МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ БССР
БЕЛОРУССКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И.ЛЕНИНА

На правах рукописи

СУРИН Татьяна Леонидовна

УДК 517.926.45

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ПРИ СПЕЦИАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

01.01.02 - дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Минск - 1984

Работа выполнена в Белорусском ордена Трудового Красного Знамени государственном университете имени В.И. Ленина

Научный руководитель - доктор физико-математических наук,
профессор Ю.С. БОГДАНОВ

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор В.А.ПЛИСС (Ленинградский госуниверситет),

кандидат физико-математических наук,
доцент Г.Н.ПЕТРОВСКИЙ (Могилевский пединститут)

Ведущее научно-исследовательское учреждение - Институт математики АН БССР

Защита состоится 21 декабря 1984 года в 10 часов на заседании специализированного Совета К 056.03.10 по присуждению ученой степени кандидата наук в Белорусском ордена Трудового Красного Знамени государственном университете имени В.И.Ленина (220080, г.Минск-80, Ленинский проспект, 4, главный корпус, комната 206).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Белорусского государственного университета им. В.И.Ленина.

Автореферат разослан "____"________________ 1984 года.

Учёный секретарь специализированного Совета
профессор И.А.ПРУСОВ

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Одной из проблем теории обыкновенных дифференциальных уравнений является проблема асимптотического поведения решений линейных дифференциальных систем. В основе современной асимптотической теории линейных дифференциальных систем лежат исследования А.М.Ляпунова, изложенные в его монографии "Общая задача об устойчивости движения". В этой работе А.М.Ляпуновым разработаны два метода исследования систем дифференциальных уравнений: первый или асимптотический метод Ляпунова и второй или прямой метод Ляпунова.

В основе первого метода Ляпунова лежит понятие характеристичного числа. Характеристичные числа (в последнее время чаще привлекаются показатели Ляпунова, которые равны характеристичным числам, взятым с противоположным знаком) используются для выявления асимптотического поведения решений линейных дифференциальных систем. Показатели $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ нормальной упорядоченной фундаментальной системы решений называют показателями Ляпунова линейной системы или спектром системы. Спектр системы полностью определяет асимптотический характер семейства решений данной системы в смысле установления экспоненциальной устойчивости.

В последнее время неоднократно подчеркивалось значение задачи нахождения и изучения поведения показателей Ляпунова непосредственно по коэффициентам системы (без построения ее решений). В диссертационной работе и решается задача вычисления показателей Ляпунова систем Лаппо-Данилевского по матрице коэффициентов, а также выясняется поведение показателей линейных систем при специальных возмущениях.

Цель работы.

Изучение канонической структуры матрицы коэффициентов правильной системы Лаппо-Данилевского и получение, на основании этого, формул для нахождения показателей Ляпунова систем Лаппо-Данилевского, а также изучение асимптотических инвариантов линейных дифференциальных систем при специальных возмущениях.

Методика исследования.

Основными методами исследования являются первый метод Ляпунова и различные модификации этого метода.

Научная новизна и практическая ценность работы.

В диссертации изучен канонический вид матрицы коэффициентов правильной системы Лаппо-Данилевского. Получены эффективные формулы для вычисления показателей систем с функционально-коммутативной матрицей коэффициентов, консервативной матрицей Лаппо-Данилевского, а также правильных систем Лаппо-Данилевского. Выведены новые критерии правильности систем Лаппо-Данилевского.

Совместно с исходной правильной системой Лаппо-Данилевского рассмотрена система, матрица коэффициентов которой умножена на постоянное число, и показана связь показателей Ляпунова этой и исходной систем.

Выяснен вопрос об асимптотических инвариантах систем Лаппо-Данилевского при φ -возмущениях. Изучено влияние φ -возмущений на показатели Ляпунова линейных дифференциальных систем.

Результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть использованы в научно-исследовательской работе по качественной теории в рамках программы "Дифференциал" Академии наук БССР.

<u>На защиту выносятся следующие результаты:</u>

1. Теорема о приводимости правильных систем Лаппо-Данилевского постоянным преобразованием к блочно-диагональному виду, где размерность диагональных блоков равна кратности показателей системы.
2. Метод вычисления показателей Ляпунова систем с функционально-коммутативной матрицей коэффициентов, консервативной матрицей Лаппо-Данилевского, а также правильных систем Лаппо-Данилевского по матрице коэффициентов.
3. Критерий правильности систем Лаппо-Данилевского.
4. Способ построения φ -возмущений, сохраняющих показатели линейных дифференциальных систем.
5. Теоремы об асимптотических инвариантах систем Лаппо-Данилевского при φ -возмущениях.

Апробация работы.

Результаты диссертации докладывались на Республиканском научном семинаре по обыкновенным дифференциальным уравнениям, на конференциях молодых ученых Белгосуниверситета им.В.И.Ленина.

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1–5], список которых приводится в конце автореферата.

Структура диссертации.

Работа изложена на 118 страницах машинописного текста, состоит из введения, двух глав и списка литературы, содержащего 105 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении дан краткий обзор исследований по теории линейных систем и изложены основные результаты работы.

В диссертации рассматривается линейная дифференциальная система

$$\frac{dx}{dt} = P(t)\,x, \quad t \in [t_0, +\infty[\,, \qquad (1)$$

где $P(t)$ кусочно-непрерывная матрица, элементы которой являются ограниченными функциями, x – n-мерный вектор-столбец.

Определение. n кусочно-непрерывных (непрерывных) функций $\xi_i(t)$ $(i = \overline{1,n})$ назовем собственными значениями переменной кусочно-непрерывной (непрерывной) матрицы $P(t)$, если при любом T из области определения матрицы $P(t)$ числа $\xi_i(T)$ $(i=\overline{1,n})$ являются собственными значениями матрицы $P(T)$.

Известно, что если система (I) стационарна, то показатели Ляпунова системы (I) равны действительным частям собственных значений матрицы коэффициентов. Если же $P(t)$ переменная матрица, то такой связи между собственными значениями матрицы коэффициентов и показателями Ляпунова, вообще говоря, не существует.

Пусть $P(t)$ матрица Лаппо-Данилевского, т.е. для некоторого фиксированного t_0 справедливо

$$P(t)\int_{t_0}^{t}P(\tau)\,d\tau=\int_{t_0}^{t}P(\tau)\,d\tau\,P(t). \quad (2)$$

Для выполнения (2) достаточно, чтобы матрица $P(t)$ была функционально-коммутативной, т.е. чтобы её значения при любых значениях аргумента из области определения матрицы коммутировали между собой:

$$P(t_1)\,P(t_2)=P(t_2)\,P(t_1).$$

Показано [1], что если $P(t)$ функционально-коммутативная матрица, то система (I) постоянным преобразованием приводима к блочно-диагональному виду $P_1(t)$, где каждый диаго-

---

[1] Чеботарев Г.Н. К решению в замкнутой форме краевой задачи Римана для системы n пар функций. - Уч. зап. Казан. ун-та, 1956, 116, кн.4, с. 31-58.

нальный блок матрицы $P_1(t)$ имеет единственное собственное значение.

Теорема. Показатели Ляпунова системы (I) с функционально-коммутативной матрицей коэффициентов можно найти по формуле

$$\lambda_i = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \operatorname{Re} \lambda_i^{(1)}(t) \quad (i = \overline{1,n}),$$

где $\lambda_i^{(1)}(t)$ $(i = \overline{1,n})$ – собственные значения блоков матрицы

$$Q_1(t) = \int_{t_0}^{t} P_1(\tau)\, d\tau .$$

Теорема. Система (I) с функционально-коммутативной матрицей коэффициентов правильна тогда и только тогда, когда существуют

$\lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t} \operatorname{Re} \lambda_i(t)$ $(i = \overline{1,n})$, где $\lambda_i(t)$ $(i = \overline{1,n})$ собственные значения матрицы $Q(t) = \int_{t_0}^{t} P(\tau)\, d\tau$ и показатели системы (I) можно найти по формуле

$$\lambda_i = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \operatorname{Re} \lambda_i(t) \quad (i = \overline{1,n}) .$$

Предположим, что матрица $Q(t)$ консервативна на интервале $[t_0, +\infty[$, т.е. у нее на этом интервале сохраняется характеристика Сегрэ[2]. Известно [2], что консервативная и ком-

---

[2] Богданов Ю.С., Чеботарев Г.Н. О матрицах, коммутирующих со своей производной. – Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 4, с. 27-37.

мутирующая со своей производной в интервале $[t_0, +\infty[$ матрица $Q(t)$ может быть в этом интервале приведена к блочно-диагональному виду $Q_1(t)$, где каждый диагональный блок матрицы $Q_1(t)$ имеет единственное собственное значение.

Т е о р е м а . Если $Q(t)$ консервативная матрица Лаппо-Данилевского, $\lambda_i^{(1)}(t)$ $(i=\overline{1,n})$ – собственные значения блоков матрицы $Q_1(t)$, то показатели Ляпунова системы (I) можно найти по формуле

$$\lambda_i = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \operatorname{Re}\lambda_i^{(1)}(t) \quad (i=\overline{1,n}) .$$

Т е о р е м а . Система (I) с консервативной матрицей Лаппо-Данилевского правильна тогда и только тогда, когда существуют $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t}\operatorname{Re}\lambda_i(t)$ $(i=\overline{1,n})$, где $\lambda_i(t)$ $(i=\overline{1,n})$ собственные значения матрицы $Q(t)$ и показатели этой системы можно найти по формуле

$$\lambda_i = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\operatorname{Re}\lambda_i(t) \quad (i=\overline{1,n}) .$$

Для правильных систем Лаппо-Данилевского получены следующие результаты.

Т е о р е м а . Если система Лаппо-Данилевского правильная, то существует $T \geqslant t_0$ такое, что при $t \geqslant T$ система постоянным преобразованием приводима к блочно-диагональному виду, где размерность диагональных блоков равна кратности показателей системы.

Т е о р е м а . Для правильности системы Лаппо-Данилевского необходимо и достаточно, чтобы существовали $T \geqslant t_0$

и постоянное преобразование C, приводящее матрицу $P(t)$ при $t \geq T$ к блочно-диагональному виду $P_1(t)$ такому, что будут справедливы равенства

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \operatorname{Re} \lambda_i^{(1)}(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \operatorname{Re} \lambda_j^{(1)}(t),$$

где $\lambda_i^{(1)}(t)$, $\lambda_j^{(1)}(t)$ – любые собственные значения одного и того же блока матрицы $Q_1(t)$.

Т е о р е м а . Если система Лаппо-Данилевского правильная, то её показатели можно найти по формуле

$$\lambda_i = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \operatorname{Re} \lambda_i(t) \quad (i = \overline{1,n}),$$

где $\lambda_i(t)$ $(i = \overline{1,n})$ – собственные значения матрицы $Q(t)$.

Совместно с системой (I) Лаппо-Данилевского рассмотрена система

$$\frac{dy}{dt} = \kappa P(t)\, y, \tag{3}$$

где $\kappa \in R$.

Показано, что если система (I) правильная, то система (3) тоже правильная и её показатели можно найти по формуле

$$\lambda_i^{y} = \kappa \lambda_i \quad (i = \overline{1,n}),$$

где λ_i $(i = \overline{1,n})$ – показатели системы (I).

Далее рассматривается система

$$\frac{dy}{dt} = \varphi(t) P(t)\, y, \tag{4}$$

где $\varphi(t)$ – непрерывная скалярная функция, удовлетворяющая условию $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = 1$. Исследуется влияние φ – возмущений на асимптотические инварианты линейных дифференциальных систем. Известно, что если система (I) правильная, то показатели системы (I) и системы

$$\frac{dy}{dt} = P(t)\,y + Q(t)\,y,$$

где $\lim\limits_{t\to\infty}\|Q(t)\| = 0$, вообще говоря, не совпадают. В диссертации показано, что показатели правильных систем (I) неустойчивы и при φ -возмущениях.

Для систем (I) с матрицей Лаппо-Данилевского получены следующие результаты.

Теорема. Если $P(t)$ - функционально-коммутативная матрица, $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = k \; (k \in R)$, то показатели Ляпунова системы (4) можно найти по формуле

$$\lambda_i^y = k\,\lambda_i \quad (i = \overline{1,n}),$$

где $\lambda_i \; (i=\overline{1,n})$ - показатели системы (I).

Теорема. Если система Лаппо-Данилевского правильная, $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = 1$, то показатели систем (I) и (4) совпадают и система (4) правильная.

Теорема. Если $P(t)$ - функционально-коммутативная матрица,

$$\int_{t_0}^{t} \|(\varphi(\tau) - 1)\,P(\tau)\|\,d\tau \le m < +\infty,$$

то системы (I) и (4) асимптотически эквивалентны.

Теорема. Если система (I) - система Лаппо-Данилевского, $Q(t)$ - консервативная матрица, то показатели систем (I) и (4) совпадают.

Приведены условия, которым должны удовлетворять функция $\varphi(t)$ и матрица Лаппо-Данилевского $P(t)$, чтобы системы (I) и (4) были асимптотически эквивалентны. Показано, что при φ -возмущениях старшие характеристические показатели систем Лаппо-Данилевского устойчивы.

Далее рассматриваются ещё некоторые классы систем, показатели которых устойчивы при φ -возмущениях.

Т е о р е м а . Пусть даны системы (I) и (4), матрица $P(t)$ удовлетворяет условию

$$P(f(t)) = \frac{df}{dt} P(t),$$

положительная функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = 1$, тогда показатели систем (I) и (4) совпадают.

Т е о р е м а . Пусть даны системы (I) и (4), матрица $P(t)$ удовлетворяет условию

$$\frac{df}{dt} P(f(t)) = \varphi(t) P(t),$$

где $f(t)$ - абсолютно непрерывная, строго возрастающая функция и $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t} = 1$, то показатели систем (I) и (4) совпадают.

Рассмотрен случай вполне правильной системы (I) и приведены условия, которым должна удовлетворять функция $\varphi(t)$, чтобы показатели систем (I) и (4) совпадали.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

I. Сурин Т.Л. Скалярные преобразования систем Лаппо-Данилевского. - Минск, 1983. - 10 с. - Рукопись представлена редкол.ж. "Вестн. Белорусского ун-та". Деп. в БелНИИНТИ 04.07.83, № 701 Бе-Д 83.

2. Сурин Т.Л. О преобразованиях линейных дифференциальных систем. - Минск, 1983. - 12 с. - Рукопись представлена редкол.ж. "Вестн.Белорусского ун-та". Деп. в БелНИИНТИ 04.07.83, № 705 Бе-Д 83.

3. Сурин Т.Л. Скалярные преобразования систем Лаппо-Данилевского. - Вестн. Белорусского ун-та. Сер.I, физ., мат. и мех., 1984, № 1, с. 58-60.

4. Сурин Т.Л. Инварианты некоторых специальных возмущений линейных дифференциальных систем. - Минск, 1984. - 15 с. - Рукопись представлена редкол.ж. "Вестн. Белорусского ун-та". Деп. в БелНИИНТИ 18.06.84, № 892 Бе-Д 84.

5. Сурин Т.Л. О преобразованиях систем Лаппо-Данилевского. - Вестн. Белорусского ун-та. Сер.I, физ., мат. и мех., 1984, № 3, с. 63-64.

Татьяна Леонидовна СУРИН

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ПРИ СПЕЦИАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

АТ-18909 . Подписано к печати 26 окт. 1984 .
Формат 60/84 I/16. Объем печ.л. I,0 Тираж 100 экз.
Заказ 924 . Бесплатно. Отпечатано на ротапринте
БГУ им. В.И.Ленина. 220080, г.Минск, ул.Бобруйская, 7.