

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ФРАНЦИСКА СКОРИНЫ»

УДК 512.542

ЦАРЕВ
АЛЕКСАНДР АЛЕКСАНДРОВИЧ

**РЕШЕТОЧНЫЕ СВОЙСТВА
ЧАСТИЧНО КОМПОЗИЦИОННЫХ ФОРМАЦИЙ**

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

по специальности 01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

Работа выполнена в учреждении образования «Витебский государственный университет им. П.М. Машерова»

Научный руководитель: **Воробьев Николай Николаевич**,
кандидат физико-математических наук, доцент,
докторант кафедры, учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», кафедра алгебры и геометрии

Официальные оппоненты: **Тютянов Валентин Николаевич**,
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры, Гомельский филиал
учреждения образования Федерации профсоюзов
Беларуси «Международный университет «МИТСО»,
кафедра математики и информационных технологий

Васильева Татьяна Ивановна,
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры, учреждение образования «Белорусский государственный университет транспорта»,
кафедра высшей математики

Оппонирующая организация — Белорусский государственный университет.

Защита состоится 22 декабря 2011 года в 16⁰⁰ на заседании совета по защите диссертаций Д 02.12.01 при учреждении образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины» по адресу: 246019, г. Гомель, ул. Советская, 104, ауд. 1-20. Телефон ученого секретаря: +375 232 57 37 91. E-mail: SovetD021201@tut.by.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале № 1 библиотеки учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Автореферат разослан 21 ноября 2011 года

Ученый секретарь
совета по защите диссертаций



Ходанович Д.А.

КРАТКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Теоретико-решеточными понятиями пронизана вся современная алгебра: решетки и группы являются важными ее инструментами¹. Применение методов теории решеток в теории классов групп впервые было осуществлено в рамках теории многообразий групп². В теории формаций конечных групп решеточные методы впервые были применены в 1986 году А.Н. Скибой³. В частности, в работе³ было доказано, что решетка всех (насыщенных) формаций модулярна. Впоследствии этот факт нашел много приложений при исследовании структуры насыщенных формаций^{4,5,6}. Поэтому этот результат получил развитие в исследованиях многих авторов. В монографии Л.А. Шеметкова и А.Н. Скибы⁴ было доказано, что решетка всех n -кратно насыщенных формаций модулярна. Позднее Баллестер-Болинше и Л.А. Шеметков⁷ установили модулярность решетки всех p -насыщенных формаций. В это же время в монографии⁵ было доказано, что решетка всех τ -замкнутых n -кратно насыщенных формаций модулярна, но не дистрибутивна, а решетка всех разрешимых totally насыщенных формаций дистрибутивна. А.Н. Скиба и Л.А. Шеметков^{8,9} установили модулярность решеток n -кратно ω -насыщенных формаций и n -кратно $\mathfrak{L}$ -композиционных формаций. Впоследствии И.П. Шабалина¹⁰ установила модулярность решетки всех τ -замкнутых n -кратно ω -насыщенных формаций, а М.В. Задорожнюк¹¹ — модулярность решетки всех τ -замкнутых ω -композиционных формаций. В.Г. Сафоновым была доказана модулярность, а затем и дистрибутивность решетки всех totally насыщенных

¹Биркгоф, Г. Теория решеток: пер. с англ. / Г. Биркгоф. — М.: Наука. Главная редакция физ.-матем. литературы, 1984. — 568 с.

²Нейман, Х. Многообразия групп: пер. с англ. / Х. Нейман. — М.: Мир, 1969. — 264 с.

³Скиба, А.Н. О локальных формациях длины 5 / А.Н. Скиба // В сб.: Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп. — Минск: Наука и техника, 1986. — С. 135–149.

⁴Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. — М.: Наука, 1989. — 256 с.

⁵Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. — Минск: Беларуская навука, 1997. — 240 с.

⁶Guo, Wenbin. The Theory of Classes of Groups / Wenbin Guo. — Beijing - New York - Dordrecht - Boston - London: Sci. Press-Kluwer Acad. Publ., 2000. — 261 p.

⁷Ballester-Bolínches, A. On lattices of p -local formations of finite groups / A. Ballester-Bolínches, L. A. Shemetkov // Math. Nachr. 1997. Vol. 186. P. 57–65.

⁸Скиба, А.Н. Кратно ω -локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Матем. труды. — 1999. — Т. 2, № 2. — С. 114–147.

⁹Скиба, А.Н. Кратно $\mathfrak{L}$ -композиционные формации конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Украинский матем. журн. — 2000. — Т. 52, № 6. — С. 783–797.

¹⁰Шабалина, И.П. О решетке τ -замкнутых n -кратно ω -локальных формаций конечных групп / И.П. Шабалина // Вестн. НАН Беларуси — 2003. — Сер. физ.-мат. наук. — № 1. — С. 28–30.

¹¹Задорожнюк, М.В. Об элементах высоты 3 решетки τ -значных ω -композиционных формаций / М.В. Задорожнюк // Вестн. Гродн. гос. ун-та. 2008. — Сер. 2. — № 2. — С. 16–21.

ных формаций^{12,13,14}; а П.А. Жизневским¹⁵ и, независимо, Н.Н. Воробьевым и А.А. Царевым (теорема 3.1 [3-А]) была установлена модулярность решетки всех τ -замкнутых n -кратно ω -композиционных формаций.

В монографии «Алгебра формаций» А.Н. Скиба⁵ доказал, что при любых натуральных m и n у решетки всех τ -замкнутых m -кратно насыщенных формаций и у решетки всех τ -замкнутых n -кратно насыщенных формаций системы тождеств совпадают. Позднее Го Вэньбинь и А.Н. Скиба¹⁶ показали, что для любого бесконечного множества простых чисел ω и при любых различных натуральных m и n системы тождеств решетки всех m -кратно ω -насыщенных формаций и решетки всех n -кратно ω -насыщенных формаций совпадают, а в работе Л.А. Шеметкова, А.Н. Скибы и Н.Н. Воробьева¹⁷ этот результат был распространен на решетки функторно замкнутых n -кратно ω -насыщенных формаций.

Дополняя вышеуказанные результаты, отметим, что в работе Го Вэньбиня и К.П. Шама¹⁸ были описаны ненильпотентные тотально насыщенные формации $\mathfrak{F}$ с булевой решеткой $\mathfrak{F}/\omega\mathfrak{F} \cap \mathfrak{M}$ всех тотально насыщенных формаций, заключенных между $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{M}$, а в работе Го Вэньбиня¹⁹ описаны τ -замкнутые n -кратно насыщенные формации $\mathfrak{F}$ с булевой решеткой $\mathfrak{F}/\tau_n\mathfrak{F} \cap \mathfrak{M}$ всех τ -замкнутых n -кратно насыщенных формаций, заключенных между $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{M}$. Отметим, наконец, что в серии работ В.А. Ведерникова и его учеников^{20,21,22,23} аналогичные вопросы исследовались в рамках оригинальной теории расслоенных формаций.

¹²Safonov, V.G. On modularity of the lattice of totally saturated formations of finite groups / V.G. Safonov // Comm. Algebra. - 2007. - Vol. 35, № 11. - P. 3495-3502.

¹³Safonov, V.G. On modularity of the lattice of τ -closed totally saturated formations of finite groups. / V.G. Safonov // Ukrainian Math. Journal. - 2006. - Vol. 58, № 6. - P. 852-858.

¹⁴Safonov, V.G. On a question of the theory of totally saturated formations of finite groups / V.G. Safonov // Algebra Colloquium. - 2008. - Vol. 15, № 1. - P. 119-128.

¹⁵Жизневский, П.А. О модулярности и индуктивности решетки всех τ -замкнутых n -кратно ω -композиционных формаций конечных групп / П.А. Жизневский // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. - 2010. - № 1 (58). - С. 185-191.

¹⁶Го, Вэньбинь. Два замечания о тождествах решеток ω -локальных и ω -композиционных формаций конечных групп / Вэньбинь Го, А.Н. Скиба // Известия вузов. Математика. - 2002. - № 5(480). - С. 14-22.

¹⁷Shemetkov, I. A. On laws of lattices of partially saturated formations / L.A. Shemetkov, A.N. Skiba, N.N. Vorob'ev // Asian-European Journal of Mathematics. - 2009. - Vol. 2, № 1. - P. 155-169.

¹⁸Guo, Wenbin. On totally local formations of groups / Wenbin Guo, K.P. Shuo // Comm. Algebra. - 2002. - Vol. 30, № 5. - P. 2117-2131.

¹⁹Го, Вэньбинь. Об одном вопросе теориикратно локальных формаций / Вэньбинь Го // Сибирский матем. журн. - 2004. - Т. 15, №6. - С. 1263-1270.

²⁰Ведерников, В.А. Максимальные спутники Ω -расслоенных формаций и классов Фиттинга / В.А. Ведерников // Труды ИММ УрО РАН. - 2001. - Т. 7, № 2. - С. 55-71.

²¹Ведерников, В.А. Ω -Расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп / В.А. Ведерников, М.М. Сорокина // Дискретная математика. - 2001. - Т. 13, № 3. - С. 125-144.

²²Скачкова, Ю.А. Решетки Ω -расслоенных формаций / Ю.А. Скачкова // Дискретная математика. - 2002. - Т. 14, № 2. - С. 85-94.

²³Скачкова, Ю.А. Булевы решеткикратно Ω -расслоенных формаций / Ю.А. Скачкова // Дискретная математика. - 2002. - Т. 14, № 3. - С. 42-46.

Таким образом, дальнейшее развитие решеточных методов исследования классов конечных групп является актуальной задачей. В данной диссертации такая задача реализуется при исследовании решетки всех n -кратно ω -композиционных формаций и решетки всех τ -замкнутых n -кратно ω -композиционных формаций.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с крупными научными программами, темами

Диссертация выполнена в рамках следующих госбюджетных программ:

- составной части задания «Приложение теории радикалов и классов Фиттинга к исследованию конечных групп» учреждения образования «Витебский государственный университет им. П.М. Машерова». Задание входило в Государственную программу фундаментальных исследований Республики Беларусь «Исследование математических моделей и их применение к анализу систем, структур и процессов в природе и обществе» (шифр «Математические модели 04»). Тема входила в план важнейших научно-исследовательских работ в области естественных, технических и общественных наук по Республике Беларусь, утвержденный решением Президиума НАН Беларуси № 907 от 12 мая 2006 г. (номер госрегистрации в БелИСА – 20062003), тема выполнялась в 2006–2010 гг.;

- в рамках задания «Развитие локальных методов исследования радикалов и классов Фиттинга и их применение в теории конечных групп» ГПНИ «Конвергенция» (сроки выполнения 2011–2015 гг.);

- в 2007 году автором работы был получен грант на выполнение научно-исследовательской работы Министерства образования Республики Беларусь по теме «Применение методов общей теории решеток при исследовании классов конечных групп». Работа проводилась в рамках ГПФИ «Математические модели 04» задания «Приложение теории радикалов и классов Фиттинга к исследованию конечных групп» (номер госрегистрации в БелИСА – 20062003).

Цель и задачи исследования

Целью данной диссертации является описание свойств решетки всех n -кратно ω -композиционных формаций и решетки всех τ -замкнутых n -кратно ω -композиционных формаций. Для достижения этой цели в диссертации были решены следующие задачи:

- доказана $\mathfrak{G}$ -отделимость решетки всех n -кратно ω -композиционных формаций для любого целого неотрицательного n ;

– доказано совпадение систем тождеств решетки всех m -кратно ω -композиционных формаций и решетки всех n -кратно ω -композиционных формаций для любых различных натуральных m и n и бесконечного множества простых чисел ω . Тем самым найдено частичное решение проблемы Скибы – Шеметкова о тождествах (2000) в случае бесконечного множества простых чисел ω ;

– доказана алгебраичность решетки всех τ -замкнутых n -кратно ω -композиционных формаций;

– установлена модулярность решетки всех τ -замкнутых n -кратно ω -композиционных формаций;

– доказана недистрибутивность решетки всех τ -замкнутых n -кратно ω -композиционных формаций в случае бесконечного множества простых чисел ω .

Объектом исследования являются n -кратно ω -композиционные формации и τ -замкнутые n -кратно ω -композиционные формации конечных групп.

Предметом исследования является решетка всех n -кратно ω -композиционных формаций и решетка всех τ -замкнутых n -кратно ω -композиционных формаций.

Положения, выносимые на защиту

1. Теорема о $\mathfrak{G}$ -отделимости решетки всех n -кратно ω -композиционных формаций.

3.1.8 Теорема [4-A, 5-A]. *Решетка всех n -кратно ω -композиционных формаций $\mathfrak{G}$ -отделима при любом целом неотрицательном n .*

2. Теорема о тождествах решеток частично композиционных формаций.

3.2.2 Теорема [4-A, 5-A]. *Пусть $n \geq 1$. Тогда всякое тождество, справедливое в решетке всех формаций $\mathcal{C}_0^\omega$ выполняется и в решетке всех n -кратно ω -композиционных формаций $\mathcal{C}_n^\omega$.*

3. Частичное решение проблемы Скибы – Шеметкова о тождествах.

3.2.5 Теорема [4-A, 5-A]. *Пусть $n \geq 1$. Тогда если ω – бесконечное множество, то системы тождеств решеток всех формаций $\mathcal{C}_0^\omega$ и всех n -кратно ω -композиционных формаций $\mathcal{C}_n^\omega$ совпадают.*

4. Теорема об алгебраичности и модулярности решетки всех τ -замкнутых n -кратно ω -композиционных формаций.

4.3.2 Теорема [3-A]. *Решетка всех τ -замкнутых n -кратно ω -композиционных формаций алгебраична и модулярна.*

5. Теорема о недистрибутивности решетки всех τ -замкнутых n -кратно ω -композиционных формаций.

4.4.6 Теорема [6-А]. Пусть ω – бесконечное множество. Тогда решетка всех τ -замкнутых n -кратно ω -композиционных формаций $c_{\omega_n}^\tau$ не является дистрибутивной при любом целом неотрицательном n .

Личный вклад соискателя

Диссертационная работа выполнена соискателем лично под руководством доцента, кандидата физико-математических наук Воробьева Николая Николаевича. Научным руководителем были поставлены задачи и предложена методика их исследования. В совместных работах [1-А, 2-А, 3-А, 7-А, 10-А, 11-А, 14-А, 15-А] основные идеи и методы принадлежат научному руководителю, а реализованы соискателем. В научных работах [4-А, 5-А, 9-А, 13-А] основные идеи принадлежат А.Н. Скибе и Н.Н. Воробьеву, а реализация – соискателю. Остальные работы выполнены самостоятельно и опубликованы без соавторов.

Апробация результатов диссертации

Основные результаты диссертации апробированы:

- на научных семинарах кафедры алгебры и методики преподавания математики учреждения образования «Витебский государственный университет им. П.М. Машерова»;

- на IX (54) научно-практической конференции студентов, магистрантов и молодых ученых «Творчество молодых – будущее Родины» (Витебск, 6 апреля 2006 г.);

- на V Международной научной конференции «Ломоносовские чтения» (Севастополь, 3-5 мая 2006 г.);

- на Республиканской научно-практической конференции студентов, магистрантов, аспирантов и молодых ученых «III Машеровские чтения» (Витебск, 24-25 марта 2009 г.);

- на Международной научной конференции «Дискретная математика, алгебра и их приложения» (Минск, 19-22 октября 2009 г.);

- на Международной алгебраической конференции, посвященной 70-летию А.В. Яковлева (Санкт-Петербург, 19-24 июня 2010 г.);

- на Республиканской научно-практической конференции студентов, магистрантов и аспирантов «IV Машеровские чтения» (Витебск, 28-29 октября 2010 г.);

- на 8-ой Международной алгебраической конференции в Украине, посвященная памяти профессора В.М. Усенко (Луганск, 5-12 июля 2011 г.);

- на Международной научно-практической Интернет-конференции «Инновационные технологии обучения физико-математическим дисциплинам», посвященной 60-летию доктора физико-математических наук Н.Т. Воробьева (Витебск, 21-22 июня 2011 г.).

Опубликованность результатов диссертации

Основные результаты диссертации опубликованы в 6 статьях в научных журналах и в 10 тезисах докладов. Общий объем опубликованных материалов — 4,29 авторских листа, в том числе: статьи в научных журналах — 3,45 авторских листа, тезисы и материалы докладов конференций — 0,84 авторского листа.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из перечня условных обозначений, введения, общей характеристики работы, четырех глав основной части, заключения и библиографического списка в алфавитном порядке в количестве 38 наименований использованных источников и 16 наименований публикаций соискателя. Полный объем диссертации — 23 страниц, из них 9 страниц занимает библиографический список.

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю — кандидату физико-математических наук, доценту Николаю Николаевичу Воробьеву за внимание и помощь, оказанные им при написании данной диссертации.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Все рассматриваемые в диссертации группы предполагаются конечными. Используются стандартные определения и обозначения^{4.5.9.24.25}.

Диссертация состоит из перечня определений и условных обозначений, введения, общей характеристики работы, четырех глав основной части, заключения и библиографического списка.

Глава 1 «Аналитический обзор литературы» содержит обзор основных источников по теме диссертации. В данной главе приводятся основные этапы развития теории решеток формаций. На основе проведенного анализа литературы формулируются основные задачи диссертационной работы. Базовыми понятиями диссертационной работы являются понятие n -кратно ω -композиционной формации и τ -замкнутой n -кратно ω -композиционной формации.

В главе 2 «Предварительные сведения» дается описание объектов исследования. В этой главе собраны некоторые известные результаты, которые наиболее часто используются в диссертационной работе. Основное содержание диссертации представлено в главах 3 и 4.

²⁴Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков — М.: Наука, 1978. — 272 с.

²⁵Doerk, K. Finite soluble groups. De Gruyter Expon. Math. Vol. 4. / K. Doerk, T. Hawkes. — Berlin — New York: Walter de Gruyter & Co., 1992. — 891 p.

Напомним некоторые определения и обозначения работы⁹. Пусть f — произвольная функция вида

$$f : \omega \cup \{\omega'\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}. \quad (1)$$

Функции f сопоставим класс групп

$$CF_\omega(f) = (G \mid G/R_\omega(G) \in f(\omega')) \text{ и}$$

$$G/C^p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(\text{Com}^+(G)).$$

Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$ для некоторой функции f вида (1), то $\mathfrak{F}$ называется ω -композиционной формацией с ω -композиционным спутником f .

Всякая формация считается 0-кратно ω -композиционной, а при $n > 0$ формация $\mathfrak{F}$ называется n -кратно ω -композиционной, если $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$, где все непустые значения спутника f являются $(n-1)$ -кратно ω -композиционными формациями.

Глава 3 «Тожества решеток n -кратно ω -композиционных формаций» включает в себя три раздела.

В разделе 3.1 «Отделимые решетки n -кратно ω -композиционных формаций» установлена $\mathfrak{G}$ -отделимость решетки всех n -кратно ω -композиционных формаций.

Непустое множество формаций Θ называется *полной решеткой формаций*⁵, если пересечение любой совокупности формаций из Θ снова принадлежит Θ , и во множестве Θ имеется такая формация $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ для любой формации $\mathfrak{H} \in \Theta$. Пусть Θ — полная решетка формаций. Тогда если $\mathfrak{M}, \mathfrak{H} \in \Theta$, то $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$ — нижняя грань для $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{H}\}$ в Θ . Символом $\mathfrak{M} \vee_\Theta \mathfrak{H}$ обозначается верхняя грань для $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{H}\}$ в Θ .

Напомним определение отделимой решетки формаций. Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторый непустой класс групп. Полная решетка формаций Θ называется $\mathfrak{X}$ -отделимой⁵, если для любого термина $\xi(x_1, \dots, x_m)$ сигнатуры $\{\cap, \vee_\Theta\}$, любых формаций $\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_m$ из Θ и любой группы $A \in \mathfrak{X} \cap \xi(\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_m)$ найдутся такие $\mathfrak{X}$ -группы $A_1 \in \mathfrak{F}_1, \dots, A_m \in \mathfrak{F}_m$, что $A \in \xi(\Theta\text{form} A_1, \dots, \Theta\text{form} A_m)$. Основным результатом раздела 3.1 является теорема 3.1.8.

3.1.8 Теорема [4-A, 5-A]. *Решетка всех n -кратно ω -композиционных формаций $\mathfrak{G}$ -отделима при любом целом неотрицательном n .*

Раздел 3.2 посвящен исследованию тождеств решеток n -кратно ω -композиционных формаций. Напомним следующий вопрос, поставленный в работе⁹ (см. проблема 3 на стр. 796):

верно ли, что для любых целых неотрицательных m, n и произвольного непустого множества простых чисел ω у решеток c_m^ω и c_n^ω системы тождеств совпадают?

Основной целью раздела 3.2 является решение этой задачи в случае бесконечного множества простых чисел ω . На пути достижения этой цели доказаны следующие теоремы.

3.2.2 Теорема [4-A, 5-A]. Пусть $n \geq 1$. Тогда всякое тождество, справедливое в решетке всех формаций c_0^ω выполняется и в решетке всех n -кратно ω -композиционных формаций c_n^ω .

3.2.5 Теорема [4-A, 5-A]. Пусть $n \geq 1$. Тогда если ω — бесконечное множество, то системы тождеств решеток всех формаций c_0^ω и всех n -кратно ω -композиционных формаций c_n^ω совпадают.

В качестве следствия теоремы 3.2.2 доказано, что решетка всех n -кратно ω -композиционных формаций c_n^ω модулярна, но не дистрибутивна при любом целом неотрицательном n .

Глава 4 «Модулярные решетки частично композиционных формаций» включает в себя шесть разделов.

В разделе 4.1 «Минимальные спутники τ -замкнутых n -кратно ω -композиционных формаций» найден способ построения минимального $c_{\omega_{n-1}}^\tau$ -значного спутника порожденной τ -замкнутой n -кратно ω -композиционной формации.

Напомним определение подгруппового функтора, предложенное А.Н. Скибой⁵: в произвольной группе G выберем систему подгрупп $\tau(G)$. Говорят, что τ — подгрупповой функтор, если выполняются следующие условия: 1) $G \in \tau(G)$; 2) для любого эпиморфизма $\varphi : A \rightarrow B$ и любых групп $H \in \tau(A)$, $T \in \tau(B)$ имеет место $H^\varphi \in \tau(B)$ и $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$. Формация $\mathfrak{F}$ называется τ -замкнутой, если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для всякой группы G из $\mathfrak{F}$.

Мы будем рассматривать лишь такие подгрупповые функторы τ , что для любой группы G все подгруппы, входящие в $\tau(G)$, субнормальны в G .

Спутник f называется Θ -значным⁹, если все его значения принадлежат решетке Θ . Основным результатом раздела 4.1 является следующая

4.1.1 Теорема. Пусть $\mathfrak{X}$ — такая непустая совокупность групп, что $\mathfrak{F} = c_{\omega_n}^\tau \text{form} \mathfrak{X}$, где $n \geq 1$, $\pi = \omega \cap \pi(\text{Com}^+(\mathfrak{X}))$ и f — минимальный ω -композиционный $c_{\omega_{n-1}}^\tau$ -значный спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $f(\omega') = c_{\omega_{n-1}}^\tau \text{form}(G/R_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{X})$;
- 2) $f(p) = c_{\omega_{n-1}}^\tau \text{form}(G/C^p(G) \mid G \in \mathfrak{X})$ для всех $p \in \pi$;
- 3) $f(p) = \emptyset$ для всех $p \in \omega \setminus \pi$;

4) если $\mathfrak{F} = CF_\omega(h)$ и спутник h $c_{\omega_{n-1}}^\tau$ -значен, то для всех $p \in \pi$ имеет место

$$f(p) = c_{\omega_{n-1}}^\tau \text{form}(G \mid G \in h(p) \cap \mathfrak{F}, O_p(G) = 1)$$

и

$$f(\omega') = c_{\omega_{n-1}}^\tau \text{form}(G \mid G \in h(\omega') \cap \mathfrak{F}, R_\omega(G) = 1).$$

$$5) \omega \cap \pi(\text{Com}^+(\mathfrak{X})) = \omega \cap \pi(\text{Com}^+(\mathfrak{F})).$$

В разделе 4.3 установлена алгебраичность и модулярность решетки всех τ -замкнутых n -кратно ω -композиционных формаций.

Элемент с полной решеткой L называется *компактным*, если для любого подмножества $X \subseteq L$ из неравенства $c \leq \sup_L X$ вытекает существование такого конечного подмножества $X_0 \subseteq X$, что $c \leq \sup_L X_0$. Напомним, что полная решетка называется *алгебраической*, если любой ее элемент является решеточным объединением компактных элементов.

Решетка формаций Θ называется *модулярной*, если для любых формаций $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3$ из Θ таких, что $\mathfrak{F}_2 \subseteq \mathfrak{F}_1$, имеет место

$$\mathfrak{F}_1 \cap (\mathfrak{F}_2 \vee_\Theta \mathfrak{F}_3) = \mathfrak{F}_2 \vee_\Theta (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_3).$$

Основным результатом раздела 4.3 является следующая

4.3.2 Теорема [3-A]. Решетка всех τ -замкнутых n -кратно ω -композиционных формаций алгебраична и модулярна.

Отметим, что одним из основных этапов доказательства теоремы 4.3.2 является следующий результат, имеющий и самостоятельное значение, поскольку этот результат может быть применен и при решении других задач, связанных с изучением тождеств, как это было сделано после доказательства индуктивности решетки всех n -кратно ω -композиционных формаций (см. теоремы 3.2.2 и 3.2.5).

4.2.2 Теорема [3-A]. Решетка всех τ -замкнутых n -кратно ω -композиционных формаций индуктивна.

Напомним определение индуктивной решетки формаций. Пусть Θ — полная решетка формаций. Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — некоторая совокупность Θ -значных спутников. Тогда через $\vee_\Theta(f_i \mid i \in I)$ обозначают такой спутник f , что

$$f(a) = \Theta \text{form}(\bigcup_{i \in I} f_i(a))$$

для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$. Символом Θ^ω обозначается совокупность всех таких формаций, которые обладают ω -композиционным Θ -значным спутником. Как показано в работе⁹ (см. с. 786), Θ^ω — полная решетка формаций.

Решетка Θ^{ω_c} называется *индуктивной*⁵, если для любого набора $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ формаций $\mathfrak{F}_i \in \Theta^{\omega_c}$ и для всякого набора $\{f_i \mid i \in I\}$ внутренних Θ -значных ω -композиционных спутников f_i , где f_i — ω -композиционный спутник формации $\mathfrak{F}_i$, имеет место

$$\vee_{\Theta^{\omega_c}}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = CF_{\omega}(\vee_{\Theta}(f_i \mid i \in I)).$$

Решетка формаций Θ называется *дистрибутивной*, если для любых формаций $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3$ из Θ имеет место

$$\mathfrak{F}_1 \bigcap (\mathfrak{F}_2 \vee_{\Theta} \mathfrak{F}_3) = (\mathfrak{F}_1 \bigcap \mathfrak{F}_2) \vee_{\Theta} (\mathfrak{F}_1 \bigcap \mathfrak{F}_3).$$

Основным результатом раздела 4.4 «О недистрибутивности решетки τ -замкнутых n -кратно ω -композиционных формаций» является следующая

4.4.6 Теорема [6-A]. Пусть ω — бесконечное множество. Тогда решетка всех τ -замкнутых n -кратно ω -композиционных формаций $\mathcal{C}_{\omega_n}^{\tau}$ не является дистрибутивной при любом целом неотрицательном n .

В разделе 4.5 «Комментарии и дополнения» найдены новые свойства решеточных операций, связанные с произведением разрешимых тотально локальных классов Фиттинга. Все рассматриваемые в этом разделе группы предполагаются конечными и разрешимыми. Напомним, что функции вида

$$f : \mathbb{P} \rightarrow \{\text{классы Фиттинга}\}$$

называются *функциями Харпли* или, более коротко, *H-функциями*⁸. Если для класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ имеет место

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{F})} \bigcap \left(\bigcap_{p \in \pi(\mathfrak{F})} f(p) \mathfrak{S}_p \mathfrak{S}_{p'} \right),$$

где f — некоторая H -функция, то говорят, что $\mathfrak{F}$ — локальный класс Фиттинга с H -функцией f и пишут $\mathfrak{F} = LR(f)$. Всякий класс Фиттинга считается 0-кратно локальным, а при $n \geq 1$ класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется *n -кратно локальным*⁸, если $\mathfrak{F} = LR(f)$, где все непустые значения H -функции f являются $(n-1)$ -кратно локальными классами Фиттинга. Класс Фиттинга называется *тотально локальным*⁸, если он n -кратно локализован для всех натуральных n . Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольная совокупность групп. Пересечение всех тотально локальных классов Фиттинга, содержащих $\mathfrak{X}$, обозначают через $l^{\infty}\text{Fit}(\mathfrak{X})$ и называют *тотально локальным классом Фиттинга, порожденным $\mathfrak{X}$* ⁸.

Относительно включения $\subseteq$ множество всех тотально локальных классов Фиттинга образует решетку с операциями $\wedge^{\infty}, \vee^{\infty}$, которые для любых

тотально локальных классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathfrak{F} \wedge^{\infty} \mathfrak{H} &= \mathfrak{F} \bigcap \mathfrak{H}, \\ \mathfrak{F} \vee^{\infty} \mathfrak{H} &= l^{\infty}\text{Fit}(\mathfrak{F} \bigcup \mathfrak{H}).\end{aligned}$$

Основным результатом раздела 4.5 является следующая

4.5.5 Теорема [2-A]. Пусть $\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_r, \mathfrak{Y}_1, \dots, \mathfrak{Y}_t, \mathfrak{V}$ — тотально локальные классы Фиттинга таковы, что $\mathfrak{X}_1^2 = \mathfrak{X}_1, \mathfrak{Y}_1^2 = \mathfrak{Y}_1$. И пусть $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{X}_1 \dots \mathfrak{X}_r$ и $\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{Y}_1 \dots \mathfrak{Y}_t$. Тогда

$$l^{\infty}\text{Fit}(\mathfrak{F}_1\mathfrak{V}, \mathfrak{F}_2\mathfrak{V}) = l^{\infty}\text{Fit}(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2)\mathfrak{V}.$$

Результаты раздела 4.5 опубликованы в работах [1-A, 2-A].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

В диссертации получены следующие результаты:

- доказана $\mathfrak{G}$ -отделимость решетки всех n -кратно ω -композиционных формаций для любого целого неотрицательного n (теорема 3.1.8 [4-A], [5-A], [14-A]);
- доказано совпадение систем тождеств решетки всех m -кратно ω -композиционных формаций и решетки всех n -кратно ω -композиционных формаций для любых различных натуральных m и n и бесконечного множества простых чисел ω (теорема 3.2.2, теорема 3.2.5 [4-A], [5-A], [13-A]). Тем самым найдено частичное решение проблемы Скибы – Шеметкова о тождествах (2000) в случае бесконечного множества простых чисел ω ;
- доказана алгебраичность решетки всех τ -замкнутых n -кратно ω -композиционных формаций (теорема 4.3.2 [3-A], [11-A]);
- установлена модулярность решетки всех τ -замкнутых n -кратно ω -композиционных формаций (теорема 4.3.2 [3-A], [9-A]);
- доказана недистрибутивность решетки всех τ -замкнутых n -кратно ω -композиционных формаций в случае бесконечного множества простых чисел ω (теорема 4.4.6 [6-A], [16-A]).

Рекомендации по практическому использованию результатов

Доказанные в диссертации результаты могут найти приложение при дальнейшем изучении решеток формаций и классов Фиттинга конечных групп. Разработанные методы и полученные в диссертации результаты позволяют подойти к целому ряду еще нерешенных проблем теории классов конечных групп. Особый интерес представляет нахождение новых бесконечных серий модулярных, дистрибутивных и булевых решеток классов Фиттинга, а также полное решение проблемы о совпадении систем тождеств решетки всех m -кратно ω -композиционных формаций и решетки всех n -кратно ω -композиционных формаций при любых целых неотрицательных m и n для произвольного непустого множества простых чисел ω . Следует также отметить, что результаты данной диссертации могут найти приложения и в общей теории решеток, поскольку они по существу представляют собой новый подход к нахождению и описанию классов решеток с заданными свойствами.

О практической значимости результатов свидетельствует возможность их использования в учебном процессе при чтении спецкурсов для студентов математических факультетов университетов, а также при написании курсовых, дипломных работ и диссертаций.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ

Статьи в научных журналах

1-А. Воробьев, Н.Н. О решеточных свойствах разрешимых totally локальных классов Фиттинга / Н.Н. Воробьев, А.А. Царев // Вестн. Полоцкого гос. ун-та. Сер. С. Фундаментальные науки. – 2006. - № 4. – С. 12-14.

2-А. Воробьев, Н.Н. О свойствах разрешимых totally локальных классов Фиттинга / Н.Н. Воробьев, А.А. Царев // Весн. Віцебскага дзярж. ун-та. 2006. № 2(40). С. 116-120.

3-А. Воробьев, Н.Н. О модулярности решетки τ -замкнутых n -кратно ω -композиционных формаций / Н.Н. Воробьев, А.А. Царев // Украинский матем. журн. – 2010. – Т. 62, № 4. – С. 453-463.

4-А. Воробьев, Н.Н. О тождествах решеток частично композиционных формаций / Н.Н. Воробьев, А.П. Скиба, А.А. Царев // Докл. НАН Беларуси. – 2011. – Т. 55, № 2. – С. 10-14.

5-А. Воробьев, Н.Н. Тождества решеток частично композиционных формаций / Н.Н. Воробьев, А.Н. Скиба, А.А. Царев // Сибирский матем. журн. – Т. 22, № 5. – С. 1011-1024.

6-А. Царев, А.А. О недиистрибутивности решетки всех n -кратно ω -композиционных формаций / А.А. Царев // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 3(8). – С. 84-88.

Тезисы докладов конференций

7-А. Воробьев, Н.Н. О решетке разрешимых totally локальных классов Фиттинга / Н.Н. Воробьев, А.А. Царев // Ломоносовские чтения : материалы V Междунар. научн. конф., Севастополь, 3-5 мая 2006 г. / Черноморский филиал МГУ им. М.В. Ломоносова ; редкол.: В.А. Трифонова [и др.]. – Севастополь, 2006. – С. 137.

8-А. Царев, А.А. О свойстве решетки разрешимых totally локальных классов Фиттинга / А.А. Царев // Творчество молодых : будущее Родины : материалы IX(54) научно-практ. конф. студентов, магистрантов и молодых ученых, Витебск, 2006 г. / Вит. гос. ун-т ; редкол.: Г.И. Михасев [и др.]. – Витебск, 2006. – С. 110-112.

9-А. Воробьев, Н.Н. О модулярности решетки τ -замкнутых n -кратно ω -композиционных формаций / Н.Н. Воробьев, А.Н. Скиба, А.А. Царев / III Машеровские чтения : материалы респ. научно-практ. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых, Витебск, 24-25 марта 2009 г. / Вит. гос. ун-т ; редкол.: А.Л. Гладков [и др.]. – Витебск, 2009. – Математика. Информатика. Философия. Экономика. Юриспруденция. – С. 22-24.

10-А. Воробьев, Н.Н. Об индуктивности решетки τ -замкнутых n -кратно ω -композиционных формаций / Н.Н. Воробьев, А.А. Царев // Дискретная математика, алгебра и их приложения : тез. докл. междунар. науч. конф., посв. 80-летию со дня рождения Р. Тышкевич, Минск, 19–22 октября 2009 г. / Ин-т матем. НАН Беларуси, Белорус. гос. ун-т ; редкол.: В.В. Лешин [и др.]. – Минск, 2009. – С. 16.

11-А. Tsarev, A.A. Algebraic lattices of formations / A.A. Tsarev, N.N. Vorob'ev // Тез. докл. Междунар. алгебраической конф., посвящ. 70-летию А.В. Яковлева, Санкт-Петербург, 19–24 июня 2010 г. / Санкт-Петербургский гос. ун-т ; под ред. А.И. Генералова. – СПб, 2010. – С. 160–161.

12-А. Царев, А.А. О структуре порожденных частично композиционных формаций / А.А. Царев // IV Машеровские чтения: материалы междунар. научно-практ. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых, Витебск, 28–29 октября 2010 г. / Вит. гос. ун-т; редкол.: А.П. Солодков [и др.]. – Витебск, 2010. – Т. I. – С. 64–65.

13-А. Skiba, A.N. On laws of lattices of partially composition formations / A.N. Skiba, A.A. Tsarev, N.N. Vorob'ev // 8-я Междунар. алгебраическая конф. в Украине, посв. памяти В.М. Усенко : сб. тез. докл. – Луганск, 5–12 июля 2011 г. / Луганский нац. ун-т им. Тараса Шевченко ; редкол.: Ю.А. Дрозд [и др.]. – Луганск, 2011. – С. 133.

14-А. Tsarev, A.A. On separated lattices of partially composition formations // A.A. Tsarev, N.N. Vorob'ev / 8-я Междунар. алгебраическая конф. в Украине, посв. памяти В.М. Усенко : сб. тез. докл. – Луганск, 5–12 июля 2011 г. / Луганский нац. ун-т им. Тараса Шевченко ; редкол.: Ю.А. Дрозд [и др.]. – Луганск, 2011. – С. 136.

15-А. Воробьев, Н.Н. О решетке частично композиционных формаций / Н.Н. Воробьев, А.А. Царев // Инновационные технологии обучения физ.-матем. дисциплинам : материалы междунар. науч.-практ. Интернет-конф., посв. 60-летию доктора физ.-мат. наук Н.Т. Воробьева, Витебск, 21–22 июня 2011 г. / Вит. гос. ун-т ; редкол.: Л.А. Шеметков [и др.]. – Витебск, 2011. – С. 27–28.

16-А. Царев, А.А. Недистрибутивные решетки частично композиционных формаций / А.А. Царев // Инновационные технологии обучения физ.-матем. дисциплинам : материалы междунар. науч.-практ. Интернет-конф., посв. 60-летию доктора физ.-мат. наук Н.Т. Воробьева, Витебск, 21–22 июня 2011 г. / Вит. гос. ун-т ; редкол.: Л.А. Шеметков [и др.]. – Витебск, 2011. – С. 66–67.

РЭЗІЮМЭ

Цараў Аляксандр Аляксандравіч

Рапотачныя ўласцівасці часткова кампазіцыйных фармацый

Ключавыя словы: канечная група, падгрупавы функтар, фармацыя груп, ω -кампазіцыйны спадарожнік фармацыі, n -кратна ω -кампазіцыйная фармацыя, рашотка фармацый, алгебраічная рашотка, тоеснасць рашоткі, мадулярная рашотка, дыстрыбутыўная рашотка, індуктыўная рашотка фармацый, $\mathfrak{X}$ -аддзельная рашотка фармацый.

У дысертацыі даследуецца рашотка ўсіх n -кратна ω -кампазіцыйных фармацый і рашотка ўсіх τ -замкнутых n -кратна ω -кампазіцыйных фармацый. Няхай $n \geq 0$ і ω — непустое мноства простых лікаў. Устаноўлена $\mathfrak{X}$ -аддзельнасць рашоткі ўсіх n -кратна ω -кампазіцыйных фармацый. Даказана, што ўсякая тоеснасць рашоткі ўсіх фармацый канечных груп справядліва ў рашотцы ўсіх n -кратна ω -кампазіцыйных фармацый канечных груп для любога непустога мноства простых лікаў ω і любога натуральнага n .

Няхай $n \geq 1$ і ω — бесканечнае мноства простых лікаў. Устаноўлена, што сістэмы тоеснасцяў рашотак ўсіх фармацый канечных груп і ўсіх n -кратна ω -кампазіцыйных фармацый канечных груп супадаюць. Тым самым вырашана праблема Скібы-Шамяткова аб тоеснасцях у выпадку бесканечнага мноства простых лікаў ω .

Няхай τ — падгрупавы функтар (у сэнсе А.Н. Скібы) такі, што для любой канечнай групы G ўсе падгрупы з $\tau(G)$ субнармальны ў G . Даказана, што рашотка ўсіх τ -замкнутых n -кратна ω -кампазіцыйных фармацый алгебраічная і мадулярная. Паказана, што адзначаная рашотка фармацый не з'яўляецца дыстрыбутыўнай у выпадку бесканечнага мноства простых лікаў ω .

Усе асноўныя рэзультаты дысертацыі з'яўляюцца новымі. Яны маюць тэарэтычны характар і могуць быць выкарыстаны ў даследаваннях па тэорыі канечных груп і іх класаў, а таксама пры чытанні спецкурсаў ва ўніверсітэтах.