# МАТЭМАТЫКА

УДК 512.542

# АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РОБАСТНОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ КРИТЕРИЕВ

**А.Ю. Харин**
*Белорусский государственный университет*

*В статье исследуются последовательные статистические критерии (тесты) проверки гипотез о значениях параметра распределений вероятностей наблюдений.*

*Цель исследования – при наличии искажений вероятностной модели наблюдений провести анализ робастности (устойчивости) последовательных статистических критериев.*

***Материал и методы.*** *Применяются модели и методы теории вероятностей и математической статистики.*

***Результаты и их обсуждение.*** *С использованием подхода, ранее разработанного автором, построены асимптотические разложения по уровню искажений для вероятностей ошибочных решений и математических ожиданий случайного числа наблюдений, необходимых для принятия решения.*

***Заключение.*** *Результаты применимы для оценки возможности использовать стандартные последовательные тесты в конкретных ситуациях при появлении искажений, а также для построения робастных последовательных статистических критериев, когда такое использование нецелесообразно.*

***Ключевые слова:*** *последовательный статистический критерий, искажения, вероятность ошибки, математическое ожидание числа наблюдений, асимптотическое разложение.*

# ASYMPTOTIC ANALYSIS OF ROBUSTNESS FOR SEQUENTIAL STATISTICAL TESTS

**A.Yu. Kharin**
*Belarusian State University*

*Sequential statistical tests for hypothesis testing on the parameter value of the probability distributions of observations are discussed in the paper.*

*The purpose of the research is the robustness analysis for sequential statistical tests under distortions of the probability model.*

***Material and methods.*** *The probability theory and mathematical statistics models and methods are used.*

***Findings and their discussion.*** *With an approach that was developed before by the author, asymptotic expansions are constructed for the incorrect decision probabilities and for the mathematical expectation of the random number of observations needed to make a decision.*

***Conclusion.*** *The results are applicable for analysis of the possibility to use standard sequential tests in concrete situations where distortion appears, and for the construction of the robust sequential tests, when the use of standard ones is not reasonable.*

***Key words:*** *sequential statistical test, distortions, error probability, mathematical expectation of the number of observations, asymptotic expansion.*

Интенсивное развитие последовательного статистического анализа [1] – важного направления в теории вероятностей и математической статистике – обусловлено возрастающим применением статистических методов при решении практических задач анализа данных в технике, в контроле качества выпускаемой продукции, в медицине, биологии, финансовом анализе и во многих других областях [2], где число использованных наблюдений является важнейшей характеристикой наряду с точностью принятия решений. В таких задачах имеется потребность строить статистические выводы, основанные лишь на минимальном числе случайных наблюдений, необходимом для обеспечения заданной точности (малых значений вероятностей ошибочных решений) [3].

Наблюдаемые при решении упомянутых задач статистические данные не всегда адекватно описываются гипотетической вероятностной моделью [4], имеют место искажения этой модели, и при подобных искажениях оптимальные свойства [5] последовательных статистических критериев (тестов) могут нарушаться. Поэтому проблема анализа робастности [6; 7] (устойчивости к искажениям гипотетической вероятностной модели) таких критериев является актуальной [4]. В статье представлен метод, позволяющий исследовать робастность с использованием асимптотических разложений характеристик эффективности последовательных критериев (условных вероятностей ошибочных решений и математических ожиданий случайного числа необходимых наблюдений) и развивающий результаты автора [8].

**Материал и методы.** Представим вначале необходимые результаты, позволившие вычислять и асимптотически исследовать характеристики эффективности последовательных статистических критериев.

**Модель независимых одинаково распределенных дискретных наблюдений.** Обозначим через $\mathbf{N},\mathbf{Z},\mathbf{Z}_+,\mathbf{Q},\mathbf{R}$ множества натуральных, целых, неотрицательных целых, рациональных и действительных чисел соответственно. Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega,F,P)$ наблюдаются независимые в совокупности и одинаково распределенные случайные величины $x_t \in U=\{u_1,\ldots,u_M\}$, $t\in\mathbf{N}$. Распределение вероятностей каждой из них дискретно и зависит от параметра $\theta\in\Theta=\{\theta_0,\theta_1\}$, $\theta_0,\theta_1\in\mathbf{R}$, $\theta_0\neq\theta_1$:

$$P(u;\theta)=P_\theta\{x_t=u\}=a^{-J(u;\theta)},\ t\in\mathbf{N},\ u\in U, \qquad (1)$$

где $a\in\mathbf{Q}$, $a>1$; $J(u;\theta)$: $U\times\Theta\to\mathbf{Z}_+$ – функция, удовлетворяющая условию

$$\sum_{u\in U}a^{-J(u;\theta)}=1. \qquad (2)$$

Относительно неизвестного значения параметра $\theta$ распределения вероятностей (1) имеются две простые гипотезы:

$$H_0:\ \theta=\theta_0,\ \ H_1:\ \theta=\theta_1. \qquad (3)$$

Такая модель часто применяется на практике для идентификации одной из двух типовых альтернативных ситуаций.

Обозначим статистику

$$\Lambda_n=\Lambda_n(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{t=1}^{n}\lambda_t, \qquad (4)$$

где $\lambda_t=\lambda(x_t)=\log_a\left(P(x_t;\theta_1)/P(x_t;\theta_0)\right)=J(x_t;\theta_0)-J(x_t;\theta_1)\in\mathbf{Z}$ – логарифмическое отношение правдоподобия, вычисленное по наблюдению $x_t$. В силу независимости $x_t$ из (4) следует, что $\Lambda_n$, $n\in\mathbf{N}$, является однородной цепью Маркова с дискретным временем [9].

В последовательном критерии отношения вероятностей (тесте Вальда) [1] при проверке гипотез (3) после $n$ наблюдений ($n=1,2,\ldots$) принимается решение

$$d_\lambda=d_\lambda(n)=\mathbf{1}_{[C_+,+\infty)}(\Lambda_n)+2\cdot\mathbf{1}_{(C_-,C_+)}(\Lambda_n), \qquad (5)$$

где $\mathbf{1}_D(\cdot)$ означает индикаторную функцию множества $D$. Значения $d_\lambda=0$ и $d_\lambda=1$ соответствуют прекращению процесса наблюдения и принятию гипотезы $H_0$ (при $d_\lambda=0$) или $H_1$ (при $d_\lambda=1$) после $n$ наблюдений; при $d_\lambda=2$ следует сделать $(n+1)$-е наблюдение. В (5) $C_-,C_+\in\mathbf{Z}$, $C_-<C_+$ – параметры теста, называемые порогами, которые в [1] рекомендуется выбирать следующим образом:

$$C_-=[\log_a(\beta_0/(1-\alpha_0))],\ C_+=[\log_a((1-\beta_0)/\alpha_0)], \qquad (6)$$

где $\alpha_0,\beta_0$ – допустимые значения вероятностей ошибок первого и второго рода соответственно; $[\cdot]$ – целая часть числа.

Как известно [10], при использовании порогов (6) фактические значения вероятностей ошибок первого и второго рода могут существенно отличаться от задаваемых величин $\alpha_0,\beta_0$. Поэтому задача вычисления вероятностных характеристик последовательного теста (5), (6) является актуальной.

Примем обозначения: $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера; $\mathbf{I}_k$ – единичная матрица порядка $k$; $\mathbf{0}_{m\times n}$ – ($m\times n$)-матрица, все элементы которой равны 0; $\mathbf{1}(\cdot)$ – функция единичного скачка; $\mathbf{1}_k$ – $k$-вектор-столбец, все компоненты которого равны 1. Пусть $t^{(k)}$ – математическое ожидание длительности теста (объема выборки) при условии, что справедлива гипотеза $H_k$, $k\in\{0,1\}$; $\alpha,\beta$ – фактические вероятности ошибок первого и второго рода для теста (5); $N=C_+-C_-$; $P^{(k)}=\left(p_{ij}^{(k)}\right)=\begin{pmatrix}\mathbf{I}_2 & \vdots & \mathbf{0}_{2\times N}\\ --- & \vdots & ---\\ R^{(k)} & \vdots & Q^{(k)}\end{pmatrix}$ – $(N+2)\times(N+2)$-матрица, в которой блоки $R^{(k)},Q^{(k)}$ определены соотношениями

$$p_{ij}^{(k)}=\begin{cases}\sum_{u\in U}\delta_{J(u;\theta_0)-J(u;\theta_1),j-i}P(u;\theta_k),\ i,j\in(C_-,C_+),\\ \sum_{u\in U}\mathbf{1}(C_--i+J(u;\theta_1)-J(u;\theta_0))P(u;\theta_k),\ i\in(C_-,C_+), j=C_-,\\ \sum_{u\in U}\mathbf{1}(J(u;\theta_0-J(u;\theta_1))+i-C_+)P(u;\theta_k),\ i\in(C_-,C_+), j=C_+;\end{cases}$$

$$\pi^{(k)}=\left(\pi_i^{(k)}\right),\ \pi_i^{(k)}=\sum_{u\in U}\delta_{J(u;\theta_0)-J(u;\theta_1),i}P(u;\theta_k),\ i\in\{C_-+1,\dots,C_+-1\};$$

$$\pi_{C_+}^{(k)}=\sum_{i\ge C_+}\sum_{u\in U}\delta_{J(u;\theta_0)-J(u;\theta_1),i}P(u;\theta_k),\ \pi_{C_-}^{(k)}=\sum_{i\le C_-}\sum_{u\in U}\delta_{J(u;\theta_0)-J(u;\theta_1),i}P(u;\theta_k);$$

$S^{(k)}=\mathbf{I}_N-Q^{(k)}$, $B^{(k)}=\left(S^{(k)}\right)^{-1}R^{(k)}$; $W_{(i)}$ – $i$-й столбец матрицы $W$.

**Теорема 1.** *Если выполнены условия (1)–(3), $|S^{(k)}|\ne 0$, $k\in\{0,1\}$, то для характеристик эффективности теста (4), (5) справедливы выражения:*

$$t^{(k)}=\left(\pi^{(k)}\right)'\left(S^{(k)}\right)^{-1}\mathbf{1}_N+1,\ \alpha=\left(\pi^{(0)}\right)'B_{(2)}^{(0)}+\pi_{C_+}^{(0)},\ \beta=\left(\pi^{(1)}\right)'B_{(1)}^{(1)}+\pi_{C_-}^{(1)}.$$

Доказательство основано на теории конечных цепей Маркова с поглощающими состояниями [9] и представлено в [11]. ■

**Модель с произвольным распределением вероятностей независимых наблюдений.** Пусть $\bar{P}_\theta$, $\theta\in\Theta$ – фактическое распределение вероятностей каждого из независимых наблюдений $x_1,x_2,\ldots\in U\subseteq\mathbf{R}$, которое может не совпадать с гипотетическим распределением $P_\theta$ из-за искажений.

Последовательный статистический тест вида (4), (5), основанный на функции

$$\lambda(u)=\log\frac{p_{\theta_1}(u)}{p_{\theta_0}(u)},\ u\in U, \quad (7)$$

обозначим $\delta_\lambda=(\tau_\lambda,d_\lambda)$, где $\tau_\lambda=\inf\{n:d_\lambda(n)\in\{0,1\}\}$ – случайный момент остановки теста. Пусть для этого теста

$$\alpha=\alpha(\delta_\lambda)=E_0\{\bar{P}_0\{d_\lambda=1|\tau_\lambda\}\},\ \beta=\beta(\delta_\lambda)=E_1\{\bar{P}_1\{d_\lambda=0|\tau_\lambda\}\}\ - \quad (8)$$

фактические значения вероятностей ошибок I и II рода соответственно, где $p_{\theta_0}(u)$, $p_{\theta_1}(u)$ – плотности распределения вероятностей наблюдений по некоторой мере на $U$ при соответствующем значении параметра; $E_\theta\{\cdot\}$ – математическое ожидание по распределению $\bar{P}_\theta$;

$$t^{(k)}=t^{(k)}(\delta_\lambda)=E_k\{\tau_\lambda\},\ k\in\{0,1\}\ - \quad (9)$$

условное математическое ожидание случайного объема выборки $\tau_\lambda$ при верной гипотезе $H_k$.

Исследуем множество характеристик эффективности $\{\alpha(\delta_\lambda),\beta(\delta_\lambda),t_0(\delta_\lambda),t_1(\delta_\lambda)\}$ последовательного теста $\delta_\lambda$. В теореме 1 получены точные выражения для характеристик эффективности (8), (9) теста (4), (5) в частном случае, когда функция $\lambda(\cdot)$ имеет решетчатое множество значений и отсутствуют искажения ($\bar{P}_\theta\equiv P_\theta$). В общем случае для теста $\delta_\lambda$ примем обозначения ($k$ = 0, 1):

$$Q^{(k)}=\left(q_{ij}^{(k)}\right),\ q_{ij}^{(k)}=\bar{P}_k\{\lambda(x_1)=j-i\},\ i,j\in\{C_-+1,\ldots,C_+-1\};$$

$$R^{(k)}=\left(r_{ij}^{(k)}\right),\ i\in\{C_-+1,\ldots,C_+-1\},\ j=C_-,C_+,$$

$$r_{iC_-}^{(k)}=\bar{P}_k\{\lambda(x_1)\le C_--i\},\ r_{iC_+}^{(k)}=\bar{P}_k\{\lambda(x_1)\ge C_+-i\};$$

$$\pi^{(k)}=\left(\pi_i^{(k)}\right),\ \pi_i^{(k)}=\overline{P}_k\left\{\lambda(x_1)=i\right\},\ i\in\left\{C_-+1,\ldots,C_+-1\right\},$$
$$\pi_{C_-}^{(k)}=\overline{P}_k\left\{\lambda(x_1)\le C_-\right\},\ \pi_{C_+}^{(k)}=\overline{P}_k\left\{\lambda(x_1)\ge C_+\right\}.$$

Как следует из теории конечных цепей Маркова [9], условие невырожденности $|S^{(k)}|\ne 0$ эквивалентно конечности теста: $\overline{P}_\theta\left\{\tau_\lambda<\infty\right\}=1$, $\theta\in\Theta$. Известно [3], что это условие выполнено в случае независимых одинаково распределенных наблюдений, за исключением вырожденного случая, когда $\overline{P}_\theta\left\{\lambda(x_1)=0\right\}=1$, означающего, что значения параметров $\theta_0,\theta_1$ $\overline{P}_\theta$-неразличимы.

Пусть $\underline{\lambda}(x)$, $\overline{\lambda}(x):U\to\mathbf{R}$ – некоторые функции, $\delta_{\underline{\lambda}}$, $\delta_{\overline{\lambda}}$ – последовательные тесты вида (4), (5), основанные на этих функциях, $\underline{\Lambda}_n=\sum_{t=1}^n\underline{\lambda}(x_t)$, $\overline{\Lambda}_n=\sum_{t=1}^n\underline{\lambda}(x_t)$. Определим марковские моменты:

$$s_0=\inf\left\{n:\Lambda_n\le C_-\right\},\ s_1=\inf\left\{n:\Lambda_n\ge C_+\right\};\ \underline{s}_0=\inf\left\{n:\underline{\Lambda}_n\le C_-\right\},$$
$$\underline{s}_1=\inf\left\{n:\underline{\Lambda}_n\ge C_+\right\};\ \overline{s}_0=\inf\left\{n:\overline{\Lambda}_n\le C_-\right\},\ \overline{s}_1=\inf\left\{n:\overline{\Lambda}_n\ge C_+\right\}.$$

Обозначим:

$$\overline{\alpha}=\alpha(\delta_{\overline{\lambda}}),\ \overline{\beta}=\beta(\delta_{\overline{\lambda}}),\ \underline{\alpha}=\alpha(\delta_{\underline{\lambda}}),\ \underline{\beta}=\beta(\delta_{\underline{\lambda}});\ Y=\left\{x\in U:\lambda(x)\in(C_--C_+,C_+-C_-)\right\}.$$

**Теорема 2.** *Пусть для последовательного статистического теста (4), (5), (7) функции* $\underline{\lambda}(\cdot)$, $\overline{\lambda}(\cdot)$ *удовлетворяют условиям:*

$$\underline{\lambda}(x)\le\lambda(x)\le\overline{\lambda}(x),\ \forall x\in Y,$$

*и*

$$t^{(k)}<\infty,\ t^{(k)}(\delta_{\overline{\lambda}})<\infty,\ t^{(k)}(\delta_{\underline{\lambda}})<\infty,\ k=0,1.$$

*Тогда*

$$\underline{\alpha}\le\alpha\le\overline{\alpha},\ \overline{\beta}\le\beta\le\underline{\beta};\tag{10}$$

*и если* $\overline{\alpha}-\underline{\alpha}\to 0$, $\underline{\beta}-\overline{\beta}\to 0$*, то имеют место следующие асимптотические разложения:*

$$t_-^{(k)}\le t^{(k)}\le t_+^{(k)},\ k=0,1;\ t_\pm^{(k)}=T_\pm^{(k)}+o(1),$$

*где*

$$T_-^{(0)}=\overline{\alpha}E_0\left\{\overline{s}_1\,|\,\overline{s}_1<\overline{s}_0\right\}+(1-\underline{\alpha})E_0\left\{\underline{s}_0\,|\,\underline{s}_0<\underline{s}_1\right\},$$
$$T_+^{(0)}=\underline{\alpha}E_0\left\{\underline{s}_1\,|\,\underline{s}_1<\underline{s}_0\right\}+(1-\overline{\alpha})E_0\left\{\overline{s}_0\,|\,\overline{s}_0<\overline{s}_1\right\};$$
$$T_+^{(1)}=\underline{\beta}E_1\left\{\underline{s}_0\,|\,\underline{s}_0<\underline{s}_1\right\}+(1-\overline{\beta})E_0\left\{\overline{s}_1\,|\,\overline{s}_1<\overline{s}_0\right\},$$
$$T_+^{(1)}=\overline{\beta}E_1\left\{\overline{s}_0\,|\,\overline{s}_0<\overline{s}_1\right\}+(1-\underline{\beta})E_1\left\{\underline{s}_1\,|\,\underline{s}_1<\underline{s}_0\right\}.$$

Доказательство состоит в анализе соотношений между введенными марковскими моментами и порожденными ими случайными событиями [12]. ■

**Результаты и их обсуждение.** Вопросы сходимости верхней и нижней границ в (10) исследованы в [12]. Результаты для модели зависимых наблюдений, образующих цепь Маркова, представлены в [13].

Задача анализа робастности последовательных тестов решалась теоретически лишь в некоторых частных случаях (см., например, [14]). Основная сложность теоретического решения этой задачи состоит в том, что вероятностные характеристики последовательных критериев не могут быть записаны в явном виде даже для простейших вероятностных моделей наблюдений [3], что затрудняет аналитическое исследование влияния искажений модели на данные характеристики.

Вместе с тем результат теоремы 2 можно использовать в сочетании с результатом теоремы 1 не только для анализа эффективности последовательных тестов проверки параметрических гипотез, но и при анализе робастности (устойчивости теста к малым уклонениям фактической модели наблюдений от гипотетической) в случае «выбросов» в наблюдениях и ошибок спецификации гипотетических значений параметра.

На практике модель, в которой гипотезы формулируются как простые, не всегда применима. Рассмотрим использование описанного подхода для анализа робастности последовательных критериев проверки сложных гипотез.

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \Im, P)$ наблюдается последовательность независимых случайных величин $x_1, x_2, \ldots \in \mathbf{R}$, имеющих плотности распределения вероятностей $p_1(x|\theta)$, $p_2(x|\theta)$,..., где $\theta \in \Theta \subseteq \mathbf{R}^k$ – неизвестное значение случайного вектора параметров, плотность распределения вероятностей которого $p(\theta)$ предполагается известной. Относительно значения параметра θ имеются две сложные гипотезы:

$$H_0:\ \theta \in \Theta_0,\ H_1:\ \theta \in \Theta_1;\ \Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta,\ \Theta_0 \cap \Theta_1 = \varnothing. \quad (11)$$

Примем обозначения:

$$\mathbf{1}_S(s) = \begin{cases} 1, & s \in S, \\ 0, & s \notin S; \end{cases}$$

$$W_i = \int_{\Theta_i} p(\theta) d\theta,\ w_i(\theta) = \tfrac{1}{W_i} \cdot p(\theta) \cdot \mathbf{1}_{\Theta_i}(\theta),\ \theta \in \Theta,\ i = 0,1;$$

$$\Lambda_n = \Lambda_n(x_1, \ldots, x_n) = \ln \frac{\int_\Theta w_1(\theta) p_1(x_1|\theta)\, d\theta \cdots \int_\Theta w_1(\theta) p_n(x_n|\theta)\, d\theta}{\int_\Theta w_0(\theta) p_1(x_1|\theta)\, d\theta \cdots \int_\Theta w_0(\theta) p_n(x_n|\theta)\, d\theta}. \quad (12)$$

Для проверки гипотез (11) используется параметрическое семейство последовательных статистических критериев:

$$N = \min\{n \in \mathbf{N}:\ \Lambda_n \notin (C_-, C_+)\},\ d = \mathbf{1}_{[C_+, +\infty)}(\Lambda_N), \quad (13)$$

где $N$ – случайный номер наблюдения, момент остановки, после которого принимается решение $d$; решение $d = i$ означает принятие гипотезы $H_i$, $i = 0,1$. В (13) $C_- < 0$, $C_+ > 0$ – параметры, называемые порогами критерия; на практике их значения полагают равными $C_- = \ln \frac{\beta_0}{1-\alpha_0}$, $C_+ = \ln \frac{1-\beta_0}{\alpha_0}$, где $\alpha_0, \beta_0 \in (0, \frac{1}{2})$ – величины, близкие к приемлемым значениям вероятностей ошибок I и II рода [1]. Фактические значения α, β вероятностей ошибок I и II рода могут существенно отличаться от $\alpha_0$, $\beta_0$ [10].

Для вычисления α, β и математического ожидания случайного числа наблюдений $N$ построим стохастическую аппроксимацию статистики $\Lambda_n$, $n \in \mathbf{N}$, с параметром $m \in \mathbf{N}$. Пусть $h = \dfrac{C_+ - C_-}{m}$; $p_{\Lambda_n}(u)$ – плотность распределения вероятностей статистики (2); $p_{\Lambda_{n+1}|\Lambda_n}(u|y)$ – условная плотность распределения вероятностей, $n \in \mathbf{N}$. Построим дискретную случайную последовательность $Z_n^m$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $Z_0^m = 0$, с пространством состояний $V = \{0, 1, \ldots, m+1\}$:

$$Z_n^m = \begin{cases} 0, & Z_{n-1}^m = 0, \\ m+1, & Z_{n-1}^m = m+1, \\ \left(\left[\frac{\Lambda_n - C_-}{h}\right] + 1\right) \cdot \mathbf{1}_{(C_-, C_+)}(\Lambda_n) + (m+1) \cdot \mathbf{1}_{(C_+, +\infty)}(\Lambda_n), & \text{иначе.} \end{cases} \quad (14)$$

Для случайной последовательности (14) рассмотрим $(m+2) \times (m+2)$ – матрицу условных вероятностей

$$P^{(n)}(\theta) = (p_{ij}^{(n)}(\theta)) = \left(\mathrm{P}\left\{Z_{n+1}^m = j \,|\, Z_n^m = i\right\}\right),\ i, j \in V,\ n \in \mathbf{N}.$$

Случайную последовательность $Z_n^m$ аппроксимируем цепью Маркова $z_n^m \in V$, $n \in \mathbf{N}$, с таким же начальным распределением вероятностей, соответствующим моменту $n = 1$, и матрицей переходных вероятностей $P^{(n)}(\theta)$ в момент $n$. С использованием перенумерации состояний $V = \{\{0\}, \{m+1\}, \{1\}, \ldots, \{m\}\}$ матрицу $P^{(n)}(\theta)$ можно представить в блочном виде:

$$P^{(n)}(\theta) = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & | & \mathbf{0}_{2\times m} \\ --- & | & --- \\ R^{(n)}(\theta) & | & Q^{(n)}(\theta) \end{pmatrix},\ \theta \in \Theta,$$

где блоки $R^{(n)}(\theta)$ и $Q^{(n)}(\theta)$ имеют размерность $m\times 2$ и $m\times m$ соответственно, $\mathbf{I}_k$ – единичная матрица размерности $k$, $\mathbf{0}_{l\times m}$ – матрица размерности $l\times m$, все элементы которой равны 0. Пусть $\pi(\theta)=(\pi_i(\theta))$ – вектор начальных вероятностей состояний 1,…, $m$ для случайной последовательности (4); $\pi_0(\theta)$, $\pi_{m+1}(\theta)$ – начальные вероятности поглощающих состояний, $\mathbf{1}_m$ – вектор размерности $m$, все компоненты которого равны 1. Обозначим матрицы:

$$S(\theta)=\mathbf{I}_m+\sum_{i=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{i}Q^{(j)}(\theta)\,;\ B(\theta)=R^{(1)}(\theta)+\sum_{i=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{i}Q^{(j)}(\theta)R^{(i+1)}(\theta)\,.$$

Пусть $B_{(j)}(\theta)$ – столбец номер $j$ матрицы $B(\theta)$, $j=1,2$; $t_i=\mathrm{E}\{N\,|\,\theta\in\Theta_i\}$, $i=0,1$, $t=\mathrm{E}\{N\}$; $\gamma_{H_i}(\theta)$ и $t(\theta)$ – вероятность принять гипотезу $H_i$ и математическое ожидание случайной величины $N$ соответственно при условии, что вектор параметров принял значение $\theta$.

Пусть для проверки гипотез (11) используется последовательный статистический критерий (12), (13), построенный с применением гипотетических плотностей распределения вероятностей $p(\theta)$, $p_1(x\,|\,\theta)$, $p_2(x\,|\,\theta)$,…, однако фактически эти функции искажены. Фактическая плотность распределения вероятностей вектора параметров имеет вид:

$$\overline{p}(\theta)=(1-\varepsilon_\theta)p(\theta)+\varepsilon_\theta\cdot\tilde{p}(\theta),\ \theta\in\Theta, \tag{15}$$

где $\varepsilon_\theta\in[0,\frac{1}{2}]$ – вероятность появления «засорения» [4], а $\tilde{p}(\theta)$ – «засоряющая» плотность распределения вероятностей, отличная от $p(\theta)$. Наблюдения подвержены «выбросам» [4], то есть фактическая условная плотность распределения вероятностей наблюдений представляет собой смесь

$$\overline{p}_n(x\,|\,\theta)=(1-\varepsilon_x)\cdot p_n(x\,|\,\theta)+\varepsilon_x\cdot\tilde{p}_n(x\,|\,\theta), \tag{16}$$
$$\theta\in\Theta,\ x...\in\mathbf{R},\ n\in\mathbf{N},$$

где $\varepsilon_x\in[0,\frac{1}{2}]$ – вероятность появления «выброса» в наблюдениях, $\tilde{p}_n(x\,|\,\theta)$ – «засоряющая» условная плотность распределения вероятностей наблюдений.

Пусть $\tilde{\pi}(\theta)$, $\tilde{\pi}_0(\theta)$, $\tilde{\pi}_{m+1}(\theta)$, $Q^{(n)}(\theta)$, $\tilde{R}^{(n)}(\theta)$ вычислены аналогично $\pi(\theta)$, $\pi_0(\theta)$, $\pi_{m+1}(\theta)$, $Q^{(n)}(\theta)$, $R^{(n)}(\theta)$ заменой плотности распределения вероятностей $p_n(x\,|\,\theta)$ на «засоряющую» плотность $\tilde{p}_n(x\,|\,\theta)$ в распределении вероятностей случайной последовательности (4); $\Delta\pi_0(\theta)=\tilde{\pi}_0(\theta)-\pi_0(\theta)$, $\Delta\pi_1(\theta)=\tilde{\pi}_{m+1}(\theta)-\pi_{m+1}(\theta)$; $\overline{t}(\theta)$, $\overline{t}_i(\theta)$, $\overline{\gamma}_{H_i}(\theta)$ – соответствующие характеристики последовательного критерия (12), (13), вычисленные при искажениях (15), (16). Обозначим:

$$\tilde{W}_i=\int_{\Theta_i}\tilde{p}(\theta)d\theta\,;$$

$$A(\theta)=((\tilde{\pi}(\theta)-\pi(\theta))'S(\theta)+(\pi(\theta))'\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{i}\prod_{k=1}^{j-1}Q^{(k)}(\theta)(\tilde{Q}^{(j)}(\theta)-Q^{(j)}(\theta))\times$$
$$\times\prod_{k=j+1}^{i}Q^{(k)}(\theta))\cdot\mathbf{1}_m,$$

$$F_i(\theta)=\Delta\pi_i(\theta)+(\tilde{\pi}(\theta)-\pi(\theta))'(B_{(i+1)}(\theta)+\tilde{R}^{(1)}_{(i+1)}(\theta)-R^{(1)}_{(i+1)}(\theta)+$$
$$+\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{l}\prod_{k=1}^{j-1}Q^{(k)}(\theta)(\tilde{Q}^{(j)}(\theta)-Q^{(j)}(\theta))\prod_{k=j+1}^{l}Q^{(k)}(\theta)R^{(l+1)}_{(i+1)}(\theta)+$$
$$+\prod_{j=1}^{l}Q^{(j)}(\theta)(\tilde{R}^{(l+1)}_{(i+1)}(\theta)-R^{(l+1)}_{(i+1)}(\theta))),\ \ i=0,1.$$

**Теорема 3.** *Пусть случайная последовательность (12) является марковской,* $\forall\theta\in\Theta$*, плотности распределения вероятностей* $p_{\Lambda_1}(u)$*,* $p_{\Lambda_{n+1}|\Lambda_n}(u\,|\,y)$ *– дифференцируемые функции переменной* $u\in[C_-,C_+]$*, причем существует* $C>0$*:*

$$\left|p_{\Lambda_1}{}'(u)\right|\le C,\ \left|p_{\Lambda_{n+1}|\Lambda_n}{}'(u\,|\,y)\right|\le C,\ u,y\in[C_-,C_+],\ n\in\mathbf{N}.$$

*Тогда при искажениях (5), (6) гипотетической модели в асимптотике* $\varepsilon_\theta \to 0$, $\varepsilon_x \to 0$, $h \to 0$ *имеют место следующие разложения вероятностей ошибок I и II рода для последовательного статистического критерия (12), (13):*

$$\overline{\alpha} = \alpha + \varepsilon_x \cdot \tfrac{1}{W_0} \cdot \int_{\Theta_0} F_1(\theta) \cdot p(\theta) d\theta +$$

$$+\varepsilon_\theta \cdot \left( \tfrac{1}{W_0^2} \cdot \int_{\Theta_0} (\tilde{p}(u) - p(u)) du \cdot \int_{\Theta_0} \gamma_{H_1}(\theta) p(\theta) d\theta + \tfrac{1}{W_0} \cdot \int_{\Theta_0} \gamma_{H_1}(\theta)(\tilde{p}(\theta) - p(\theta)) d\theta \right) +$$

$$+O(\varepsilon_x^2) + O(\varepsilon_\theta^2) + O(h),$$

$$\overline{\beta} = \beta + \varepsilon_x \cdot \tfrac{1}{W_1} \cdot \int_{\Theta_1} F_0(\theta) \cdot p(\theta) d\theta +$$

$$+\varepsilon_\theta \cdot \left( \tfrac{1}{W_1^2} \cdot \int_{\Theta_1} (\tilde{p}(u) - p(u)) du \cdot \int_{\Theta_1} \gamma_{H_0}(\theta) p(\theta) d\theta + \tfrac{1}{W_1} \cdot \int_{\Theta_1} \gamma_{H_0}(\theta)(\tilde{p}(\theta) - p(\theta)) d\theta \right) +$$

$$+O(\varepsilon_x^2) + O(\varepsilon_\theta^2) + O(h).$$

Доказательство использует результат работы [15], справедливый в условиях теоремы 3:

$$\overline{\gamma}_{H_i}(\theta) = \gamma_{H_i}(\theta) + \varepsilon_x \cdot F_i(\theta) + O(\varepsilon_x^2) + O(h), \ \theta \in \Theta. \qquad (17)$$

Строятся асимптотические разложения для $\int_{\Theta_i} \overline{p}(\theta)\, d\theta$, $i = 0,1$. Результаты для $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ получаются путем подстановки этих разложений в (17) и тождественных преобразований. ■

**Следствие 1.** *Если в условиях теоремы 3 выполняется равенство*

$$\int_{\Theta_0} \tilde{p}(\theta) d\theta = \int_{\Theta_0} p(\theta) d\theta, \qquad (18)$$

*то асимптотические разложения для вероятностей ошибок I и II рода принимают вид:*

$$\overline{\alpha} = \alpha + \varepsilon_x \cdot \tfrac{1}{W_0} \cdot \int_{\Theta_0} F_1(\theta) p(\theta) d\theta + \varepsilon_\theta \cdot \tfrac{1}{W_0} \int_{\Theta_0} \gamma_{H_1}(\theta) \left( \tilde{p}(\theta) - p(\theta) \right) d\theta +$$

$$+O(\varepsilon_x^2) + O(\varepsilon_\theta^2) + O(h),$$

$$\overline{\beta} = \beta + \varepsilon_x \cdot \tfrac{1}{W_1} \cdot \int_{\Theta_1} F_0(\theta) p(\theta)\, d\theta + \varepsilon_\theta \cdot \tfrac{1}{W_1} \int_{\Theta_1} \gamma_{H_0}(\theta) \left( \tilde{p}(\theta) - p(\theta) \right) d\theta +$$

$$+O(\varepsilon_x^2) + O(\varepsilon_\theta^2) + O(h).$$

Отметим, что выполнение условия (18) означает, что при искажении априорного распределения вероятностей (15) не изменяются априорные вероятности гипотез (11); происходит лишь «перераспределение» вероятностей внутри множеств $\Theta_0$, $\Theta_1$.

**Следствие 2.** *Если в условиях теоремы 3 отсутствуют искажения распределения вероятностей наблюдений, то есть* $\varepsilon_x = 0$, *то*

$$\overline{\alpha} = \alpha + \varepsilon_\theta \cdot \tfrac{1}{W_0} \int_{\Theta_0} \left( \left( \pi(\theta) \right)' B_{(2)}(\theta) + \pi_{m+1}(\theta) - \alpha \right) \left( \tilde{p}(\theta) - p(\theta) \right) d\theta + O(\varepsilon_\theta^2) + O(h),$$

$$\overline{\beta} = \beta + \varepsilon_\theta \cdot \tfrac{1}{W_1} \int_{\Theta_1} \left( \left( \pi(\theta) \right)' B_{(1)}(\theta) + \pi_0(\theta) - \beta \right) \left( \tilde{p}(\theta) - p(\theta) \right) d\theta + O(\varepsilon_\theta^2) + O(h).$$

В частном случае, когда отсутствуют искажения априорной плотности распределения вероятностей, то есть при $\varepsilon_\theta = 0$, результат теоремы 1 соответствует [15].

**Теорема 4.** *Если выполнены условия теоремы 3, то в асимптотике* $\varepsilon_\theta \to 0$, $\varepsilon_x \to 0$, $h \to 0$ *справедливы разложения для условных и безусловного математических ожиданий случайного числа наблюдений N:*

$$\overline{t_i} = t_i + \varepsilon_x \cdot \tfrac{1}{W_i} \cdot \int_{\Theta_i} A(\theta) p(\theta) d\theta + \varepsilon_\theta \cdot \left( t_i (\tilde{W}_i - W_i) + \tfrac{1}{W_i} \cdot \int_{\Theta_i} t(\theta)(\tilde{p}(\theta) - p(\theta)) \right) +$$

$$+O(\varepsilon_x^2) + O(\varepsilon_\theta^2) + O(h), \ i = 0,1;$$

$$\bar{t} = t + \varepsilon_x \cdot \int_{\Theta} A(\theta)p(\theta)d\theta + \varepsilon_\theta \cdot \int_{\Theta} t(\theta)(\tilde{p}(\theta) - p(\theta)) + O(\varepsilon_x^2) + O(h).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В условиях теоремы 4 получаем из [15]:

$$\bar{t}(\theta) = t(\theta) + \varepsilon_x \cdot A(\theta) + O(\varepsilon_x^2) + O(h),\ \theta \in \Theta. \qquad (19)$$

Используя представление $\bar{t}_i = \int_{\Theta} \bar{t}(\theta) \cdot \frac{1}{\int_{\Theta_i} \bar{p}(u)\, du} \cdot \bar{p}(\theta) \cdot \mathbf{1}_{\Theta_i}(\theta)\, d\theta$, $i = 0{,}1$, и проводя тождественные преобразования, получаем разложения для условных математических ожиданий числа наблюдений. Разложение для безусловного математического ожидания следует из (19) и представления $\bar{t} = \int_{\Theta} \bar{t}(\theta) p(\theta)\, d\theta$. ■

**Следствие 3.** *В условиях следствия 1 имеют место следующие асимптотические разложения:*

$$\bar{t}_i = t_i + \varepsilon_x \cdot \frac{1}{W_i} \cdot \int_{\Theta_i} A(\theta)p(\theta)d\theta + \varepsilon_\theta \cdot \frac{1}{W_i} \cdot \int_{\Theta_i} t(\theta)(\tilde{p}(\theta) - p(\theta)) +$$
$$+ O(\varepsilon_x^2) + O(\varepsilon_\theta^2) + O(h),\ i = 0{,}1.$$

**Следствие 4.** *В условиях следствия 2 справедливы следующие асимптотические разложения:*

$$\bar{t}_i = t_i + \varepsilon_\theta \cdot \frac{1}{W_i} \cdot \int_{\Theta_i} (1 + (\pi(\theta))' S(\theta) \cdot 1_m - t_i)(\tilde{p}(\theta) - p(\theta))d\theta + O(\varepsilon_\theta^2) + O(h),\ i = 0{,}1;$$

$$\bar{t} = t + \varepsilon_\theta \cdot \int_{\Theta} \left(\pi(\theta)\right)' S(\theta) \cdot \mathbf{1}_m \cdot \left(\tilde{p}(\theta) - p(\theta)\right) d\theta + O(h).$$

В случае $\varepsilon_\theta = 0$ результат теоремы 4 соответствует результату работы [15].

Полученные результаты позволяют оценить, насколько сильно искажения (15), (16) влияют на вероятностные характеристики последовательного критерия (12), (13), и могут быть использованы при построении минимаксных робастных последовательных статистических критериев в соответствии со схемой, аналогичной разработанной в [8].

**Заключение.** В статье представлен подход, позволяющий вычислять характеристики эффективности последовательных статистических критериев и исследовать их робастность при наличии искажений типа «засорений» гипотетических распределений вероятностей. Полученные результаты позволяют достичь, по крайней мере, двух целей. Во-первых, для используемого последовательного статистического критерия в условиях возможных отклонений от модельных предположений появилась возможность оценить отклонения от оптимальных значений. Во-вторых, результаты статьи в рамках семейств последовательных статистических критериев позволяют строить робастные, то есть наименее уклоняющиеся от оптимальных значений по характеристикам эффективности.

*ЛИТЕРАТУРА*


1. Wald, A. Sequential analysis / A. Wald. – New York: John Wiley and Sons, 1947.
2. Mukhopadhyay, N. Sequential methods and their applications / N. Mukhopadhyay, B. de Silva. – New York: Marcel Dekker, 2009.
3. Lai, T. Sequential analysis: Some classical problems and new challenges / T. Lai // Statistica Sinica. – 2001. – Vol. 11. – P. 303–408.
4. Huber, P. Robust Statistics / P. Huber, E. Ronchetti. – New York: Wiley, 2009.
5. Айвазян, С.А. Сравнение оптимальных свойств критериев Неймана–Пирсона и Вальда / С.А. Айвазян // Теория вероятностей и ее применения. – 1959. – № 4(1). – С. 86–93.
6. Galinskij, V. On minimax robustness of Bayesian statistical prediction / V. Galinskij, A. Kharin // Probability Theory and Mathematical Statistics. – TEV. – 1999. – P. 259–266.
7. Kharin, A. Robust Bayesian prediction under distortions of prior and conditional distributions / A. Kharin // Journal of Mathematical Sciences. – 2005. – Vol. 126(1). – P. 992–997.
8. Харин, А.Ю. Робастность байесовских и последовательных статистических решающих правил / А.Ю. Харин. – Минск: БГУ, 2013.
9. Kemeny, J.G. Finite Markov Chains / J.G. Kemeny, J.L. Snell. – New York: Springer, 1960.
10. Харин, А.Ю. Об одном подходе к анализу последовательного критерия отношения правдоподобия для различения простых гипотез / А.Ю. Харин // Вестник Белорусского государственного университета. Сер. физ.-мат. наук. – 2002. – № 1. – С. 92–96.
11. Kharin, A. On robustifying of the sequential probability ratio test for a discrete model under “contaminations” / A. Kharin // Austrian Journal of Statistics. – 2002. – Vol. 31(4). – P. 267–278.
12. Kharin, A. Robust sequential testing of hypotheses on discrete probability distributions / A. Kharin, D. Kishylau // Austrian Journal of Statistics. – 2005. – Vol. 34(2). – P. 153–162.
13. Kharin, A. Robustness in sequential discrimination of Markov chains under “contamination” / A. Kharin // Statistics for Industry and Technology. Theory and applications of recent robust methods. – Basel: Birkhauser Verlag, 2004. – P. 165–172.
14. Quang, P. Robust sequential testing / P. Quang // Annals of Statistics. – 1985. – Vol. 13. – P. 638–649.
15. Kharin, A. Robustness evaluation in sequential testing of composite hypotheses / A. Kharin // Austrian Journal of Statistics. – 2008. – Vol. 37(1). – P. 51–60.

*R E F E R E N C E S*

1. Wald, A. Sequential analysis / A. Wald. – New York: John Wiley and Sons, 1947.
2. Mukhopadhyay, N. Sequential methods and their applications / N. Mukhopadhyay, B. de Silva. – New York: Marcel Dekker, 2009.
3. Lai, T. Sequential analysis: Some classical problems and new challenges / T. Lai // Statistica Sinica. – 2001. – Vol. 11. – P. 303–408.
4. Huber, P. Robust Statistics / P. Huber, E. Ronchetti. – New York: Wiley, 2009.
5. Aivazian S.A. *Teoriya veroyatnostei i yeyo primeneniya* [Probability Theory and its Applications], 1959, 4(1), pp. 86–93.
6. Galinskij, V. On minimax robustness of Bayesian statistical prediction / V. Galinskij, A. Kharin // Probability Theory and Mathematical Statistics. – TEV. – 1999. – P. 259–266.
7. Kharin, A. Robust Bayesian prediction under distortions of prior and conditional distributions / A. Kharin // Journal of Mathematical Sciences. – 2005. – Vol. 126(1). – P. 992–997.
8. Kharin A.Yu. *Robastnost bayesovskikh i posledovatelnykh statisticheskikh reshayushchikh pravil* [Robustness of Bayesian and Sequential Statistical Decisive Rules], Minsk: BGU, 2013.
9. Kemeny, J.G. Finite Markov Chains / J.G. Kemeny, J.L. Snell. – New York: Springer, 1960.
10. Kharin A.Yu. *Vestnik Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. fiz.-mat. nauk* [Bulletin of Belarusian State University. Physical and Mathematical Sciences], 2002, 1, pp. 92–96.
11. Kharin, A. On robustifying of the sequential probability ratio test for a discrete model under “contaminations” / A. Kharin // Austrian Journal of Statistics. – 2002. – Vol. 31(4). – P. 267–278.
12. Kharin, A. Robust sequential testing of hypotheses on discrete probability distributions / A. Kharin, D. Kishylau // Austrian Journal of Statistics. – 2005. – Vol. 34(2). – P. 153–162.
13. Kharin, A. Robustness in sequential discrimination of Markov chains under “contamination” / A. Kharin // Statistics for Industry and Technology. Theory and applications of recent robust methods. – Basel: Birkhauser Verlag, 2004. – P. 165–172.
14. Quang, P. Robust sequential testing / P. Quang // Annals of Statistics. – 1985. – Vol. 13. – P. 638–649.
15. Kharin, A. Robustness evaluation in sequential testing of composite hypotheses / A. Kharin // Austrian Journal of Statistics. – 2008. – Vol. 37(1). – P. 51–60.

*Поступила в редакцию 21.10.2020*
***Адрес для корреспонденции:*** e-mail: KharinAY@bsu.by – Харин А.Ю.