УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ФРАНЦИСКА СКОРИНЫ»

УДК 512.542

ШПАКОВ

Вячеслав Владимирович

КЛАССЫ ФИТТИНГА И ФОРМАЦИИ С ЗАДАННЫМИ СВОЙСТВАМИ РАДИКАЛОВ И КОРАДИКАЛОВ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

по специальности 01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

Работа выполнена в учреждении образования «Витебский государственный университет имени П. М. Машерова»

Научный руководитель: **Воробьев Николай Тимофеевич,** доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, учреждение образования «Витебский государственный университет имени П. М. Машерова», кафедра алгебры и методики преподавания математики

Официальные оппоненты: **Семенчук Владимир Николаевич,** доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», кафедра высшей математики

Гальмак Александр Михайлович, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры, учреждение образования «Могилевский государственный университет продовольствия», кафедра высшей математики

Оппонирующая организация – учреждение образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы»

Защита состоится «23» февраля 2010 г. в 16^{00} на заседании совета по защите диссертаций Д 02.12.01 при учреждении образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины» по адресу: 246019, г. Гомель, ул. Советская, 104, ауд. 1-20.
Телефон ученого секретаря: +10 375 232 573 791, e-mail: formation56@mail.ru

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале № 1 библиотеки учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».

Автореферат разослан «22» января 2010 г.

Ученый секретарь
совета по защите диссертаций А. Ф. Васильев

КРАТКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Благодаря основополагающим работам Гашюца [17], Гашюца, Фишера, Хартли [18], в которых в терминах формаций и классов Фиттинга было найдено изящное обобщение фундаментальных теорем Силова и Холла, в теории классов конечных разрешимых групп стали формироваться два новых направления – теория формаций и теория классов Фиттинга. При этом ключевым определяющим объектом в теории формаций стало понятие корадикала, а в теории классов Фиттинга – понятие радикала. Это обусловлено, прежде всего, тем, что формации и классы Фиттинга определяются в терминах корадикалов и радикалов соответственно следующим образом. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс групп. Тогда, если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно гомоморфных образов и для любой группы G существует наименьшая нормальная подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ группы G такая, что факторгруппа $G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{F}$ называется формацией. Если же $\mathfrak{F}$ – нормально наследственный класс такой, что для любой группы G существует наибольшая нормальная подгруппа $G_{\mathfrak{F}}$ группы G, принадлежащая $\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{F}$ называют классом Фиттинга. Подгруппы $G^{\mathfrak{F}}$ и $G_{\mathfrak{F}}$ называют $\mathfrak{F}$-корадикалом и $\mathfrak{F}$-радикалом группы G соответственно.

Примечателен тот факт, что в теории классов Фиттинга решение большинства задач описания структуры классов и их классификации связано с применением классов, определяемых заданными свойствами прямых произведений радикалов [19]. Для любого непустого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ класс Фиттинга $\mathfrak{F}^*$ определяется как наименьший, содержащий $\mathfrak{F}$ такой, что для всех групп G и H справедливо равенство $(G\times H)_{\mathfrak{F}^*} = G_{\mathfrak{F}^*}\times H_{\mathfrak{F}^*}$ и $\mathfrak{F}_*$ – пересечение всех таких классов Фиттинга $\mathfrak{X}$, для которых $\mathfrak{X}^*=\mathfrak{F}^*$. Глубокий интерес к исследованию структуры классов с помощью операторов «*», «$_*$» был обусловлен тем обстоятельством, что была сформулирована общая проблема о структуре класса Фиттинга [19, с. 135]), которая в настоящее время известна как

Гипотеза Локетта. *Каждый ли разрешимый класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ определяется как пересечение класса Фиттинга $\mathfrak{F}^*$ и некоторого нормального класса Фиттинга $\mathfrak{X}$?*

Данная гипотеза была подтверждена первоначально для специальных случаев локальных классов Фиттинга Брайсом и Косси [12], Бейдлеманом и Хауком [9] и др., а в последующем для произвольных локальных классов Фиттинга Н.Т. Воробьевым [3]. Вместе с тем Бергером и Косси [8] был построен пример нелокального класса Фиттинга, не удовлетворяющего гипотезе Локетта. Однако *проблема описания семейств нелокальных классов Фиттинга, удовлетворяющих гипотезе Локетта, остается открытой*

В середине 90-х прошлого столетия результат, подтверждающий гипотезу Локетта для локальных классов Фиттинга [3], нашел эффективное применение в работе Н.Т. Воробьева, А.Н. Скибы [1], где посредством конструкции класса Бергера-Косси [8] впервые было осуществлено построение примера нетривиального локального класса Фиттинга, факторизуемого нелокальными множителями, каждый из которых нелокален и не является формацией (положительное решение вопроса 11.25 а) из «Коуровской тетради» [5]). *Однако до настоящего времени актуальна задача описания общих закономерностей построения локальных классов Фиттинга с указанными свойствами, без применения класса Бергера-Косси* [8].

Вопросы изучения классов групп посредством свойств прямых произведений радикалов и корадикалов групп тесно переплетается с задачей изучения свойств самих групп и канонических подгрупп. В этом направлении ряд содержательных результатов в классе $\mathfrak{S}$ всех конечных разрешимых групп был посвящен описанию структуры холловых подгрупп, а также конструированию классов Фиттинга, определяемых свойствами холловых подгрупп.

Как оказалось, особый интерес при этом представляет задача описания классов Фиттинга, замкнутых относительно холловых подгрупп. Это обусловлено, прежде всего, известным результатом Брайса и Косси [12] о том, что наименьший нормальный класс Фиттинга $\mathfrak{S}_*$ замкнут относительно холловых подгрупп. В последующем в теории разрешимых классов Фиттинга серия результатов Кусака [13], Бризона [10] была посвящена описанию холловски замкнутых классов в терминах операторов Локетта и решеточных объединений. Заметим, что основной для таких исследований явилась известная теорема Холла о существовании и сопряженности холловых подгрупп в классе $\mathfrak{S}$ всех конечных разрешимых групп. Более того, сама теория нормальных классов Фиттинга ограничивалась лишь рамками универсума $\mathfrak{S}$. Вместе с тем, известная теорема С.А. Чунихина [6] о существовании и сопряженности холловых π-подгрупп в любой π-разрешимой группе с необходимостью приводит к задаче *описания радикалов холловых π-подгрупп и холловски замкнутых классов Фиттинга в классе $\mathfrak{S}^{\pi}$ всех конечных π-разрешимых групп.*

Задачи описания структуры классов Фиттинга и канонических подгрупп посредством свойств прямых произведений радикалов групп естественным образом приводят к дуальной задаче в теории формаций – задаче изучения структурных свойств формаций и формационных подгрупп посредством прямых произведений корадикалов групп. Основополагающей в этом направлении исследований является работа Дерка и Хоукса [15], в которой определены формационные операторы «*» и «$_{0}$», двойственные операторам

Локетта. Напомним, что каждой непустой формации $\mathfrak{F}$ посредством оператора «^{0}» сопоставляется класс $\mathfrak{F}^0$, который определяется как наименьшая из всех формаций, содержащих $\mathfrak{F}$ такая, что для всех конечных групп G и H справедливо равенство $(G\times H)^{\mathfrak{F}^0}=G^{\mathfrak{F}^0}\times H^{\mathfrak{F}^0}$, и посредством оператора «$_0$» – класс $\mathfrak{F}_0$ как пересечение всех таких формаций $\mathfrak{X}$, для которых $\mathfrak{X}^0=\mathfrak{F}^0$

Однако до сих пор известны лишь некоторые отдельные результаты, связанные с исследованием свойств операторов «^{0}» и «$_0$». Этому были посвящены работы Дерка, Хоукса [15], Торреса [21]. В то же время весьма актуальна задача *нахождения формаций, удовлетворяющих гипотезе о структуре формаций, дуальной гипотезе Локетта, и изучения алгебры таких формаций.*

Таким образом, задача изучения структуры классов Фиттинга и формаций посредством заданных свойств радикалов и корадикалов, определяемая указанной выше проблематикой, весьма актуальна. Решению ее и посвящена данная диссертация.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь с крупными научными программами и темами

Диссертация выполнена в рамках следующих госбюджетных тем:

– гранта Министерства образования Республики Беларусь на 2008 г. «Классы Фиттинга и формации с заданными свойствами радикалов и корадикалов»;

– составной части задания «Приложение теории радикалов классов Фиттинга к исследованию конечных групп», входящего в Государственную программу Фундаментальных исследований Республики Беларусь «Исследование математических моделей и их применение к анализу систем, структур и процессов в природе и обществе» (шифр «Математические модели 04»).

Тема входит в план важнейших научно-исследовательских работ в области естественных, технических и общественных наук по Республике Беларусь, утвержденный решением Президиума НАН Беларуси № 907 от 12 мая 2006 г. (номер госрегистрации в БелИСА – 20062003), выполнение темы запланировано на 2006-2010 г.

Цель и задачи исследования

Целью диссертации является описание структуры классов Фиттинга и формаций посредством свойств прямых произведений радикалов и корадикалов групп. Для достижения этой цели в диссертации необходимо было решить следующие взаимосвязанные задачи:

– разработать методы построения классов Фиттинга посредством заданных свойств радикалов и на их основе подтвердить гипотезу Локетта о структуре классов для новых семейств нелокальных классов Фиттинга;

– описать общие способы построения нелокальных классов Фиттинга, произведение которых локально;

– классифицировать классы Фиттинга и их произведения, насыщенные холловыми подгруппами;

– описать структуру формаций с заданными свойствами прямых произведений корадикалов.

Объектом исследования являются классы Фиттинга и формации конечных разрешимых групп.

Предмет исследования – структурные свойства классов Фиттинга и формаций.

Положения выносимые на защиту

1. Метод построения классов Фиттинга, удовлетворяющих обобщенной гипотезе Локетта, посредством свойства частичной наследственности и пар классов Фиттинга. Подтверждение гипотезы Локетта для новых семейств нелокальных классов Фиттинга, теоремы 2.1.9 и 2.1.11 [2-А, 3-А].

2. Метод конструирования нелокальных классов Фиттинга, произведение которых локально теорема 2.4.8 [1-А].

3. Описание структуры радикалов холловых π-подгрупп π-разрешимой группы и классификация холловски замкнутых классов Фиттинга, теоремы 3.1.5 и 3.1.7 [6-А].

4. Описание структуры алгебры формаций, определяемых свойствами прямых произведений корадикалов. Нахождение семейств формаций, удовлетворяющих гипотезе Локетта для формаций, теоремы 4.1.6 и 4.2.3 [5-А].

Все результаты являются новыми, впервые получены автором.

Личный вклад соискателя

Все основные результаты диссертации получены автором самостоятельно. В опубликованных совместно с научным руководителем работах

[1-А, 3-А, 8-А, 11-А, 13-А, 16-А, 21-А, 22-А] идеи и методы принадлежат научному руководителю, а реализация соискателю. Остальные работы выполнены самостоятельно и опубликованы без соавторов.

Апробация результатов диссертации

Основные результаты диссертации были апробированы на следующих семинарах и конференциях:

– на семинарах кафедры алгебры и методики преподавания математики Витебского государственного университета им. П.М. Машерова;

– на семинаре кафедры алгебры и геометрии Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины;

– на Международной алгебраической конференции «Классы групп и алгебр», посвященной 100-летию со дня рождения С.А. Чунихина (Гомель, 5–8 октября 2005 г.);

– на Региональной научной конференции студентов, магистрантов, аспирантов и молодых ученых «I Машеровские чтения» (Витебск, 5 мая 2005 г.);

– на IX (54) научно-практической конференции студентов, магистрантов и молодых ученых «Творчество молодых – будущее Родины» (Витебск, 6 апреля 2006 г.);

– на Региональной научно-практической конференции студентов, магистрантов и аспирантов «II Машеровские чтения» (Витебск, 24–25 апреля 2007 г.);

– на Республиканской научно-практической конференции студентов, магистрантов, аспирантов и молодых ученых «III Машеровские чтения» (Витебск, 24–25 марта 2009 г.);

– на X Республиканской научно-методической конференции молодых ученых (Брест, 15–16 мая 2008 г.);

– на Международной алгебраической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Д.К. Фаддеева (Санкт-Петербург, 17–23 сентября 2007 г.);

– на Международной алгебраической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения А.Г. Куроша (Москва, 28 мая-3 июня 2008 г.);

– на Международной конференции IV Колмогоровские чтения (Ярославль, 19-22 мая 2008);

– на Международной алгебраической конференции «Классы групп, алгебр и их приложения», посвященной 70-летию со дня рождения Л.А. Шеметкова (Гомель, 9-11 июля 2007 г.).

– на Международной конференции «X Белорусская математическая конференция» (Минск, 3–7 ноября 2008 г.);

Опубликованность результатов диссертации

Основные результаты диссертации опубликованы в 7 статьях в научных журналах, 1 статья в сборнике научных трудов, в 5 статьях в материалах конференций и в 9 тезисах докладов. Общий объем опубликованных материалов – 3,36 авторских листа, в том числе: статьи в научных журналах и сборниках научных трудов – 2,32 авторских листа, тезисы и материалы докладов конференций – 1,02 авторских листа. Общее количество страниц опубликованных материалов – 74.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из перечня условных обозначений, введения, общей характеристики работы, четырех глав основной части, заключения и библиографического списка в алфавитном порядке в количестве 61 наименования.

Объем диссертации 76 страница.

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю – доктору физико-математических наук, профессору Николаю Тимофеевичу Воробьеву за внимание, оказанное им при написании данной диссертации.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В диссертационной работе все рассматриваемые группы предполагаются конечными разрешимыми, если не оговорено противное. Терминология и обозначения заимствованы из [7,14].

Диссертация состоит из перечня условных обозначений, введения, общей характеристики работы, четырех глав основной части, заключения и библиографического списка.

Глава 1 «Предварительные сведения» содержит аналитический обзор литературы по теме диссертации. В данной главе приводятся основные этапы развития теории классов групп с заданными свойствами радикалов и корадикалов, дается описание объектов исследования диссертационной работы и используемых при проведении исследования методов, формулируются нерешенные вопросы и задачи, связанные с описанием структуры и свойств формаций и классов Фиттинга посредством корадикалов и радикалов.

Напомним, что непустой класс групп $\mathfrak{F}$ называют формацией, если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно гомоморфных образов и для любой группы G существует наименьшая нормальная подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ такая, что факторгруппа $G/G_{\mathfrak{F}}\in\mathfrak{F}$. Если же $\mathfrak{F}$ нормально наследственный класс такой, что для любой группы G существует наибольшая нормальная подгруппа $G_{\mathfrak{F}}$, принадлежащая $\mathfrak{F}$ то $\mathfrak{F}$ называют классом Фиттинга [14]. Подгруппы $G^{\mathfrak{F}}$ и $G_{\mathfrak{F}}$ называют $\mathfrak{F}$-корадикалом и $\mathfrak{F}$-радикалом соответственно.

Основное содержание диссертации представлено в главах 2-4. Глава 2 «Радикалы и структура классов Фиттинга» включает 5 разделов. В первом разделе главы 2 получено описание метода построения нелокальных классов Фиттинга, удовлетворяющих гипотезе Локетта.

Расширим понятие класса Фишера следующим образом. Пусть Λ такое непустое множество, что выполняются следующие условия: $\mathbb{P}=\cup_{\lambda\in\Lambda}\pi(\lambda)$; $\pi(\lambda)\neq\varnothing$ для всех $\lambda\in\Lambda$; $\pi(\lambda)\cap\pi(\mu)=\varnothing$ для $\lambda\neq\mu$ и $\lambda,\mu\in\Lambda$.

Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ назовем Λ-классом Фишера, если из того, что $G\in\mathfrak{F}$ для любой подгруппы H группы G, содержащей нормальную подгруппу K группы G такую, что H/K является $\pi(\lambda)$-группой для некоторого $\lambda\in\Lambda$, всегда следует, что $H\in\mathfrak{F}$.

Пусть π – некоторое непустое множество простых чисел. Подгруппу T группы G назовем π-HR-подгруппой, если она является произведением холловой π-подгруппы и $\mathfrak{X}$-радикала группы G для некоторого непустого класса Фиттинга $\mathfrak{X}$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ назовем π-HR-наследственным, если он замкнут относительно π-HR-подгрупп. Если $\mathfrak{F}$ является π-HR-наследственным для любого непустого множества π, то $\mathfrak{F}$ назовем HR-наследственным.

Следуя Брайсу и Косси [12], мы будем рассматривать понятие пары Локетта. Пусть $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга. Пару $(\mathfrak{F},\mathfrak{H})$ назовем парой Локетта, если $(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})_*=\mathfrak{F}_*\cap\mathfrak{H}_*$. Заметим, что если $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{H}$ и $(\mathfrak{F},\mathfrak{H})$ является парой Локетта, то класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ удовлетворяет обобщенной гипотезе Локетта (гипотезе Локетта в $\mathfrak{H}$), которая была сформулирована Дерком и Хоуксом и в, частности, если $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{S}$, и $(\mathfrak{F},\mathfrak{S})$ – Локетта пара, то $\mathfrak{F}$ удовлетворяет гипотезе Локетта.

Для описания Локетта пар ключевым моментом является

2.1.11 Теорема [2-А, 3-А]. *Пусть $\mathfrak{F}$,$\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга. Тогда пара $(\mathfrak{F},\mathfrak{H})$ является парой Локетта в каждом из следующих случаев:*

1) если $\mathfrak{H}$ – Λ-класс Фишера и для всех $\lambda\in\Lambda$ таких, что $\pi(\lambda)\subseteq\mathrm{Char}(\mathfrak{F})$ имеет место включение $\mathfrak{X}\mathfrak{S}_{\pi(\lambda)}\subseteq\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{X}\mathfrak{S}_{\pi(\lambda)}\mathfrak{S}_{\pi(\lambda)'}$, где $\mathfrak{X}$ – некоторый класс Фиттинга;

2) если $\mathfrak{H}$ – π-HR-наследственный класс Фиттинга и для всех $\pi\subseteq\mathrm{Char}(\mathfrak{F})$ имеет место включение $\mathfrak{X}\mathfrak{S}_{\pi}\subseteq\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{X}\mathfrak{S}_{\pi}\mathfrak{S}_{\pi'}$, где $\mathfrak{X}$ – некоторый класс Фиттинга.

Заметим, что при $\Lambda=\mathbb{P}$, $\pi(\lambda)=\{p\}$ для всех $\lambda\in\Lambda$ и $p\in\mathbb{P}$ из основного результата следуют все полученные ранее результаты, подтверждающие гипотезу Локетта для семейств локальных и частично локальных классов Фиттинга, описанные в работах Брайса и Косси [12], Бризона [11], Н.Т. Воробьева [3], Галледжи [16], Е.Н. Залесской [4]).

В разделе 2.2 доказываются свойства решеточных объединений необходимые в дальнейшем.

Изучению классов Фиттинга с условием Локетта посвящен третий раздел главы 2. В данном разделе посредством свойств решеточных объединений определяются достаточные условия, при которых непустой класс Фиттинга является классом с условием Локетта. Пусть $\varnothing\neq\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{X}$ – классы Фиттинга. Тогда $\mathfrak{F}$ назовем классом Фиттинга с условием Локетта в $\mathfrak{X}$, если $\mathfrak{F}_*=\mathfrak{F}\cap\mathfrak{X}_*$. Очевидно, что если $\mathfrak{F}$ – класс Локетта, то $\mathfrak{F}$ является классом с условием Локетта в $\mathfrak{X}$ в точности тогда, когда $\mathfrak{F}$ удовлетворяет гипотезе Локетта в $\mathfrak{X}$. В частности, если $\mathfrak{X}=\mathfrak{S}$ – классу всех конечных разрешимых групп, то класс Локетта $\mathfrak{F}$ является классом с условием Локетта в $\mathfrak{S}$ тогда и только тогда, когда для $\mathfrak{F}$ справедлива указанная выше гипотеза Локетта.

Пусть σ – непустое множество простых чисел и Λ – такое непустое множество, что выполняются следующие условия: $\sigma=\cup_{\lambda\in\Lambda}\pi(\lambda)$; $\pi(\lambda)\neq\varnothing$ для всех $\lambda\in\Lambda$; $\pi(\lambda)\cap\pi(\mu)=\varnothing$ для $\lambda\neq\mu$ и $\lambda,\mu\in\Lambda$. Посредством операции «$\vee$» определим следующее семейство классов Фиттинга. Пусть Λ – непустое множество с указанными свойствами и $\mathfrak{X}$ – класс Фиттинга. Тогда:

(а) $\mathfrak{X}$ назовем $\vee_\lambda$-классом, если существует класс Фиттинга $\mathfrak{Y}$ такой, что $(\mathfrak{X}_*\mathfrak{S}_{\pi'(\lambda)}\cap\mathfrak{X})\vee\mathfrak{Y}\mathfrak{S}_{\pi(\lambda)}=\mathfrak{X}$ для некоторого $\lambda\in\Lambda$;

(б) $\mathfrak{X}$ назовем $\vee_\Lambda$-классом, если $\mathfrak{X}$ является $\vee_\lambda$-классом для всех $\lambda\in\Lambda$ и $\sigma=\mathrm{Char}(\mathfrak{X})$.

2.3.6 Теорема [8-А]. *Каждый $\vee_\Lambda$-класс Фиттинга $\mathfrak{F}$, содержащийся в классе Фиттинга $\mathfrak{H}$, является классом Фиттинга с условием Локетта в классе Фиттинга $\mathfrak{H}$.*

Из данной теоремы следует существование нового семейства классов Фиттинга, удовлетворяющих гипотезе Локетта, содержащего все частично локальные классы Фиттинга заданной характеристики и, в частности, все локальные классы Фиттинга.

В разделе 2.4 определены общие методы построения локальных произведений разрешимых классов Фиттинга посредством нелокальных множителей, которые определяются при помощи наименьших элементов секции Локетта.

Произведением классов Фиттинга [14] $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называют класс всех тех групп G, факторгруппы по $\mathfrak{F}$-радикалу которых являются $\mathfrak{H}$-подгруппами.

Хорошо известно, что произведение двух классов Фиттинга снова является классом Фиттинга и операция умножения классов Фиттинга ассоциативна (см. например, (IX.1.12, [14]).

Напомним, что отображение f: P→{классы Фиттинга} называют функцией Хартли или H-функцией [2]. Пусть $LR(f)=\mathfrak{S}_\pi\cap(\cap_{p\in\pi}f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'})$. Тогда класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют локальным [2], если $\mathfrak{F}=LR(f)$ для некоторой H-функции f. При этом $\pi=Supp(f)$ носитель H-функции f и $\pi=\{p\in P: f(p)\neq\varnothing\}$.

Для построения локальных произведений (отличных от $\mathfrak{S}$) нелокальных ненормальных классов Фиттинга, которые не являются формациями, мы будем, в частности, использовать класс Фиттинга $\mathfrak{B}$, определенный Бергером и Косси в работе [9].

Напомним, что построение класса $\mathfrak{B}$ редуцируется к нахождению некоторой группы X, одновременно содержащейся в классах $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{S}_*$, но не принадлежащей классу $\mathfrak{B}_*$. Для этой цели используется описание представлений экстраспециальных p-групп над произвольным полем характеристики ≠p. Пусть теперь p=3 и R экстраспециальная группа порядка 27 экспоненты 3. Тогда R имеет точный абсолютно неприводимый модуль W размерности 3 над полем GF(7) (существование такого модуля см. в 2.2 [8]). Пусть Y=[W]R. Обозначим через A группу автоморфизмов группы R. Пусть $B=C_A(Z(R))$, Q - подгруппа кватернионов группы B и X=Z(Q)Y.

Тогда через $\mathfrak{M}$ обозначим класс

$$\mathfrak{M}=(G \mid O^2(G/O_{\{2,3\}}(G))\in S_nD_o(X)),$$

где $D_o(X)$ - класс всех конечных прямых произведений изоморфных копий группы X. Обозначим через $\mathfrak{B}=\mathfrak{M}\cap\mathfrak{S}_7\mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_2$. Как установлено в теореме 4.5 [8], класс $\mathfrak{B}$ является классом Локетта и не является классом Фишера.

2.4.8 Теорема [1-А]. *Пусть $\varnothing\neq\sigma\subset P$ и $|\sigma'|>2$. Если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}=(\mathfrak{S}_{\sigma'})_*\mathfrak{S}_\sigma$ классы Фиттинга, то произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ локально, а каждый из множителей $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ нелокален, определяется полулокально и не является формацией для каждого из следующих значений $\mathfrak{F}$:*

1) $\mathfrak{F}=(\mathfrak{S}_\sigma)_*\mathfrak{S}_{\sigma'}$ для $|\sigma|\geq 2$;

2) $\mathfrak{F}=R_\sigma(\mathfrak{B}_*)$ для $\sigma\supset\pi(X)$.

В утверждении 1) данной теореме в отличие от [1] мы не используем громоздкую конструкцию класса Фиттинга $\mathfrak{B}$, который был определен Бергером и Косси [12]. Кроме того, применяя класс $\mathfrak{B}$, мы упрощаем, в сравнение с [1], процедуру построения нелокального множителя в локальном произведении. Установлено, что при построении локального произведения, отличного от произведения примера [1], нелокальным множителем для подходящего множества простых π является класс Фиттинга вида $\mathfrak{B}_*\mathfrak{S}_\pi$, где $\mathfrak{B}_*$

наименьший элемент секции Локетта класса $\mathfrak{B}$. Заметим также, что в дополнение [1], нами показано, что каждый из множителей локального произведения определяется полулокально.

Особый интерес для исследования структуры классов представляют классы Фиттинга, замкнутые относительно холловых подгрупп, и их описание. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют замкнутым относительно холловых π-подгрупп, если для любой группы $G\in\mathfrak{F}$ ее холлова π-подгруппа также принадлежит $\mathfrak{F}$.

Глава 3 «Холловски замкнутые классы Фиттинга» представляет исследование классов Фиттинга, а также их произведений, замкнутых относительно холловых подгрупп в классе $\mathfrak{S}^{\pi}$ всех π-разрешимых групп

Раздел 3.1 посвящен описанию радикалов холловых π-подгрупп и классов Фиттинга, замкнутых относительно холловых подгрупп. Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга. Тогда через $K_{\pi}(\mathfrak{F})$ мы будем обозначать класс групп $(G\in\mathfrak{S}^{\pi} : \mathrm{Hall}_{\pi}(G)\subseteq\mathfrak{F})$. Самостоятельный интерес для доказательства основного результата главы представляет следующая

3.1.5 Теорема [6-А]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– непустой класс Фиттинга и* $H\in\mathrm{Hall}_{\pi}(G)$. *Тогда* $G_{K_{\pi}(\mathfrak{F})}\cap H=H_{\mathfrak{F}}$.

Основной результат данной главы критерий холловской замкнутости, который представляет

3.1.7 Теорема [6-А]. *Пусть* π *– множество простых чисел. Класс Фиттинга* $\mathfrak{F}$ *замкнут относительно холловых* π*-подгрупп в точности тогда, когда* $\mathfrak{F}=(\mathfrak{S}_{\pi}\cap\mathfrak{F})\vee(K_{\pi}(\mathfrak{F}_{*})\cap\mathfrak{F})$.

В разделе 3.2 изучаются произведения классов Фиттинга, замкнутые относительно холловых подгрупп и получен критерий холловской замкнутости произведения классов Фиттинга.

В главе 4 «Формации с заданными свойствами корадикалов» исследуются формации с заданными свойствами корадикалов. Отметим, что в отдельных случаях класс Фиттинга полезно использовать как объект дуальный формации. Это подтверждает тот факт, что Дерком и Хоуксом [15] была предложена задача изучения формационных операторов «^{0}» и «$_0$», двойственных операторам Локетта. Напомним, что каждой непустой формации $\mathfrak{F}$ посредством оператора «^{0}» сопоставляется класс $\mathfrak{F}^0$, который определяется как наименьшая из всех формаций, содержащих $\mathfrak{F}$ такая, что для всех групп G и H справедливо равенство $(G\times H)^{\mathfrak{F}^0}=G^{\mathfrak{F}}\times H^{\mathfrak{F}}$, и посредством оператора «$_0$» - класс $\mathfrak{F}_0$ как пересечение всех таких формаций $\mathfrak{X}$, для которых $\mathfrak{X}^0=\mathfrak{F}^0$. Формацию $\mathfrak{F}$ назовем формацией Дерка-Хоукса или просто DH-формацией, если $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}^0$. Примечателен тот факт, что ввиду результатов Дерка и Хоукса [15] каждая непустая разрешимая формация является DH-формацией.

До сих пор были известны лишь некоторые результаты, связанные с исследованием свойств операторов «^{0}» и «$_0$». Этому были посвящены работы Дерка и Хоукса [15], Торреса [21].

В первом разделе главы 4 изучаются свойства формационных операторов «^{0}» и «$_0$» необходимые в дальнейшем. В частности, доказано (теорема 4.1.2), что произведение двух любых DH-формаций является DH-формацией.

В связи с известной в теории классов Фиттинга гипотезой Локетта [19] о структуре классов Фиттинга в теории формаций естественной является формулировка следующей гипотезы.

Дуальная гипотеза Локетта. *Верно ли, что каждая формация* $\mathfrak{F}$ *удовлетворяет равенству* $\mathfrak{F}_0=\mathfrak{F}^0\cap\mathfrak{E}_0$, *где* $\mathfrak{E}$ — *класс всех конечных групп?*

Первоочередной для исследований в этом направлении является задача нахождения формаций, удовлетворяющих дуальной гипотезе Локетта. Реализации данной задачи и посвящен основной результат главы 4.

4.2.3 Теорема [5-А]. *Пусть формации* $\mathfrak{F}=LF(f)$ *и* $\mathfrak{X}$ *таковы, что* $\mathfrak{X}$ *f-проекторно замкнутая, а* $\mathfrak{E}_{p'}(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{X})_0$ *является DH-формацией для всех* $p\in\pi(\mathfrak{F})$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $\mathfrak{F}\cap\mathfrak{X}_0=(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{X})_0$;

2) если $\mathfrak{F}$ *является подформацией* $\mathfrak{X}$, *то формация* $\mathfrak{F}$ *удовлетворяет дуальной гипотезе Локетта в* $\mathfrak{X}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертационной работы

В диссертации посредством свойств прямых произведений радикалов и корадикалов групп описана структура классов Фиттинга и формаций. Основные результаты диссертации следующие.

Выявлены общие закономерности построения классов Фиттинга, в общем случае нелокальных, удовлетворяющих гипотезе Локетта. С помощью пар классов Фиттинга доказано, что структура ω-локального класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ с $\mathrm{Char}(\mathfrak{F})\subseteq\omega$ определяется пересечением класса Локетта и некоторого обобщенно наследственного класса Фиттинга (теоремы 2.1.9 и 2.1.11 [2-А,3-А]).

Найдены новые семейства классов Фиттинга, удовлетворяющих гипотезе Локетта, содержащие все частично локальные классы Фиттинга заданной характеристики и, в частности, все локальные классы Фиттинга.

Определены общие методы построения локальных произведений классов Фиттинга с нелокальными множителями, которые определяются полулокально при помощи наименьших элементов секции Локетта и не являются формациями (теорема 2.4.8 [1-А]).

В терминах классов Фиттинга описан радикал холловой подгруппы π-разрешимой группы (теорема 3.1.5 [6-А]), классифицированы холловски замкнутые π-разрешимые классы Фиттинга. Установлено, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ замкнут относительно холловых π-подгрупп в точности тогда, когда его можно представить в виде решеточного объединения класса всех π-групп из $\mathfrak{F}$ и класса всех групп из $\mathfrak{F}$, холловы π-подгруппы которых содержатся в наименьшем элементе секции Локетта класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ (теорема 3.1.7 [6-А]).

Описаны новые локальные задания формаций, определяемые посредством определяемых операторов Дерка-Хоукса. Доказано, что любая локальная формация определяется полулокально DH-спутниками (теорема 4.1.6 [5-А]).

Определены достаточные условия, при которых локальная формация удовлетворяет гипотезе, дуальной гипотезе Локетта (теорема 4.2.3 [5-А]).

Рекомендации по практическому использованию результатов

Полученные результаты могут найти применение при исследовании структуры и описании классов групп посредством заданных свойств радикалов и корадикалов, а также в вопросах классификации классов Фиттинга и формаций, удовлетворяющих гипотезе Локетта о структуре классов.

Решенные в диссертации задачи позволяют выделить новые семейства нелокальных классов Фиттинга и формаций, определяемых решеточными свойствами секций Локетта, а разработанные методы могут быть использованы в решении открытых вопросов общей теории классов конечных групп, связанных с изучением строения классов посредством их радикальных и корадикальных свойств.

Результаты диссертации могут быть использованы в университетах республики при чтении спецкурсов по теории групп для студентов математических специальностей, написании курсовых и дипломных работ, магистерских и кандидатских диссертаций.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Список использованной литературы

1. Воробьев, Н.Т. Локальные произведения нелокальных классов Фиттинга / Н.Т. Воробьев, А.Н. Скиба // Сб. Вопросы алгебры. – 1995. – N 8. – С. 55-58.

2. Воробьев, Н.Т. О предположении Хоукса для радикальных классов / Н.Т. Воробьев // Сиб. матем. журнал. – 1996. – Т. 37, N 5. – С. 1296-1302.

3. Воробьев, Н.Т. О радикальных классах конечных групп с условием Локетта / Н.Т. Воробьев // Матем. заметки. – 1988. – Т.43, N 2. – С. 161-167.

4. Залесская Е.Н. Классы Фиттинга с заданными свойствами функций Хартли: дис. ... канд. физ.-мат. наук. 01.01.06 / Е.Н. Залесская. – Витебск, 2004. – 85 л.

5. Коуровская тетрадь (нерешенные вопросы теории групп) // Институт математики РАН. – 1992. – 172с.

6. Чунихин, С.А. Подгруппы конечных подгрупп / С.А Чунихин. – Минск: Наука и техника, 1964. – 168 с.

7. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А.Шеметков. – Москва: Наука, 1978. – 272 с.

8. Berger, T. An example in theory of normal Fitting classes / T. Berger, J. Cossey // Math. Z. – 1977. – Band 154. – S. 287-293.

9. Biedleman, J. Über Fittingklassen und die Lockett-Vermutung / J. Biedleman, P. Hauck // Math. Z. – 1979. – Bd. 167, N 2. – S. 161-167.

10. Brison, O. A criterion for the Hall-closure of Fitting classes / O. Brison // Bull. Austr. Math. Soc. – 1981. – V. 3. – P. 361-365.

11. Brison. O. Hall operators for Fitting classes / O. Brison // Arch. Math. – 1979. – Bd. 33. – S. 1-9.

12. Bryce, R. A problem in theory of normal Fitting classes / R. Bryce, J. Cossey // Math. Z. – 1975. – Band 141, N 2. – S. 99-110.

13. Cusack, E. Normal Fitting classes and Hall subgroups / E. Cusack // Bull. Austral. Math. Soc. – 1980. – V. 21, N 2. – P. 229-236.

14. Doerk, K. Finite soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New-York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

15. Doerk, K. On the residual of a direct product / K. Doerk, T. Hawkes // Arch. Math. – 1978. – Bd. 30, N 5. – S. 458-468.

16. Gallego, M. Fitting pairs from direct limits and the Lockett conjecture / M. Gallego // Comm. Algebra. – 1996. – V. 24(6). – P. 2011-2023.

17. Gaschütz, W. Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen / W. Gaschütz // Math. Z. – 1963. – Bd. 80, N 4. – S. 300-305

18. Fischer, B. Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen / B. Fisher, W. Gaschütz, B. Hartley // Math. Z. – 1967. – Bd. 102, N 5. – S. 337-339.

19. Lockett, P. Fitting class $\mathfrak{F}^*$ / P. Lockett // Math.Z. – 1974. – Bd.137, N 2.– S.131-136.

20. Torres, I.M. Residual of direct products and relative normality in formations / I.M. Torres // Comm. Algebra. – 1985. – Vol 13, N 2. – P. 375-386.

Список публикаций соискателя

Статьи в научных журналах

1-А. Шпаков, В.В. Локальные факторизации нелокальных классов Фиттинга // В.В. Шпаков, Н.Т. Воробьев // Дискретная математика. – 2008. – Т.20, вып. 3. – С. 111-118.

2-А. Шпаков, В.В. О гипотезе Локетта для обобщенно наследственных классов Фиттинга / В.В. Шпаков // Весн. Віцебскага дзярж. ун-та. – 2009. – N 1 (51). – С.113-120.

3-А. Шпаков, В.В. О гипотезе Локетта для пар классов Фиттинга / В.В. Шпаков, Н.Т. Воробьев // Изв. Гомельского гос. ун-та имени Ф. Скорины. – 2008. – N 2(47). – С. 195-203.

4-А. Шпаков, В.В. О факторизациях классов Фиттинга / В.В. Шпаков, Н.Т. Воробьев // Весн. Віцебскага дзярж. ун-та. – 2005. – N 2 (36). – С.106-109.

5-А. Шпаков, В.В. Формации с заданными свойствами прямых произведений корадикалов / В.В. Шпаков // Весн. Полацкага дзярж. ун-та. – 2008. – N 3 Серия С. – С. 37-43.

6-А. Шпаков, В.В. Холловски замкнутые классы Фиттинга / В.В. Шпаков // Весн. Магілеускага дзярж. ун-та імя А.С. Куляшова. – 2009. N 2-3 (33). – С. 187-195

7-А. Шпаков, В.В. О гипотезе Локетта для пар классов Фиттинга / В.В. Шпаков // Весн. Брэсцкага дзярж. ун-та. – 2009. – N 1 (32). – С. 56-61.

Статьи в сборниках научных работ

8-А. Шпаков, В.В. О классах Фиттинга с условием Локетта / В.В. Шпаков, Н.Т. Воробьев // Труды VI Колмогоровских чтений. – 2008. – С. 195-201.

9-А. Шпаков, В.В. О классах Фиттинга определяемых вложением подгрупп Холла / В.В. Шпаков // II Машеровские чтения: материалы Региональной научной конференции студентов, магистрантов, аспирантов и молодых ученых, Витебск, 24-25 апреля 2007 г. / Витебский государственный университет имени П.М.Машерова; редкол.: Г.И.Михасев [и др.]. – Витебск, 2007. – Т.1. – С.147-148.

10-А. Шпаков. В.В. Локальные произведения формаций / В.В. Шпаков // I Машеровские чтения: материалы Региональной научной конференции студентов, магистрантов, аспирантов и молодых ученых, Витебск, 5 мая 2005 г. / Витебский государственный университет имени П.М.Машерова; редкол.: Г.И.Михасев [и др.]. – Витебск, 2005. – Т.1. – С.165-168.

11-А. Шпаков. В.В. О гипотезе Локетта в теории классов Фиттинга / В.В. Шпаков, Н.Т. Воробьев // Международная научная конференция "X Белорусская математическая конференция", Минск, 3-7 ноября 2008 г.: тез. докл. / Институт математики НАН Беларуси; редкол.: Красовский С.Г., Лепин А.А. – Минск, 2008. – С. 17-18.

12-А. Шпаков, В.В. О гипотезе Локетта для обобщенно наследственных классов Фиттинга / В.В. Шпаков // X Республиканская научно-методическая конференция молодых ученых, Брест, 15-16 мая 2008 г.: тез. докл. / Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина; редкол.: И.В. Абрамова [и др.]. – Брест, 2008. – С. 40.

13-А. Шпаков, В.В. О гипотезе Локетта для пар классов Фиттинга / В.В. Шпаков, Н.Т. Воробьев // Международная алгебраическая конференция, посвященная 100-летию со дня рождения А.Г. Куроша, Москва, 28 мая-3 июня 2008 г.: тез. докл. / Московский гос. ун-т им. М.В. Ломоносова ; редкол.: Э.Б. Винберг [и др.]. – Москва, 2008. – С. 260-261.

14-А. Шпаков, В.В. О свойствах радикалов и холловых подгрупп / В.В. Шпаков // X (55) Региональная научно-практическая конференция преподавателей, научных сотрудников, аспирантов и студентов университета : сборник статей / Витебский гос. ун-т им. П.М. Машерова; редкол.: А.Л. Гладков [и др.]. – Витебск, 2008. – С. 24-26.

15-А. Шпаков, В.В. О факторизации классов Фиттинга / В.В. Шпаков // Классы групп и алгебр: материалы Международной алгебраической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения С.А.Чунихина, Гомель, 5-7 октября 2005 г. / Гомельский государственный университет имени Ф.Скорины; ред-кол.: Л.А.Шеметков [и др.]. – Гомель, 2005. – С.111-112.

16-А. Шпаков, В.В. Произведение классов Фиттинга с нормальными инъекторами / В.В. Шпаков, Н.Т. Воробьев // НИРС 2005: сборник научных

работ студентов высших учебных заведений Республики Беларусь / РУМЦ ФВН; редкол.: А.И.Жук [и др.]. – Минск, 2006. – С.30-31

17-А. Шпаков, В.В. Произведение классов Фиттинга с нормальными инъекторами / В.В. Шпаков // Творчество молодых – будущие родины: материалы IX (54) научно-практической конференции студентов, магистрантов и молодых ученых, Витебск, 6 апреля 2006 г. / Витебский государственный университет имени П.М.Машерова; редкол.: Г.И. Михасев [и др.]. – Витебск, 2006. – С.96-99.

18-А. Шпаков, В.В. Холловски замкнутые произведения классов Фиттинга / В.В. Шпаков // III Машеровские чтения: материалы Региональной научной конференции студентов, магистрантов, аспирантов и молодых ученых, Витебск, 24-25 марта 2009 г. / Витебский государственный университет имени П.М.Машерова; редкол.: А.П. Гладков [и др.]. – Витебск, 2009. – Т.1. – С.25-26.

19-А. Шпаков, В.В. Функции Хартли, определяемые операторами Локетта / В.В.Шпаков // Инновация - 2004 материалы XI Республиканской студенческой научно-практической конференции, Мозырь, 15 сентября 2004 г. / Мозырьский государственный университе; редкол.: К.О. Клецко [и др.]. – Мозырь, 2004. – Ч.1. – С. 85-86.

20-А. Шпаков, В.В. Функции Хартли и операторы Локетта / В.В. Шпаков // Итоги НИРС 2003: материалы VIII (53) научной конференции студентов, магистрантов и аспирантов, Витебск, 14 апреля 2004 г. / Витебский государственный университет имени П.М.Машерова; редкол.: Г.И.Михасев [и др.]. – Витебск - 2004. – С. 233-235.

21-А. Shpakov, V.V. On the local factorization of nonlocal Fitting classes / V.V. Shpakov, N.T. Vorob'ev // Классы групп, алгебр и их приложения: материалы Международной алгебраической конференции, посвященной 70-летию со дня рождения Л.А.Шеметкова, Гомель, 9-11 июля 2007 г. / Гомельский государственный университет имени Ф.Скорины; редкол.: В.С.Монахов [и др.]. – Гомель, 2007. – С. 27-28.

22-А. Shpakov, V.V. On the formation with given characteristic of residual / V.V. Shpakov, N.T. Vorob'ev // материалы Международной алгебраической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Д.К.Фадеева, Санкт-Петербург , 24-29 сентября 2007 г. / Санкт-Петербургское отделение Математического института имени В.А.Стеклова РАН (ПОМИ РАН); редкол.: И.Б.Жуков [и др.]. – Санкт-Петербург, 2007. – С.159-160

Р Э З Ю М Э

Шпакаў Вячаслаў Уладзіміравіч
Класы Фіцінга і фармацыі з дадзенымі ўласцівасцямі радыкалаў і карадыкалаў

Ключавыя словы: канечная група, клас Фітынга, фармацыя, лакальны клас Фіцінга, лакальная фармацыя, радыкал, карадыкал, падгрупа Хола.

У дысертацыі даследуюцца класы Фіцінга і фармацыі з дадзенымі ўласцівасцямі радыкалаў і карадыкалаў. Распрацаваны новы метад пабудовы нелакальных класаў Фіцінга, здавальняючых гіпотэзе Локета. Апісаны метады пабудавання лакальных класаў Фіцінга, фактарызуемых нелакальнымі класамі Фіцінга. Атрыманы новы крытэрый замкнутасці адносна падгруп Хола для класаў Фіцінга, а таксама іх здабытку. Апісаны фармацыі, здавальняючыя гіпотэзе Локета.

Усе асноўныя вынікі дысертацыі з'яўляюцца новымі. Яны маюць тэарэтычны характар і могуць быць выкарастаны ў даследаваннях па тэорыі канечных груп і іх класаў, а таксама пры чытанні спецкурсаў ва універсітэтах.

РЕЗЮМЕ

Шпаков Вячеслав Владимирович
Классы Фиттинга и формации с заданными свойствами радикалов и корадикалов

Ключевые слова: конечная группа, класс Фиттинга, формация, локальный класс Фиттинга, локальная формация, радикал, корадикал, подгруппа Холла.

В диссертации исследуются классы Фиттинга и формации с заданными свойствами радикалов и корадикалов. Разработан новый метод построения нелокальных классов Фиттинга, удовлетворяющих гипотезе Локетта. Описаны методы построения локальных классов Фиттинга, факторизуемых нелокальными классами Фиттинга. Получен новый критерий замкнутости относительно подгрупп Холла для классов Фиттинга, а также их произведений. Описаны формации, удовлетворяющие гипотезе Локетта.

Все основные результаты диссертации являются новыми. Они имеют теоретический характер и могут быть использованы в исследованиях по теории конечных групп и их классов, а также при чтении спецкурсов в университетах.