,2,...\right)$ – фундаментальная последовательность точек из R^n; это означает, что для каждого $\varepsilon>0$ найдется такое $N=N\left(\varepsilon\right)$, что

$$\sum_{k=1}^{n}\left(x_{p,k} - x_{q,k}\right)^2 < \varepsilon^2$$

при $p,q\geq N$. Тогда для каждого $k=1,2,...,n$ получаем соответствующее неравенство для компоненты $x_{p,k} - x_{q,k}$:

$$\left|x_{p,k} - x_{q,k}\right| < \varepsilon$$

при $p,q\geq N$. Таким образом, $x_{p,k}\left(p=1,2,...\right)$ – фундаментальная числовая последовательность. Положим

$$x_k = \lim_{p\to\infty} x_{p,k} \quad \text{и} \quad x = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right).$$

Тогда $\lim\limits_{p\to\infty} x_p = x.$

Докажем полноту пространства $C_{[a,b]}$. Пусть $x_n\left(t\right)\left(n=1,2,...\right)$ – некоторая фундаментальная последовательность в $C_{[a,b]}$. Это означает, что для каждого $\varepsilon>0$ существует такое $N=N(\varepsilon)$, что

$$\forall m\left(\geq N\right)\forall n\left(\geq N\right)\forall t\left(a\leq t\leq b\right) |x_n\left(t\right)-x_m\left(t\right)|<\varepsilon. \tag{9.24}$$

Неравенство (9.24) означает, что при фиксированном t_0 последовательность $x_n\left(t_0\right)$ является фундаментальной числовой последовательностью, т.е. сходится. Пусть $x\left(t\right)=\lim\limits_{n\to\infty} x_n\left(t\right)$. Непрерывность функции $x(t)$ в точке t_0 следует из неравенства

$$|f\left(t_0+\delta\right)-f\left(t_0\right)| \leq |f\left(t_0+\delta\right)-f_n\left(t_0+\delta\right)|+|f_n\left(t_0+\delta\right)-f_n\left(t_0\right)|+|f_n\left(t_0\right)-f\left(t_0\right)|.$$

Устремляя в неравенстве (1) m к бесконечности, получим

$$\forall n\left(\geq N\right)\forall t\left(a\leq t\leq b\right) |x_n\left(t\right)-x\left(t\right)|\leq\varepsilon,$$

а это и означает, что последовательность $x_n(t)$ сходится к $x(t)$ в смысле метрики пространства $C_{[a,b]}$.

Рассмотрим множество всех функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$, но расстояние определим иначе, а именно, положим

$$\rho\left(x,y\right)=\left\{\int_a^b\left[x\left(t\right)-y\left(t\right)\right]^2\right\}^{1/2}. \tag{9.25}$$

Такое метрическое пространство обозначается $C^2_{[a,\,b]}$ и называется пространством непрерывных функций с квадратичной метрикой. Здесь аксиомы 1) и 2) метрического пространства очевидны, а аксиома треугольника вытекает из интегральной формы неравенства Коши–Буняковского

$$\left[\int_a^b x(t)\,y(t)\,dt\right]^2 \le \int_a^b x^2(t)\,dt\cdot\int_a^b y^2(t)\,dt,$$

которое может быть получено из легко проверяемого тождества

$$\left[\int_a^b x(t)\,y(t)\,dt\right]^2 \le \int_a^b x^2(t)\,dt\cdot\int_a^b y^2(t)\,dt -$$

$$\frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b\left[x(s)\,y(t)-y(s)\,x(t)\right]^2 ds\,dt.$$

Убедимся в том, что пространство $C^2_{[a,\,b]}$ не полно. Рассмотрим, например, последовательность непрерывных функций

$$\varphi_n(t)=\begin{cases}-1 & при\ -1\le t\le -\dfrac{1}{n},\\ nt & при\ -\dfrac{1}{n}\le t\le \dfrac{1}{n},\\ 1 & при\ -\dfrac{1}{n}\le t\le 1.\end{cases}$$

Она фундаментальна в $C^2_{[-1,\,1]}$, так как

$$\int_{-1}^{1}\left[\varphi_n(t)-\varphi_m(t)\right]^2 dt \le \frac{2}{\min(m,\,n)}.$$

Однако эта последовательность $\varphi_n(t)$ не сходится ни к какой функции из $C^2_{[a,\,b]}$. Действительно, пусть f – некоторая функция из $C^2_{[-1,\,1]}$ и ω – разрывная функция, равная -1 при $t<0$ и $+1$ при $t\ge 0$.

В силу интегрального неравенства Минковского имеем:

$$\left\{\int_{-1}^{1}\left[f(t)-\omega(t)\right]^2 dt\right\}^{1/2} \le \left\{\int_{-1}^{1}\left[f(t)-\varphi_n(t)\right]^2 dt\right\}^{1/2} + \left\{\int_{-1}^{1}\left[\varphi_n(t)-\omega(t)\right]^2 dt\right\}^{1/2}.$$

Так как функция f непрерывна, то интеграл в левой части последнего неравенства отличен от нуля. Далее ясно, что

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_{-1}^{1}\left[\varphi_n(t)-\omega(t)\right]^2\right\}^{1/2} = 0.$$

Поэтому интеграл $\left\{\int_{-1}^{1}\left[f(t)-\varphi_n(t)\right]^2\right\}^{1/2}$ не может стремиться к нулю при $n\to\infty$.

Лемма 1. Для любых четырёх точек x, y, z, w в метрическом пространстве справедливо неравенство четырёхугольника

$$|\rho(x,y)-\rho(z,w)| \le \rho(x,z)+\rho(y,w).$$

◊ Применяя неравенство треугольника, получаем

$$\rho(x,y)\le\rho(x,z)+\rho(z,y)\le\rho(x,z)+\rho(z,w)+\rho(w,y),$$

откуда

$$\rho(x,y)-\rho(z,w)\le \rho(x,z)+\rho(y,w). \tag{9.26}$$

В неравенстве (9.26) поменяем местами пары точек (x,y) и (z,w). Тогда

$$-\left[\rho(x,y)-\rho(z,w)\right]\le\rho(x,z)+\rho(y,w). \tag{9.27}$$

Из неравенств (9.26) – (9.27) получаем

$$-\left[\rho(x,z)+\rho(y,w)\right] \le \left[\rho(x,y)-\rho(z,w)\right]\le\left[\rho(x,z)+\rho(y,w)\right],$$

что, конечно, означает выполнение неравенства четырёхугольника. ♦

Принцип сжимающих отображений. Пусть $F: X\to X$ – отображение (оператор) метрического пространства X в себя. Точка $a\in X$ называется неподвижной точкой отображения F, если $F(a)=a$.

Одним из общих результатов, дающих достаточные условия существования неподвижной точки, является теорема Банаха о неподвижной точке сжимающего оператора.

Оператор $F: X\to X$ называется сжимающим, если существует константа $0\le q<1$ такая, что для любых $x, y\in X$ выполнено неравенство

$$\rho(F(x),\ F(y))\le q\rho(x,\ y). \tag{9.28}$$

Теорема 1 (Банах)**.** *В полном метрическом пространстве сжимающий оператор имеет неподвижную точку, и притом только одну.*

◊ Рассмотрим на X неотрицательную функцию

$$\varphi(x):=\rho(x,\ F(x)). \tag{9.29}$$

Пусть x_n – некоторая минимизирующая $\varphi(x)$ последовательность:

$$\lim_{n\to\infty}\varphi(x_n) = \inf_{x\in X}\varphi(x)=\alpha.$$

Очевидно,

$$\alpha \le \varphi\big(F(x_n)\big) = \rho\big(F(x_n),\, F(F(x_n))\big) \le q\rho\big(x_n, F(x_n)\big) = q\varphi(x_n),$$

откуда следует, что $\alpha \le q\alpha$. Таким образом, $\alpha = 0$.

Так как

$$\rho(x_n, x_m) \le \rho(x_n,\, F(x_n)) + \rho\big(F(x_n),\, F(x_m)\big) + \rho(\, F(x_m),\, x_m) \le$$
$$\le \varphi(x_n) + q\rho(x_n,\, x_m) + \varphi(x_m),$$

то

$$\rho(x_n, x_m) \le \frac{\varphi(x_n) + \varphi(x_m)}{1-q} \to 0 \ \ (n,\, m \to \infty),$$

т.е. последовательность x_n фундаментальна. Её предел x_* в силу полноты пространства X принадлежит X. Функция $\varphi(x)$ непрерывна, так как применяя неравенство четырёхугольника, получаем

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |\rho(x, f(x)) - \rho(y, F(y))| \le$$
$$\le \rho(x, y) + \rho(F(x), F(y)) \le (1+q)\rho(x, y)$$

Поэтому $\varphi(x_*) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x_n) = 0,$ а это означает, что x_0 есть решение уравнения

$$x = F(x). \tag{9.30}$$

Пусть y_* также является решением уравнения (9.30), принадлежащим X. Тогда

$$\rho(x_*,\, y_*) = \rho\big(F(x_*),\; F(y_*)\big) \le q\rho(x_*,\, y_*)$$

и, следовательно, $\rho(x_*,\, y_*) = 0$, т.е. $x_* = y_*$. ♦

Принцип сжимающих отображений можно применять к доказательству теорем существования и единственности решений для уравнений различных типов. Помимо доказательства существования и единственности решения уравнения (9.30), принцип сжимающих отображений даёт и фактический метод приближенного нахождения этого решения – метод последовательных приближений. Рассмотрим следующие примеры.

1. Пусть f – функция, которая определена на отрезке $[a, b]$, удовлетворяет условию Липшица

$$|f(x_2) - f(x_1)| \le q\,|x_2 - x_1| \tag{9.31}$$

с константой $q<1$ и отображает отрезок $[a,b]$ в себя. Тогда f – сжимающее отображение и, согласно доказанной теореме, уравнение (9.30) имеет на отрезке $[a,b]$ единственное решение. В частности, условие (9.31) выполнено, если функция f имеет на отрезке $[a,b]$ производную $f'(x)$, причем

$$|f'(x)| \le q < 1.$$

2. Рассмотрим отображение F пространства R^n в себя, задаваемое системой линейных уравнений

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad + \quad b_i \quad (i = 1, 2, ..., n).$$

При каких же условиях отображение F будет сжимающим? Ответ на этот вопрос зависит от выбора метрики в пространстве R^n. Рассмотрим три случая.

а) Пространство R_0^n, т.е. $\rho(x, y) := \max\limits_{1 \le i \le n} \{| x_i - y_i |\}$, тогда

$$\rho(y', y'') = \max_i | y_i' - y_i''| = \max_i |\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(x_j' - x_j''\right)| \le \max_i \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} || x_j' - x_j'' | \le$$

$$\le \left(\max_i \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | \right) \max_j \{| x_j' - x_j'' |\} = \left(\max_i \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | \right) \rho(x', x'').$$

Отсюда условие сжатости

$$\max_i \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | \quad \le \quad q \quad < 1.$$

б) Пространство R_1^n, т.е. $\rho(x, y) := \sum\limits_{i=1}^{n} | x_i - y_i |$, тогда

$$\rho(y', y'') = \sum_{i=1}^{n} | y_i' - y_i''| = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(x_j' - x_j''\right) \right| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} || x_j' - x_j''| \le \left(\max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} | a_{ij} | \right) \rho(x', x'') .$$

Таким образом, условием сжатости является условие

$$\max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} | a_{ij} | \le q < 1. \qquad (9.32)$$

в) Пространство R^n, т.е. $\rho(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$. На основании неравенства Коши-Буняковского имеем

$$\rho^2(y', y'') = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(x_j' - x_j''\right) \right]^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right) \rho^2(x', x'').$$

Отсюда условие сжатости

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \quad \le \quad q \quad < 1. \qquad (9.33)$$

Вопросы для самопроверки.

1. Какое множество называется метрическим пространством?
2. Какие множества в метрическом пространстве называются открытыми
3. Какие множества в метрическом пространстве называются замкнутыми?
4. Приведите примеры метрических пространств.
5. Какое отображение называется сжимающим?
6. Приведите примеры сжимающих отображений.
7. В чем состоит принцип сжимающих отображений?

Литература

1. Боголюбов, А.Н. Математики. Механики. Библиографический справочник / А.Н. Боголюбов. – Киев : Навукова думка, 1983. – 639 с.

2. Стиллвелл, Д. Математика и её история / Д. Стиллвелл. – Москва–Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2004. – 528 с.

3. Математическое просвещение. Сборник статей по элементарной математике и началам высшей / под ред. Р.Н. Бончковского. – Москва–Ленинград : ОНТИ, 1938. – Вып. 13. – 80 с.

4. Декарт, Р. Рассуждения о методе / Р. Декарт. – Ленинград : Изд-во АН СССР, 1953. – 657 с.

5. Арнольд, В.И. Наука математика и искусство математиков: лекция лауреата Государственной премии Российской Федерации 2007 года в МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, 24 июня 2008 г. / В.И. Арнольд. – М.: Типография МГУ, 2008. – 58 с.

6. Манин, Ю.И. Математика как метафора / Ю.И. Манин. – М : Изд-во МЦНМО, 2008. – 400 с.

7. Математическое просвещение : Третья сер. : сборник / редкол.: В.О. Бугаенко [и др.]. – М. : МЦНМО, 1997. – Вып. 1. – 198 с.

8. Мадера, А.Г. Математические софизмы : Правдоподобные рассуждения, приводящие к ошибочным утверждениям : кн. для учащихся 7–11 кл. / А.Г. Мадера, Д.А. Мадера – М. : Просвещение, 2003. – 112 с.

Учебное издание

ТРУБНИКОВ Юрий Валентинович
ПОДОКСЁНОВ Михаил Николаевич
ЧЕРНЯВСКИЙ Михаил Михайлович

МЕТОДОЛОГИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Методические рекомендации

Технический редактор *Г.В. Разбоева*
Компьютерный дизайн *Л.Р. Жигунова*

Подписано в печать .12.2020. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 2,44. Уч.-изд. л. 1,69. Тираж экз. Заказ .

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Свидетельство о государственной регистрации в качестве издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/255 от 31.03.2014.

Отпечатано на ризографе учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».
210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.