УДК 512.542

ВЛИЯНИЕ КОЛИЧЕСТВА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ НА ВЕЛИЧИНУ ДИСКРИМИНАНТОВ И ПРОИЗВОДНЫХ В КОРНЕ

Н.И. Калоша*, А.В. Луневич*, О.В. Рыкова**

**Государственное научное учреждение «Институт математики Национальной академии наук Беларуси»*

***Учреждение образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»*

В настоящей работе получена оценка снизу для количества многочленов фиксированной степени и высоты с ограниченным дискриминантом и количеством действительных корней.

Цель исследования – установить связь между оценкой снизу для количества многочленов с малыми дискриминантами и количеством их действительных корней.

Материал и методы. *Материал – дискриминанты многочленов ограниченной степени и высоты. Использованы классические методы метрической теории диофантовых приближений.*

Результаты и их обсуждение. *Получена оценка снизу для количества многочленов, высота и степень которых не превосходят Q и n соответственно, при условии, что их дискриминанты не превосходят величину* $\gamma Q^{2n-2-2\nu}$*, а количество их действительных корней не превосходит m.*

Заключение. *В данной работе показано, как условие на количество действительных корней многочлена с ограниченным дискриминантом влияет на количество таких многочленов.*

Ключевые слова: *многочлен, высота многочлена, дискриминант, диофантовы приближения.*

THE RELATION BETWEEN THE QUANTITY OF ALGEBRAIC NUMBERS, THE DISCRIMINANTS AND THE DERIVATIVE AT A ROOT

N.I. Kalosha*, A.V. Lunevich*, O.V. Rykova**

**Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus*

***Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics*

The paper presents a new lower bound for the number of polynomials of fixed degree and height with limited discriminants and a set number of real roots.

The aim of the research is to establish a connection between a lower bound for the number of polynomials with limited discriminants and the number of their real roots.

Materia and methods. *The object of the study is the discriminants of polynomials of limited degree and height. Classical methods of metric theory of Diophantine approximation are used.*

Findings and their discussion. *A lower bound for the number of polynomials of height at most Q and degree n has been obtained under the conditions that their discriminants are bounded from above by* $\gamma Q^{2n-2-2\nu}$ *and the number of their real roots is at most m.*

Conclusion. *In the paper it is shown how a condition on the number of real roots influences the number of polynomials with limited discriminants.*

Key words: *polynomial, height of a polynomial, discriminant, Diophantine approximation.*

Пусть

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0 -$$

неприводимый многочлен с целыми коэффициентами степени n с корнями $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ и высотой $H=\max\limits_{0\le j\le}|a_j|$. Если $(a_0, a_1, \ldots a_n)=1$, то $P(x)$ является минимальным многочленом для всех своих корней. Для $Q \in \mathbb{N}$ определим класс таких многочленов

$$\mathcal{P}_n(x)=\{P(x)\in\mathbb{Z}[x], \deg P=n, H(P)\le Q\}, \quad a_n\ge c_1H.$$

Пусть α_1 – корень многочлена P, ближайший к x. В данной статье мы рассмотрим следующие характеристики многочлена $P(x)$, важные для теории диофантовых приближений:

- расстояние между ближайшими корнями $\rho(P)$, $\rho=\min\limits_{i\ne j}|\alpha_i-\alpha_j|$;
- величина производной в корне, ближайшем к x: $|P'(\alpha_1)|$;
- дискриминант $|D(P)|=a_n^{2n-2}\prod\limits_{1\le i<j\le n}(\alpha_i-\alpha_j)^2$.

Заметим, что если ведущий коэффициент многочлена $P(x)$ соизмерим с его высотой, т.е. $a_n>c_1(n)H$, то все корни ограничены по модулю константой: $|\alpha_j|\ll 1$ [1]. Здесь и далее $\ll$ – символ Виноградова и $c_1=c_1(n), c_2, \ldots$ – константы, зависящие от n и не зависящие от Q.

В серии работ [1–6] были получены оценки сверху для $\rho(P)$, а также снизу и сверху для $|P'(\alpha_1)|, |D(P)|$ [7–11].

Наилучшие известные оценки величины $\rho(P)$ получены в работе [5], где доказаны неравенства $\rho(P)<Q^{-\gamma}$ с последовательно возрастающими значениями $\gamma=\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2}$. Авторами работы [5] отмечено, что нахождение более точных оценок ($\gamma>\frac{1}{2}$) – открытая задача, по своей сложности сопоставимая с классическими проблемами диофантовых приближений.

Целый ряд доказательств в современной теории диофантовых приближений основан на оценках снизу для производной $|P'(\alpha_1)|$. Используя свойства дискриминанта $D(P)$, нетрудно доказать, что $|P'(\alpha_1)|>c_3Q^{-n+2}$ [7; 12]. В метрических задачах диофантовых приближений важно получить оценку сверху для количества многочленов $P(x)\in\mathcal{P}_n(Q)$ с условием $|P'(\ )\alpha_1|<Q^{1-v}$, $v>0$. Эта задача рассматривалась Давенпортом и Фолькманом и была применена ими при решении проблемы Малера [9; 13]. Оценка

$$\#\{P\in\mathcal{P}_n(Q):|P'(\alpha_1)|<Q^{1-v}, 0\le v\le 1\}\le Q^{n+1-v}$$

была доказана В. Спринджуком [7] и Р. Бейкером [14]; в работах [15; 16] эта оценка была усилена для $0\le v\le 1{,}5$.

Методы исследования величин $|P'(\alpha_1)|$ и $|D(P)|$ схожи. Для получения оптимальных оценок данных величин необходимо охарактеризовать распределение всех корней $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Однако для одного и того же многочлена дискриминант $|D(P)|$ содержит большее число малых сомножителей $|\alpha_i-\alpha_j|$, что приводит к различным результатам.

В настоящей статье мы покажем, как на оценки сверху для $|D(P)|$ влияет количество действительных корней $P(x)$. Оказывается, что при небольшом количестве действительных корней нельзя так же эффективно находить многочлены с малыми дискриминантами, как в общем случае.

Обозначим

$$\mathcal{D}_{n,m,\gamma}(Q,v)=\left\{P\in\mathcal{P}_n\left(Q\right):1\le\left|D\left(P\right)\right|\le\gamma Q^{2n-2-2v}\right\}, \tag{1}$$

Где *P* имеет ровно *m* действительных корней.

Теорема 1. *Пусть* $n\in\mathbb{N}, n\ge 2$. *Тогда для достаточно больших* Q *при* $0\le v\le\dfrac{(m-1)(n+1)}{m+1}$ *выполняется неравенство*

$$\#\mathcal{D}_{n,m,\gamma}(Q,v)\gg Q^{n+1-\frac{m+2}{m}v}, \tag{2}$$

где константа в символе Виноградова зависит только от n.

Для доказательства теоремы 1 используем следующие три леммы, доказанные в [1] и [12].

Лемма 1. *Пусть* $n\ge 2$, *и* $v_0,\dots,v_n$ *– набор действительных чисел таких, что*

$$v_0+\ldots+v_n=0 \tag{3}$$

и

$$v_0\ge v_1\ge\ldots\ge v_n=-1. \tag{4}$$

Тогда существуют положительные константы δ_0 *и* c_0, *зависящие только от* n, *для которых выполнено следующее свойство. В любом интервале* $J\subset[-1/2,1/2]$ *для достаточно больших* Q, $Q>Q_0$, *существует измеримое множество* $G_J\subset J$ *большой меры,*

$$|G_J|\ge\frac{3}{4}|J|, \tag{5}$$

такое, что для $x\in G_J$ *существует* $n+1$ *линейно независимых примитивных многочленов* $P\in\mathbb{Z}[x]$ *степени в точности* n, *удовлетворяющих неравенствам*

$$\begin{cases}\delta_0 Q^{-v_0}\le|P(x)|\le c_0Q^{-v_0}, & \\ \delta_0 Q^{-v_j}\le|P^{(j)}(x)|\le c_0Q^{-v_j}, & 1\le j\le m-1,\\ |P^{(j)}(x)|\ge c_0Q^{-1}, & m\le j\le n.\end{cases} \tag{6}$$

Лемма 2. *Пусть* $x\in\mathbb{C}$ *– фиксированная точка, P – многочлен с комплексными коэффициентами степени* $\deg P=n>0$, *а* $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ *– корни многочлена P, упорядоченные по возрастанию расстояния от точки* x:

$$|x-\alpha_1|\le|x-\alpha_2|\le\ldots\le|x-\alpha_n|. \tag{7}$$

Пусть a_n *– старший коэффициент* P. *Для* $0\le j<n$ *выполнено неравенство*

$$|P^{(j)}(x)|\le C_n^k|a_n||x-\alpha_{j+1}|\cdots|x-\alpha_n|. \tag{8}$$

Если для некоторого $j>0$ *выполнено неравенство*

$$|x-\alpha_j|<\frac{1}{2}C_n^k|x-\alpha_{j+1}|, \tag{9}$$

то

$$|P^{(j)}(x)|\ge\frac{1}{2}|a_n||x-\alpha_{j+1}|\cdots|x-\alpha_n|. \tag{10}$$

Лемма 3. *Пусть константы* n *и* v_j, $0\le j\le n$, *удовлетворяют условиям леммы 1. Обозначим*

$$d_j=v_{j-1}-v_j,\quad 1\le j\le n, \tag{11}$$

и предположим, что

$$d_1\ge d_2\ge\ldots\ge d_n\ge 0. \tag{12}$$

Пусть $x \in \mathbb{C}$ *– такая комплексная точка, что условия* (6) *выполнены для некоторого многочлена P степени* $\deg P = n$ *с комплексными коэффициентами и константы* $Q > 1$. *Тогда для корней многочлена* P *справедливы оценки*

$$| x-\alpha_j | \le c_j Q^{-d_j}, \quad 1 \le j \le n, \tag{13}$$

где

$$c_1 = nc_0\delta_0^{-1} \quad \text{и} \quad c_{j+1} = \max\left\{\frac{2c_0}{\delta_0} C_n^{j+1}, 2c_j C_n^j\right\}, 1 \le j \le n-1, \tag{14}$$

а корни $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ *упорядочены как в* (7).

Доказательство теоремы 1. Пусть $v_0, \ldots, v_n$ удовлетворяют условиям (3), (4), и пусть d_j определены как в (11) и удовлетворяют (12). Сперва покажем, что

$$\sum_{j=1}^{m} jd_j = n+1. \tag{15}$$

Из (11) имеем $v_{j-1} = d_j + v_j$. Значит, $v_{j-1} = d_j + \cdots + d_n + v_n$. Так как $v_m = v_{m+1} = \ldots = v_n = -1$, , имеем $v_{j-1} + 1 = d_j + \cdots + d_m$, $v_n + 1 = 0$. Просуммировав все оценки для разных j, из (3) получаем искомое равенство (15):

$$n+1 = \sum_{j=0}^{n}(v_j+1) = \sum_{j=0}^{m-1}(v_j+1) = \sum_{j=0}^{m-1}(d_{j+1} + \cdots + d_m) = \sum_{j=1}^{m} jd_j.$$

Теперь пусть $J = [-1/2, 1/2]$, Q достаточно большое и $x \in G_J$, где G_J – множество, найденное из леммы 1. Согласно лемме 1 неравенства (6) выполняются для некоторого неприводимого многочлена $P \in \mathbb{Z}[x]$ степени n. Тогда согласно лемме 3 выполняются неравенства (13), и для любой пары индексов (i, j), $1 \le i < j \le n$, имеем оценку

$$| \alpha_i - \alpha_j | \le | x-\alpha_i | + | x-\alpha_j | \ll Q^{-d_j}.$$

Из доказательства леммы 1 (лемма 4 в работе [1]) вытекает существование удовлетворяющего неравенствам (6) многочлена $P(x)$, высота которого имеет порядок не более Q:

$$H(P) \le h_0 Q \tag{16}$$

для некоторой константы h_0, зависящей только от n. Используя определение дискриминанта, получаем

$$1 \le | D(P) | \ll Q^{2n-2} \prod_{1 \le i < j \le n} Q^{-2d_j} = Q^{2n-2-2\sum_{j=2}^{m}(j-1)d_j} \tag{17}$$

С одной стороны, модуль дискриминанта многочлена P – целое число, а с другой стороны, он не равен нулю в силу неприводимости P. Поэтому данный модуль можно оценить снизу единицей.

Для доказательства теоремы требуется построить нужное число многочленов с ограничениями на дискриминант

$$1 \le | D(P) | \le \gamma Q^{2n-2-2v} \tag{18}$$

для некоторой константы γ. В силу (17) неравенства (18) выполняются при $\sum_{j=2}^{m}(j-1)d_j = v$. Вычитая последнее равенство из (15), получаем эквивалентное равенство

$$\sum_{j=1}^{n} d_j = n+1-v. \tag{19}$$

Теперь оценим количество многочленов, которое мы можем получить таким образом. Используя (13) и лемму 1, для каждого $x \in G_J$ получаем неравенство $|x-\alpha_1(P)| \ll Q^{-d_1}$, где многочлен P удовлетворяет условиям леммы 1. Следовательно,

$$G_J \subset \bigcup_{P \in D_{n,m,\gamma}(h_0Q,v)} \bigcup_{j=1}^{n} \{|x-\alpha_j(P)| \le c_1 Q^{-d_1}\},$$

где γ и c_1 зависят только от n. Используя ограничение (16) на высоту многочлена, получаем оценку

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{4}|J| \le 2nc_1 Q^{-d_1} \ne \mathcal{D}_{n,\gamma}(h_0Q, v),$$

откуда следует, что

$$\#\mathcal{D}_{n,m,\gamma}(h_0Q, v) \gg Q^{d_1}.$$

Для получения наиболее точной нижней границы найдем максимальное возможное d_1 с учетом условий (12), (15), (19). Докажем, что максимум d_1 достигается при

$$d_2 = \dots = d_m = \frac{2v}{m(m-1)} \text{ и } d_1 = n+1-\frac{m+2}{m}v.$$

Пусть существует такое k, что $d_2 = \ldots = d_k > d_{k+1}$. Легко проверить, что для любого δ выполнено равенство

$$\sum_{j=2}^{k}(j-1)\left(d_j-\delta\right)+k\left(d_{k+1}-\delta\frac{k-1}{2}\right)+\sum_{j=k+1}^{m}(j-1)d_j = n+1.$$

Пусть δ таково, что $d_2-\delta = d_{k+1}+\delta\frac{k-1}{2}$. Тогда, заменив в (19)

$$d_2, \ldots, d_k, d_{k+1}$$

на

$$d_2-\delta, \ldots, d_k-\delta, d_{k+1}+\delta\frac{k-1}{2},$$

получим сумму, меньшую (19) на $\delta\frac{k-1}{2}$. Чтобы сохранить в (19) равенство, величину d_1 необходимо увеличить на $\delta\frac{k-1}{2}$.

Таким образом за конечное число шагов мы получим равенство $d_2 = \dots = d_m$, увеличивая d_1 на каждом шаге. Следовательно, максимальное значение d_1 достигается лишь в том случае, когда все d_j, $j>1$, равны между собой.

Легко проверить, что $d_1 \ge d_2$, так как $v \le \frac{(m-1)(n+1)}{m+1}$; условия (12) при этом также выполнены. Из равенств

$$v_0 = n-v \quad u \quad v_j = -1+(m-j)d_2, \qquad 1 \le j \le m-1,$$

следует оценка снизу

$$\#\mathcal{D}_{n,m,\gamma}(h_0Q, v) \gg Q^{d_1} \ge Q^{n+1-\frac{m+2}{m}v}.$$

Если обозначить $\overline{Q} = h_0Q$, то предыдущее неравенство принимает вид

$$\#\mathcal{D}_{n,m,\gamma}(\overline{Q}, v) \gg \overline{Q}^{n+1-\frac{m+2}{m}v},$$

что завершает доказательство.

ЛИТЕРАТУРА

1. Beresnevich, V. The distribution of close conjugate algebraic numbers / V. Beresnevich, V. Bernik, F. Götze // Compositio Mathematica. – 2010. – Vol. 5. – Pp. 1165–1179.
2. Bugeaud, Y. and M. Mignotte. On the distance between roots of integer polynomials / Y. Bugeaud, M. Mignotte // Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society. – 2004. – Vol. 2, № 47. – Pp. 553–556.
3. Evertse, J.H. Distances between the conjugates of an algebraic number / J.H. Evertse // Publicationes Mathematicae Debrecen. – 2004. – № 65. – Pp. 323–340.
4. Bugeaud, Y. Root separation for irreducible integer polynimials / Y. Bugeaud, A. Dujella // Bulletin of the London Mathematical Society. – 2011. – № 43. – Pp. 1239–1244.
5. Bugeaud, Y. Approximation by Algebraic Numbers (Cambridge Tracts in Mathematics) / Y. Bugeaud // Cambridge University Press. – 2004. – Vol. 160. – P. 274.
6. Koleda, D.V. On the Distribution of Polynomial Discriminants: Totally Real Case / D.V. Koleda // Lithuanian Mathematical Journal. – 2019. – Vol. 59. – Pp. 67–80.
7. Спринджук, В.Г. Проблема Малера в метрической теории чисел / В.Г. Спринджук. – Минск: Наука и техника, 1967. – 194 с.
8. Volkmann, B. The real cubic case of Mahler's conjecture / B. Volkmann // Mathematika. – 1961. – Vol. 8. – Pp. 55–57.
9. Davenport, H. A note on binary cubic forms / H. Davenport // Mathematika. – 1961. – Vol. 8. – Pp. 58–62.
10. Götze, F. The asymptotic number of integral cubic polynomials with bounded heights and discriminants / F. Götze, D. Kaliada, O. Kukso // Lithuanian Mathematical Journal. – 2014. – Vol. 54, № 2. – Pp. 150–165.
11. Bernik, V. Metric Diophantine Approximation on Manifolds / V. Bernik, M. Dodson // Cambridge Tracts in Mathematics. – 1999. – Vol. 137. – Pp. 172–194.
12. Beresnevich, V. Integral polynomials with small discriminants and resultants / V. Beresnevich, V. Bernik, F. Götze // Advances in Mathematics. – 2016. – № 298. – Pp. 393–412.
13. Volkmann, B. Ein metrischer Beitrag über Mahlersche Vermutung über S-Zahlen / B. Volkmann // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – 1960. – Vol. 203. – Pp. 154–156.
14. Baker, R. Sprindzuk's theorem and Hausdorff dimension / R. Baker // Mathematica. – 1976. – Vol. 23. – Pp. 184–197.
15. Берник, В.И. О числе целочисленных многочленов заданной степени и ограниченной высоты с малой производной в корне многочлена / В.И. Берник, Д.В. Васильев, А.С. Кудин // Труды Института математики. – 2014. – Т. 22, № 2. – С. 3–8.
16. Васильев, Д.В. Об оценках сверху числа минимальных полиномов с малой производной в корне / Д.В. Васильев, А.С. Кудин // Чебышевский сборник. – 2019. – Т. 20, № 2. – С. 47–54.

REFERENCES

1. Beresnevich, V. The distribution of close conjugate algebraic numbers / V. Beresnevich, V. Bernik, F. Götze // Compositio Mathematica. – 2010. – Vol. 5. – Pp. 1165–1179.
2. Bugeaud, Y. and M. Mignotte. On the distance between roots of integer polynomials / Y. Bugeaud, M. Mignotte // Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society. – 2004. – Vol. 2, № 47. – Pp. 553–556.
3. Evertse, J.H. Distances between the conjugates of an algebraic number / J.H. Evertse // Publicationes Mathematicae Debrecen. – 2004. – № 65. – Pp. 323–340.
4. Bugeaud, Y. Root separation for irreducible integer polynimials / Y. Bugeaud, A. Dujella // Bulletin of the London Mathematical Society. – 2011. – № 43. – Pp. 1239–1244.
5. Bugeaud, Y. Approximation by Algebraic Numbers (Cambridge Tracts iran Mathematics) / Y. Bugeaud // Cambridge University Press. – 2004. – Vol. 160. – P. 274.
6. Koleda, D.V. On the Distribution of Polynomial Discriminants: Totally Real Case / D.V. Koleda // Lithuanian Mathematical Journal. – 2019. – Vol. 59. – Pp. 67–80.
7. Sprindzhuk V.G. *Problema Malera v metricheskoi teorii chisel* [Mahler's Problem in the Metric Theory of Numbers], Minsk: Nauka i tekhnika, 1967, 194 p.
8. Volkmann B. The real cubic case of Mahler's conjecture / B. Volkmann // Mathematika. – 1961. – Vol. 8. – Pp. 55–57.
9. Davenport H. A note on binary cubic forms / H. Davenport // Mathematika. – 1961. – Vol. 8. – Pp. 58–62.
10. Götze, F. The asymptotic number of integral cubic polynomials with bounded heights and discriminants / F. Götze, D. Kaliada, O. Kukso // Lithuanian Mathematical Journal. – 2014. – Vol. 54, № 2. – Pp. 150–165.
11. Bernik, V. Metric Diophantine Approximation on Manifolds / V. Bernik, M. Dodson // Cambridge Tracts in Mathematics. – 1999. – Vol. 137. – Pp. 172–194.
12. Beresnevich, V. Integral polynomials with small discriminants and resultants / V. Beresnevich, V. Bernik, F. Götze // Advances in Mathematics. – 2016. – № 298. – Pp. 393–412.
13. Volkmann, B. Ein metrischer Beitrag über Mahlersche Vermutung über S-Zahlen / B. Volkmann // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – 1960. – Vol. 203. – Pp. 154–156.
14. Baker, R. Sprindzuk's theorem and Hausdorff dimension / R. Baker // Mathematica. – 1976. – Vol. 23. – Pp. 184–197.
15. Bernik V.I., Vasilyev D.V., Kudin A.S. *Trudy Instituta matematiki* [Works of Institute of Mathematics], 2014, 22(2), pp. 3–8.
16. Vasilyev D.V., Kudin A.S. *Chebyshevski sbornik* [Chebyshev Collection], 2019, 20(2), pp. 47–54.

Поступила в редакцию 09.07.2020

Адрес для корреспонденции: e-mail: n.kalosha@gmail.com – Калоша Н.И.