УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ФРАНЦИСКА СКОРИНЫ»

УДК 512.542

САВЕЛЬЕВА

Наталья Валентиновна

МАКСИМАЛЬНЫЕ КЛАССЫ ФИТТИНГА КОНЕЧНЫХ РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

по специальности 01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

Гомель, 2009

КРАТКОЕ ВВЕДЕНИЕ

В исследовании конечных групп и их классов ключевое место занимают объекты, экстремально расположенные в группе или классе. Такими объектами являются, прежде всего, максимальные подгруппы и максимальные подклассы. Их изучение привело к исследованию критических групп [1–3] и пересечений максимальных подгрупп [4–8], а также максимальных подгрупп в теории классов групп [9]. Примечателен тот факт, что в теории формаций Херцфельд [10] и А. Н. Скибой [11, с. 181] установлено, что каждая неединичная локальная формация не имеет максимальных по включению подформаций. Поиск аналога этого факта в теории классов Фиттинга обусловил следующий

Вопрос (А. Н. Скиба [12, 13.50]). *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальный класс Фиттинга. Верно ли, что частично упорядоченное по включению множество классов Фиттинга, входящих в $\mathfrak{F}$ и отличных от $\mathfrak{F}$, не имеет максимальных элементов?*

В последующем важная роль в применении максимальных объектов в задачах описания критических формаций была подтверждена рядом работ А. Н. Скибы [11, 13], В. Г. Сафонова [14] и их учеников [15–17]. Возникло целое содержательное направление исследований – описание формаций с заданными свойствами максимальных подформаций, что нашло свое отражение в монографии [11].

В то же время, в теории классов Фиттинга, в частности, формаций Фиттинга и классов Шунка, помимо отношения включения "$\subseteq$", изучалось также отношение порядка "$\ll$", называемое сильным вложением и определяемое свойством вложения канонических подгрупп – инъекторов и проекторов. При этом ключевыми объектами в изучении структуры классов и их характеризации стали максимальные по сильному вложению классы, что нашло отражение в работах Дерка [18, 19] и Хоукса [20].

Определяющую роль максимальные объекты в теории классов приобрели в 70-е годы прошлого века в связи с развитием структурной теории классов Фиттинга [21] – теории классов конечных групп, замкнутых относительно нормальных подгрупп и их произведений. Одно из направлений изучения структуры классов и их описания связано с применением локальных методов исследования, состоящих в изучении классов групп посредством функций, сопоставлявших каждому простому числу p некоторый класс групп. Ряд глубоких и содержательных результатов о максимальных (по включению, по сильному вложению) классах Фиттинга и их максимальных локальных заданиях были получены Брайсом и Косси [22–24], Дерком и Порта [25], Н.Т. Воробьевым и В.Н. Загурским [26, 27] и др.

Основополагающей в изучении максимальных классов Фиттинга стала работа Брайса и Косси, в которой была сформулирована [23, с. 170] *проблема нахождения критерия максимальности класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ в произвольном классе Фиттинга $\mathfrak{X}$.* Данная проблема в общем случае остается открытой, и, как отмечено в книге [28, с. 735], является одной из трудных. До настоящего времени она была решена [23] лишь для случая, когда $\mathfrak{X}$ совпадает с тривиальным нормальным классом Фиттинга $\mathfrak{S}$ всех конечных разрешимых групп, а для случаев $\mathfrak{X}\subset\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{X}=\mathfrak{E}$, где $\mathfrak{E}$ – класс Фиттинга всех конечных групп, найдено либо только достаточное [23], либо только необходимое условие [23, 29] для максимальности $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{X}$.

В классе $\mathfrak{S}$ была обнаружена тесная взаимосвязь нормальных классов Фиттинга с содержащимися в них максимальными по включению и по сильному вложению классами Фиттинга. Примечателен тот факт [30], что каждый максимальный по включению класс Фиттинга класса $\mathfrak{S}$ является нормальным в $\mathfrak{S}$. Кроме того, в работе [31] установлено существование и нетривиальность наименьшего нормального класса Фиттинга. В связи с этим в 1984 году в «Коуровской тетради» Лаушем был сформулирован

Вопрос [12, 9.18]. *Пусть $\mathfrak{S}_*$ – наименьший нормальный класс Фиттинга. Существуют ли классы Фиттинга, которые максимальны в $\mathfrak{S}_*$ (по включению)?*

Отрицательный ответ был получен Н. Т. Воробьевым в работе [32].

В то же время, ряд известных результатов Макана [33], Брайса, Косси [24], Кусака [34], Дерка и Порты [25] и др. связан с применением отношения порядка "$\ll$" для характеризации перестановочных и нормальных классов Фиттинга, а также для описания инъекторов конечных разрешимых групп. Однако задача описания максимальных по сильному вложению классов Фиттинга в ненормальных классах Фиттинга до настоящего времени остается малоисследованной. Более того, результатом Косси [30] о нормальности класса Фиттинга, максимального в классе $\mathfrak{S}$, обусловлено

Предположение (Дерк, Хоукс [28, с. 735]). *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга. Если $\mathfrak{F}$ максимален по сильному вложению в $\mathfrak{S}$, то $\mathfrak{F}$ нормален в $\mathfrak{S}$.*

Следует отметить, что для нормально погруженных классов Фиттинга справедливость этого предположения была установлена Локеттом [35].

Заметим, что все полученные ранее результаты о структуре максимальных классов Фиттинга и их взаимосвязи с нормальными классами Фиттинга, определенные указанной проблематикой, относились к исследованиям максимальных классов лишь в тривиальном нормальном классе Фиттинга $\mathfrak{S}$ всех конечных разрешимых групп. Таким образом, актуальна общая задача описания максимальных классов Фиттинга в ненормальных классах, и, в первую очередь, в классах разрешимых π-групп (π – непустое множество простых чисел), а также в классах частично разрешимых групп. Реализации этой задачи и посвящена настоящая диссертация.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с крупными научными программами, темами

Диссертация выполнена в рамках следующих госбюджетных программ:

- гранта Министерства образования Республики Беларусь на 2005 г. «Максимальные классы Фиттинга». Тема гранта являлась составной частью задания «Развитие методов теории классов Фиттинга при исследовании конечных разрешимых групп» учреждения образования «Витебский государственный университет им. П. М. Машерова», входившего в Государственную программу Фундаментальных исследований Республики Беларусь «Математические структуры». Тема входила в план важнейших научно-исследовательских работ в области естественных, технических и общественных наук по Республике Беларусь, утвержденный решением Президиума НАН Беларуси № 94 от 5 июля 2001 г. (номер госрегистрации в БелИСА – 20011225), тема выполнялась в 2001-2005 гг.;
- гранта Министерства образования Республики Беларусь на 2008 г. «Приложение максимальных классов Фиттинга к исследованию структуры классов групп и канонических подгрупп»;
- составной части задания «Приложение теории радикалов и классов Фиттинга к исследованию конечных групп» учреждения образования «Витебский государственный университет им. П. М. Машерова», входящего в Государственную программу Фундаментальных исследований Республики Беларусь «Исследование математических моделей и их применение к анализу систем, структур и процессов в природе и обществе» (шифр «Математические модели 04»). Тема входит в план важнейших научно-исследовательских работ в области естественных, технических и общественных наук по Республике Беларусь, утвержденный решением Президиума НАН Беларуси № 907 от 12 мая 2006 г. (номер госрегистрации в БелИСА – 20062003), выполнение темы запланировано на 2006-2010 гг.

Цель и задачи исследования

Целью диссертации является решение вопросов существования и описания максимальных классов Фиттинга в зависимости от строения π-групп с заданными свойствами радикалов и инъекторов.

Для достижения поставленной цели в диссертации необходимо было решить следующие взаимосвязанные задачи.

- Посредством радикалов описать необходимое и достаточное условие максимальности заданного класса Фиттинга в классе всех π-групп, где

π обозначает непустое множество простых чисел (получить решение проблемы Брайса-Косси [23, с. 170] о нахождении критерия максимальности класса Фиттинга для случая класса Фиттинга всех π-групп и вопроса А. Н. Скибы из «Коуровской тетради» (см. [12, вопрос 13.50]) о существовании максимальных классов Фиттинга в локальном классе Фиттинга). Построить примеры π-максимальных классов Фиттинга.

- Изучить взаимосвязь максимальных по включению и по сильному вложению классов Фиттинга с локально нормальными классами Фиттинга.

- Доказать существование и нетривиальность наименьшего π-нормального класса Фиттинга и получить ответ на вопрос Лауша из «Коуровской тетради» (см. [12, вопрос 9.18]) о существовании в нем максимальных по включению и по сильному вложению классов Фиттинга.

- Установить, что любой π-нормально погруженный класс Фиттинга, π-максимальный по сильному π-вложению, является π-нормальным (получить подтверждение предположения Дерка-Хоукса [28, с. 735] о нормальности максимального по сильному вложению класса Фиттинга для случая класса всех π-групп).

Объектом исследования являются максимальные классы Фиттинга. *Предмет исследования* – структурные свойства максимальных классов Фиттинга, взаимосвязь максимальных и локально нормальных классов Фиттинга.

Положения, выносимые на защиту

1. Отрицательный ответ на вопрос Лауша из «Коуровской тетради» (см. [12, вопрос 9.18]) о существовании максимальных по включению классов Фиттинга в наименьшем нормальном классе Фиттинга для π-нормальных классов Фиттинга.

2. Описание π-максимальных классов Фиттинга (решение проблемы Брайса-Косси [23, с. 170] о нахождении критерия максимальности класса Фиттинга для случая класса Фиттинга всех π-групп).

3. Отрицательный ответ на вопрос А. Н. Скибы из «Коуровской тетради» (см. [12, вопрос 13.50]) о том, что частично упорядоченное по включению множество классов Фиттинга, входящих в локальный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ и отличных от $\mathfrak{F}$, не имеет максимальных элементов.

4. Подтверждение предположения Дерка-Хоукса [28, с. 735] о нормальности максимальных по сильному вложению классов Фиттинга для случая класса всех π-групп.

5. Отрицательный ответ на вопрос Лауша из «Коуровской тетради» (см. [12, вопрос 9.18]) о существовании максимальных классов Фит-

тинга в наименьшем нормальном классе Фиттинга для максимальных по сильному π-вложению классов Фиттинга.

Все результаты диссертации являются новыми, впервые получены автором.

Личный вклад соискателя

Все основные результаты диссертации получены автором самостоятельно. В опубликованных совместно с научным руководителем работах [1-А, 3-А, 5-А, 6-А, 13-А, 14-А, 16-А, 17-А, 18-А, 20-А, 22-А] идеи и методы принадлежат научному руководителю, а реализация – соискателю. Остальные работы выполнены самостоятельно и опубликованы без соавторов.

Апробация результатов диссертации

Основные результаты диссертации докладывались:

- на научных семинарах кафедры алгебры и методики преподавания математики Витебского государственного университета им. П. М. Машерова;
- на Международной конференции «IX Белорусская математическая конференция» (Гродно, 3-6 ноября 2004 г.);
- на Региональной научной конференции студентов, магистрантов, аспирантов и молодых учеых «I Машеровские чтения» (Витебск, 5 мая 2005 г.);
- на Международной конференции «V Международная алгебраическая конференция в Украине» (Одесса, 20-27 июля 2005 г.);
- на Международной алгебраической конференции «Классы групп и алгебр», посвященной 100-летию со дня рождения С. А. Чунихина (Гомель, 5-8 октября 2005 г.);
- на Международной научной конференции «Ломоносовские чтения – 2006» (Севастополь, 3-5 мая 2006 г.);
- на IX (54) научно-практической конференции студентов, магистрантов и молодых ученых «Творчество молодых – будущее Родины» (Витебск, 6 апреля 2006 г.);
- на Региональной научно-практической конференции студентов, магистрантов и аспирантов «II Машеровские чтения» (Витебск, 24-25 апреля 2007 г.);
- на Международной алгебраической конференции «Классы групп, алгебр и их приложения», посвященной 70-летию со дня рождения Л. А. Шеметкова (Гомель, 9-11 июля 2007 г.);
- на Международной алгебраической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Д. К. Фаддеева (Санкт-Петербург, 17-

23 сентября 2007 г.);

- на X Республиканской научно-методической конференции молодых ученых (Брест, 15-16 мая 2008 г.);

- на Международной алгебраической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения А. Г. Куроша (Москва, 28 мая-3 июня 2008 г.);

- на Международной конференции «X Белорусская математическая конференция» (Минск, 3-7 ноября 2008 г.);

- на Республиканской научно-практической конференции студентов, магистрантов, аспирантов и молодых ученых «III Машеровские чтения» (Витебск, 24-25 марта 2009 г.).

Опубликованность результатов диссертации

Основные результаты диссертации опубликованы в 7 статьях в научных журналах, в 4 статьях в материалах конференций и в 12 тезисах докладов. Общий объем опубликованных материалов – 5,01 авторских листа, в том числе: статьи в научных журналах – 3,73 авторских листа, тезисы и материалы докладов конференций – 1,28 авторских листа. Общее количество страниц опубликованных материалов – 76.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из перечня условных обозначений, введения, общей характеристики работы, четырех глав основной части, заключения и библиографического списка в алфавитном порядке в количестве 111 наименований. Объем диссертации – 95 страниц, из них 8 страниц составляет библиографический список.

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю – доктору физико-математических наук, профессору Николаю Тимофеевичу Воробьеву за внимание и помощь, оказанные им при написании данной диссертации.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Все рассматриваемые в диссертационной работе группы конечны и разрешимы, если не оговорено противное. В разделе 3 второй главы и разделе 1 третьей главы подразумеваются частично разрешимые группы – конечные группы, у которых разрешимыми являются факторгруппы по радикалу. Во всех остальных разделах диссертации группы считаются разрешимыми. В определениях и обозначениях мы следуем [28, 36].

Диссертация состоит из перечня условных обозначений, введения, общей характеристики работы, четырех глав основной части, заключения и библиографического списка.

Глава 1 «Постановка задач и предварительные сведения» содержит аналитический обзор литературы, а также известные исходные понятия и результаты, которые используются на протяжении всех остальных глав диссертации.

В разделе 1.1 представлен аналитический обзор по теме диссертации, в котором на основе проведенного анализа литературных источников формулируются основные задачи диссертационной работы.

Ключевым понятием диссертационного исследования является понятие максимального класса Фиттинга. Напомним, что классом Фиттинга называется класс групп $\mathfrak{F}$, замкнутый относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется сильно вложенным в класс Фиттинга $\mathfrak{H}$ и обозначается $\mathfrak{F}\ll\mathfrak{H}$, если $\mathfrak{H}$-инъектор любой группы G содержит $\mathfrak{F}$-инъектор этой группы. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется максимальным по включению (по сильному вложению) в классе Фиттинга $\mathfrak{X}$ и обозначается $\mathfrak{F}<\cdot\mathfrak{X}$ (соответственно $\mathfrak{F}\ll\cdot\mathfrak{X}$), если $\mathfrak{F}\subset\mathfrak{X}$ ($\mathfrak{F}\lneqq\mathfrak{X}$) и из того, что $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{X}$ ($\mathfrak{F}\ll\mathfrak{M}\ll\mathfrak{X}$), где $\mathfrak{M}$ – класс Фиттинга, всегда следует, что $\mathfrak{M}\in\{\mathfrak{F}, \mathfrak{X}\}$. Если $\mathfrak{F}<\cdot\mathfrak{S}_\pi$ или $\mathfrak{F}\ll\cdot\mathfrak{S}_\pi$, где π – непустое множество простых чисел и $\mathfrak{S}_\pi$ обозначает класс всех π-групп, то класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ мы соответственно называем π-максимальным по включению или по сильному вложению.

Глава 2 «Максимальные и локально нормальные классы» посвящена отысканию новых свойств максимальных классов Фиттинга и исследованию их взаимосвязи с локально нормальными классами Фиттинга.

Напомним, что понятие нормального класса Фиттинга было введено в классе $\mathfrak{S}$ всех групп Блессенолем и Гашюцем [31] как класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ такого, что в любой группе G ее $\mathfrak{F}$-инъекторы нормальны в G.

Естественным расширением понятия нормальности в классе $\mathfrak{S}$ является понятие локальной нормальности в смысле следующего определения. Непустой класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется нормальным в классе $\mathfrak{X}$ или локально нормальным (обозначается $\mathfrak{F}\trianglelefteq\mathfrak{X}$), если $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{X}$ и для любой $\mathfrak{X}$-группы G ее $\mathfrak{F}$-радикал является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой группы G. Напомним, что если класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ непуст, то подгруппу $G_{\mathfrak{F}}$ группы G называют ее $\mathfrak{F}$-радикалом, если она является наибольшей из нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп группы G. Если π – некоторое множество простых чисел и $\mathfrak{F}\trianglelefteq\mathfrak{S}_\pi$, то $\mathfrak{F}$ будем называть π-нормальным.

В первом разделе данной главы получены необходимые и достаточные признаки π-нормальности, которые используются на протяжении всей диссертации и представляют самостоятельный интерес. Леммы 2.1.2 и 2.1.13 расширяют известные критерии нормальности, полученные Локеттом [35] и Блессенолем-Гашюцем [31] в тривиальном нормальном классе $\mathfrak{S}$ на случай π-нормальных классов Фиттинга. Доказано (лемма 2.1.2), например, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ π-нормален в точности тогда, когда $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi=\mathfrak{S}_\pi$, где $\mathfrak{N}_\pi$ и $\mathfrak{S}_\pi$ обозначают соответственно класс всех нильпотентных π-групп и класс всех π-групп. Теорема 2.1.15, следствие 2.1.11 и лемма 2.1.7, следствие 2.1.5 представляют расширения известных характеризаций нормальных классов Фиттинга, полученных соответственно Бейдлеманом [37], Блессенолем-Гашюцем [31] и Косси [30]. В частности, следствие 2.1.11 доказывает существование и нетривиальность наименьшего π-нормального класса Фиттинга. Установлено (следствие 2.1.5), что каждый π-максимальный по включению класс Фиттинга является π-нормальным.

Основополагающие результаты по описанию максимальных по включению классов Фиттинга и их взаимосвязи с нормальными классами Фиттинга в классе $\mathfrak{S}$ всех групп были установлены Брайсом и Косси [23, 30]. В частности, Косси [30] был получен изящный результат о том, что каждый класс Фиттинга, максимальный в $\mathfrak{S}$, является нормальным в $\mathfrak{S}$. Кроме того, как установлено Блессенолем и Гашюцем [31], пересечение всех неединичных нормальных классов Фиттинга снова есть неединичный нормальный класс Фиттинга, который называют наименьшим нормальным классом Фиттинга и обозначают $\mathfrak{S}_*$. В связи с указанными результатами Косси [30] и Блессеноля-Гашюца [31] в «Коуровской тетради» был сформулирован следующий

Вопрос А (Лауш [12, 9.18]). *Пусть $\mathfrak{S}_*$ – наименьший нормальный класс Фиттинга. Существуют ли классы Фиттинга, которые максимальны в $\mathfrak{S}_*$ (по включению)?*

Отрицательный ответ на этот вопрос был получен Н. Т. Воробьевым в работе [32].

Вместе с тем, отдельный интерес представляет результат А. Н. Скибы [11, с. 181] о том, что каждая неединичная локальная формация не имеет максимальных по включению подформаций. Поиск аналога этого результата в теории классов Фиттинга обусловил

Вопрос В (А. Н. Скиба [12, 13.50]). *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальный класс Фиттинга. Верно ли, что частично упорядоченное по включению множество классов Фиттинга, входящих в $\mathfrak{F}$ и отличных от $\mathfrak{F}$, не имеет максимальных элементов?*

Отрицательный ответ на этот вопрос был анонсирован в работе [38].

Нами в диссертации установлено (см. лемму 2.1.10), что если π – непустое множество простых чисел, то пересечение любого множества неединичных π-нормальных классов Фиттинга есть неединичный π-нормальный класс Фиттинга. Отсюда следует, что существует неединичный наименьший π-нормальный класс Фиттинга, обозначаемый через $(\mathfrak{S}_\pi)_*$. В связи с этим естественен следующий аналог вопроса А, который для π-нормальных классов Фиттинга сформулируем следующим образом: *существуют ли максимальные по включению классы Фиттинга в наименьшем π-нормальном классе Фиттинга?* Отрицательный ответ на этот вопрос дает

2.2.2.2 Теорема [11-А]. *Если π – непустое множество простых чисел, то в наименьшем π-нормальном классе Фиттинга $(\mathfrak{S}_\pi)_*$ нет нетривиальных максимальных по включению классов Фиттинга.*

Основной результат диссертационного исследования содержится в главе 3 «Канонические подгруппы и максимальные классы» и представляет собой критерий π-максимальности, т.е. максимальности заданного класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ в классе Фиттинга $\mathfrak{S}_\pi$ всех π-групп, где π обозначает непустое множество простых чисел.

Заметим, что в теории классов Фиттинга одной из трудных проблем является проблема нахождения критерия максимальности заданного класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ в произвольном классе Фиттинга $\mathfrak{X}$, сформулированная в 1974 г. Брайсом и Косси (см. [23, с. 170], а также [28, с. 735]). Данная проблема была решена Брайсом и Косси [23] лишь для случая, когда $\mathfrak{X}$ совпадает с тривиальным нормальным классом Фиттинга $\mathfrak{S}$ (см. теорему X.4.26 [28]).

В дальнейшем, на случай $\mathfrak{X}=\mathfrak{E}$, где $\mathfrak{E}$ обозначает класс всех групп, указанный результат Брайса-Косси был частично расширен Лауэ [29], которым было установлено лишь необходимое условие максимальности класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ в классе Фиттинга $\mathfrak{E}$. Для случая $\mathfrak{X}\subseteq\mathfrak{S}$ в терминах $\mathfrak{F}$-радикалов Брайсом и Косси определено [23] необходимое условие максимальности $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{X}$. Кроме того, с учетом результата [21] о существовании и сопряженности инъекторов в любой $\mathfrak{S}$-группе в терминах $\mathfrak{F}$-инъекторов групп $G\in\mathfrak{X}$ Брайсом и Косси описано [23] достаточное условие максимальности и нормальности $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{X}$.

Расширение критерия максимальности класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ в классе $\mathfrak{S}$, установленного Брайсом и Косси [23], на класс Фиттинга $\mathfrak{S}_\pi$, где π обозначает непустое множество простых чисел, представляет

3.2.6 Теорема [5-А]. *Пусть π — непустое множество простых чисел и класс Фиттинга $\mathfrak{F}\subset\mathfrak{S}_\pi$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *$\mathfrak{F}$ π-максимален;*

2) *существует простое число $p\in\pi$ такое, что $|G:G_\mathfrak{F}|\in\{1, p\}$ для всех групп $G\in\mathfrak{S}_\pi$.*

Так как класс Фиттинга $\mathfrak{S}_\pi$ локален, то из доказанной теоремы, в частности, следует, что существуют максимальные классы Фиттинга в ненормальном локальном классе Фиттинга:

3.3.1.2 Теорема [5-А]. *В локальном классе Фиттинга $\mathfrak{S}_\pi$ существуют ненормальные π-максимальные классы Фиттинга.*

Эта теорема дает отрицательный ответ на вопрос В, сформулированный А. Н. Скибой в «Коуровской тетради» (см. [12, вопрос 13.50]).

Заметим, что первые примеры максимальных нормальных классов Фиттинга в нормальном локальном классе $\mathfrak{S}$ были анонсированы Н. Т. Воробьевым [38]. Существование нетривиальных π-максимальных классов Фиттинга подтверждено в разделе 2 третьей главы диссертации построением конкретных примеров.

Глава 4 «Максимальные по сильному вложению классы» посвящена исследованию максимальных по сильному вложению классов Фиттинга.

Ряд известных результатов Брайса, Косси [24], Макана [33], Кусака [34], Дерка, Порты [25] был связан с применением отношения порядка "$\ll$" для характеризации перестановочных и нормальных классов Фиттинга, а также для описания инъекторов групп.

Задача описания максимальных по сильному вложению классов Фиттинга в некотором классе Фиттинга до настоящего времени остается трудной проблемой.

Интерес к решению такой задачи обусловлен, прежде всего, результатом Локетта [35] (см. также [28, с. 735]) о том, что если нормально погруженный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ максимален по сильному вложению в классе $\mathfrak{S}$ всех групп, то $\mathfrak{F}$ нормален в $\mathfrak{S}$, и результатом Косси [30] о нормальности максимального по включению подкласса $\mathfrak{F}$ класса Фиттинга $\mathfrak{S}$ всех групп. В дальнейшем, в связи с названными результатами Косси и Локетта, Дерком и Хоуксом было сформулировано предположение, которое приведем в виде следующего вопроса.

Вопрос С (Дерк, Хоукс [28, с. 735]). *Верно ли, что если класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ максимален по сильному вложению в $\mathfrak{S}$, то $\mathfrak{F}$ нормален в $\mathfrak{S}$?*

Заметим, что расширение некоторых известных характеризаций нормальных классов Фиттинга в $\mathfrak{S}$ на случай классов Фиттинга, нормальных в классе $\mathfrak{S}_\pi$, впервые было произведено Дерком и Хоуксом в книге [28, с. 708], и с необходимостью приводит к следующим понятиям и обобщенному варианту указанного вопроса С.

Определение [3-A]. Пусть $\pi \subseteq \mathbb{P}$, где $\mathbb{P}$ обозначает множество всех простых чисел. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ назовем сильно π-вложенным в класс Фиттинга $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{S}_\pi$ (обозначим $\mathfrak{F} \ll_\pi \mathfrak{H}$), если $\mathfrak{H}$-инъектор каждой π-группы G содержит $\mathfrak{F}$-инъектор этой группы.

4.1.2 Определение [3-A]. Пусть U – подгруппа некоторой π-группы G и $p \in \pi \subseteq \mathbb{P}$. Тогда

1) U назовем p-нормально погруженной в $G \in \mathfrak{S}_\pi$, если силовская p-подгруппа группы U является силовской p-подгруппой некоторой нормальной подгруппы группы G.

2) U назовем π-нормально погруженной в $G \in \mathfrak{S}_\pi$ (обозначим U π-ne G), если U является p-нормально погруженной в G для всех $p \in \pi$.

4.1.3 Определение [3-A]. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ назовем нормально погруженным в $\mathfrak{S}_\pi$ или π-нормально погруженным, если для всех π-групп G ее $\mathfrak{F}$-инъекторы являются π-нормально погруженными подгруппами в G.

Естественна следующая постановка указанного выше предположения Дерка-Хоукса для π-нормальных классов Фиттинга: *является ли π-максимальный по сильному π-вложению класс Фиттинга π-нормальным?* Утвердительный ответ на данный вопрос для широкого семейства классов Фиттинга представляет следующая

4.2.3 Теорема [3-A]. *Пусть π – непустое множество простых чисел и $\mathfrak{F}$ – π-нормально погруженный класс Фиттинга. Тогда если $\mathfrak{F} \ll_\pi \cdot \mathfrak{S}_\pi$, то $\mathfrak{F}$ является π-нормальным.*

Отдельный интерес для сильно π-вложенных классов Фиттинга представляет указанный выше вопрос Лауша из «Коуровской тетради» (см. [12, вопрос 9.18]), который для максимальных по сильному π-вложению классов Фиттинга сформулируем следующим образом: *существуют ли максимальные по сильному π-вложению классы Фиттинга в наименьшем π-нормальном классе Фиттинга?*

Отрицательный ответ на этот вопрос дает

4.3.3 Теорема [4-A]. *Если π – непустое множество простых чисел, то в наименьшем π-нормальном классе Фиттинга $(\mathfrak{S}_\pi)$. нет нетривиальных максимальных по сильному π-вложению классов Фиттинга.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

В диссертации проведено исследование свойств максимальных (по включению, по сильному вложению) классов Фиттинга и их взаимосвязей с локально нормальными классами Фиттинга конечных групп. Основные результаты диссертации следующие.

Исследованы свойства максимальных по включению классов Фиттинга и охарактеризована взаимосвязь максимальных и локально нормальных классов Фиттинга для частично разрешимых групп и для разрешимых π-групп (π – непустое множество простых чисел). В частности, следствие 2.1.11 доказывает существование и нетривиальность наименьшего π-нормального класса Фиттинга. Для π-нормальных классов Фиттинга получен отрицательный ответ на вопрос Лауша из «Коуровской тетради» (см. [12, вопрос 9.18]): доказано, что в наименьшем π-нормальном классе Фиттинга не существует нетривиальных максимальных по включению классов Фиттинга (теорема 2.2.2.2 [11-А]).

Посредством канонических подгрупп описаны необходимое и достаточное условия максимальности одного класса Фиттинга в другом для частично разрешимых групп (теорема 3.1.1 [2-А]) и получен критерий π-максимальности для разрешимых π-групп (теорема 3.2.6 [5-А]), где π обозначает непустое множество простых чисел. Установлено, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ разрешимых π-групп является π-максимальным в точности тогда, когда существует простое число $p\in\pi$ такое, что индекс группы G по ее $\mathfrak{F}$-радикалу равен 1 или p для любой π-группы G. Полученный критерий π-максимальности дает решение проблемы Брайса-Косси [23, с. 170] для случая класса всех π-групп.

Построены примеры нетривиальных π-максимальных классов Фиттинга и исследованы их приложения (теоремы 3.3.1.2 и 3.3.2.2 [5-А]). В частности, теорема 3.3.1.2 [5-А] дает отрицательный ответ на вопрос А. Н. Скибы из «Коуровской тетради» (см. [12, вопрос 13.50]) о том, что частично упорядоченное по включению множество классов Фиттинга, входящих в локальный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ и отличных от $\mathfrak{F}$, не имеет максимальных элементов: доказано, что в локальном классе Фиттинга $\mathfrak{S}_\pi$ существуют ненормальные π-максимальные классы Фиттинга.

На множестве классов Фиттинга исследовано отношение порядка "$\ll$", называемое сильным вложением и определяемое вложением инъекторов групп. Теорема 4.2.3 [3-А] подтверждает предположение Дерка-Хоукса [28, с. 735] о нормальности максимальных по сильному вложению классов Фиттинга для случая класса всех π-групп. Установлено, что если $\mathfrak{F}$ – π-нормально погруженный класс Фиттинга и

$\mathfrak{F} \ll_{\pi} \cdot \mathfrak{S}_{\pi}$, то $\mathfrak{F}$ является π-нормальным.

Получен отрицательный ответ [4-А] на вопрос Лауша из «Коуровской тетради» (см. [12, вопрос 9.18]) для сильно π-вложенных классов Фиттинга: доказано (теорема 4.3.3), что в наименьшем π-нормальном классе Фиттинга не существует нетривиальных максимальных по сильному π-вложению классов Фиттинга.

Рекомендации по практическому использованию результатов

Результаты исследования могут найти приложение при изучении структуры классов конечных групп и канонических подгрупп, а также при описании коатомов решеток классов Фиттинга.

Решенные в диссертации задачи позволяют найти новые максимальные классы Фиттинга в локальных классах, а также установить ряд новых свойств нормальных и локально нормальных классов Фиттинга. Разработанные в диссертации методы позволяют приблизиться к решению известных открытых проблем общей теории классов конечных групп, связанных с изучением свойств нормальности классов.

Результаты диссертации могут быть использованы в университетах при чтении спецкурсов по теории классов групп для студентов математических специальностей, написании курсовых и дипломных работ, магистерских и кандидатских диссертаций.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Doerk, K. Minimal nicht überauflosbare, endliche Gruppen / K. Doerk // Math. Z. – 1966. – Vol. 91. – P. 198-205.

2. Huppert, B. Normalteiler und maximale Untergruppen / B. Huppert // Math. Z. 1954. – Bd. 60. – S. 409-434.

3. Чунихина, И. К. О p-разложимых группах / И. К. Чунихина, С. А. Чунихин // Мат. сб. - 1944. – Т. 15, № 2. – С. 325–342.

4. Frattini, G. Intorno alla generasione dei gruppi di operazioni / G. Frattini //Atti Acad. dei Lincei. – 1885. – Vol. 1. – P. 281-285

5. Deskins, W. E. A condition for the solvability of a finite group / W. E. Deskins // Ill J. Math. – 1961. – Vol. 5, №2. - P. 306-313.

6. Gaschütz, W. Über die Φ-Untergruppen endlicher Gruppen / W. Gaschütz // Math. Z. - 1953. – Bd. 58. – S. 160-170.

7. Монахов, В. С. Замечания о максимальных подгруппах конечных групп / В. С. Монахов // Докл. НАН Беларуси. – 2003. - Т. 47, №4. – С. 31-33.

8. Селькин, М. В. Пересечение максимальных подгрупп в конечных группах / М. В. Селькин, В. Н. Семенчук // Вопросы алгебры. – Мн. – 1985. – Вып. 1. – С. 67-72.

9. Селькин, М. В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М. В. Селькин. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 144 с.

10. Hertzfeld, U. C. Frattiniclasses of Formations of Finite Groups / U. C. Hertzfeld // Boll. Un. Mat. Ital. - 1988. – Vol. B (7). – P. 601-611.

11. Скиба, А. Н. Алгебра формаций / А. Н. Скиба. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 240 с.

12. Коуровская тетрадь (нерешенные вопросы теории групп). Издание 14 / Институт математики СО РАН. - 1999. – 135 с.

13. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А. Н. Скиба. – М.: Наука, 1989. – 256 с.

14. Сафонов, В. Г. О критических кратно локальных формациях конечных групп / В. Г. Сафонов // Вес. Акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1997. – № 3. – С. 57-61

15. Джехад, Дж. Частично локальные формации с системами наследственных подформаций / Дж. Джехад, А. Н. Скиба // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1996. – № 3. - С. 13-16.

16. Жевнова, Н. Г. ω-Локальные формации с булевой решеткой ω-локальных подформаций / Н. Г. Жевнова // Докл. АН Беларуси. – 1997. – Т. 41, № 5. – С. 15-19.

17. Рябченко, А. И. О частично насыщенной формации с

максимальной подформацией классического типа / А. И. Рябченко // Изв. Гом. гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2008. – №5 (50), Ч. 2. – С. 216-222.

18. Doerk, K. Über Homomorphe endlicher auflösbarer Gruppen / K. Doerk // J. Algebra. – 1974. – Vol. 30. – P. 12-30.

19. Doerk, K. Zur Theorie der Formationen endlicher auflösbarer Gruppen / K. Doerk // J. Algebra. – 1969. – Vol. 13, №3. – P. 345-373.

20. Hawkes, T.O. The family of Schunck classes as a lattice / T.O. Hawkes // Journal of Algebra. – 1976. – 39. – P. 527-550.

21. Fischer, B. Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen / B. Fischer, W. Gaschütz, B. Hartley // Math. Z. – 1967. – Bd. 102, № 5. – S. 337-339.

22. Bryce, R. A. A Problem in the Theory of Normal Fitting Classes / R. A. Bryce, J. Cossey // Math. Z. – 1975. – Bd. 141. – S. 99-110.

23. Bryce, R. A. Maximal Fitting classes of finite soluble groups / R. A. Bryce, J. Cossey // Bull. Austral. Math. Soc. - 1974. – Vol. 10. – P. 169-175.

24. Bryce, R. A. Strong Containment of Fitting Classes / R. A. Bryce, J. Cossey // Group Theory (Proc. Miniconf., Australian Nat. Univ., Canberra, 1975). Lecture notes in Math. Springer, Berlin. – 1977. – 573. – P. 6-16.

25. Doerk, K. Über Vertauschbarkeit, normale Einbettung und Dominanz bei Fittingklassen endlicher auflösbarer Gruppen / K. Doerk, M. Porta // Arch. Math. (Basel). – 1980. – 35. – P. 319-327.

26. Воробьев, Н. Т. О новых локальных заданиях классов Фиттинга / Н. Т. Воробьев, В. Н. Загурский // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. - 2003. – № 2. – С. 100-104.

27. Загурский, В. Н. Максимальные функции Хартли классов Фиттинга / В. Н. Загурский, Н. Т. Воробьев // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2006. – № 2. – С. 46-50.

28. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

29. Laue, H. Über nichtauflösbare normale Fittingklassen / H. Laue // J. Algebra. – 1977. – 45. – P. 274-283.

30. Cossey, J. Products of Fitting Classes / J. Cossey // Math. Z. – 1975. – Bd. 141. – S. 289-295.

31. Blessenohl, D. Über normale Schunk- und Fittingklassen / D. Blessenohl, W. Gaschütz // Math. Z. – 1970. – Bd. 118, № 1. – S. 1-8.

32. Воробьев, Н. Т. О проблеме Лауша в теории нормальных классов Фиттинга / Н. Т. Воробьев // Докл. АН БССР. – 1991. – Т. 35, № 6. – С. 485-487.

33. Makan. A. R. Normal Fitting Classes and the Lockett Ordering / A. R. Makan // Math. Z. – 1975. – Bd. 142. – S. 221-228.

34. Cusack, E. Strong containment of Fitting classes / E. Cusack //

J. Algebra. – 1980. – 64. – P. 414-429.

35. Lockett, F. P. On the Theory of Fitting Classes of Finite Soluble Groups / F. P. Lockett. – Ph. D. Thesis, University of Warwick, 1971.

36. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 278 с.

37. Beidleman, J. C. On Product and Normal Fitting Classes / J. C. Beidleman // Arch. Math. – 1977. – 28 (4). – P. 347-356.

38. Воробьев, Н. Т. О проблеме существования максимальных классов Фиттинга / Н. Т. Воробьев // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 1997. – № 4 (6). – С. 60-62.

Список публикаций соискателя

Статьи в научных журналах

1-А. Савельева, Н. В. О максимальных подклассах нормального класса Фиттинга / Н. В. Савельева, Н. Т. Воробьев // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2004. – № 2 (32). – С. 104-107.

2-А. Савельева, Н. В. Инъекторы и максимальные подклассы Фиттинга / Н. В. Савельева // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2008. – № 1 (47). – С. 126-130.

3-А. Савельева, Н. В. Максимальные по сильному π-вложению классы Фиттинга / Н. В. Савельева, Н. Т. Воробьев // Изв. Гомел. гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2008. – № 2 (47). – С. 157-168.

4-А. Савельева, Н. В. Максимальные подклассы π-нормальных классов Фиттинга / Н. В. Савельева // Вест. Полоц. гос. ун-та. Сер. С. Фундаментальные науки. – 2008. – № 9. – С. 22-31.

5-А. Савельева, Н. В. Максимальные подклассы локальных классов Фиттинга / Н. В. Савельева, Н. Т. Воробьев // Сиб. матем. журнал. – 2008. – Т. 49, № 6. – С. 1411-1419.

6-А. Савельева, Н. В. О проблеме существования максимальных подклассов минимального π-нормального класса Фиттинга / Н. В. Савельева, Н. Т. Воробьев // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2009. – № 1. – С. 29-37.

7-А. Савельева, Н. В. Локально нормальные и максимальные классы Фиттинга / Н. В. Савельева // Весн. Магілёўскага дзярж. ун-та імя А. А. Куляшова. – 2009. – № 2-3 (33). – С. 178-187.

Статьи в материалах конференций

8-А. Савельева, Н. В. О произведении максимального и примарного классов Фиттинга / Н. В. Савельева // I Машеровские чтения : материалы регион. науч. конф. студ., магистрантов, асп. и молодых ученых, Витебск,

5 мая 2005 г. : в 3 ч. / М-во образования Респ. Беларусь, Вит. гос. ун-т им. П. М. Машерова ; редкол.: Г. И. Михасев [и др.]. – Витебск, 2005. Ч. 1 : Естественно-математические науки. – С. 161-163.

9-А. Савельева, Н. В. π-Нормальные и максимальные классы Фиттинга / Н. В. Савельева // Творчество молодых – будущее Родины : материалы IX (54) науч.-практ. конф. студ., магистрантов и молодых ученых, Витебск, 6 апр. 2006 г. / М-во образования Респ. Беларусь, Витеб. гос. ун-т им. П. М. Машерова ; редкол.: Г. И. Михасев [и др.]. – Витебск, 2006. – С. 118-120.

10-А. Савельева, Н. В. О локальной нормальности классов Фиттинга / Н. В. Савельева // II Машеровские чтения : материалы регион. науч.-практ. конф. студ., магистрантов и асп., Витебск, 24-25 апреля 2007 г. : в 2 т. / М-во образования Респ. Беларусь, Вит. гос. ун-т им. П. М. Машерова ; редкол.: Г. И. Михасев [и др.]. – Витебск, 2007. – Т. 1 : Естественные науки. – С. 143-145.

11-А. Савельева, Н. В. О проблеме Лауша для π-нормальных классов Фиттинга / Н. В. Савельева // III Машеровские чтения : материалы респ. науч.-практ. конф. студ., асп. и молодых ученых, Витебск, 24-25 марта 2009 г. : в 5 ч. / М-во образования Респ. Беларусь, Вит. гос. ун-т им. П. М. Машерова ; редкол.: А. Л. Гладков [и др.]. – Витебск, 2009. – Математика. Информатика. Философия. Экономика. Юриспруденция. – С. 16-18.

Тезисы докладов конференций

12-А. Савельева, Н. В. Об одном свойстве нормальных классов Фиттинга / Н. В. Савельева // Инновации-2004 : материалы XI респ. студ. науч.-практ. конф., Мозырь, 22 апр. 2004 г. : в 2 ч. / М-во образования Респ. Беларусь, Мозыр. гос. пед. ун-т ; редкол.: К. О. Клецко [и др.]. – Мозырь, 2004. – Ч. 1. – С. 82.

13-А. Савельева, Н. В. О свойствах максимальных классов Фиттинга / Н. В. Савельева, Н. Т. Воробьев // IX Белорусская математическая конференция : тез. докл. междунар. конф., Гродно, 3-6 ноября 2004 г. : в 3 ч. / Белорус. матем. о-во, Ин-т матем. Нац. акад. наук Беларуси, Гродн. гос. ун-т им. Я. Купалы ; редкол.: Ю. С. Харин [и др.]. – Гродно, 2004. – Ч. 2. – С. 45.

14-А. Savelyeva, N. V. On maximal Fitting classes / N. V. Savelyeva, N. T. Vorob'ev // V International Algebraic Conference in Ukraine : abstracts, Odessa, July 20-27, 2005 / Odessa I. I. Mechnikov National University, Kyiv T. Shevchenko National University, Institute of Mathematics of National Academy of Sciences in Ukraine, Odessa A. S. Popov National Academy of Communication, Lugansk T. Shevchenko Natinal Pedagogical University ;

editorial board V. V. Kirichenko [and etc.]. – Odessa, 2005. - P. 227-228.

15-А. Савельева, Н. В. О свойстве вложения для максимальных классов Фиттинга / Н. В. Савельева // Классы групп и алгебр = Classes of Groups and Algebras : тез. докл. междунар. алгебр. конф., посв. 100-летию со дня рождения С. А. Чунихина, Гомель, 5-7 октября 2005 г. / Гомел. гос. ун-т им. Ф. Скорины, Ин-т матем. Нац. акад. наук Беларуси, Луганский гос. пед. ун-т им. Т. Г. Шевченко ; редкол.: Л. А. Шеметков [и др.]. – Гомель, 2005. – С. 94-95.

16-А. Савельева, Н. В. Инъекторы и максимальные классы Фиттинга / Н. В. Савельева, Н. Т. Воробьев // материалы V науч. конф. «Ломоносовские чтения» 2006 г. и V Междунар. науч. конф. студ., асп. и молодых ученых «Ломоносов – 2006», Севастополь, 3-5 мая 2006 г. / Черноморский филиал Моск. гос. ун-та им. М. В. Ломоносова ; редкол.: В. А. Трифонов [и др.]. – Севастополь, 2006. – С. 165-166.

17-А. Савельева, Н. В. О проблеме описания максимальных подклассов Фиттинга / Н. В. Савельева, Н. Т. Воробьев // НИРС-2005 : сб. науч. работ студ. высш. учеб. заведений Республики Беларусь / РУМЦ ФВН ; редкол.: А. И. Жук [и др.]. – Минск, 2006. – С. 23-24.

18-А. Savelyeva, N. V. On π-maximal Fitting subclasses / N. V. Savelyeva, N. T. Vorob`ev // Классы групп, алгебр и их приложения = Classes of Groups, Algebras and their applications : тез. докл. междунар. алгебр. конф., посв. 70-летию со дня рождения Л. А. Шеметкова, Гомель, 9-11 июля 2007 г. / Гомел. гос. ун-т им. Ф. Скорины, Ин-т матем. Нац. акад. наук Беларуси ; редкол.: В. С. Монахов [и др.]. – Гомель, 2007. – С. 26-27.

19-А. Savelyeva, N. V. On π-normal Fitting classes / N. V. Savelyeva // International Algebraic Conference dedicated to the 100th anniversary of D. K. Faddeev : abstracts, St.Petersburg, Russia, September 24-29, 2007 / St. Petersburg State University, St. Petersburg Department of the A. V. Steklov Institute of Mathematics of the Russian Academy of Sciences, L. Euler International Mathematical Institute, Euler Foundation, St. Petersburg Mathematical Society ; – St. Petersburg, Russia, 2007. – P. 156.

20-А. Савельева, Н. В. О максимальном подклассе в локальном классе Фиттинга / Н. В. Савельева, Н. Т. Воробьев // НИРС-2006 : сб. науч. работ студ. высш. учеб. заведений Республики Беларусь / РУМЦ ФВН ; редкол.: А. И. Жук [и др.]. – Минск, 2007. – С. 18-19.

21-А. Савельева, Н. В. Свойства сильного π-вложения / Н. В. Савельева // X Респ. науч.-метод. конф. молодых ученых : тез. докл., Брест, 15-16 мая 2008 г. / М-во образования Респ. Беларусь, Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; редкол.: И. В. Абрамова [и др.]. – Брест, 2008. – С. 33.

22-А. Савельева, Н. В. О максимальных по сильному вложению подклассах Фиттинга / Н. В. Савельева, Н. Т. Воробьев // Междунар. алгебр. конф., посв. 100-летию со дня рождения А. Г. Куроша : тез. докл., Москва, 28 мая - 3 июня 2008 г. / Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова ; редкол.: Э. Б. Винберг [и др.]. – Москва, 2008. – С. 198-200.

23-А. Савельева, Н. В. О максимальных подклассах минимального π-нормального класса Фиттинга / Н. В. Савельева // X Белорусская математическая конференция : тез. докл. междунар. науч. конф., Минск, 3-7 ноября 2008 г. : в 5 ч. / Ин-т матем. Нац. акад. наук Беларуси, Белорус. гос. ун-т ; редкол.: С. Г. Красовский, А. А. Лепин. – Минск, 2008. – Ч. 1. – С. 46-47.

РЭЗЮМЭ

Савельева Наталля Валянцінаўна

Максімальныя класы Фіцінга канечных вырашальных груп

Ключавыя словы: клас Фіцінга, π-максімальны клас Фіцінга, максімальны па ўключэнні клас Фіцінга, максімальны па моцным π-укладанні клас Фіцінга, нармальны клас Фіцінга, лакальна нармальны клас Фіцінга, π-нармальны клас Фіцінга, лакальны клас Фіцінга, клас Локета.

У дысертацыі атрыманы новыя ўласцівасці максімальных (па ўключэнні, па моцным укладанні) класаў Фіцінга канечных вырашальных груп, апісана ўзаемасувязь такіх класаў з лакальна нармальнымі класамі Фіцінга. Вырашана праблема Брайса-Косі (1974 г.) апісання неабходнай і дастатковай умовы максімальнасці па ўключэнні аднаго класа Фіцінга ў другім для выпадку класа π-груп: устаноўлены крытэрый π-максімальнасці адвольнага класа Фіцінга ў класе Фіцінга $\mathfrak{S}_\pi$ усіх канечных вырашальных π-груп, які з'яўляецца ненармальным для любога непустога ўласнага падмноства π мноства ўсіх простых лікаў. Пабудаваны прыклады π-максімальных класаў Фіцінга. Атрыманы адмоўны адказ на пытанне А. Н. Скібы (1995 г.) аб тым, што часткова ўпарадкаванае па ўключэнні мноства класаў Фіцінга, якія ўваходзяць у лакальны клас Фіцінга $\mathfrak{F}$ і адрозніваюцца ад $\mathfrak{F}$, не мае максімальных элементаў. Для π-нармальных класаў Фіцінга адмоўна вырашаны абагульненыя варыянты пытання Лауша (1984 г.) аб існаванні максімальных (па ўключэнні, па моцным укладанні) класаў Фіцінга ў найменшым нармальным класе Фіцінга.

Усе асноўныя вынікі дысертацыі з'яўляюцца новымі. Яны носяць тэарэтычны характар і могуць быць выкарыстаны ў даследаваннях па тэорыі канечных групп і іх класаў, а таксама пры чытанні спецкурсаў ва універсітэтах.

РЕЗЮМЕ

Савельева Наталья Валентиновна

Максимальные классы Фиттинга конечных разрешимых групп

Ключевые слова: класс Фиттинга, π-максимальный класс Фиттинга, максимальный по включению класс Фиттинга, максимальный по сильному π-вложению класс Фиттинга, нормальный класс Фиттинга, локально нормальный класс Фиттинга, π-нормальный класс Фиттинга, локальный класс Фиттинга, класс Локетта.

В диссертации получены новые свойства максимальных (по включению, по сильному вложению) классов Фиттинга конечных разрешимых групп, описана взаимосвязь таких классов с локально нормальными классами Фиттинга. Решена проблема Брайса-Косси (1974 г.) описания необходимого и достаточного условия максимальности по включению одного класса Фиттинга в другом для случая класса π-групп: установлен критерий π-максимальности произвольного класса Фиттинга в классе Фиттинга $\mathfrak{S}_\pi$ всех конечных разрешимых π-групп, который является ненормальным для любого непустого собственного подмножества π множества всех простых чисел. Построены примеры π-максимальных классов Фиттинга. Получен отрицательный ответ на вопрос А. Н. Скибы (1995 г.) о том, что частично упорядоченное по включению множество классов Фиттинга, входящих в локальный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ и отличных от $\mathfrak{F}$, не имеет максимальных элементов Для π-нормальных классов Фиттинга отрицательно решены обобщенные варианты вопроса Лауша (1984 г.) о существовании максимальных (по включению, по сильному вложению) классов Фиттинга в наименьшем нормальном классе Фиттинга.

Все основные результаты диссертации являются новыми. Они носят теоретический характер и могут быть использованы в исследованиях по теории конечных групп и их классов, а также при чтении спецкурсов в университетах.

SUMMARY

Savelyeva Natallia Valentinovna

Maximal Fitting Classes of Finite Soluble Groups

Keywords: Fitting class, π-maximal Fitting class, maximal by inclusion Fitting class, maximal by strong π-containment Fitting class, normal Fitting class, locally normal Fitting class, π-normal Fitting class, local Fitting class, Lockett class.

In the dissertation new properties of maximal (by inclusion, by strong containment) Fitting classes of finite soluble groups are established. The interrelation of such classes with locally normal Fitting classes is described. For a case of a class of π-groups a problem of R. A. Bryce and J. Cossey (1974) on description of a necessary and sufficient condition of maximality by inclusion of one Fitting class in another is solved. In particular, the criterion of π-maximality of an arbitrary Fitting class in the Fitting class $\mathfrak{S}_\pi$ of all finite soluble π-groups is established. Notice, that the Fitting class $\mathfrak{S}_\pi$ is non-normal for any nonempty proper subset π of the set of all prime numbers. Examples of π-maximal Fitting classes are constructed. A question of A. N. Skiba (1995) that the partially ordered by inclusion set of Fitting classes, contained in a local Fitting class $\mathfrak{F}$ and distinct from $\mathfrak{F}$, has no maximal elements, is solved negatively. For π-normal Fitting classes the generalized variants of a question of H. Lausch (1984) on existence of maximal (by inclusion, by strong containment) Fitting classes in the smallest normal Fitting class are solved negatively.

All basic results of the dissertation are new. They have theoretical character and can be used in researches in the theory of finite groups and their classes and at delivering a special course at universities.