H. Weber и J. Wellstein
ПРОФЕССОРЪ УНИВЕРСИТЕТА ВЪ СТРАСБУРГѢ. ПРОФЕССОРЪ УНИВЕРСИТЕТА ВЪ СТРАСБУРГѢ.

ЭНЦИКЛОПЕДІЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

РУКОВОДСТВО

для преподающихъ и изучающихъ элементарную математику.

ВЪ ТРЕХЪ ТОМАХЪ.

ПЕРЕВОДЪ СЪ НѢМЕЦКАГО ПОДЪ РЕДАКЦІЕЙ И СЪ ПРИМѢЧАНІЯМИ

В. КАГАНА

Приватъ-доцента Императорскаго Новороссійскаго Университета.

ТОМЪ I.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИЗЪ.

Второе изданіе, дополненное и исправленное.

MATHESIS

ОДЕССА, 1911.

Типографія Акціонерн. Южно-Русскаго Общества Печатнаго Дѣла.
(Пушкинская ул., соб. домъ № 18).

ЭНЦИКЛОПЕДІЯ

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ АЛГЕБРЫ

и

АНАЛИЗА.

СОСТАВИЛЪ

Г. Веберъ.

Предисловіе къ первому русскому изданію.

Сочиненія по элементарной математикѣ рѣзко дѣлятся на два типа. Одни представляютъ собой учебники въ собственномъ смыслѣ этого слова, по которымъ можно систематически изучать предметъ безъ предварительной подготовки; другія представляютъ собою трактаты, содержащіе научное изложеніе дисциплины и разсчитанные на подготовленнаго читателя. Въ то время, какъ новые учебники появляются очень часто, цѣнныя сочиненія второго рода появляются разъ въ четверть вѣка и даже рѣже. Появленіе новаго трактата такого рода всегда указываетъ на то, что въ изложеніи и въ разработкѣ дисциплины установились новыя теченія, новые взгляды; они какъ бы подводятъ итогъ работамъ цѣлаго научнаго поколѣнія. Такое значеніе въ концѣ шестидесятыхъ и въ семидесятыхъ годахъ имѣли: „Элементы математики“ Бальцера [1]) и „Алгебра“ Жозефа Бертрана [2]). Но въ послѣднюю четверть вѣка основы элементарной математики подверглись тщательному пересмотру. Глубокій анализъ, которому посвятили много труда наиболѣе выдающіеся ученые, пролилъ совершенно новый свѣтъ на элементы ариѳметики и геометріи. Научное изложеніе этихъ дисциплинъ значительно уклонилось отъ той системы, которую мы находимъ въ элементарныхъ учебникахъ. Когда г. Билибинъ предпринялъ изданіе „Алгебры“ Бертрана въ русскомъ переводѣ, онъ вынужденъ былъ уже существенно переработать и дополнить текстъ оригинала.

Дать научное и современное изложеніе основъ элементарной математики составляетъ задачу „Энциклопедіи элементарной математики“ профессоровъ Вебера и Вельштейна. Первый томъ этого сочиненія „Энциклопедія элементарной алгебры и анализа“ принадлежитъ профессору Страсбургскаго университета Г. Веберу, автору обширнаго трактата по высшей алгебрѣ [3]). Книга содержитъ, на нашъ взглядъ, мастерское изложеніе элементовъ ариѳметики, алгебры и анализа. Обоснованіе началъ ариѳметики все еще

---

[1]) *R. Baltzer.* „Elemente der Mathematik“. Leipzig, 1865.

[2]) *J. Bertrand.* „Traité d' Algèbre“. Paris, 1862.

[3]) *H. Weber.* „Lehrbuch der Algebra“. Braunschweig. Bd. I—1893, Bd. II—1895.

не можетъ считаться законченнымъ; поэтому нѣкоторые пункты въ I, II и IV главахъ могутъ и здѣсь не вполнѣ удовлетворить вдумчиваго читателя; но онъ найдетъ въ этомъ сочиненіи оригинальную систему изложенія основъ ариѳметики, отражающую всѣ изслѣдованія послѣдняго времени по этому вопросу. Очень обстоятельно и, главное, строго научно изложены и остальные отдѣлы; особенный же интересъ представляетъ XIX глава, содержащая, можно сказать, первую попытку дать элементарное изложеніе сложныхъ доказательствъ невозможности рѣшенія общаго уравненія 5-ой степени въ радикалахъ, неприводимости формулы Кардана и т. п. Общая теорія рядовъ и разложеніе наиболѣе важныхъ функцій изложены столь же строго, какъ и доступно. Очень удачно переработаны также авторомъ доказательства трансцендентности чиселъ e и π.

Авторъ сопровождаетъ многія предложенія историческими указаніями, свѣдѣніями объ ихъ авторахъ. Впрочемъ, свѣдѣнія эти по причинамъ, указаннымъ въ предисловіи автора, довольно скудны. Но въ декабрѣ 1905 г. появилось второе изданіе I-го тома, въ которомъ историческія свѣдѣнія и литературныя указанія значительно расширены. Тѣ добавленія, которыя мы не успѣли внести въ текстъ настоящаго перевода, будутъ приложены къ концу книги.

Наконецъ, чтобы сдѣлать книгу доступной возможно болѣе широкому кругу читателей, мы сочли полезнымъ присоединить разъясняющія примѣчанія въ тѣхъ мѣстахъ, которыя изложены авторомъ слишкомъ сжато. Всѣ подстрочныя примѣчанія, въ которыхъ выноски отмѣчены цифрами, принадлежатъ намъ; тѣ же примѣчанія, въ которыхъ выноски отмѣчены звѣздочками, принадлежатъ автору. Мы полагаемъ, что съ этими дополненіями книга будетъ доступна даже хорошо подготовленному ученику старшаго класса. Первыя главы, по своей отвлеченности, труднѣе другихъ; мы полагаемъ, однако, что это не остановитъ читателя, который съ интересомъ къ дѣлу приступитъ къ чтенію этого сочиненія. Можно даже при первомъ чтеніи опустить первую главу и возвратиться къ ней по прочтеніи всей книги.

Предисловіе ко второму русскому изданію.

Настоящее второе изданіе перваго тома „Энциклопедіи" представляетъ собой переводъ съ вышедшаго въ концѣ 1909 г. третьяго нѣмецкаго изданія книги. Коренная переработка первыхъ главъ *) имѣетъ существенное значеніе, такъ какъ трудныя, крайне отвлеченныя разсужденія, при

*) См. предисловіе автора къ 3-му изданію.

помощи которыхъ авторъ пытался построить ученіе о цѣломъ числѣ въ первомъ изданіи книги, представляли собой барьеръ, остановившій не одного читателя; и это было тѣмъ болѣе досадно, что теорія все же вызывала сомнѣнія, какъ мы уже указывали въ первомъ изданіи книги. Эти отвлеченныя разсужденія уступили теперь мѣсто несравненно болѣе простымъ соображеніямъ. Выиграла ли, однако, книга также въ строгости излагаемой теоріи? Въ предисловіи къ третьему изданію авторъ ссылается на книгу Пуанкаре „Наука и методъ", вышедшую въ русскомъ переводѣ подъ редакціей пишущаго настоящія строки. Я далеко не во всемъ согласенъ съ авторомъ этой книги, во многихъ отношеніяхъ въ высшей степени интересной. Но одна мысль, неоднократно высказанная Пуанкаре, несомнѣнно справедлива: трудно себѣ представить сужденіе, не предполагающее уже понятія о цѣломъ числѣ, хотя бы въ наименьшихъ его значеніяхъ. При этихъ условіяхъ обоснованіе ученія о цѣломъ числѣ представляетъ затрудненія, въ настоящее время почти непреодолимыя. Я надѣюсь имѣть случай еще къ этому вопросу возвратиться; здѣсь же ограничусь замѣчаніемъ, что новыя разсужденія автора все же вызываютъ еще сомнѣнія.

Кромѣ этого крупнаго измѣненія, авторомъ во многихъ параграфахъ переработаны нѣкоторыя детали, мѣстами добавлены цѣлые пункты и параграфы (эти добавленія составили свыше двухъ печатныхъ листовъ), мѣстами измѣнено расположеніе матеріала. Но при обработкѣ новаго русскаго изданія пришлось внести еще больше измѣненій. Дѣло въ томъ, что въ первомъ русскомъ изданіи переводъ былъ сдѣланъ частью съ перваго нѣмецкаго изданія, частью со второго, появившагося во время печатанія книги. Вслѣдствіе этого пришлось въ концѣ тома собрать рядъ дополненій, нашедшихъ себѣ мѣсто въ различныхъ частяхъ книги во второмъ изданіи оригинала. Теперь все это согласовано съ текстомъ третьяго изданія. Кромѣ того, прибавлено около 60 примѣчаній, еще болѣе облегчающихъ чтеніе книги. Врядъ ли мнѣ удалось бы въ настоящее время выполнить этотъ трудъ, если бы ко мнѣ не пришелъ на помощь мой ученикъ и сотрудникъ И. А. Гибшъ. Онъ необычайно тщательно сличилъ переводъ съ новымъ текстомъ оригинала, исправивъ многія опечатки и погрѣшности, благодаря чему новое изданіе много выиграло. Считаю своимъ долгомъ принести г. Гибшу свою глубокую благодарность.

Такъ какъ второй томъ въ настоящее время имѣется только въ I-мъ изданіи и ссылки въ немъ сдѣланы на первое изданіе перваго тома, то въ концѣ книги помѣщена сличительная таблица параграфовъ I-го и II-го изданія перваго тома.

В. Каганъ.

Предисловіе автора къ первому изданію [1].

Сочиненіе, первый томъ котораго мы въ настоящее время выпускаемъ въ свѣтъ, не должно представлять собой учебника въ собственномъ смыслѣ слова. Читателями, которыхъ мы имѣемъ въ виду, являются, во первыхъ, учителя, которые, мы надѣемся, найдутъ въ немъ полезныя указанія для выбора учебнаго матеріала, особенно для старшихъ классовъ; во-вторыхъ, лица, изучающія уже математику спеціально и серьезно, которыя желаютъ пріобрѣсти для этого твердую почву путемъ освѣженія и дополненія пріобрѣтенныхъ раньше элементарныхъ знаній.

Нерѣдко уже разбирался вопросъ, что слѣдуетъ понимать подъ элементарной математикой и какъ установить границы этой области. Единственный научный принципъ, который могъ бы служить для рѣшенія этого вопроса, состоитъ въ томъ, что изъ области элементарной математики исключаютъ понятія о безконечности и о предѣлѣ; элементарная математика противопоставляется поэтому анализу безконечнаго. Съ этой точки зрѣнія къ элементарной математикѣ надо отнести все, что получается при посредствѣ извѣстныхъ простыхъ логическихъ пріемовъ; послѣдніе же даютъ при дальнѣйшемъ развитіи всю теорію чиселъ, включая труднѣйшія ея части, вообще все, что, по мнѣнію Кронекера (Kronecker), имѣетъ въ математикѣ право на существованіе; при этомъ, однако, возникаютъ затрудненія въ самомъ примѣненіи этихъ простыхъ логическихъ пріемовъ, для устраненія чего и созданъ высшій анализъ. Уже такія понятія, какъ ирраціональное число, квадратный корень, логариѳмъ, не относились бы, если стать на эту точку зрѣнія, къ элементарной математикѣ.

Въ геометріи къ элементамъ относятъ то, что выводится изъ понятія о прямой и о кругѣ и (въ пространствѣ) изъ понятій о плоскости и о шарѣ. Но уже соединеніе геометріи въ плоскости и въ пространствѣ

---

[1]) Вскорѣ послѣ появленія этого сочиненія авторъ отпечаталъ предисловіе въ журналѣ „Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" съ нѣкоторыми дополненіями, которыя мы считаемъ существенными. Съ этими дополненіями мы и воспроизводимъ переводъ.

приводитъ къ понятію о конусѣ, а отсюда къ его сѣченіямъ плоскостью, къ такъ называемымъ коническимъ сѣченіемъ. Если же мы соединимъ геометрію съ ариѳметикой, то мы неизбѣжно выйдемъ за предѣлы области, опредѣляемой для элементарной геометріи вышеприведеннымъ принципомъ; такъ, для опредѣленія понятій: площадь, длина дуги и т. п. необходимо пользоваться переходомъ къ предѣлу.

Итакъ, мы видимъ, что такое опредѣленіе элементарной математики, хотя и представляетъ научный интересъ, т. е. можетъ служить для разъясненія возникновенія математическихъ понятій, тѣмъ не менѣе не имѣетъ никакой цѣны съ педагогической точки зрѣнія, если только не ограничиваться лишь самыми простѣйшими главами элементовъ.

Поэтому мы подъ элементарной математикой понимаемъ все то, что можно цѣлесообразно примѣнять при преподаваніи математики въ школѣ, но въ томъ періодѣ его, который предшествуетъ выбору особой спеціальности. Съ такой точки зрѣнія границы этой области зависятъ, главнымъ образомъ, отъ выбора педагога. Но и математическая наука имѣетъ право голоса при обсужденіи даннаго вопроса.

Мнѣнія по вопросу о выборѣ матеріала для школьнаго преподаванія всегда будутъ и должны быть различны. Эти различія зависятъ отъ индивидуальности и научныхъ склонностей преподавателя и, прежде всего, отъ цѣлей, къ которымъ преподаваніе стремится.

Планъ преподаванія будетъ тотъ или иной въ зависимости отъ того, что мы будемъ считать главною задачею научнаго образованія: всестороннее ли гармоническое развитіе ума, пробужденіе дремлющихъ духовныхъ силъ и упражненіе ихъ,—или сообщеніе юношѣ извѣстной суммы полезныхъ свѣдѣній и умѣній, которыя, какъ можно раньше, сдѣлали бы его готовымъ къ трудной жизненной борьбѣ.

Послѣдняя задача заставила бы присоединить къ элементарному преподаванію по возможности больше матеріала для того, чтобы при переходѣ къ изученію спеціальности не было нужды останавливаться больше на подготовительной работѣ.

Очевидно, что это возможно только въ ущербъ глубинѣ и основательности; а при этомъ возникаетъ опасность, что обученіе математикѣ потеряетъ свое существенное значеніе.

Значеніе же это очень различно для различныхъ индивидуальностей. Математическая работа содержатъ въ себѣ особый элементъ творчества. И это относится не только къ творческой дѣятельности въ собственномъ смыслѣ этого слова, но сказывается и въ мелочахъ, проявляется при рѣшеніи задачъ или въ болѣе глубокомъ пониманіи и точномъ воспроизведеніи математическихъ идей. Эта дѣятельность ума въ состояніи совершенно поглотить человѣка и служитъ для лицъ, одаренныхъ соотвѣтствующими способностями, источникомъ величайшихъ наслажденій. Такое явленіе наблюдается какъ въ области абстрактныхъ представленій — въ наукѣ о числахъ, такъ и въ области пространственныхъ представленій — геометріи.

Поэтому я не сомнѣваюсь въ томъ, что для особенно успѣшнаго преподаванія математики необходимо, чтобы ученики обладали извѣстнымъ специфическимъ дарованіемъ. Отсюда отнюдь не слѣдуетъ, понятно, чтобы средне одаренному ученику нельзя было преподавать въ извѣстномъ объемѣ математическихъ знаній и свѣдѣній, которыя будутъ ему нужны при изученіи всякой спеціальной отрасли знаній; это даже необходимо для логическаго воспитанія мысли.

Но такое положеніе вещей создаетъ раздвоеніе въ математическомъ преподаваніи, а это влечетъ за собой крупныя затрудненія. И преподаватель, стремящійся одновременно выполнить обѣ эти задачи — цѣлесообразнаго преподаванія выдающимся ученикамъ и среднимъ, долженъ обладать не только основательными познаніями, но и глубокимъ математическимъ образованіемъ и пониманіемъ тонкостей и красотъ математики.

До сихъ поръ еще, послѣ почти пятидесяти лѣтъ, я вспоминаю съ благодарностью моего учителя въ Гейдельбергскомъ лицеѣ, Арнета (Arneth), и его уроки, оказавшіе на меня глубокое вліяніе. Для большинства учениковъ его преподаваніе представляло мало интереса; но тѣмъ увлекательнѣе оно было для немногихъ исключительныхъ учениковъ, которымъ было доступно его тонкое математическое чутье и пониманіе физики, опередившее господствовавшіе въ то время взгляды.

Въ тѣ времена въ южно-германскихъ гимназіяхъ математикѣ въ программѣ преподаванія отводилось второстепенное мѣсто; и со стороны большинства учителей и учениковъ она не пользовалась уваженіемъ. Поэтому преподаватель могъ вліять лишь на небольшой кружокъ склонныхъ къ математикѣ юношей. Теперь обстоятельства измѣнились къ лучшему, и въ настоящее время врядъ-ли можетъ случиться, чтобы какой-нибудь ученикъ окончилъ гимназію безъ всякихъ математическихъ познаній.

Это есть несомнѣнный шагъ впередъ; но онъ не долженъ покупаться цѣною пониженія внутренняго содержанія преподаванія; нужно, чтобы при новой системѣ и болѣе способный ученикъ нашелъ необходимый для себя матеріалъ. Послѣднее же достигается не тѣмъ, что лучшихъ учениковъ выводятъ возможно дальше изъ области элементарной математики въ область высшей. Для дальнѣйшаго математическаго развитія это могло бы скорѣе служить помѣхою, чѣмъ помощью. Значительно болѣе плодотворнымъ является углубленіе содержанія элементарнаго преподаванія, въ которомъ, не выходя изъ прежнихъ границъ, можно найти неисчерпаемыя богатства матеріала; такое углубленіе дѣйствуетъ на ученика, развивая его и оживляя предметъ. При этомъ учителю должна быть дана полная свобода выбирать изъ всего многообразнаго матеріала то, что соотвѣтствуетъ его собственнымъ склонностямъ. Ибо плодотворное воздѣйствіе на ученика можетъ имѣть мѣсто только тамъ, гдѣ преподаватель относится еще съ живымъ интересомъ къ предмету.

Между прочимъ, и строгое логическое обоснованіе математики можетъ быть отнесено къ области элементовъ. Относящіеся сюда вопросы въ новѣйшее время подверглись глубокому изслѣдованію, и мы сдѣлали значительный шагъ впередъ къ ихъ разрѣшенію. Основаніямъ ариѳметики посвящены статьи Дедекинда (Dedekind): „*Was sind und was sollen die Zahlen*“ (Braunschweig, 1888, 1892) и „*Stetigkeit und irrationale Zahlen*“ [2]) (1872, 1892). Авторъ оперируетъ въ нихъ при посредствѣ простѣйшихъ пріемовъ, которыми располагаетъ всякій здравый разсудокъ и которые не предполагаютъ никакихъ спеціальныхъ философскихъ или математическихъ свѣдѣній. Въ томъ же направленіи ведутся новѣйшія изслѣдованія по основаніямъ геометріи; правда, они не достигли еще той законченности, какою отличаются соотвѣтствующія изслѣдованія по ариѳметикѣ. Но, чтобы понимать эти вопросы, необходимо располагать извѣстною зрѣлостью сужденій, а потому съ нихъ нельзя начинать преподаванія.

Итакъ, изложеніе этихъ принципіальныхъ вопросовъ, въ видѣ своего рода философской пропедевтики, можно рекомендовать въ послѣднемъ классѣ гимназіи, хорошо подготовленномъ. Но при этомъ необходимо соблюдать осторожность, такъ какъ полупониманіе въ этой области равносильно непониманію, если не хуже его.

Для большинства учениковъ полезнѣе и интереснѣе, если преподаваніе будетъ расширено въ сторону *приложеній*. Новыя программы испытаній на званіе преподавателя средней школы въ Германіи даютъ къ этому толчекъ [3]), и тѣмъ самымъ реальному образованію отводится больше мѣста. Приложенія могутъ оживить преподаваніе математики, увеличить къ ней интересъ, а точность и чистота при черченіи придаютъ этой отрасли преподаванія немалое воспитательное значеніе.

Далѣе, извѣстныя главы теоріи чиселъ и высшей алгебры могутъ съ успѣхомъ примѣняться при элементарномъ преподаваніи. Во-первыхъ, онѣ пользуются лишь элементарными математическими пріемами; а во-вторыхъ, преимущество ихъ — въ многочисленности примѣровъ, которыми можетъ воспользоваться учитель; рѣшеніе этихъ примѣровъ, допускающее

---

[2]) Переводъ этого небольшого сочиненія, сдѣланный С. О. Шатуновскимъ, былъ помѣщенъ въ „Вѣстникѣ Опытной Физики и Элементарной Математики“, въ №№ 191 и 192. Брошюра была также выпущена отдѣльнымъ изданіемъ. Это изданіе разошлось и въ настоящее время готовится новое. „Mathesis“.

[3]) По этимъ программамъ при государственномъ экзаменѣ на званіе преподавателя математики за одинъ изъ второстепенныхъ предметовъ можно взять прикладную метематику. А при допущеніи къ экзамену засчитываются два семестра, проведенные студентомъ, вмѣсто университета, въ спеціальномъ техническомъ учебномъ заведеніи.

всегда простую повѣрку, даетъ учащемуся большое удовлетворенiе. Примѣненiе этихъ главъ къ построенiю правильныхъ многоугольниковъ вызываетъ и геометрическiй интересъ.

Затѣмъ существуетъ рядъ знаменитыхъ задачъ, извѣстныхъ уже съ древнихъ временъ, — какъ, напримѣръ, проблемы объ удвоенiи куба, о трисекцiи угла при посредствѣ циркуля и линейки, рѣшенiе въ радикалахъ уравненiя пятой степени, квадратура круга, — о невозможности рѣшенiя которыхъ школьники постоянно слышатъ. Въ настоящее время наука не только располагаетъ доказательствами невозможности, но доказательствамъ этимъ она придала столь простую форму, что ими можно безъ труда воспользоваться при элементарномъ преподаванiи.

Въ теченiе самой работы матерiалъ, предназначенный для настоящаго сочиненiя, былъ увеличенъ, и самый планъ былъ расширенъ. Оказалось поэтому цѣлесообразнымъ разбить сочиненiе не на два тома, какъ это предполагалось сначала, а на три. Первый томъ долженъ охватить область ариѳметики и алгебры, второй — геометрiи, а третiй будетъ посвященъ приложенiямъ. Мы надѣемся, что второй и третiй томы появятся въ непродолжительномъ времени. Благодаря этому оказалось возможнымъ удѣлить значительно больше мѣста приложенiямъ, которыя мы имѣли въ виду и при выборѣ примѣровъ въ различныхъ частяхъ текста.

Впрочемъ, согласно плану настоящяго сочиненiя, мы не разрабатывали большого числа примѣровъ. Мы не считали цѣлесообразнымъ останавливаться на примѣрахъ, имѣющихъ въ виду только упражненiя, такъ какъ въ литературѣ нѣтъ недостатка въ прекрасныхъ сборникахъ такого рода примѣровъ. Примѣры мы помѣщали лишь въ тѣхъ случаяхъ, если это казалось необходимымъ для пониманiя текста, или если примѣръ самъ по себѣ могъ представлять научный интересъ. Точно такъ же мы не удѣляли много мѣста историческимъ и литературнымъ справкамъ. Мы имѣемъ въ настоящее время обширное сочиненiе по исторiи математики М. Кантора; въ этомъ сочиненiи мы находимъ подробныя и точныя свѣдѣнiя за огромный перiодъ отъ зарожденiя первыхъ начатковъ математики до середины XVIII столѣтiя; благодаря же тщательно составленному регистру, это сочиненiе даетъ возможность легко орiентироваться и въ отдѣльныхъ вопросахъ. Сверхъ того, въ непродолжительномъ времени въ „Энциклопедiи математическихъ наукъ“ [4]) имѣетъ появиться статья „Элементар-

[4]) „Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen“, Leipzig, Teubner, — „Энциклопедiя математическихъ наукъ со включенiемъ ихъ приложенiй“. Чрезвычайно обширное и цѣнное сочиненiе, выходящее въ настоящее время одновременно на нѣмецкомъ и французскомъ языкахъ. Отдѣльныя статьи разрабатываются выдающимися учеными всего мiра. Въ настоящее время вполнѣ законченъ только I-ый томъ „Ариѳметика и Алгебра“, содержащiй 1196 страницъ; вышли также многiе выпуски другихъ томовъ.

ная математика“ М. Симона (M. Simon); мы имѣли возможность видѣть эту статью въ рукописи; она содержитъ подробныя историческія и литературныя указанія по всѣмъ вопросамъ, которые могутъ быть отнесены къ элементарной математикѣ. Намъ казалось поэтому достаточнымъ ограничиваться при каждомъ собственномъ имени, появляющемся при наименованіи того или другого предложенія, короткой замѣткой о времени и обстоятельствахъ жизни этого автора.

Наконецъ, мы должны указать, что настоящее сочиненіе обязано своимъ появленіемъ въ свѣтъ иниціативѣ издателя А. Акермана-Тейбнера (A. Ackermann-Teubner); онъ указалъ намъ на „Элементы математики“ Бальцера (Baltzer), сочиненіе, которое выдержало нѣсколько изданій и въ настоящее время уже не существуетъ въ продажѣ; на такого рода сочиненіе, очевидно, имѣется спросъ. Поэтому обработать такого рода сочиненіе согласно господствующимъ въ настоящее время въ наукѣ воззрѣніямъ, представляетъ собой несомнѣнно благодарную задачу; я тѣмъ охотнѣе взялъ ее на себя, что съ 1888 г. я читалъ въ Марбургѣ, Геттингенѣ и Страсбургѣ университетскій курсъ подъ заглавіемъ: „Энциклопедія элементарной математики“.

Страсбургъ, іюль 1903 г. **Г. Веберъ.**

Предисловіе автора ко второму изданію.

Первый томъ нашей „Энциклопедіи элементарной математики“ встрѣтилъ благопріятный пріемъ какъ со стороны математическаго міра, такъ и со стороны критики. Но наряду съ чрезмѣрными похвалами слышались — отчасти въ критикѣ, отчасти въ личныхъ разговорахъ — различныя пожеланія. Я тщательно обдумалъ всѣ высказанныя мнѣ пожеланія и, поскольку я находилъ ихъ въ чемъ-либо правильными, я постарался удовлетворить ихъ во второмъ изданіи.

Часто высказывалось пожеланіе болѣе подробной разработки исторической части. Для того, чтобы избѣжать слишкомъ большого труда, но въ то же время не ограничиться сухимъ перечисленіемъ заглавій книгъ и хронологическихъ данныхъ, я остановился на слѣдующемъ: не стремясь все-таки къ полнотѣ изложенія, подробнѣе разработать части математики, имѣющія общій интересъ, и дать небольшіе эскизы изъ исторіи математики. Въ этомъ и во многихъ другихъ вопросахъ я пользовался совѣтомъ и дѣятельною помощью г. Штекеля (Stäckel), профессора въ Ганноверѣ. Считаю своимъ долгомъ выразить ему здѣсь мою благодарность.

Изъ болѣе существенныхъ измѣненій я долженъ упомянуть еще о XXVII главѣ, которая посвящена первоначальнымъ элементамъ дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій. Въ послѣднее время въ дѣлѣ математическаго преподаванія создалось движеніе, направленное къ тому, чтобы очень рано выяснить понятія о перемѣнной величинѣ и о функціи и такимъ образомъ подготовлять учащагося къ примѣненію его познаній къ естественнымъ и техническимъ наукамъ. Болѣе подробныя свѣдѣнія объ этихъ планахъ и стремленіяхъ можно найти въ изданномъ Ф. Клейномъ и Е. Рике трудѣ „Матеріалы по вопросу о преподаваніи математики и физики въ высшей школѣ“ [1]). Этотъ путь вполнѣ естественно приводитъ къ основнымъ понятіямъ дифференціальнаго исчисленія. Теперь возникаетъ только вопросъ, — слѣдуетъ ли просто употреблять установившіеся въ этихъ дисциплинахъ и общепринятые термины и обозначенія, или ихъ слѣдуетъ избѣгать, неявно замѣняя ихъ другими. Я, однако, не могъ найти достаточнаго основанія къ тому, чтобы, давая понятія, скрывать ихъ названія. Ибо врядъ ли слѣдуетъ опасаться того, что ученикъ, нуждающійся въ математическихъ познаніяхъ при своихъ дальнѣйшихъ занятіяхъ, удовольствуется тѣми начатками, которые могли быть ему сообщены въ школѣ, и потому станетъ вести свои дальнѣйшія занятія съ меньшимъ интересомъ или съ менѣе серьезнымъ отношеніемъ къ дѣлу. Я тѣмъ охотнѣе рѣшился присоединить къ этому труду XXVII главу, что въ предыдущихъ главахъ изложено уже о безконечныхъ рядахъ все, что необходимо для пониманія этихъ основныхъ понятій, и еще потому, что въ геометріи всетаки нельзя обойти понятій о касательной, о кривизнѣ, о величинѣ поверхности, объ объемѣ и т. д.

Страсбургъ, ноябрь 1905 г. **Г. Веберъ.**

Предисловіе автора къ третьему изданію.

Выпуская въ свѣтъ третье изданіе перваго тома „Энциклопедіи“, я получилъ возможность развить въ первыхъ параграфахъ тотъ способъ установленія понятія о числѣ, который уже со времени появленія I-го изданія кажется мнѣ наиболѣе удовлетворительнымъ; эту разработку я опубликовалъ въ статьѣ, содержащей элементарное ученіе о комплексахъ и помѣщенной въ журналѣ „Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“, а также въ приложеніи къ третьему тому настоящаго сочиненія.

---

[1]) F. Klein und E. Riecke. „Neue Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Unterrichts an den höheren Schulen“, Leipzig, Teubner, 1904.

Нужно разъ навсегда отказаться отъ попытокъ установить понятіе о числѣ съ помощью чистой логики, создавъ его, такъ сказать, изъ ничего; напротивъ, это понятіе должно быть построено на повседневномъ опытѣ, съ помощью котораго вырабатываются представленія о комплексахъ съ небольшимъ числомъ элементовъ; иными словами, нужно ограничиться тѣмъ, чтобы добыть изъ этихъ представленій простѣйшія понятія, лежащія въ основѣ ученія о числѣ. При этомъ понятіе о безконечности, какъ о чемъ-то вполнѣ опредѣленномъ, совершенно устраняется и вводится значительно позже въ видѣ предѣла.

Я пользуюсь настоящимъ случаемъ, чтобы указать на новое сочиненіе H. Poincaré „Science et Méthode" *), въ которомъ нашла себѣ мѣсто столь же остроумная, сколь и блестяще написанная критика логической теоріи ученія о комплексахъ.

Помимо указанныхъ измѣненій въ началѣ книги, планъ и содержаніе сочиненія остались безъ измѣненія. Неточности, допущенныя въ отдѣльныхъ мѣстахъ первыхъ двухъ изданій, устранены съ помощью дополнительныхъ разъясненій. Болѣе значительныхъ измѣненій, — хотя бы въ направленіи, указанномъ Ф. Клейномъ въ недавно вышедшихъ его литографированныхъ лекціяхъ подъ заглавіемъ „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus", **) — я не рѣшился внести.

Страсбургъ, февраль 1909 г. **Г. Веберъ.**

---

*) А. Пуанкаре, „Наука и методъ". Переводъ съ французскаго подъ редакціей В. Ф. Кагана. Одесса, „Mathesis", 1910.

**) Ф. Клейнъ, „Элементарная математика съ высшей точки зрѣнія". Одесса, „Mathesis". Выходитъ изъ печати въ ближайшее время.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Стр.

Книга I.

Основанія ариѳметики.

Глава I.

Натуральныя числа.

Глава II.

Ариѳметическія дѣйствія.

Глава III.

Дѣленіе и введеніе дробей.

Глава IV.

Ирраціональныя числа.

Глава V.

Отношенія.

Глава VI.

Степени и логариѳмы.

хорош

Глава VII.

Уравненія первой степени.

Глава VIII.

Квадратныя уравненія и мнимыя числа.

Глава IX.

Перестановки и сочетанія.

Глава X.

Различныя приложенія.

Книга II.

Алгебра.

Глава XI.

Алгебраическія уравненія.

Глава XII.

Основныя теоремы алгебры.

Глава XIII.

Неопредѣленныя уравненія первой степени.

Глава XIV.

Неопредѣленныя уравненія второй степени.

Глава XV.

Непрерывныя дроби.

Глава XVI.

Алгебраическое рѣшеніе уравненій 3-ей и 4-ой степени.

Глава XXII.

Степенные ряды.

Глава XXIII.

Безконечные сходящіеся ряды для показательной и для тригонометрическихъ функцій.

Глава XXIV.

Биноміальный рядъ.

Глава XXV.

Логариѳмическіе и циклометрическіе ряды.

Глава XXVI.

Безконечныя произведенія.

Глава XXVII.

Трансцендентность чиселъ e и π.

Глава XXVIII.

Функціи, дифференціалы и интегралы.

Книга I.

ОСНОВАНІЯ АРИѲМЕТИКИ.

ГЛАВА I.

Натуральныя числа.

---

§ 1. Единицы, комплексы.

1. Человѣческій духъ одаренъ способностью оріентироваться въ рядѣ смѣняющихъ другъ друга впечатлѣній, ощущеній, представленій и мыслей, выдѣляя нѣкоторыя изъ нихъ въ опредѣленную группу и разсматривая таковую, какъ единицу, какъ одинъ объектъ. Самый процессъ выдѣленія вполнѣ зависитъ отъ нашего произвола: мы руководствуемся только его цѣлесообразностью [1]). Чтобы объясняться другъ съ другомъ, мы даемъ такой группѣ особое названіе. Но понятіе о единицѣ ни въ какомъ случаѣ не ограничивается тѣми объектами, которые имѣютъ особыя названія въ культурныхъ языкахъ; оно не ограничивается также вещественными, конкретными объектами. Съ понятіемъ о единицѣ неразрывно связано понятіе о множествѣ.

2. Слѣдующій шагъ въ развитіи нашей мысли заключается въ томъ, что мы воспринимаемъ цѣлый рядъ объектовъ и объединяемъ ихъ въ новую единицу, которую мы называемъ единицей высшаго порядка, системой, классомъ, категоріей или, наконецъ, комплексомъ. Отдѣльные объекты такой системы называются ея элементами.

Образованіе этихъ классовъ также вполнѣ произвольно. Классъ считается опредѣленнымъ, если мы имѣемъ возможность относительно каждаго объекта установить, принадлежитъ ли онъ этому классу или нѣтъ. По существу, мы можемъ соединять въ одинъ классъ самые разнообразные объекты; руководящимъ началомъ при этомъ служитъ лишь наша цѣль, заключающаяся въ томъ, чтобы разбираться въ мірѣ нашихъ представленій и объясняться съ ближними. Мы соединяемъ преимущественно въ одинъ классъ такіе объекты, которые имѣютъ извѣстное

---

[1]) Авторъ хочетъ сказать, что отъ нашего усмотрѣнія вполнѣ зависитъ, какіе именно объекты соединять въ группы и отдѣлять отъ остальныхъ объектовъ; производя то или другое отдѣленіе, мы сознательно или безсознательно руководствуемся лишь тѣмъ, что намъ удобно или полезно.

сходство, извѣстное родство въ нашемъ представленіи. Для многихъ изъ такихъ классовъ языкъ выработалъ особыя названія. Чѣмъ дальше ушло образованіе такихъ категорій, тѣмъ языкъ богаче, тѣмъ онъ болѣе развитъ.

Часто встрѣчающіяся категоріи обращаются въ нашемъ представленіи въ понятія, съ которыми мы уже не соединяемъ представленія о множествѣ [2]); такимъ образомъ мы получаемъ новыя единицы. Этимъ путемъ мы создаемъ объекты, которымъ мы присваиваемъ также извѣстное объективное существованіе — идеи. Образованіе идей имѣетъ мѣсто уже при созданіи единицъ, которыя въ точности никогда не отвѣчаютъ окружающей насъ дѣйствительности. Это особенно ясно по отношенію къ числамъ: какъ ни сложно ихъ первоначальное опредѣленіе, они все-таки становятся въ нашемъ представленіи отдѣльными объектами.

§ 2. Сопряженіе, мощность.

1. Третій видъ дѣятельности нашего духа заключается въ сопряженіи однихъ объектовъ съ другими. Каждое сужденіе, каждое предложеніе, которое не сводится къ простому наименованію какого-либо объекта, представляетъ собой такого рода сопряженіе. И здѣсь мы совершенно свободны въ выборѣ тѣхъ объектовъ, которые мы сопрягаемъ другъ съ другомъ; этотъ актъ нашего духа именно и ставитъ ихъ въ опредѣленныя отношенія другъ къ другу.

Но всѣ успѣхи нашего познанія именно и сводятся къ удачному и цѣлесообразному производству такого рода сопряженій.

Мы будемъ обыкновенно обозначать комплексы прописными буквами латинскаго алфавита. Положимъ, что мы имѣемъ два комплекса A и B. Мы можемъ попытаться отнести каждый элементъ комплекса A къ нѣкоторому элементу комплекса B (т. е. считать каждый элементъ комплекса A соотвѣтствующимъ нѣкоторому элементу комплекса B) и при томъ такъ, чтобы два различныхъ элемента комплекса A всегда отвѣчали различнымъ же элементамъ комплекса B. Если намъ удастся выполнить такого рода сопряженіе, то мы будемъ говорить, что мы отобразили комплексъ A въ комплексѣ B, или что мы установили соотвѣтствіе между комплексомъ A и комплексомъ B [3]). Элементы комплекса A мы

---

[2]) Называя, напримѣръ, „столъ", мы обыкновенно не думаемъ о томъ, что это есть названіе категоріи, содержащей множество объектовъ.

[3]) Это основное понятіе необходимо выяснить подробнѣе. Положимъ, что комплексъ A состоитъ изъ элементовъ a, b, c, d, комплексъ же B — изъ элементовъ x, y, z, u, v. Будемъ считать элементъ a соотвѣтствующимъ, скажемъ, элементу x, элементъ b соотвѣтствующимъ элементу u, элементы c и d — соотвѣтствующими элементамъ z и y. Этимъ будетъ установлено соотвѣтствіе между комплексомъ A и комплексомъ B. Это соотвѣтствіе ни въ чемъ иномъ не заключается, какъ въ томъ, что мы считаемъ каждый элементъ комплекса A соотвѣтствующимъ (въ силу на-

будемъ называть оригиналами, а элементы комплекса B, къ которымъ они отнесены, ихъ изображеніями.

Легко видѣть, какую пользу можетъ приносить такого рода сопряженіе: если комплексъ B намъ хорошо извѣстенъ, то такое соотвѣтствіе даетъ намъ возможность оріентироваться въ другомъ комплексѣ A, который до того представлялся намъ безпорядочнымъ аггрегатомъ элементовъ; каждый элементъ комплекса A какъ бы получаетъ особое названіе.

2. Такого рода соотвѣтствіе будетъ взаимнымъ, если намъ пришлось, устанавливая его, воспользоваться каждымъ элементомъ комплекса B, т. е. если къ каждому элементу комплекса B отнесенъ такимъ образомъ одинъ и только одинъ элементъ комплекса A. Такого рода соотвѣтствіе мы будемъ называть однозначнымъ [4]).

Если два комплекса могутъ быть сопряжены такого рода однозначнымъ соотвѣтствіемъ, то говорятъ, что они имѣютъ одинаковую мощность, или что они эквивалентны [5]). Эквивалентность обозначаютъ знакомъ $\sim$, и слова „комплексъ A эквивалентенъ комплексу B“ записываютъ такъ:

$$A \sim B.$$

Предыдущія соображенія не исключаютъ возможности, что комплексъ A совпадаетъ съ комплексомъ B; иными словами, можно устанавливать соотвѣтствіе комплекса съ самимъ собой. При этомъ каждый элементъ можетъ соотвѣтствовать либо себѣ же самому, либо другому элементу. Если каждый элементъ соотвѣтствуетъ самому себѣ, то такое сопряженіе, очевидно, однозначно, и потому каждый комплексъ имѣетъ съ самимъ собой одинаковую мощность [6]).

Нужно замѣтить, что при соотвѣтствіи, связывающемъ комплексъ съ самимъ собой, каждый элементъ сопряженъ съ нѣкоторымъ элементомъ въ качествѣ его оригинала и съ нѣкоторымъ элементомъ въ качествѣ его

шего соглашенія) нѣкоторому элементу комплекса B. Ясно, что такое соотвѣтствіе можно установить многими другими способами.

[4]) Соотвѣтствіе, установленное въ предыдущемъ примѣчаніи, не однозначно, потому что элементъ v комплекса B остался свободнымъ: ему не соотвѣтствуетъ ни одинъ элементъ комплекса A. Если бы въ комплексѣ B элемента v не было, то соотвѣтствіе было бы однозначнымъ.

[5]) Если бы, слѣдовательно, въ предыдущемъ примѣрѣ не было элемента v, то комплексы были бы эквивалентны.

[6]) Пусть въ комплексѣ A (a, b, c, d) элементъ a соотвѣтствуетъ элементу b, элементъ b — элементу d, элементъ c — элементу a и элементъ d — элементу c. Это соглашеніе сопрягаетъ однозначнымъ соотвѣтствіемъ комплексъ A съ самимъ собой. Ясно, что такого рода соотвѣтствія могутъ быть установлены 24 способами, причемъ одно изъ нихъ относитъ каждый элементъ самому себѣ.

изображенія; эти два элемента могутъ быть различны [7]). Отображеніе комплекса въ самомъ себѣ становится нагляднѣе, если представить себѣ, что одинъ и тотъ же комплексъ данъ въ двухъ экземплярахъ. Этимъ путемъ отображеніе комплекса въ самомъ себѣ сводится къ отображенію одного комплекса въ другомъ.

Примѣрами эквивалентныхъ комплексовъ могутъ служить пальцы одной руки и пальцы другой руки или точки одного отрѣзка AB и точки другого отрѣзка CD. Чтобы убѣдиться въ послѣднемъ, представимъ себѣ, что отрѣзки приложены другъ къ другу подъ угломъ такъ, что концы A и C совпадаютъ. Если мы теперь будемъ считать соотвѣтствующей каждой точкѣ M отрѣзка AB ту точку N отрѣзка CD, которая расположена на прямой MN, параллельной BD, то этимъ будетъ установлено однозначное соотвѣтствіе между точками одного и другого отрѣзка.

§ 3. Расположенные комплексы.

1. Комплексъ называется расположеннымъ, если установлено нѣкоторое правило, опредѣляющее, который изъ любыхъ двухъ различныхъ его элементовъ принимается за большій и который за меньшій; правило это должно еще удовлетворять тому требованію, чтобы всякій разъ, какъ изъ трехъ элементовъ a, a', a'' элементъ a меньше, нежели a', а элементъ a' меньше, нежели a'', элементъ a былъ меньше, нежели a''.

Комплексъ, элементы котораго могутъ быть расположены такимъ образомъ, называется располагающимся комплексомъ.

Въ поясненіе этого опредѣленія мы сдѣлаемъ еще слѣдующія замѣчанія:

Слова „большій“ и „меньшій“ выбраны только для краткости рѣчи; съ такимъ же успѣхомъ можно было бы пользоваться терминами „предшествующій и послѣдующій“, „высшій и низшій“ и т. п. Ничего физически большаго или меньшаго съ этимъ соединять не приходится.

Относительно обозначеній замѣтимъ еще слѣдующее:

Если A есть комплексъ, а a и a' — два его элемента, то соотношенія

$$a < a' \quad \text{и} \quad a' > a \tag{1}$$

означаютъ одно то же: именно, если a меньше a', то a' больше a. Если a'' есть третій элементъ комплекса a, то изъ соотношеній

$$a < a', \quad a' < a'' \tag{2}$$

[7]) Такъ, напримѣръ, въ соотвѣтствіи, установленномъ въ предыдущемъ примѣчаніи, элементу a отвѣчаетъ элементъ b въ качествѣ его изображенія и элементъ c въ качествѣ оригинала.

должно вытекать, что

$$a < a''$$ [8]). (3)

Въ этихъ формулахъ содержится то, что сообщаетъ расположенію характеръ величины.

Если A обозначаетъ комплексъ независимо отъ расположенія его элементовъ, то подъ $\overline{A}$ мы будемъ разумѣть тотъ же комплексъ при опредѣленномъ расположеніи его элементовъ.

Что существуютъ располагающіеся комплексы, этому насъ учитъ опытъ, — напримѣръ, пять пальцевъ руки, точки прямолинейнаго отрѣзка и. т. д. Вопросъ о томъ, существуютъ ли нерасполагающіеся комплексы, мы относимъ къ трансцендентному ученію о комплексахъ и здѣсь его касаться не будемъ.

2. Комплексъ B называется частью комплекса A, если каждый элементъ b перваго комплекса есть въ то же время элементъ второго; комплексъ B называется правильной частью комплекса A, если въ составъ послѣдняго входитъ, по крайней мѣрѣ, одинъ такой элементъ, котораго нѣтъ въ комплексѣ A.

3. Если A' есть часть комплекса A, а A'' — часть комплекса A', то A'' представляетъ собой часть комплекса A. Если при этомъ A' есть правильная часть комплекса A или A'' есть правильная часть комплекса A' (или если имѣетъ мѣсто и то и другое), то A'' есть правильная часть комплекса A.

Если B есть правильная часть комплекса A, то совокупность тѣхъ и только тѣхъ элементовъ, которые принадлежатъ комплексу A, не входя, однако, въ составъ комплекса B образуютъ новый комплексъ C, который

---

[8]) Это, собственно, формулировано уже выше въ опредѣленіи. Смыслъ заключается въ слѣдующемъ. Намъ дается нѣкоторый комплексъ; мы устанавливаемъ нѣкоторое правило, на основаніи котораго мы изъ каждыхъ двухъ элементовъ будемъ одинъ называть большимъ, другой — меньшимъ. Такъ, напримѣръ, въ геометріи въ комплексѣ всѣхъ круговъ мы признаемъ за меньшій тотъ изъ двухъ круговъ, который помѣщается внутри бо́льшаго. Однако, такого рода правило можно устанавливать, очевидно, многообразно. Допустимъ, напримѣръ, что правила, по которымъ въ геометріи отличаютъ большую или меньшую длину, а также большую или меньшую площадь, сохраняются въ обычномъ своемъ видѣ; обращаясь теперь къ комплексу всѣхъ многоугольниковъ, мы могли бы условиться считать большимъ тотъ, который имѣетъ большую площадь; это будетъ одно правило, одинъ критерій сравненія; но мы могли бы условиться считать большимъ тотъ, который имѣетъ большій периметръ; это былъ бы другой критерій сравненія. Къ различнымъ критеріямъ, по которымъ можно опредѣлять большій и меньшій элементъ комплекса, мы будемъ предъявлять, однако, слѣдующее требованіе: если въ силу установленнаго критерія элементъ a оказывается меньше элемента a', а этотъ послѣдній оказывается меньше элемента a'', то въ силу того же критерія элементъ a долженъ оказаться меньше, нежели a''.

мы будемъ называть **дополненіемъ** комплекса B до комплекса A. Это именно соотношеніе между комплексами A, B и C мы будемъ символически обозначать такъ:

$$A = B + C \quad \text{или} \quad A = C + B.$$

Въ этомъ случаѣ C также представляетъ собой правильную часть комплекса A, а B есть его дополненіе до комплекса A. Комплексъ, состоящій изъ одного только элемента, не имѣетъ правильной части. Но опытъ указываетъ намъ, что существуютъ комплексы, имѣющіе правильныя части, напримѣръ, комплексъ, состоящій изъ двухъ элементовъ.

Если B и C суть два комплекса, то можно составить комплексъ $A = B + C$, въ который мы внесемъ каждый элементъ, фигурирующій въ одномъ изъ двухъ комплексовъ (или въ обоихъ). Если при этомъ нѣтъ ни одного элемента, входящаго въ составъ обоихъ комплексовъ (B и C), то B и C суть правильныя части комплекса A и представляютъ собой каждый дополненіе другого до комплекса A.

4. Каждая часть располагающагося комплекса есть располагающійся комплексъ.

Въ самомъ дѣлѣ, если $\overline{A}$ есть расположенный комплексъ, а B есть часть комплекса A, то комплексъ B также будетъ расположенъ, если мы любымъ двумъ его элементамъ b и b' припишемъ ту же послѣдовательность, какую они имѣютъ въ комплексѣ $\overline{A}$. Мы будемъ въ такомъ случаѣ говорить, что **комплексъ** B **расположенъ сообразно расположенію комплекса** A.

5. Если $\overline{B}$ и $\overline{C}$ суть расположенные комплексы, не имѣющіе общихъ элементовъ, то $A = B + C$ есть комплексъ располагающійся.

Въ самомъ дѣлѣ, если два различныхъ элемента a и a' комплекса A принадлежатъ одной и той же части,—напримѣръ, части B, то мы присвоимъ имъ ту же послѣдовательность, какую они имѣютъ въ расположеніи $\overline{B}$. — Соглашеніе (α).

Если элементъ a принадлежитъ комплексу B, а элементъ a' — комплексу C, то мы будемъ считать $a < a'$. — Соглашеніе (β).

Теперь нетрудно убѣдиться, что при этомъ расположеніи сохраняется характеръ величины. Въ самомъ дѣлѣ, пусть a, a', a'' будутъ различные элементы комплекса A; положимъ, что при установленномъ нами расположеніи $\overline{A}$

$$a < a', \; a' < a''. \tag{1}$$

Нужно доказать, что отсюда вытекаетъ соотношеніе

$$a < a''. \tag{2}$$

Здѣсь нужно различать четыре случая.

1. Элементъ a принадлежитъ комплексу C. Тогда элементы a' и a'' также принадлежатъ комплексу C (въ виду соглашенія (β)); вмѣстѣ съ тѣмъ отсюда вытекаетъ соотношеніе (2) въ виду характера расположенія $\overline{C}$.

2. Элементъ a принадлежитъ комплексу B, а элементъ a' комплексу C. Тогда a'' (въ виду соглашеній (1) и (β)) также принадлежитъ комплексу C; вмѣстѣ съ тѣмъ изъ соглашенія (β) вытекаетъ соотношеніе (2).

3. Элементъ a принадлежитъ комплексу B, элементъ a' также принадлежитъ комплексу B, а элементъ a'' принадлежитъ комплексу C. И въ этомъ случаѣ соотношеніе (2) вытекаетъ изъ соглашенія (β).

4. Элементъ a'' принадлежитъ комплексу B; въ такомъ случаѣ элементы a и a' также должны принадлежать комплексу B, и соотношеніе (2) вытекаетъ изъ расположенія $\overline{B}$.

Если мы расположимъ элементы комплекса A на основаніи соглашеній (α) и (β), то мы будемъ говорить, что мы расположили ихъ въ порядкѣ ($\overline{B}$, $\overline{C}$). Ясно, что такимъ же образомъ мы можемъ установить и расположеніе ($\overline{C}$, $\overline{B}$).

§ 4. Конечные комплексы.

1. Если въ расположенномъ комплексѣ $\overline{A}$ имѣется элементъ a_0, обладающій тѣмъ свойствомъ, что для всякаго элемента a комплекса $\overline{A}$, отличнаго отъ a_0, имѣетъ мѣсто неравенство

$$a_0 < a, \tag{1}$$

то a_0 называется наименьшимъ элементомъ комплекса $\overline{A}$. Болѣе одного наименьшаго элемента въ данномъ расположенномъ комплексѣ существовать не можетъ; въ самомъ дѣлѣ, если бы элементъ a_0' также былъ наименьшимъ, то, согласно соотношенію (1), одновременно имѣли бы мѣсто какъ неравенство $a_0 < a_0'$, такъ и противорѣчащее ему неравенство $a_0' < a_0$. Точно такъ же элементъ a_1 комплекса $\overline{A}$ называется наибольшимъ, если для каждаго элемента a, отличнаго отъ a_1, имѣетъ мѣсто неравенство

$$a < a_1.$$

Болѣе одного наибольшаго элемента также существовать не можетъ.

2. Комплексъ A называется конечнымъ, если это комплексъ располагающійся и если онъ при всѣхъ возможныхъ для него расположеніяхъ имѣетъ наименьшій элементъ *).

Это опредѣленіе заключаетъ въ себѣ требованіе, чтобы конечный комплексъ A всегда имѣлъ наименьшій элементъ; но мы подчеркиваемъ, что онъ долженъ обладать этимъ свойствомъ не только при какомъ-либо одномъ, но при всякомъ возможномъ для него расположеніи его элементовъ.

Расположенный комплексъ $\bar{A}$ всегда допускаетъ еще другое расположеніе, которое называется обратнымъ по отношенію къ расположенію $\bar{A}$ и которое можно установить съ помощью слѣдующаго правила: два элемента a и a', связанные въ расположеніи $\bar{A}$ соотношеніемъ $a < a'$, въ обратномъ расположеніи будемъ считать связанными соотношеніемъ $a' < a$. Тогда наименьшій элементъ комплекса $\bar{A}$ окажется при обратномъ расположеніи комплекса наибольшимъ, и наоборотъ. Отсюда слѣдуетъ:

3. Конечный комплексъ при всѣхъ возможныхъ расположеніяхъ имѣетъ наибольшій элементъ **).

Что данное нами выше опредѣленіе конечнаго комплекса не содержитъ въ себѣ противорѣчія, этому насъ учитъ опытъ.

Комплексъ, состоящій изъ одного только элемента, можно считать расположеннымъ. Въ самомъ дѣлѣ, въ виду отсутствія другихъ элементовъ не можетъ быть вопроса о большемъ и меньшемъ элементѣ. Имѣющійся въ комплексѣ единственный элементъ есть одновременно и наибольшій и наименьшій.

Комплексъ, состоящій изъ двухъ элементовъ, напримѣръ, изъ знаковъ $+$ и $-$, допускаетъ двоякое расположеніе:

$$+ < - \quad \text{или} \quad - < +,$$

но никакого иного не допускаетъ. При первомъ расположеніи $+$ является наименьшимъ, а $-$ наибольшимъ элементомъ, при второмъ расположеніи — наоборотъ. Такимъ образомъ, элементарнѣйшій опытъ даетъ намъ примѣры конечныхъ комплексовъ.

Если конечный расположенный комплексъ $\bar{A}$ состоитъ болѣе, чѣмъ изъ двухъ элементовъ, то, кромѣ наибольшаго и наименьшаго элементовъ

---

*) Быть можетъ, было бы основательнѣе назвать такой комплексъ „замкнутымъ“. Но терминъ „конечный комплексъ“ вошелъ уже во всеобщее употребленіе, и потому мы его сохраняемъ.

**) Въ своемъ первоначальномъ сообщеніи я внесъ существованіе наибольшаго элемента въ самое опредѣленіе. Но I. Киршакъ (J. Kürschak) въ Будапештѣ обратилъ мое вниманіе на то, что въ этомъ нѣтъ необходимости.

a_0 и a_1, имѣется еще, по крайней мѣрѣ, одинъ элементъ a, удовлетворяющій соотношенію $a_0 < a < a_1$. Такой элементъ называется **внутреннимъ**.

4. **Каждая часть конечнаго комплекса есть конечный комплексъ.**

Въ самомъ дѣлѣ, пусть B будетъ правильная часть комплекса A, а C — ея дополненіе, такъ что $A = B + C$. Согласно п. 4 § 3-го, B и C суть располагающіеся комплексы. Пусть, далѣе, $\overline{B}$ будетъ какъ либо расположенный комплексъ B, а $\overline{C}$ — какъ-либо расположенный комплексъ C.

Такъ какъ A есть конечный комплексъ, то въ комплексѣ $\overline{A}$, расположенномъ въ порядкѣ $(\overline{B}, \overline{C})$, имѣется наименьшій элементъ a_0. Но въ такомъ случаѣ a_0 есть наименьшій элементъ и въ комплексѣ $\overline{B}$; въ самомъ дѣлѣ, во-первыхъ, элементъ a_0 принадлежитъ комплексу B (§ 3, 5, (β)), а, во-вторыхъ, въ комплексѣ B нѣтъ элементовъ, меньшихъ, чѣмъ a_0 (§ 3, 5, (α)). Слѣдовательно, комплексъ $\overline{B}$ имѣетъ наименьшій элементъ и потому есть комплексъ конечный.

5. **Если B и C суть два конечные комплекса, не имѣющіе общихъ элементовъ, то и составленный изъ нихъ комплексъ**

$$A = B + C$$

есть комплексъ конечный.

Въ самомъ дѣлѣ, прежде всего A есть, согласно п. 5 § 3-го, комплексъ располагающійся. Пусть $\overline{A}$ будетъ произвольное расположеніе его; комплексы B и C, расположенные сообразно съ $\overline{A}$, обозначимъ черезъ $\overline{B}$ и $\overline{C}$. Такъ какъ, согласно предположенію, B есть комплексъ конечный, то въ комплексѣ $\overline{B}$ имѣется наименьшій элементъ b_0; точно такъ же въ комплексѣ $\overline{C}$ имѣется наименьшій элементъ c_0. Допустимъ теперь, что въ установленномъ нами расположеніи $\overline{A}$ будетъ, скажемъ, $b_0 < c_0$; въ такомъ случаѣ относительно каждаго элемента a комплекса $\overline{A}$, отличнаго отъ b_0, выполняется неравенство $a > b_0$; въ самомъ дѣлѣ, если элементъ a принадлежитъ комплексу B, то $a > b_0$, ибо b_0 есть наименьшій элементъ комплекса $\overline{B}$; если же элементъ a принадлежитъ комплексу C, то либо $a = c_0 > b_0$, либо $a > c_0 > b_0$; такимъ образомъ, b_0 есть **наименьшій элементъ** въ комплексѣ $\overline{A}$. Точно такъ же, если бы имѣло мѣсто неравенство $b_0 > c_0$, то элементъ c_0 былъ бы **наименьшимъ** въ комплексѣ $\overline{A}$. Итакъ, при всякомъ расположеніи $\overline{A}$ комплексъ A имѣетъ наименьшій элементъ и потому онъ представляетъ собой комплексъ конечный.

6. **Сѣченіе.** Если $\overline{A}$ есть расположенный конечный комплексъ, содержащій болѣе двухъ элементовъ, то всякій внутренній элементъ a

этого комплекса производитъ въ немъ два сѣченія слѣдующимъ образомъ. Всѣ тѣ элементы, которые меньше a, отнесемъ къ комплексу B, а всѣ тѣ элементы, которые больше a, отнесемъ къ комплексу C. Самый элементъ a можно отнести по произволу либо къ комплексу B, либо къ комплексу C. Каждое изъ этихъ подраздѣленій элементовъ комплекса A называется сѣченіемъ, а a называется элементомъ, производящимъ сѣченіе. Условимся писать

$$A = B_a + C, \tag{1}$$

если элементъ a отнесенъ къ комплексу B, и

$$A = B + C_a, \tag{2}$$

если элементъ a отнесенъ къ комплексу C. Чтобы выдѣлить тѣ случаи, когда сѣченіе производится наименьшимъ или наибольшимъ элементомъ, положимъ:

$$B_{a_0} = a_0, \quad C_{a_0} = A, \tag{3}$$

$$B_{a_1} = A, \quad C_{a_1} = a_1. \tag{4}$$

За этими символами мы сохранимъ ихъ значеніе и въ тѣхъ случаяхъ, когда комплексъ A состоитъ изъ одного или двухъ элементовъ.

Если мы расположимъ комплексы B_a и C, а равнымъ образомъ и комплексы B и C_a, сообразно съ комплексомъ A и обозначимъ наибольшій элементъ комплекса B черезъ b, а наименьшій элементъ комплекса C черезъ c, то будетъ имѣть мѣсто неравенство

$$b < a < c;$$

при этомъ между элементами b и a, а также между элементами a и c, нѣтъ ни одного элемента комплекса A, ибо всякій элементъ комплекса A, отличный отъ элементовъ a, b, c, либо $< b$ (если онъ принадлежитъ комплексу B), либо $> c$ (если онъ принадлежитъ комплексу C). Вмѣстѣ съ тѣмъ доказано:

7. Во всякомъ расположенномъ конечномъ комплексѣ $\overline{A}$, содержащемъ болѣе двухъ элементовъ, каждому внутреннему элементу a соотвѣтствуетъ ближайшій меньшій элементъ b и ближайшій большій элементъ c.

Элементы b и c называются смежными съ элементомъ a.

Для наименьшаго элемента a_0 комплекса $\overline{A}$ имѣется только большій смежный элементъ, а для наибольшаго элемента a_1 — только меньшій; то же самое нужно сказать и относительно комплексовъ, состоящихъ изъ двухъ элементовъ. Если b и c суть элементы, смежные съ элементомъ a, то a есть большій смежный элементъ по отношенію къ b и меньшій смежный элементъ по отношенію къ c.

8. Теорема о совершенной индукціи.

Всякое предложеніе $\mathfrak{A}$, относящееся къ каждому элементу расположеннаго конечнаго комплекса $\overline{A}$, слѣдуетъ считать вполнѣ доказаннымъ, если удается установить два слѣдующихъ пункта:

1. Предложеніе $\mathfrak{A}$ справедливо для наименьшаго элемента a_0 комплекса $\overline{A}$.

2. Если предложеніе $\mathfrak{A}$ справедливо для какого-либо элемента b комплекса $\overline{A}$, то оно справедливо также для элемента a, служащаго большимъ смежнымъ по отношенію къ элементу b.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть предложеніе $\mathfrak{A}$ будетъ справедливо не для всѣхъ элементовъ комплекса A; тогда мы выдѣлимъ часть C комплекса A и отнесемъ къ ней всѣ элементы, для которыхъ предложеніе $\mathfrak{A}$ не имѣетъ мѣста. Комплексъ C мы расположимъ сообразно съ комплексомъ $\overline{A}$ и обозначимъ черезъ c наименьшій элементъ комплекса $\overline{C}$. Согласно предположенію 1, элементъ c отличенъ отъ элемента a_0 и имѣетъ поэтому меньшій сосѣдній элементъ a, для котораго предложеніе $\mathfrak{A}$ имѣетъ мѣсто, такъ какъ элементъ a не принадлежитъ комплексу C. Но тогда, согласно предположенію 2, предложеніе $\mathfrak{A}$ справедливо также и для элемента c, и, слѣдовательно, комплексъ C вовсе не существуетъ.

§ 5. Отображеніе и эквивалентность.

1. Если мы въ дальнѣйшемъ будемъ говорить о двухъ конечныхъ комплексахъ A и B, то мы всегда будемъ разумѣть такіе комплексы, которые не имѣютъ общихъ элементовъ. Этимъ не исключается возможность, что въ комплексахъ A и B имѣются элементы, которые объективно тождественны; но мы условимся обозначать ихъ различно, смотря по тому, принадлежатъ ли они къ комплексу A или B. Въ дѣйствительности же комплексъ B можетъ быть частью комплекса A или даже совпадать съ нимъ.

2. Какъ мы видѣли въ п. 2 § 2-го, два комплекса эквивалентны, если они могутъ быть приведены въ такое соотвѣтствіе другъ съ другомъ, чтобы каждый элементъ a комплекса A составлялъ пару съ какимъ-либо однимъ элементомъ a' комплекса A', и чтобы при этомъ каждый элементъ a комплекса A' входилъ въ составъ одной и только одной пары. Такая эквивалентность представляетъ собой, стало быть, свойство обратимое.

Мы обозначили ее символически такъ:

$$A \sim A', \; A' \sim A.$$

3. Два комплекса A' и A'', порознь эквивалентные третьему комплексу A, эквивалентны между собою. Въ самомъ дѣлѣ, если элементъ a' комплекса A' отвѣчаетъ элементу a комплекса A, а элементу a комплекса A отвѣчаетъ элементъ a'' комплекса A'', то въ силу этого элементъ a' оказывается связаннымъ съ опредѣленнымъ элементомъ a'', и, наоборотъ, любому элементу a'' отвѣчаетъ нѣкоторый опредѣленный элементъ a.

Если мы будемъ разсматривать комплексъ A дважды, то въ смыслѣ, указанномъ въ п. 1, можно сказать, что каждый комплексъ эквивалентенъ самому себѣ. Мы указывали уже на это въ п. 2 § 2-го.

Если $\bar{A}$ есть расположенный комплексъ, то каждый комплексъ A', эквивалентный комплексу $\bar{A}$, также можно расположить, — именно, располагая элементы a' и b' комплекса A', отвѣчающіе элементамъ a и b комплекса $\bar{A}$, въ такомъ порядкѣ, въ какомъ слѣдуютъ другъ за другомъ элементы a и b въ комплексѣ $\bar{A}$. Тогда наименьшему и наибольшему элементу a_0 и a_1 комплекса $\bar{A}$ будутъ отвѣчать наименьшій и наибольшій элементы a_0' и a_1' комплекса $\bar{A}'$. Отсюда слѣдуетъ:

4. Всякій комплексъ, эквивалентный конечному комплексу A, есть также комплексъ конечный.

Если нѣкоторый комплексъ M экиваленте́нъ комплексу A и въ то же время его правильной части A', то мы можемъ въ смыслѣ, указанномъ въ п. 1, сказать, что комплексъ A эквивалентенъ своей правильной части A'. Однако, имѣетъ мѣсто слѣдующее основное предложеніе.

5. Конечный комплексъ A не можетъ быть эквивалентенъ своей правильной части. Для доказательства мы воспользуемся совершенной индукціей. Обозначимъ черезъ $\bar{A}$ какъ-либо расположенный комплексъ A и сохранимъ обозначенія п. 6 § 4-го. При этихъ условіяхъ подлежащее доказательству предложеніе справедливо для комплекса $B_{a_0} = a_0$, ибо этотъ комплексъ содержитъ только одинъ элементъ и не имѣетъ ни одной правильной части, а потому и не можетъ быть эквивалентенъ какой-либо своей правильной части.

Пусть b будетъ любой элементъ комплекса $\bar{A}$, удовлетворящій неравенству $b < a_1$, и пусть будетъ дано, что наша теорема справедлива для комплекса B_b, т. е. что комплексъ B_b не эквивалентенъ ни одной изъ своихъ правильныхъ частей. Пусть, далѣе, a будетъ большимъ смежнымъ элементомъ для элемента b. Если комплексъ B_a эквивалентенъ своей правильной части B'_a, то возможны три случая:

a) Комплексъ B'_a не содержитъ элемента a. Въ этомъ случаѣ элементъ a комплекса B_a отвѣчаетъ нѣкоторому элементу a' комплекса B'_a, отличному отъ элемента a и принадлежащему комплексу B_b. Поэтому, если мы положимъ $B'_a = B'_b + a'$, то комплексъ B'_b будетъ правильной частью комплекса B_b [9]); такъ какъ, съ другой стороны, $B_a = B_b + a$, то, удаливъ отвѣчающіе другъ другу элементы a и a' соотвѣтственно изъ комплексовъ B_a и B'_a, мы установимъ отображеніе комплекса B_b въ комплексѣ B'_b, что противорѣчитъ предположенію.

β) Комплексъ B'_a содержитъ элементъ a, при чемъ этотъ элементъ отвѣчаетъ самому себѣ въ отображеніи комплекса B_a въ комплексѣ B'_a. Тогда имѣетъ мѣсто равенство $B'_a = B'_b + a$, и комплексъ B'_b опять служитъ правильной частью комплекса B_b, такъ какъ комплексъ B'_a есть правильная часть комплекса B_a. Удаляя элементъ a, отвѣчающій самому себѣ, мы опять устанавливаемъ отображеніе комплекса B_b въ комплексѣ B'_b, что невозможно.

γ) Комплексъ B'_a содержитъ элементъ a, но въ отображеніи комплекса B_a въ комплексѣ B'_a элементъ a комплекса B_a отвѣчаетъ элементу a' комплекса B_b, а элементу a комплекса B'_a отвѣчаетъ элементъ a'' комплекса B_b (элементы a' и a'' могутъ совпадать, но оба они отличны отъ элемента a и потому содержатся въ комплексѣ B_b). Оставляя то соотвѣтствіе между элементами комплексовъ B_a и B'_a, которое раньше установлено отображеніемъ комплекса B_a въ комплексѣ B'_a, для всѣхъ элементовъ, кромѣ элементовъ a, a' и a'', мы отнесемъ элементъ a самому себѣ, а элементъ a' — элементу a''. Тогда комплексъ B_a опять окажется отображеннымъ въ комплексѣ B'_a, и, слѣдовательно, мы свели этотъ случай къ предыдущему.

Съ помощью предыдущихъ разсужденій мы установили справедливость предложенія $\mathfrak{A}$ — „комплексъ B_a не эквивалентенъ никакой правильной своей части“ — для элемента a_0, а также для элемента a, въ предположеніи, что оно имѣетъ мѣсто и для элемента b. Итакъ, условія примѣнимости метода совершенной индукціи выполнены, и, слѣдовательно, предложеніе $\mathfrak{A}$ справедливо и для элемента a_1, т. е. для всего комплекса A.

6. Пусть A и M будутъ два любые конечные комплекса. Относительно нихъ можно сдѣлать три предположенія:

1) A есть комплексъ, эквивалентный комплексу M.

2) A есть комплексъ, эквивалентный нѣкоторой правильной части M' комплекса M.

3) M есть комплексъ, эквивалентный нѣкоторой правильной части A' комплекса A.

---

[9]) Въ самомъ дѣлѣ, комплексъ B_b' не содержитъ ни элемента a, такъ какъ этого элемента не содержитъ, согласно условію, и комплексъ B_a', ни элемента a', что видно изъ равенства $B_a'=B_b'+a'$; между тѣмъ комплексъ B_b не содержитъ только элемента a.

Мы теперь докажемъ, что изъ этихъ трехъ соотношеній одно непремѣнно имѣетъ мѣсто, и при томъ только одно.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ соотношеній $A \sim M$ и $A' \sim M$ вытекало бы соотношеніе $A \sim A'$, что противорѣчитъ теоремѣ, доказанной въ п. 5; стало-быть, зависимость 3) несовмѣстна съ зависимостью 1).

Подобно этому, изъ соотношеній $A \sim M'$ и $A \sim M$ вытекало бы соотношеніе $M \sim M'$; слѣдовательно, зависимость 2) исключаетъ зависимость 1).

Несовмѣстность же зависимостей 2) и 3) вытекаетъ изъ слѣдующихъ соображеній. Пусть имѣетъ мѣсто зависимость 2); въ такомъ случаѣ комплексъ A' эквивалентенъ нѣкоторой правильной части M'' комплекса M', т. е. $A' \sim M''$. Если бы въ то же время имѣло мѣсто соотношеніе $A' \sim M$, то мы пришли бы къ соотношенію $M \sim M''$, противорѣчащему теоремѣ, доказанной въ п. 5-омъ.

7. Докажемъ теперь, что два конечные комплекса A и M непремѣнно связаны одной изъ зависимостей 1), 2), 3). Для этого предположимъ, что зависимости 1) и 3) не имѣютъ мѣста, т. е. что комплексъ M не эквивалентенъ ни комплексу A ни его правильной части A', и докажемъ, что при этихъ условіяхъ комплексъ A эквивалентенъ правильной части M' комплекса M.

Воспользуемся при этомъ совершенной индукціей. Пусть $\overline{A}$ и $\overline{M}$ будутъ какъ-либо расположенные комплексы A и M и возвратимся къ обозначеніямъ п. п. 5 и 6 § 4-го.

Прежде всего ясно, что комплексъ $B_{a_0} = a_0$ можно сопречь съ частью комплекса M,—напримѣръ, съ наименьшимъ элементомъ m_0 комплекса $\overline{M}$ [10]).

Пусть комплексъ B_b будетъ отображенъ въ части M' комплекса M. Комплексъ M' отличается отъ комплекса M, ибо, согласно предположенію, комплексъ M не эквивалентенъ ни одной изъ частей комплекса A. Въ виду этого существуетъ элементъ m' комплекса M, который не содержится въ комплексѣ M'. Мы отнесемъ элементу a элементъ m' и этимъ отобразимъ комплексъ $B_a = B_b + a$ въ комплексѣ $M' + m'$. Но комплексъ $M' + m'$ есть часть комплекса M, и именно правильная часть (согласно предположенію) [11]). Стало быть, комплексъ B_a оказывается отображен-

---

[10]) И, слѣдовательно, въ этомъ случаѣ комплексъ B_{a_0} будетъ эквивалентенъ правильной части m_0 комплекса $\overline{M}$, ибо комплексъ M, не будучи, согласно предположенію, эквивалентенъ части B_{a_0} комплекса A, содержитъ, по крайней мѣрѣ, два элемента.

[11]) Въ самомъ дѣлѣ, если бы комплексъ $M' + m'$ не былъ правильной частью комплекса M, то, составляя все-таки часть послѣдняго, онъ былъ бы эквивалентенъ, комплексу M; слѣдовательно, и комплексъ $A' = B_a$, эквивалентный комплексу $M' + m'$ былъ бы эквивалентенъ комплексу M, что противно предположенію.

нымъ въ правильной части комплекса M, а потому условія теоремы о совершенной индукціи выполнены. Полагая $a = a_1$, находимъ, что комплексъ A эквивалентенъ части комплекса M.

Зависимости 1), 2), 3) мы условимся выражать символически такъ:

$$1)\ A \sim M, \quad 2)\ A \prec M, \quad 3)\ M \prec A$$

или

$$1)\ M \sim A, \quad 2)\ M \succ A, \quad 3)\ A \succ M.$$

Для трехъ конечныхъ комплексовъ A, B и M на основаніи предыдущихъ разсужденій непосредственно получаемъ:

$$\text{Если } B \prec A \text{ и } A \prec M, \text{ то } B \prec M.$$
$$\text{Если } B \succ A \text{ и } A \succ M, \text{ то } B \succ M.$$

§ 6. Числа.

1. Для установленія понятія о числѣ мы будемъ исходить отъ любого конечнаго комплекса A и дадимъ ему имя или аттрибутъ a, который мы и назовемъ *числомъ* комплекса A; при этомъ мы условимся присваивать то же самое имя a каждому изъ *комплексовъ, эквивалентныхъ комплексу* A, и при томъ только такимъ комплексамъ.

Если бы мы стали исходить не отъ комплекса A, а отъ эквивалентнаго ему комплекса A' и дали бы ему имя a, то и комплексъ A получилъ бы то же самое имя a. Поэтому a называется *общимъ числомъ всѣхъ комплексовъ, эквивалентныхъ комплексу* A. Подъ этимъ общимъ числомъ отнюдь не слѣдуетъ разумѣть *совокупность или комплексъ* всѣхъ комплексовъ, эквивалентныхъ комплексу A, ибо послѣдняго комплекса мы не знаемъ. Число a есть *идея* класса, элементами котораго служатъ всѣ комплексы, эквивалентные данному комплексу A. Потребности жизни побуждаютъ насъ создавать эти идеи; простѣйшія изъ нихъ — „одинъ“, „два“, „три“ — доступны каждому ребенку, и мы пользовались уже ими въ предыдущемъ изложеніи.

2. Если A и B суть два любыхъ конечныхъ комплекса и α, β — ихъ числа, то мы условимся считать

$$\begin{array}{llll} 1)\ \alpha = \beta, & \text{если} & A \sim B & (\alpha \text{ равно } \beta), \\ 2)\ \alpha < \beta, & \text{„} & A \prec B & (\alpha \text{ меньше } \beta), \\ 3)\ \alpha > \beta, & \text{„} & A \succ B & (\alpha \text{ больше } \beta). \end{array}$$

Съ помощью этихъ условій мы *располагаемъ* числа по величинѣ и претворяемъ комплексъ чиселъ въ величину (§ 3, 1).

3. Если a есть какое-либо число, то числа, меньшія, чѣмъ a, или равныя числу a, составляютъ конечный комплексъ, число котораго есть a. Для доказательства этого предложенія мы снова воспользуемся совершенной индукціей.

Обозначимъ черезъ $\overline{A}$ нѣкоторый расположенный комплексъ и будемъ держаться прежнихъ обозначеній. Наша теорема справедлива для комплекса B_{a_0}, которому соотвѣтствуетъ число 1.

Пусть a будетъ произвольный элементъ, отличный отъ элемента a_0, а b — его меньшій смежный элементъ. Пусть числа комплексовъ B_a и B_b будутъ β и β'. Допустимъ, что наша теорема будетъ справедлива для комплекса B_b, т. е. что комплексу чиселъ, меньшихъ, чѣмъ β', или равныхъ β', соотвѣтствуетъ число комплекса B_b, т. е. β', и мы можемъ поэтому привести эти числа въ соотвѣтствіе съ комплексомъ B_b. Если мы отнесемъ еще число β элементу a, то наша теорема окажется справедливой для комплекса B_a [12]), а вмѣстѣ съ тѣмъ и для всего комплекса A.

Если мы самому элементу a присвоимъ названіе, принадлежащее комплексу B_a, (съ прибавленіемъ: β-тый), то мы получимъ порядковыя числа.

4. Если два конечныхъ комплекса, числа которыхъ суть β и γ, не имѣютъ общихъ элементовъ и мы соединимъ ихъ въ комплексъ A, то послѣдній, на основаніи п. 5 § 4-го, также будетъ конечнымъ; принадлежащее ему число, которое мы обозначимъ черезъ α, вполнѣ опредѣляется числами β и γ, что и выражаютъ равенствомъ: $\alpha = \beta + \gamma = \gamma + \beta$ [13]). Число α, очевидно, больше, чѣмъ β, и больше, чѣмъ γ.

Комплексу C, состоящему изъ одного только элемента, принадлежитъ число $\gamma = 1$, и число $\alpha = \beta + 1$ есть большее смежное для числа β.

Съ помощью совершенной индукціи докажемъ слѣдующую теорему, служащую основаніемъ счета.

5. Если мы въ конечномъ комплексѣ M замѣнимъ каждый элементъ его m нѣкоторымъ конечнымъ комплексомъ A_m, которому отнесено число α_m, то мы получимъ новый конечный комплексъ S. Число σ этого комплекса вполнѣ опредѣляется числами α_m и называется ихъ суммой [14]). Изъ этой теоремы вытекаетъ ученіе о сложеніи чиселъ (§ 8, 2).

---

[12]) Ибо комплексъ чиселъ меньшихъ, чѣмъ β, или равныхъ β, содержитъ въ себѣ всѣ числа, меньшія, чѣмъ β', или равныя β', и, кромѣ того, число β.

[13]) Иными словами: каждымъ двумъ числамъ β и γ, принадлежащимъ комплексамъ B и C, мы относимъ число α, принадлежащее комплексу $A = B + C$, и называемъ это число α суммой чиселъ β и γ.

[14]) Пусть комплексъ $M = N + m$, т. е. обозначимъ черезъ N совокупность элементовъ комплекса M, которые остаются по выдѣленіи элемента m. Замѣнимъ теперь элементъ m коплексомъ A_m, число котораго есть α_m; мы получимъ тогда

6. Если a не есть наибольшій элементъ комплекса $\overline{A}$, то онъ имѣетъ большій смежный элементъ c, и если комплексу B_c отвѣчаетъ число β'', то, согласно п. 2,

$$\beta' < \beta < \beta'',$$

при чемъ между числами β' и β, а также между числами β и β'', нѣтъ ни одного числа.

Итакъ, каждое число, кромѣ 1, имѣетъ меньшее смежное число и, пока конечный комплексъ можетъ быть разсматриваемъ, какъ часть нѣкотораго объемляющаго его комплекса, каждое число имѣетъ большее смежное число. Два смежныхъ съ β числа обозначаютъ черезъ $\beta - 1$ и $\beta + 1$.

7. Согласно п. 2, числа допускаютъ такое расположеніе ихъ, которое даетъ возможность считать комплексъ всѣхъ чиселъ величиной, т. е. относительно любыхъ двухъ отличныхъ между собою чиселъ мы всегда можемъ рѣшить, которое изъ нихъ больше. Тѣмъ не менѣе комплексъ всѣхъ чиселъ не есть комплексъ конечный; ибо мы не знаемъ ни одного конечнаго комплекса, изъ котораго мы не могли бы присоединеніемъ новаго элемента образовать новый комплексъ, которому принадлежало бы и большее число. Мало того, мы не можемъ себѣ даже представить такого комплекса, хотя для каждаго изъ насъ индивидуально такой предѣльный комплексъ необходимо представится [15]). Въ виду этого мы утверждаемъ, что наибольшаго числа нѣтъ.

Чтобы постичь комплексъ всѣхъ чиселъ, мы должны были бы представить себѣ умъ, вообще говоря, вполнѣ сходный съ нашимъ, но, кромѣ того, неизмѣняющійся и работающій въ теченіе неограниченнаго времени.

8. Какъ указано въ п. 3-мъ, если a есть число комплекса A, то совокупность E_a всѣхъ чиселъ, не превышающихъ a, есть комплексъ, эквивалентный комплексу A. Послѣдній можетъ быть поэтому приведенъ въ однозначное соотвѣтствіе съ комплексомъ E_a. Самое производство

конечный комплексъ (§ 4, 5) $N + A_m$, которому соотвѣтствуетъ число σ. Если мы вмѣсто A_m возьмемъ комплексъ A'_m, которому соотвѣтствуетъ то же число a_m, и образуемъ комплексъ $N + A'_m$, то этому комплексу отвѣчаетъ то же число σ. Иначе говоря, если $A'_m \sim A_m$, то $N + A_m \sim N + A'_m$. Въ самомъ дѣлѣ, относя каждый элементъ части N самому себѣ и приводя элементы комплекса A_m въ сопряженіе съ элементами эквивалентнаго ему комплекса A'_m, мы установимъ ознозначное соотвѣтствіе между комплексами $N + A_m$ и $N + A'_m$. Точно такъ же, если мы каждый элементъ m комплекса M замѣнимъ конечнымъ комплексомъ A_m, то число σ составившагося такимъ образомъ комплекса не будетъ зависѣть отъ комплексовъ A_m, а только отъ соотвѣтствующихъ имъ чиселъ a_m, какъ и указано въ текстѣ; это доказывается индуктивно относительно элементовъ комплекса M. Это число σ и называется суммой всѣхъ чиселъ a_m.

[15]) Авторъ хочетъ, повидимому, сказать, что каждый изъ насъ въ отдѣльности лишенъ возможности вести счетъ безпредѣльно.

этого сопряженія называется счетомъ [16]). Вмѣстѣ съ тѣмъ мы приходимъ къ заключенію, что результатъ счета элементовъ комплекса не зависитъ отъ порядка, въ которомъ мы производимъ отсчетъ [17]). Для производства счета элементы комплекса E_a получаютъ опредѣленныя названія и обозначаются особыми знаками, между которыми основными являются

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Такъ какъ при счетѣ комплексовъ, содержащихъ много элементовъ, запасъ названій и знаковъ для чиселъ скоро истощился бы, то пришлось прибѣгнуть къ особому способу производства счета; способъ этотъ заключается въ томъ, что извѣстныя группы чиселъ соединяются въ новыя группы, и производится счетъ не отдѣльныхъ единицъ, а этихъ группъ.

Это сказывается уже въ языкѣ въ образованіи словъ: десять, двадцать, тридцать, сто, двѣсти, триста и т. п. Но еще совершеннѣе наша десятичная система счисленія. Въ этой системѣ, когда мы пишемъ какую-нибудь цифру a, необходимо чѣмъ-нибудь обозначить, какія единицы она выражаетъ. Когда искусство счета находилось еще въ первобытномъ состояніи, то это достигалось тѣмъ, что цифры, смотря по значенію выражаемыхъ ими единицъ, помѣщались въ особыя рубрики счетной таблицы или счетной доски (Abacus). По сравненію съ этимъ было огромнымъ шагомъ впередъ, когда пришли къ мысли отмѣчать особымъ знакомъ, нулемъ, „0“, если какая-либо рубрика остается незанятой, т. е. не содержитъ вовсе ни одной единицы. Благодаря этой идеѣ весь аппаратъ оказался вовсе излишнимъ, такъ какъ уже самое мѣсто, занимаемое цифрой, достаточно ясно указывало, какія единицы она выражаетъ. Такова простая мысль, служащая основаніемъ совершенной системы счисленія, который мы теперь пользуемся.

Въ теоретическихъ изслѣдованіяхъ мы часто пользуемся буквами вмѣсто чиселъ, какъ мы это неоднократно дѣлали выше: этимъ путемъ можно короче и нагляднѣе, нежели въ словахъ, выразить, что тѣ или иныя положенія справедливы не для нѣкоторыхъ опредѣленныхъ, а для всѣхъ чиселъ. Однако, эти буквы обозначаютъ не опредѣленныя числа, какъ это имѣло мѣсто, напримѣръ, въ греческой нумераціи; напротивъ, вмѣсто нихъ можно поставить какія угодно числа. Операціи надъ такими

---

[16]) Если намъ нужно сосчитать элементы комплекса A (a, b, c, d), то мы относимъ элементу a число 1, элементу b число 2, элементу c число 3 и элементу d число 4. Операція закончена и заключается въ томъ, что комплексъ A однозначно сопряженъ съ комплексомъ E_4.

[17]) Потому что каждому комплексу, какъ было выяснено выше, отвѣчаетъ опредѣленное число, и онъ можетъ быть связанъ однозначнымъ соотвѣтствіемъ только съ однимъ изъ комплексовъ E_a.

знаками или символами называютъ поэтому также буквеннымъ счисленіемъ.

Предложенія, выражающія, что символъ a имѣетъ то же значеніе, что и другой символъ b, называется равенствомъ; на языкѣ математическихъ символовъ оно выражается такъ:

$$a = b.$$

§ 7. Изъ исторіи числа и счисленія.

1. Въ послѣднее время исторія науки и, въ частности, исторія математики возбуждаетъ особенный интересъ. Этому новому теченію мы обязаны, помимо спеціальныхъ изслѣдованій филологовъ и математиковъ, цѣлымъ рядомъ превосходныхъ работъ, среди которыхъ наиболѣе выдѣляются слѣдующія:

J. E. Montucla, Histoire des mathématiques. 2[me] édit. Paris, 1799—1802. 4 тома.

F. Nesselmann, Algebra der Griechen, nach den Quellen bearbeitet. Berlin, Reimer, 1842.

A. Arneth, Geschichte der reinen Mathematik. Stuttgart, 1852.

H. Hankel, Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter. Leipzig, Teubner, 1874. Послѣ смерти автора издано его отцомъ.

M. Chasles. Aperçu historique des méthodes en Géométrie. 2[me] édit. Paris, 1875. Rapport sur les progrès de la Géométrie. Paris, 1870.

M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 2. Auflage. 3 Bände. Leipzig, Teubner, 1894—1901.

Это сочиненіе простирается до 1758 г. Продолженіе, разрабатываемое авторомъ совмѣстно съ болѣе молодыми учеными, готовится къ печати.

C. J. Gerhard, Geschichte der Mathematik in Deutschland. München, Oldenburg, 1877. Изъ сборника, выпущеннаго Мюнхенской Академіей подъ заглавіемъ: „Geschichte der Wissenschaften in Deutschland".

H. G. Zeuthen, Histoire des Mathématiques dans l'Antiquité et le moyen age. Paris, Gauthier-Villars, 1902. Французское изданіе.

H. G. Zeuthen, Geschichte der Mathematik im XVI und XVII Jahrhundert. Leipzig, Teubner, 1903. Нѣмецкое изданіе.

A. v. Braunmühl, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie. 2 Bände. Leipzig, Teubner, 1900—1903.

Joh. Tropfke, Geschichte der Elementar-Mathematik. 2 Bände. Leipzig, Veit & C[o]. 1902—1903.

Fr. Engel und P. Stäckel, Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss. Leipzig, Teubner, 1895.

Ferd. Rosenberger, Die Geschichte der Physik. 3 Teile. Braunschweig. Vieweg, 1882—1890.

F. Rosenberger, Isaak Newton und seine physikalischen Prinzipien.

Rud. Wolf, Geschichte der Astronomie. München, 1877 [18]).

---

[18]) На русскомъ языкѣ недавно вышло въ свѣтъ сочиненіе: Ф. Кэджори. „Исторія Элементарной математики". Переводъ съ англійскаго подъ редакціей, съ примѣчаніями и съ прибавленіями И. Ю. Тимченко, привать-доцента Императорскаго Новороссійскаго университета.

Новыя изданія греческихъ математиковъ.

Euclidis opera omnia edd. Heiberg et Menge.

Diophanti Alexandrini opera omnia ed. P. Tannery.

Apollonii Pergaei quae graece extant ed. Heiberg.

Archimedis opera omnia ed. Heiberg.

Эти изданія, выпущенныя Тейбнеромъ въ Лейпцигѣ, содержатъ греческій текстъ и латинскій переводъ.

Кромѣ того, имѣются еще слѣдующіе нѣмецкіе переводы.

Diophant, übersetzt und mit Anmerkungen begleitet (zugleich mit der Übersetzung der Randbemerkungen von Fermat) von G. Wertheim. Leipzig, Teubner, 1890.

Apollonius, vollständig, mit den nur in arabischer Übersetzung erhaltenen Büchern von Balsam. Berlin, 1861 [19]).

Выходящая въ настоящее время большая энциклопедія „Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften" удѣляетъ особенное вниманіе историческому развитію отдѣльныхъ дисциплинъ и содержитъ богатыя литературныя указанія.

2. Въ книгѣ Нессельмана „Критическая исторія алгебры" *) мы находимъ слѣдующее замѣчаніе:

„Понятіе о числѣ есть понятіе элементарное и непосредственно врожденное нашему духу; вслѣдствіе этого всѣ попытки научно обосновать это понятіе будутъ такъ же безплодны, какъ и старанія доказать Евклидовы аксіомы". Въ самомъ дѣлѣ, мы не знаемъ ни въ древности, ни въ средніе вѣка ни одной удачной попытки выяснить темное для насъ происхожденіе понятія о числѣ. Пиѳагоръ и пиѳагорейцы оставили послѣ себя только мистическія числовыя игры; хотя они и содержатъ уже нѣкоторыя ариѳметическія истины, но самаго понятія о числахъ, конечно, не выясняютъ. А тѣ опредѣленія, которыя даетъ Евклидъ, представляютъ собою, какъ и его геометрическія опредѣленія, не болѣе, какъ словесныя описанія, которыя предполагаютъ самое понятіе уже усвоеннымъ. (Elementorum Liber VII, стр. 185) **).

Однако, пытливый умъ не можетъ примириться съ существованіемъ предѣла нашего изслѣдованія и на всякій открытый вопросъ отвѣчаетъ стремленіемъ углубиться въ его сущность. Такимъ образомъ, современные изслѣдователи не остановились на общепринятомъ понятіи о числѣ и сдѣлали настойчивую попытку глубже проникнуть въ происхожденіе этого понятія. Кантъ удѣляетъ мало мѣста понятію о числѣ. Для него математика, занимающая вообще въ его системѣ выдающееся мѣсто, сводится, главнымъ образомъ, къ геометріи. По его мнѣнію, ариѳметика играетъ по

---

[19]) „Начала" Евклида имѣются также въ русскомъ переводѣ, сдѣланномъ профессоромъ Ващенко-Захарченко: Кіевъ. 1880. Переводъ снабженъ многочисленными примѣчаніями.

*) Nesselmann. „Kritische Geschichte der Algebra".

**) Цитировано, какъ это будетъ и въ дальнѣйшемъ, по изданію Heiberg'а (греко-латинское). Leipzig, Teubner, 1884.

отношенію ко времени такую же роль, какую геометрія играетъ по отношенію къ пространству, — взглядъ, довольно распространенный и помимо Канта (напримѣръ, Гамильтонъ). Хотя такое воззрѣніе въ извѣстномъ смыслѣ справедливо, однако оно далеко не охватываетъ нашего понятія о числѣ во всемъ его объемѣ.

Въ послѣднее время эти принципіальные вопросы вновь возникли, какъ предметъ математическаго изслѣдованія. Въ письмѣ къ Бесселю Гауссъ высказываетъ мысль, что число (въ противоположность понятію о пространствѣ) представляетъ собой продуктъ творчества нашего духа. Онъ говоритъ далѣе, что ему удалось привести образованіе этого понятія къ болѣе элементарной дѣятельности нашего духа, къ сопряженію вещей между собой и образованію родовыхъ понятій, классовъ (идей въ смыслѣ Платона). Это изслѣдованіе привело къ новой вѣтви математики, къ ученію о комплексахъ или многообразіяхъ. Эта дисциплина занимается основными вопросами ученія о величинѣ и приводитъ къ тому, что на обыкновенное число надо смотрѣть, какъ на частный случай болѣе общаго понятія. Это болѣе общее понятіе о числѣ было выяснено лишь благодаря строгому опредѣленію и математической разработкѣ идеи о безконечности; нужно сказать, что въ этомъ вопросѣ и по сей день остается еще много неяснаго.

Предшественникомъ этихъ изслѣдованій является Бернгардъ Больцано (Bernhard Bolzano) въ Прагѣ (1781—1848). Его небольшое сочиненіе, относящееся къ этому предмету, носитъ названіе „Парадоксы безконечности“ и издано послѣ смерти автора Пригонскимъ. *)

Дѣйствительнымъ основателемъ ученія о комплексахъ является Георгъ Канторъ (въ рядѣ статей въ журналѣ „Mathematische Annalen“, начиная съ XV т., и въ другихъ сочиненіяхъ). Цѣльное изложеніе этой дисциплины далъ Шёнфлисъ **). Въ тѣсной связи съ этимъ находится небольшое изслѣдованіе Дедекинда „Что такое числа, и какую они имѣютъ цѣль“ ***), а также „Учебникъ ариѳметики“ Шрёдера ****); этотъ учебникъ принадлежитъ къ числу первыхъ сочиненій, ставшихъ на путь болѣе глубокаго изслѣдованія вопросовъ элементарной ариѳметики. Способъ умозаключенія, извѣстный подъ названіемъ совершенной индукціи, давно нахо-

*) Dr. Bernhard Bolzano's „Paradoxien des Unendlichen“, hereusgegeben aus dem schriftlichen Nachlasse des Verfassers von Dr. Fr. Prihonsky. Переиздано въ 1889 году фирмой Mayer & Müller.

**) A. Schönflies. „Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten“. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung. VIII, 2.

***) R. Dedekind. „Was sind und was sollen die Zahlen“. Braunschweig, 1888. Русскій переводъ этого небольшого сочиненія, принадлежащій г. Н. Парфентьеву приведенъ въ „Извѣстіяхъ Физико-Математическаго Общества при Имп. Казанскомъ Университетѣ“. Т. XV, № 2. 1905.

****) E. Schröder. „Lehrbuch der elementaren Arithmetik“. Leipzig, 1873.

дилъ себѣ примѣненіе въ математикѣ; но прежніе математики мало занимались логическимъ обоснованіемъ этого пріема. Въ упомянутомъ сочиненіи Дедекинда это сдѣлано въ первый разъ. Нѣкоторыя соображенія по этому вопросу мы находимъ также въ вышедшей недавно книгѣ Пуанкаре „Наука и гипотеза" *).

3. Интересная попытка научно произвести соединеніе числовыхъ группъ въ высшія единицы имѣется въ литературѣ древней Греціи у Архимеда (287 — 212 до Р. Х.) въ недошедшемъ до насъ письмѣ къ Дзейксиппу (*Ζεύξιππος*), а также въ другомъ сохранившемся его сочиненіи „*ψαμμίτης*" („счетъ песка"). Послѣднее сочиненіе замѣчательно еще въ томъ отношеніи, что въ немъ имѣются свѣдѣнія о космогоническихъ воззрѣніяхъ древнихъ.

Въ этомъ сочиненіи авторъ ставитъ себѣ задачей называть весьма большія числа; онъ облекаетъ эту задачу въ своеобразную форму; онъ хочетъ назвать число, превышающее число зернъ песка, которое можетъ содержать шаръ, обнимающій всю вселенную. Съ чрезвычайно утомительной тщательностью онъ вычисляетъ массу, которую онъ долженъ при этомъ принять, чтобы быть увѣреннымъ, что онъ не оцѣниваетъ ее слишкомъ малымъ числомъ **).

Чтобы называть такія громадныя числа, онъ разсматриваетъ числа до ста милліоновъ (миріада миріадъ), какъ первыя числа. Число сто милліоновъ, которое въ нашей системѣ счисленія изображается 1 съ восемью нулями, образуетъ единицу вторыхъ чиселъ, которыя онъ также считаетъ до ста милліоновъ. Изъ ста милліоновъ этихъ единицъ онъ образуетъ единицу третьихъ чиселъ, которая изображается у насъ 1 съ 16 нулями. Чтобы сосчитать зерна песка, нужно дойти только до восьмыхъ чиселъ, единица которыхъ изображается у насъ черезъ 1 съ 56 нулями.

Но Архимедъ въ своихъ теоретическихъ разсужденіяхъ доходитъ до чиселъ стомилліоннаго порядка, послѣднее изъ которыхъ (изображаемое у насъ единицей съ 800 000 000 нулей) образуетъ единицу второго періода, съ которой можно далѣе поступать такъ же, какъ съ простой единицей.

---

*) H. Poincaré. „La science et l'hypotèse". Paris 1903. Нѣмецкій переводъ этой книги, сдѣланный Л. Линдеманомъ, содержитъ очень цѣнныя примѣчанія. H. Poincaré. „Wissenschaft und Hypothese". Autorisierte deutsche Ausgabe mit erläuternden Anmerkungen von F. und L. Lindemann. Leipzig, 1904. Имѣется русскій переводъ, сдѣланный г. Андреевымъ: „Наука и гипотеза". Москва, 1903.

**) Любопытенъ способъ, которымъ Архимедъ пользуется для опредѣленія размѣровъ вселенной.

Обыкновенная точка зрѣнія, говоритъ онъ, заключается въ томъ, что земля составляетъ центръ вселенной и что радіусъ круга, по которому солнце катится

Интересныя свѣдѣнія относительно названій и обозначенія чиселъ у различныхъ народовъ мы находимъ въ посмертномъ сочиненіи Ганкеля „Къ исторіи математики въ древности и въ средніе вѣка“ *).

Въ послѣднее время мы имѣемъ два примѣра возникновенія новыхъ названій для чиселъ, вызваннаго практическими потребностями. Именно, слово „милліонъ“, которое появилось около 1500 года въ Италіи, и слово „миллiардъ“, которое, по крайней мѣрѣ, въ Германіи вошло въ употребленіе только въ наши дни со времени франко-нѣмецкой войны 1870—71 г. г. Оба слова представляютъ собой италіанскія увеличительныя названія числа mille (тысяча).

Система цифръ, которою мы въ настоящее время пользуемся, несомнѣнно ведетъ свое происхожденіе изъ Индіи. Возникновеніе этой удивительно совершенной системы, превзойти которую представляется совершенно невозможнымъ, теряется во мракѣ доисторической древности; можно, однако, обнаружить, что въ VII столѣтіи нашей эры эта система примѣнялась уже въ полномъ развитіи. Что это твореніе исходитъ именно изъ Индіи, Ганкель объясняетъ тѣмъ, что религіозно возвышенное и непостижимо великое находило въ фантазіи индусовъ выраженіе въ неимовѣрно большихъ числахъ (у Будды было шестьсотъ тысячъ милліоновъ сыновей, боговъ было двадцать четыре тысячи билліоновъ и т. д.).

На западъ эта система счисленія была принесена арабами, жившими въ Испаніи и въ южной Африкѣ, сначала въ несовершенной формѣ счета при помощи счетной доски (Abacus); позже былъ введенъ 0, употребленіе котораго имѣло рѣшающее значеніе и, можно сказать, развязало руки вычислителю.

Новый способъ счисленія былъ названъ „алгориѳмомъ“, а математики, которые имъ пользовались, „алгориѳмиками“ въ отличіе отъ

вокругъ земли, представляетъ собой въ то же время радіусъ вселенной. Между тѣмъ Аристархъ Самосскій (около 270 г. до Р. Х.) допускаетъ, что солнце представляетъ собой центръ, вокругъ котораго вращается весь міръ; радіусъ же вселенной, т. е. радіусъ сферы неподвижныхъ звѣздъ относится къ радіусу земной орбиты, какъ поверхность шара къ своему центру.

Аристархъ, очевидно, хотѣлъ этимъ сказать, что вселенная безконечна и неизмѣрима; но Архимедъ пользуется этимъ для опредѣленнаго измѣренія. Такъ какъ не можетъ быть рѣчи объ отношеніи поверхности шара къ ея центру, т. е. къ точкѣ, не имѣющей размѣровъ, то онъ толкуетъ слова Аристарха въ томъ смыслѣ, что сфера неподвижныхъ звѣздъ относится къ сферѣ земного пути такъ, какъ по обычному воззрѣнію вселенная, т. е. сфера солнечной орбиты (вокругъ земли), относится къ своему центру, т. е. къ поверхности земли. Разстояніе земли отъ солнца онъ принимаетъ при этомъ слишкомъ малымъ, относительно же размѣровъ земли его соображенія гораздо болѣе близки къ истинѣ.

*) H. Hankel. „Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und im Mittelalter“. Leipzig. Teubner. 1874.

абацистовъ, съ которыми они одно время вели упорную борьбу. (См. примѣчаніе на страницѣ 49).

Однимъ изъ выдающихся представителей абацистовъ былъ Гербертъ (родился въ 940 г. въ Auvergne, кончилъ жизнь папой подъ именемъ Сильвестра II; умеръ въ 1003 г. въ Римѣ). Распространенію алгориѳма на западѣ болѣе всего содѣйствовали Леонардъ Пизанскій, названный Фибоначи (Filius Bonacii; сочиненіе это Liber Abaci появилось въ началѣ XIII столѣтія), и Іорданъ Неморарій (Iordanus Nemorarius умеръ въ 1237 г. генераломъ Доминиканскаго ордена; Arithmetica, Algorithmus demonstratus). Въ Византіи индійская система счисленія сдѣлалась извѣстной только въ XIV столѣтіи, благодаря ариѳметикѣ монаха Максима Плануда (Maximus Planudes), который употребляетъ слово „Tziphra" для обозначенія нуля. Отсюда и ведетъ свое начало наше слово „цифра", взятое изъ арабскаго языка, которымъ мы въ настоящее время называемъ каждый изъ основныхъ знаковъ письменнаго счисленія. Отсюда же и происходитъ французское слово „zero".

Прошло еще немало времени, пока обозначеніе и счетъ по алгориѳму вошли въ повседневное употребленіе. Въ Германіи эта система счисленія получила всеобщее распространеніе около середины XVI столѣтія, чему не мало способствовала знаменитая ариѳметика Адама Ризе (Adam Riese, 1522). Однако, и въ наше время въ нѣкоторыхъ случаяхъ пользуются еще римскими цифрами, напримѣръ, въ цѣляхъ орнаментики.

ГЛАВА II.

Ариѳметическія дѣйствія.

§ 8. Сложеніе.

1. Какъ мы видѣли выше (§ 4, 5 и § 6, 4), если A и B суть конечные комплексы, не имѣющіе общихъ элементовъ, а a и b суть ихъ числа, то комплексу $A+B$ также отвѣчаетъ опредѣленное число, которое мы условились обозначать символомъ $a+b$ и называть **суммою чиселъ** a и b. Это число $a+b$ не мѣняется, если мы замѣнимъ комплексы A и B другими комплексами A' и B' той же мощности [1]). Слѣдовательно, чтобы опредѣлить число $a+b$, мы можемъ воспользоваться любыми представителями чиселъ a и b, — напримѣръ, пальцами руки, монетами; вообще другого пути для этой цѣли не существуетъ. Съ ранняго дѣтства мы запечатлѣваемъ въ своей памяти результаты образованія суммы для небольшихъ чиселъ и во всякій моментъ можемъ ими воспользоваться при надобности. Наша индусская система счисленія имѣетъ то преимущество, что намъ достаточно знать результаты для немногихъ случаевъ, когда a и b взяты изъ ряда чиселъ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Образованіе суммы называютъ также **сложеніемъ** или **складываніемъ**.

Относительно сложенія, на основаніи предыдущаго, легко вывести слѣдующія основныя предложенія.

2. Изъ самаго понятія о соединеніи комплексовъ вытекаетъ, что

$$A+B=B+A,$$
$$(A+B)+C=A+(B+C),$$

каковы бы ни были комплексы A, B и C. Если мы примѣнимъ это соотношеніе къ тому случаю, когда A, B и C представляютъ собой конечные

[1]) См. п. п. 4 и 5 § 6-го, а также примѣчаніе 14 на стр. 18.

комплексы, не имѣющіе общихъ элементовъ, и обозначимъ черезъ a, b и c соотвѣтствующія имъ числа, то мы получимъ:

$$a + b = b + a, \tag{1}$$

$$(a + b) + c = a + (b + c) = (a + c) + b. \tag{2}$$

Естественно, что числа a, b и c не должны быть необходимо различны. Первое изъ этихъ соотношеній выражаетъ, что сумма не зависитъ отъ порядка сложенія и называется перемѣстительнымъ или коммутативнымъ закономъ. Второе соотношеніе выражаетъ, что для сложенія трехъ чиселъ можно сначала составить сумму любыхъ двухъ изъ нихъ и къ послѣдней прибавить третье число. Это можетъ быть выполнено тремя способами, которые всѣ даютъ одинъ и тотъ же результатъ. Это соотношеніе извѣстно подъ названіемъ сочетательнаго или ассоціативнаго закона.

Эти законы допускаютъ еще значительное обобщеніе. Если A, B, C, ..., N суть произвольные комплексы въ конечномъ числѣ, то существуетъ опредѣленный комплексъ S, который содержитъ всѣ элементы этихъ комплексовъ и никакихъ другихъ. Этотъ комплексъ можно обозначить символомъ.

$$S = A + B + C + \cdots + N.$$

При помощи совершенной индукціи, на основаніи п. 5 § 4-го нетрудно вывести, что S есть конечный комплексъ, если A, B, C, ..., N суть конечные комплексы [2]). Если комплексы A, B, C, ..., N не имѣютъ попарно никакихъ общихъ элементовъ, то число комплекса S называется суммой чиселъ коплексовъ A, B, C, ..., N; если обозначимъ послѣднія числа черезъ $a, b, c, \ldots, n$, а число комплекса S—черезъ s, то мы будемъ писать:

$$s = a + b + c + \cdots + n;$$

числа a, b, c, ..., n мы будемъ называть слагаемыми, образующими сумму s.

Число s опредѣляется посредствомъ .отсчета элементовъ въ комплексѣ S.

При вычисленіи, поступаютъ обыкновенно короче: пишутъ слагаемыя въ произвольной послѣдовательности и затѣмъ, начиная сверху или снизу, прибавляютъ каждое слѣдующее число къ полученной уже суммѣ. Что результатъ этого вычисленія не зависитъ отъ порядка слага-

---

[2]) Доказательство ведется такъ: если допустимъ, что предложеніе справедливо, когда S состоитъ изъ n комплексовъ, то въ случаѣ $n + 1$ комплексовъ

$$A + B + C + \cdots + M + N = (A + B + C + \cdots + M) + N = S + N;$$

поэтому оно оправдывается въ силу п. 5 § 4-го.

емыхъ, слѣдуетъ изъ того, что число не зависитъ отъ порядка, въ какомъ мы считаемъ элементы представляющаго его комплекса (§ 6, 8).

Если слагаемыя написаны въ десятичной системѣ, то сначала складываютъ единицы, затѣмъ десятки, потомъ сотни и т. д.; если при сложенiи единицъ какого-либо разряда образуются единицы высшаго разряда, то ихъ нужно прибавлять къ единицамъ соотвѣтствующаго разряда.

3. Сложенiе содержитъ, какъ частный случай, правило, посредствомъ котораго мы въ § 6, 4 опредѣлили по числу m непосредственно слѣдующее число $m+1$. Точно такъ же изъ данныхъ въ § 6, 2 опредѣленiй терминовъ „больше" и „меньше" слѣдуетъ, что сумма нѣсколькихъ чиселъ изъ ряда $a, b, c, \ldots, n$ меньше, нежели сумма всѣхъ ихъ, и что сумма увеличивается съ увеличенiемъ одного или нѣсколькихъ слагаемыхъ. Все это вытекаетъ изъ того, что меньшее число соотвѣтствуетъ тому изъ двухъ комплексовъ, который эквивалентенъ правильной части другого комплекса.

§ 9. Умноженiе.

1. Часто приходится составлять суммы одинаковыхъ слагаемыхъ; для нихъ введено особое обозначенiе. Чтобы это объяснить, предположимъ, что намъ дано a слагаемыхъ, изъ которыхъ каждое равно b, и что нужно образовать сумму всѣхъ этихъ чиселъ, т. е., например̀ъ,

$$b+b+b \quad \text{при } a=3,$$
$$b+b+b+b \quad \text{при } a=4.$$

Сумму этихъ a чиселъ мы будемъ обозначать символомъ $a \cdot b$, или $a \times b$, или, наконецъ, просто черезъ ab. Образованiе этой суммы называется умноженiемъ числа b на число a.

Число b называется множимымъ, число a — множителемъ, а ab — результатъ умноженiя — произведенiемъ числа b на число a.

Согласно опредѣленiю, $a \cdot 1 = a$; мы положимъ также [3]) $1 \cdot b = b$, такъ какъ это въ предыдущемъ опредѣленiи не содержится. Умноженiе на большого множителя можетъ быть приведено къ умноженiю на меньшихъ множителей посредствомъ рекуррентной [4]) формулы

$$(a+1)b = ab + b, \tag{1}$$

которая, въ виду установленнаго выше соглашенiя, сохраняетъ свою силу также при $a = 1$.

---

[3]) Т. е. введемъ въ качествѣ особаго соглашенiя.

[4]) Эта формула называется рекуррентной потому, что она умноженiе на $(a+1)$ сводитъ или „возвращаетъ" къ умноженiю на a.

2. Первое основное предложеніе относительно умноженія есть законъ перемѣстительный, заключающійся въ томъ, что результатъ умноженія не измѣнится, если мы множимое и множителя замѣнимъ другъ другомъ; этотъ законъ выражается сотношеніемъ

$$ab = ba. \tag{2}$$

Доказательство этого предложенія можетъ быть произведено при помощи совершенной индукціи. Представимъ себѣ a конечныхъ комплексовъ B, которые мы для отличія будемъ обозначать черезъ $B_1, B_2, \ldots, B_a$; допустимъ, что эти комплексы не имѣютъ попарно общихъ элементовъ, но что всѣ они эквивалентны и каждому изъ нихъ отвѣчаетъ число b. Въ такомъ случаѣ произведеніе ab представляетъ собой число комплекса M, который получимъ, если соединимъ всѣ наши комплексы $B_1, B_2, \ldots, B_a$.

Теперь къ каждому изъ комплексовъ $B_1, B_2, \ldots, B_a$ мы присоединимъ еще по одному элементу, такъ что число b перейдетъ въ $b+1$. Этимъ мы присоединяемъ къ M еще a новыхъ элементовъ. Если M' есть комплексъ, который мы такимъ образомъ получаемъ вмѣсто M, то онъ выражается числомъ $ab+a$; съ другой стороны, тотъ же комплексъ можетъ быть выраженъ числомъ $a(b+1)$, а потому

$$ab + a = a(b+1); \tag{3}$$

это соотношеніе сохраняетъ свою силу и при $b = 1$. Но при $b = 1$, въ силу опредѣленія,

$$ab = ba.$$

Если мы поэтому примемъ, что соотношеніе (2) доказано для нѣкотораго значенія числа b, то изъ равенства (3) вытекаетъ:

$$a(b+1) = ba + a;$$

если же мы въ соотношеніи (1) замѣнимъ a и b другъ другомъ, то получимъ:

$$ba + a = (b+1)a;$$

слѣдовательно,

$$a(b+1) = (b+1)a,$$

т. е. справедливость соотношенія (2) доказана и для ближайшаго большаго значенія числа b. Мы можемъ поэтому примѣнить совершенную индукцію, и справедливость перемѣстительнаго закона доказана во всемъ его объемѣ.

Въ силу этого нѣтъ болѣе основаній къ тому, чтобы отличать другъ отъ друга множимое и множителя; ихъ называютъ обыкновенно, не различая, **сомножителями произведенія**.

Для производства умноженія достаточно знать произведенія любыхъ двухъ чиселъ въ ряду 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 („табличка умноженія"), которыя мы составляемъ непосредственнымъ счетомъ и запечатлѣваемъ въ своей памяти. Десятичная система счисленія даетъ возможность извѣстнымъ способомъ составлять произведенія большихъ чиселъ.

3. Законъ сочетательный или ассоціативный.

Представимъ себѣ теперь, что каждый элементъ во всѣхъ комплексахъ B_1, B_2, B_3, ..., B_a замѣщенъ нѣкоторымъ комплексомъ C; предположимъ, что всѣ эти комплексы C эквивалентны и выражаются однимъ и тѣмъ же числомъ c, но никакіе два изъ нихъ не имѣютъ общихъ элементовъ. Теперь соединимъ всѣ элементы этихъ комплексовъ C въ одинъ комплексъ P, число котораго намъ нужно опредѣлить.

Но число комплексовъ C есть ab; слѣдовательно, число всѣхъ элементовъ комплекса P равно

$$(ab)c.$$

Съ другой стороны, въ каждомъ комплексѣ B содержится bc элементовъ; а такъ какъ число комплексовъ B равно a, то число элементовъ комплекса P равно также

$$a(bc).$$

Отсюда получаемъ соотношеніе

$$(ab)c = a(bc), \tag{4}$$

которое и выражаетъ сочетательный или ассоціативный законъ.

Сочетая этотъ законъ съ предыдущимъ, мы можемъ представить произведеніе трехъ сомножителей въ 12 различныхъ видахъ.

Правило производства вычисленія можно выразить слѣдующимъ образомъ: выбираемъ любыя два изъ данныхъ трехъ чиселъ a, b и c и перемножаемъ ихъ, полученное произведеніе умножаемъ на третье число; результатъ не зависитъ отъ того, какъ мы выбрали первыя два числа, и, такъ какъ въ виду этого скобки уже не нужны, записывается такъ:

$$m = abc.$$

Число m называется произведеніемъ трехъ чиселъ a, b и c, а послѣднія называются сомножителями этого произведенія.

Доказательство перемѣстительнаго и сочетательнаго законовъ можно сдѣлать нагляднымъ, если мы представимъ себѣ элементы комплексовъ C въ видѣ шаровъ; шары эти распредѣлимъ въ ряды по c въ каждомъ ряду; b такихъ рядовъ расположимъ въ видѣ прямоугольника, и затѣмъ a такихъ прямоугольниковъ положимъ одинъ на другой.

Вся фигура имѣетъ въ такомъ случаѣ видъ прямоугольной призмы, три сходящихся ребра которой соотвѣтственно содержатъ a, b и c шаровъ. Эти шары можно тремя способами распредѣлить въ прямоугольники, а каждый прямоугольникъ двумя способами разбить въ ряды.

4. Опираясь на эти предложенія, мы можемъ при помощи совершенной индукціи опредѣлить произведеніе любого числа множителей.

Положимъ, что намъ данъ комплексъ R, состоящій изъ чиселъ

$$a, b, c, d, \ldots, n \quad (R).$$

Пусть r будетъ число этихъ чиселъ. Выберемъ изъ нихъ произвольно два, перемножимъ ихъ и присоединимъ произведеніе къ остальнымъ числамъ. Мы получимъ комплексъ, содержащій $r-1$ чиселъ. Съ этимъ комплексомъ мы поступимъ такъ же, какъ съ прежнимъ, т. е. вновь выберемъ два числа, перемножимъ ихъ и присоединимъ произведеніе къ остальнымъ числамъ. Этотъ процессъ мы будемъ продолжать до тѣхъ поръ, пока не получимъ только одно число. Это число не зависитъ отъ того, какъ мы выбирали въ каждомъ случаѣ два числа для перемноженія, т. е. не зависитъ отъ порядка нашего вычисленія. Это число мы будемъ называть произведеніемъ сомножителей $a, b, c, \ldots, n$ и, обозначая его черезъ m, будемъ писать

$$m = abcd \ldots n,$$

т. е. попросту напишемъ сомножителей одинъ за другимъ.

Для доказательства высказаннаго утвержденія, на которое опирается это опредѣленіе [5]), мы вновь воспользуемся совершенной индукціей. Какъ было доказано въ п. п. 2 и 3, предложеніе это справедливо, когда $r=2$ или же когда $r=3$ (здѣсь нельзя ограничиться случаемъ $r=2$, т. к. при двухъ сомножителяхъ ассоціативный законъ не находитъ себѣ примѣненія). Теперь примемъ, что наше предложеніе справедливо для произведенія $r-1$ сомножителей, и докажемъ, что оно при этихъ условіяхъ справедливо и для произведенія r сомножителей. Итакъ, въ системѣ R выберемъ прежде всего два числа и составимъ ихъ произведеніе; за эти числа могутъ быть взяты a и b, — это зависитъ только отъ обозначенія; мы получаемъ такимъ образомъ комплексъ R', содержащій $r-1$ чиселъ.

$$(ab), c, d, \ldots, n \quad (R').$$

Если мы теперь начнемъ нашъ процессъ иначе, то мы можемъ либо выбрать первыя два множителя отличными отъ a и b, — напримѣръ, составить комплексъ R'' изъ $r-1$ чиселъ

$$a, b, (cd), \ldots, n \quad (R''),$$

[5]) Т. е. что результатъ не зависитъ отъ порядка процесса.

либо же сохранить число a или число b въ качествѣ одного изъ двухъ первыхъ множителей, т. е. составить, скажемъ, комплексъ

$$(ac),\ b,\ d,\ \ldots,\ n \quad (R''').$$

Согласно допущенію, произведенія чиселъ въ каждомъ изъ комплексовъ R', R'' и R''' не зависятъ отъ порядка вычисленія; вслѣдствіе этого вычисленіе можно продолжать такъ, чтобы послѣ перваго же пріема комплексы R' и R'', а также комплексы R' и R''', дали тождественные результаты; именно, комплексы R' и R'', очевидно, могутъ дать комплексъ

$$(ab),\ (cd),\ \ldots,\ n;$$

комплексы же R' и R''' могутъ дать комплексъ

$$(abc),\ d,\ \ldots,\ n.$$

А такъ какъ R', какъ уже было сказано, во всякомъ случаѣ даетъ одно и то же окончательное произведеніе, то то же произведеніе даютъ комплексы R'' и R'''.

5. Изъ соотвѣтствующихъ предложеній относительно сложенія (§ 8, 3) непосредственно вытекаетъ, что произведеніе двухъ сомножителей возрастаетъ съ каждымъ изъ нихъ, т. е., если

$$a > a',$$

то

$$ab > a'b;$$

и подавно, если

$$a > a' \quad \text{и} \quad b > b',$$

то

$$ab > a'b'.$$

Посредствомъ индукціи отсюда легко вывести предложеніе, что произведеніе какого угодно числа сомножителей возрастаетъ, если увеличимъ нѣкоторые изъ его множителей, а остальные оставимъ безъ измѣненія. Какъ слѣдствіе отсюда, получаемъ также, что произведеніе ac лишь въ томъ случаѣ равно произведенію bc, если $a = b$.

§ 10. Произведенія суммъ.

1. Положимъ, что въ произведеніи двухъ сомножителей одинъ изъ нихъ представляетъ собой сумму нѣсколькихъ слагаемыхъ. Въ этомъ случаѣ произведеніе можно представить въ видѣ суммы такого же числа слагаемыхъ, не производя сложенія предварительно.

Положимъ, напримѣръ, что намъ нужно помножить сумму r слагаемыхъ

$$S = a + b + c + \cdots + n$$

на число m; согласно опредѣленію умноженія, это произведеніе равно суммѣ m слагаемыхъ, равныхъ a, m слагаемыхъ, равныхъ b, и т. д., m слагаемыхъ, равныхъ n. Такъ какъ мы можемъ соединять слагаемыя въ какія угодно группы и производить сложеніе въ какомъ-угодно порядкѣ, то мы можемъ соединить m слагаемыхъ, равныхъ a, т. е. составить произведеніе ma, затѣмъ соединить всѣ слагаемыя b, т. е. составить произведеніе mb, и т. д. и, наконецъ, составить произведеніе mn. Такимъ образомъ, мы получимъ:

$$ms = ma + mb + mc + \cdots + mn.$$

Чтобы показать, что намъ нужно помножить всю сумму $a + b + \cdots$ $\cdots + n$, нужно воспользоваться скобками; сообразно этому, пишемъ:

$$m(a + b + c + \cdots + n) = ma + mb + mc + \cdots + mn. \quad (1)$$

Въ виду же закона перемѣстительнаго при умноженіи мы отсюда получаемъ также:

$$(a + b + c + \cdots + n)m = am + bm + cm + \cdots + nm. \quad (2)$$

Часто случается, что сумма дана въ формѣ

$$ma + mb + mc + \cdots + mn,$$

но что по тѣмъ или инымъ причинамъ выгоднѣе представить ее въ одной изъ формъ:

$$m(a + b + c + \cdots + n) \quad \text{или} \quad (a + b + c + \cdots + n)m.$$

Эта операція называется вынесеніемъ за скобки множителя m.

2. Если второй сомножитель m также представляетъ собою сумму нѣсколькихъ слагаемыхъ, такъ что

$$m = a' + b' + c' + \cdots + n',$$

то въ правой части равенствъ (1) и (2) можно вновь примѣнять то же самое правило; такимъ образомъ, мы получаемъ слѣдующее предложеніе:

Чтобы составить произведеніе двухъ суммъ

$$(a + b + c + \cdots + n)(a' + b' + c' + \cdots + n'),$$

умножаемъ **каждое слагаемое** одной суммы на **каждое слагаемое** другой суммы и складываемъ всѣ полученныя такимъ образомъ произведенія.

Если первая сумма содержитъ r, а вторая r' слагаемыхъ, то произведеніе содержитъ rr' слагаемыхъ, потому что каждое изъ r слагаемыхъ am, bm, ..., cm въ правой части равенства (2) разлагается на r' слагаемыхъ.

Вмѣсто того, чтобы обозначать рядъ чиселъ послѣдовательными буквами a, b, c ..., часто пользуются одной и той же буквой, напримѣръ, буквой a, присоединяя къ ней указатели или „индексы“:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_r.$$

Самый индексъ часто также обозначаютъ буквой, которая можетъ имѣть значенiе 1, 2, 3, ..., r, — напримѣръ,

$$a_i, \ i = 1, 2, 3, \ldots, r.$$

Сумму s чиселъ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_r$ можно въ этихъ обозначенiяхъ выразить такъ:

$$s = \sum_{i=1}^{r} a_i,$$

гдѣ знакъ Σ служитъ для сокращеннаго обозначенiя слова „сумма“; числа 1 и r называются **предѣлами** индекса i. Если указанiе этихъ предѣловъ представляется излишнимъ, то пишутъ короче:

$$s = \sum^{i} a_i.$$

Въ этихъ обозначенiяхъ содержанiе предложенiя 2 можетъ быть выражено такъ:

$$\left(\sum_{i=1}^{r} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{r'} b_j\right) = \sum^{i,j} a_i b_j. \qquad (3)$$

Это предложенiе можетъ быть также распространено на произведенiе нѣсколькихъ множителей, — напримѣръ:

$$\left(\sum_{i=1}^{r} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{s} b_j\right)\left(\sum_{h=1}^{t} c_h\right) = \sum^{i,j,h} a_i b_j c_h.$$

Выраженiе вида $a+b$, гдѣ a и b суть неопредѣленныя числа, называютъ **двучленомъ** или **биномомъ**. Точно такъ же выраженiе $a+b+c$ называется **трехчленомъ** или **триномомъ**, и вообще сумма нѣсколькихъ слагаемыхъ, обозначенныхъ буквами, называется **многочленомъ** или **полиномомъ**. Отдѣльныя слагаемыя называются **членами** полинома [6]).

---

[6]) У Евклида („Элементы“, X, 36) выраженiе „ἐκ δύο ὀνομάτων“ (ex duobus nominibus) употребляется для обозначенiя суммы двухъ несоизмѣримыхъ отрѣзковъ. Отсюда произошли термины „биномъ, триномъ, полиномъ“. Состоя изъ одного латинскаго и изъ одного греческаго корня, эти термины съ точки зрѣнiя языкознанiя образованы неправильно.

§ 11. Возвышенiе въ степень.

1. Сложенiе равныхъ слагаемыхъ привело насъ къ умноженiю; точно такъ же умноженiе равныхъ сомножителей приводитъ къ новому дѣйствiю — возвышенiю въ степень.

Положимъ, что намъ нужно составить произведенiе n сомножителей, которые всѣ равны между собой, — именно, равны, скажемъ, числу a. Результатъ этой операцiи называется n-ой степенью числа a и обозначается символомъ a^n, такъ что

$$a \cdot a \cdot a \cdots a = a^n; \tag{1}$$

въ лѣвой части этого равенства подразумѣваемъ n сомножителей; число a называется основанiемъ степени, а число n — показателемъ степени; говорятъ также короче: „a въ n-ой степени". „Возвысить число a въ n-ую степень" значитъ вычислить n-ую степень числа a.

Въ частности, въ виду геометрическихъ приложенiй, вторая степень числа a часто называется „квадратомъ числа a", а третья степень — „кубомъ" этого числа

Первая степень числа a равна основанiю a:

$$a^1 = a. \tag{2}$$

Такъ какъ произведенiе всякаго числа на 1 даетъ въ результатѣ множимое, то при любомъ показателѣ n

$$1^n = 1. \tag{3}$$

Основная теорема относительно степеней, которая выводится непосредственно изъ опредѣленiя, заключается въ слѣдующемъ:

2. Чтобы перемножить двѣ степени одного и того же основанiя, достаточно сложить показателей; въ символахъ:

$$a^m a^n = a^{m+n}. \tag{4}$$

Справедливость этого равенства вытекаетъ изъ того, что справа и слѣва мы имѣемъ $m + n$ множителей, равныхъ a. Это предложенiе при помощи совершенной индукцiи легко обобщается на произвольное число множителей, такъ что

$$a^m a^n \cdots a^q = a^{m+n+\cdots+q}, \tag{5}$$

каковы бы ни были числа $m, n, \ldots, q$ и каково бы ни было число ихъ r.

3. Если въ равенствѣ (5) всѣ показатели равны между собой, то оно выражаетъ слѣдующую вторую теорему о степеняхъ:

Чтобы возвысить степень въ новую степень, достаточно перемножить показателей, т. е.:

$$(a^m)^r = a^{mr}. \tag{6}$$

4. Чтобы возвысить въ степень произведенiе нѣсколькихъ сомножителей, можно возвысить въ эту степень каждаго изъ сомножителей въ отдѣльности и полученныя произведенiя перемножить:

$$(abc \cdots)^n = a^n b^n c^n \cdots.$$

Если здѣсь вновь будемъ считать всѣ основанiя a, b, $c \cdots$ равными между собой, то мы, въ силу соотношенiя (5), вновь получимъ предложенiе п. 3.

5. Если число a больше 1, то a^n тѣмъ больше, чѣмъ больше показатель n; можно всегда выбрать число n настолько большимъ, чтобы a^n было больше любого заданнаго числа c. Въ этомъ легко убѣдиться индуктивнымъ путемъ. Въ самомъ дѣлѣ, утвержденiе справедливо, если $c = 1$, потому что даже a^1 уже больше 1.

Если же $a^n > c$, то $a^{n+1} > ac \geqq c+1$ и $a^{n+2} \geqq a(c+1) > c+1$. Такимъ образомъ, если наше утвержденiе справедливо для нѣкотораго значенiя c, то оно справедливо также для $c+1$.

Вмѣстѣ съ тѣмъ, если $a^n > c$ для нѣкотораго значенiя m показателя n, то тѣмъ болѣе $a^n > c$, если n имѣетъ значенiе большее, нежели m.

6. Въ основанiи нашей десятичной системы счисленiя лежатъ степени числа 10. Число 10^n изображается 1 съ n нулями и образуетъ единицу $(n+1)$-го разряда. Число, изображаемое r цифрами $a, b, c, \ldots, m, n$, имѣетъ значенiе

$$a10^r + b10^{r-1} + c10^{r-2} + \cdots + m10 + n. \tag{7}$$

Но чтобы самое мѣсто, занимаемое цифрой, могло служить для обозначенiя степени, необходимо также указать, какiя степени отсутствуютъ; для этого служитъ знакъ 0 (нуль), который тоже принято считать цифрой. Сообразно съ этимъ въ выраженiи (7) подъ $a, b, c, \ldots, m, n$ нужно разумѣть одинъ изъ знаковъ:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Если при нѣкоторомъ вычисленiи число единицъ какого-либо разряда превышаетъ 9, то нужно пользоваться формулой

$$(a+10) \cdot 10^r = 10^{r+1} + a10^r.$$

Такимъ образомъ, правило умноженiя чиселъ въ десятичной системѣ основывается, какъ мы видимъ, на предложенiи п. 2 § 10-го

При возвышенiи въ степень не имѣютъ мѣста ни перемѣстительный ни сочетательный законы, потому что a^b имѣетъ другое значенiе, нежели b^a (напримѣръ, $a^1 = a$, $1^a = 1$); точно такъ же $a^{(m^r)}$ имѣетъ не то значенiе, что $(a^m)^r$; напримѣръ, $a^{(1^r)} = a$, $(a^1)^r = a^r$. Вслѣдствiе этой именно причины не образуютъ новыхъ дѣйствiй въ томъ порядкѣ идей, въ какомъ умноженiе составлено изъ сложенiя, хотя по существу это стало бы возможно, если принять за основанiе и показатель одно и то же число. Законы такой операцiи были бы довольно сложны, а нужды практической жизни и науки не дѣлаютъ такого обобщенiя необходимымъ.

§ 12. Вычитанiе. Отрицательныя числа.

1. Если мы изъ конечнаго комплекса A исключимъ его часть B, то остается конечный комплексъ $A - B$, число котораго c вполнѣ опредѣляется числами a и b комплексовъ A и B. Мы будемъ записывать эту зависимость числа c отъ чиселъ a и b въ видѣ:

$$c = a - b \tag{1}$$

и будемъ называть $a - b$ (a минусъ b) разностью чиселъ a и b; дѣйствiе же, посредствомъ котораго эта разность находится, — вычитанiемъ; число a называется уменьшаемымъ, число b вычитаемымъ.

Такъ какъ комплексъ B представляетъ собой часть [7]) комплекса A, то число b должно быть меньше числа a, т. е. уменьшаемое должно быть больше вычитаемаго.

Чтобы совершать вычитанiе въ десятичной системѣ, достаточно запомнить результаты этой операцiи (получаемые непосредственнымъ вычисленiемъ) для небольшихъ чиселъ; именно, нужно разобрать всѣ случаи, въ которыхъ уменьшаемое не превышаетъ 18, а вычитаемое не превышаетъ 9. Уже это вычисленiе въ десятичной системѣ часто приводитъ насъ къ тому, что нужно вычесть большее число изъ меньшаго; чтобы выйти изъ этого затрудненiя, мы занимаемъ единицу слѣдующаго высшаго разряда; но научная ариѳметика, а также многiя ея примѣненiя требуютъ еще болѣе широкаго обобщенiя задачи вычитанiя, которое можетъ быть достигнуто введенiемъ новаго рода чиселъ.

2. Даны два числа a и b; требуется найти число c, которое нужно прибавить къ числу b для того, чтобы получить число a.

Если $a > b$, то эту задачу рѣшаютъ формулой (1). Если $a = b$, то не нужно ничего прибавлять къ b, чтобы получить число a; это мы

---

7) Авторъ часто употребляетъ слово „часть“ вмѣсто „правильная часть“ (§ 2, 5). Впрочемъ, это нигдѣ не вызываетъ двусмысленности.

выразимъ, какъ и въ десятичной системѣ, тѣмъ, что будемъ обозначать знакомъ 0 отсутствіе какихъ бы то ни было объектовъ; т. е. положимъ

$$a - a = 0;\ a + 0 = a;\ a - 0 = a; \qquad (2)$$

въ нѣсколько болѣе широкомъ смыслѣ слова мы будемъ теперь 0 также называть числомъ. Если же число $b > a$, то задача содержитъ въ себѣ требованіе, которое при наличныхъ средствахъ невыполнимо. Если, однако, мы все же желаемъ сдѣлать эту задачу разрѣшимой, то мы должны придать слову „число" болѣе широкое значеніе.

3. Представимъ себѣ еще одинъ рядъ натуральныхъ чиселъ (безъ нуля) и воспользуемся этимъ вторымъ рядомъ для счета объектовъ, находящихся въ извѣстномъ противоположеніи къ тѣмъ объектамъ, которые мы считали при помощи перваго ряда, какъ, напримѣръ, объекты, расположенные справа и слѣва, градусы, лежащіе выше и ниже точки замерзанія, имущество и долгъ. Для различенія мы должны чѣмъ-нибудь отличать числа второго ряда отъ чиселъ перваго ряда. Чтобы произвести это различіе, мы будемъ называть числа перваго ряда **положительными**, числа второго ряда — **отрицательными** и послѣднія будемъ отмѣчать знакомъ —, т. е. будемъ писать:

$$-1,\ -2,\ -3, \ldots,$$

или въ словахъ: „минусъ одинъ", „минусъ два", „минусъ три", ...; если почему-либо требуется особенно подчеркнуть это противоположеніе, то положительныя числа часто обозначаются знакомъ $+$, т. е. пишутъ

$$+1,\ +2,\ +3, \ldots,$$

или въ словахъ: „плюсъ одинъ", „плюсъ два", „плюсъ три", ...

Натуральное число a называется **абсолютнымъ значеніемъ** чиселъ $+a$ и $-a$. Чтобы обозначить число того или другого ряда, пользуются также знакомъ $\pm a$ (плюсъ или минусъ a).

Знаки $+$ и $-$ въ символѣ $\pm a$ называются **знаками** числа $\pm a$.

Число нуль мы можемъ отнести къ тому или другому ряду: $+0$ и -0 тождественны. Два числа этихъ двухъ рядовъ, имѣющіе одну и ту же абсолютную величину, называются **противоположными**. Число 0 противоположно себѣ самому. Число, противоположное противоположному числу, совпадаетъ съ первоначальнымъ числомъ. Если поэтому a есть отрицательное число, то подъ символомъ $-a$ разумѣютъ положительное число съ тою же абсолютной величиной. Этотъ двойной рядъ чиселъ, включая сюда 0, мы будемъ называть **рядомъ цѣлыхъ чиселъ**. Числа этого ряда мы расположимъ по величинѣ при помощи слѣдующаго правила:

4. Всѣ положительныя числа больше нуля, всѣ отрицательныя числа меньше нуля. Если a есть положительное число, то

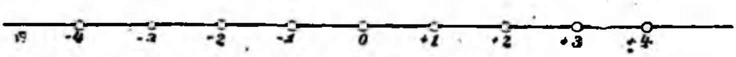
$$a > 0 \quad \text{и} \quad -a < 0.$$

Положительныя числа мы будемъ располагать въ томъ же порядкѣ, какъ и прежде, а отрицательныя—въ противоположномъ порядкѣ, такъ что изъ двухъ отрицательныхъ чиселъ меньшимъ считается то, которое имѣетъ большую абсолютную величину.

Благодаря такому соглашенію, если α, β и γ суть три произвольныхъ цѣлыхъ числа и $\alpha < \beta$, а $\beta < \gamma$, то $\alpha < \gamma$.

Это расположеніе чиселъ по величинѣ называютъ „алгебраическимъ"; такимъ образомъ, говорятъ, что одно число „алгебраически больше или меньше" другого, если принимаются во вниманіе знаки чиселъ; если же говорятъ, что одно число „абсолютно больше или меньше другого", то подъ этимъ разумѣется, что абсолютная величина перваго числа больше или меньше абсолютной величины второго. Если число α алгебраически меньше числа β, то пишемъ $\alpha < \beta$ или $\beta > \alpha$; если при этомъ не исключается возможность равенства, то пишемъ $\alpha \leqq \beta$, или въ словахъ: „α равно β или меньше, нежели β" (иногда говорятъ короче, хотя и не совсѣмъ правильно, такъ: „α равно или меньше β"); аналогично этому пишутъ: $\beta \geqq \alpha$.

Чтобы сдѣлать эти опредѣленія наглядными, представимъ себѣ рядъ точекъ, нанесенныхъ на прямой линіи (напримѣръ жемчужины, нанизанныя на нити). Любую изъ этихъ точекъ помѣтимъ цифрой 0, а затѣмъ при счетѣ въ одномъ направленіи, скажемъ, слѣва направо, будемъ отмѣчать точки числами $+1$, $+2$, $+3$, а въ другомъ направленіи — числами -1, -2, -3, $\cdots$ (фиг. 1).



Фиг. 1.

При такихъ условіяхъ точкѣ, лежащей направо отъ другой точки, всегда отвѣчаетъ большее число; числа возрастаютъ слѣва направо, или, какъ часто говорятъ, въ положительномъ направленіи.

§ 13. Дѣйствія надъ цѣлыми числами.

Надъ этими числами мы установимъ теперь совершенно произвольно нижеслѣдующія правила дѣйствій; при этомъ мы будемъ руководиться только тѣмъ основнымъ положеніемъ, чтобы установленныя уже дѣйствія въ области натуральныхъ чиселъ представляли собою частные случаи вводимыхъ нами новыхъ болѣе общихъ правилъ и чтобы основные законы ариѳметическихъ дѣйствій сохранили, по возможности, свою силу при этомъ обобщеніи.

1. Сложеніе. Пусть α и β будутъ два цѣлыхъ числа съ абсолютными величинами a и b; положимъ при этомъ, что

$$b \geqq a. \qquad (1)$$

Въ такомъ случаѣ мы положимъ:

$$\begin{array}{lllllllllllll}
\alpha+\beta = & a+b, & \text{если} & \alpha & \text{имѣетъ} & \text{знакъ} & +, & \beta & \text{имѣетъ} & \text{знакъ} & + \\
\alpha+\beta = & b-a & „ & „ & „ & „ & - & „ & „ & „ & + \\
\alpha+\beta = & -(b-a) & „ & „ & „ & „ & + & „ & „ & „ & - \\
\alpha+\beta = & -(a+b) & „ & „ & „ & „ & - & „ & „ & „ & -
\end{array} \qquad (2)$$

$$\alpha+\beta = \beta+\alpha \text{ [8]}. \qquad (3)$$

Число 0 можетъ быть при этомъ отнесено произвольно къ положительнымъ или къ отрицательнымъ числамъ, и мы положимъ $a - a = 0$.

Съ помощью ряда точекъ, приведеннаго въ § 12 (фиг. 1), правило сложенія можно сдѣлать нагляднымъ.

Чтобы къ числу α прибавить число β, имѣющее абсолютную величину b, отсчитываемъ b точекъ въ положительномъ направленіи, начиная съ точки $\alpha+1$, если β есть число положительное, и въ отрицательномъ направленіи, начиная съ точки $\alpha-1$, если β есть число отрицательное; точка, къ которой мы такимъ образомъ придемъ, соотвѣтствуетъ числу $\alpha+\beta$.

2. Вычитаніе. Полагая по прежнему $b \geqq a$, мы положимъ:

$$\begin{array}{lllcc}
 & & & \multicolumn{2}{c}{\text{Знаки чиселъ } \alpha \text{ и } \beta} \\
\alpha-\beta & = & -(b-a) & + & + \\
 & = & -(a+b) & - & + \\
 & = & a+b & + & - \\
 & = & b-a & - & -
\end{array} \qquad (4)$$

$$\beta-\alpha = -(\alpha-\beta). \qquad (5)$$

Мы видимъ, такимъ образомъ, что сложеніе и вычитаніе натуральныхъ чиселъ подходятъ подъ эти опредѣленія, какъ частные случаи.

---

[8]) Опредѣленія, содержащіяся въ соотношеніяхъ (2), устанавливаютъ, что значитъ прибавить къ числу α число β, имѣющее такую же или большую абсолютную величину; опредѣленіе это дополняется соглашеніемъ (3), которое говоритъ, что прибавить къ числу α число β, имѣющее меньшую абсолютную величину, означаетъ то же, что прибавить къ числу β число α.

Вмѣстѣ съ тѣмъ по этимъ правиламъ любое число можетъ быть вычтено изъ другого числа; результатъ всегда представляетъ собой опредѣленное число нашего ряда.

3. Вычитаніе можетъ быть приведено къ сложенію посредствомъ формулы

$$a - \beta = a + (-\beta). \tag{6}$$

Сообразно съ этимъ вычесть нѣкоторое число равносильно тому, чтобы прибавить то же число съ обратнымъ знакомъ.

Поэтому вычитаніе такъ же, какъ и сложеніе, можетъ быть выполнено при помощи отсчитыванія точекъ въ томъ или въ другомъ направленіи.

4. Сочетательный законъ при сложеніи. Перемѣстительный законъ при сложеніи мы уже выразили формулой (3).

Законъ сочетательный долженъ выразиться соотношеніемъ

$$(a + \beta) + \gamma = a + (\beta + \gamma) = \beta + (a + \gamma), \tag{7}$$

гдѣ a, β и γ суть произвольныя три числа, абсолютныя значенія которыхъ обозначимъ черезъ a, b и c.

Этотъ законъ вытекаетъ изъ опредѣленій (2) и (3). Число случаевъ, которое слѣдовало бы различать относительно знаковъ чиселъ a, β и γ, значительно уменьшается благодаря слѣдующему обстоятельству: по конструкціи равенствъ (7), если онѣ оказываются справедливыми при нѣкоторомъ значеніи a, β и γ, то онѣ сохраняютъ свою силу и въ томъ случаѣ, если мы замѣстимъ другъ другомъ a и β, или β и γ, или a и γ [9]), а также, если мы замѣстимъ a, β и γ черезъ $-a$, $-\beta$ и $-\gamma$. Вслѣдствіе этого намъ достаточно доказать соотношеніе (7) въ томъ предположеніи, что

$$a \leqq b \leqq c$$

и что γ есть положительное число ($\gamma = c$). При этихъ условіяхъ намъ остается разсмотрѣть только 4 случая, соотвѣтствующіе четыремъ комбинаціямъ чиселъ a и β. Соотвѣтственно этимъ комбинаціямъ, соотношенія (7) принимаютъ такія формы:

1. Числа a и β положительны:

$$(a + b) + c = a + (b + c) = b + (a + c);$$

2. Число a отрицательно, число β положительно:

$$(b - a) + c = (b + c) - a = b + (c - a);$$

3. Число a положительно, число β отрицательно:

$$c - (b - a) = a + (c - b) = (a + c) - b;$$

---

[9]) Такъ какъ при этомъ однѣ части равенства переходятъ въ другія.

4. Числа α и β отрицательны:

$$c-(a+b)=(c-b)-a=(c-a)-b, \text{ если } c>a+b,$$
$$(a+b)-c=a-(c-b)=b-(c-a), \text{ если } c<a+b.$$

Справедливость этихъ формулъ становится очевидной, если мы примемъ во вниманіе, что изъ самаго понятія о соединеніи комплексовъ (п. 3 § 3-го) и объ исключеніи изъ комплекса его части (п. 1 § 12-го), сверхъ соотношеній, указанныхъ въ п. 2 § 8-го, вытекаютъ еще слѣдующія зависимости:

$$(A+B)-C=A+(B-C)$$
$$A-(B-C)=(A-B)+C.$$

Если мы теперь дословно повторимъ тотъ же рядъ разсужденій, который былъ примѣненъ въ п. 4 § 9-го къ умноженію, то получимъ слѣдующій болѣе общій законъ:

5. Если намъ нужно опредѣлить сумму любого количества цѣлыхъ чиселъ (слагаемыхъ), то можно поступать слѣдующимъ образомъ: выбираемъ произвольно два слагаемыхъ, складываемъ ихъ и сумму присоединяемъ къ остальнымъ слагаемымъ. Въ полученной такимъ образомъ новой системѣ, содержащей уже меньше элементовъ, мы вновь выбираемъ два и поступаемъ съ ними точно такъ же, какъ выше. Этотъ процессъ мы продолжаемъ до тѣхъ поръ, пока не останется только одно число. Это число не зависитъ отъ порядка, въ которомъ мы производимъ наши отдѣльныя операціи, и называется суммой всѣхъ чиселъ.

6. Законы перемѣстительный и сочетательный принимаютъ для вычитанія другую форму, которая получается изъ соотвѣтствующихъ формулъ сложенія, если разсматривать вычитаніе, какъ прибавленіе отрицательныхъ чиселъ (п. 1); именно, каковы бы ни были числа α, β и γ, имѣютъ мѣсто слѣдующія соотношенія:

$$\alpha-\beta=\ -(\beta-\alpha), \quad \text{(ср. (5))} \tag{8}$$
$$(\alpha+\beta)-\gamma=\alpha+(\beta-\gamma), \tag{9}$$
$$(\alpha-\beta)+\gamma=\alpha-(\beta-\gamma)=\alpha+(\gamma-\beta), \tag{10}$$
$$(\alpha-\beta)-\gamma=\alpha-(\beta+\gamma)=(\alpha-\gamma)-\beta. \tag{11}$$

7. Отсюда легко получить (при помощи совершенной индукціи) часто примѣняемое правило вычитанія многочлена, извѣстное также подъ названіемъ „правила для раскрытія скобокъ“; оно выражается слѣдующей формулой:

$$\alpha-(\beta+\gamma+\cdots+\nu)=\alpha-\beta-\gamma-\cdots-\nu,$$

или въ словахъ:

Если нужно вычесть изъ какого-либо числа многочленъ, составленный изъ произвольнаго количества чиселъ и заключенный въ скобки, то можно скобки опустить, измѣняя при этомъ знакъ каждаго члена на обратный, или, иначе, замѣняя каждое сложенiе вычитанiемъ и обратно.

§ 14. Умноженiе.

1. Если мы будемъ разсматривать умноженiе, какъ повторное сложенiе (§ 9), то мы можемъ распространить это дѣйствiе и на тотъ случай, когда множимое отрицательно или равно нулю. Правило сложенiя предыдущаго параграфа въ этомъ случаѣ даетъ:

$$a \cdot (-b) = -(ab), \tag{1}$$

$$a \cdot 0 = 0. \tag{2}$$

Но если множитель есть число отрицательное, то прежнее опредѣленiе теряетъ всякiй смыслъ: отъ насъ зависитъ приписать этимъ символамъ то или другое значенiе [10]). Мы опредѣлимъ умноженiе для тѣхъ случаевъ, когда множитель отрицателенъ или равенъ нулю, слѣдующими соотношенiями:

$$(-a)b = -(ab), \tag{3}$$

$$(-a)(-b) = ab, \tag{4}$$

$$0 \cdot b = 0. \tag{5}$$

Формула (3) необходимо вытекаетъ изъ формулы (1), если поставимъ себѣ задачей сохранить перемѣстительный законъ; формула же (4) слѣдуетъ изъ формулы (3), если послѣдняя должна остаться въ силѣ и для отрицательныхъ значенiй числа b, ибо $-(-a) = +a$, какъ мы установили выше. Наконецъ, соотношенiе (5) вытекаетъ изъ формулы (2) въ силу перемѣстительнаго закона [11]).

---

[10]) Выраженiе $(-a) \cdot b$ представляетъ собой символъ., которому предыдущими опредѣленiями не присвоено никакого опредѣленнаго значенiя. Отъ насъ зависитъ поэтому приписать этому символу то значенiе, которое мы найдемъ цѣлесообразнымъ.

[11]) Выражаемая здѣсь мысль заключается въ слѣдующемъ: опредѣленiе умноженiя при отрицательномъ и нулевомъ множителѣ необходимо сводится къ соотношенiямъ (3), (4) и (5), если мы желаемъ сохранить законъ перемѣстительный и если формула (3) должна остаться справедливой и для отрицательныхъ значенiй множимаго b; дѣйствительно, если законъ перемѣстительный долженъ остаться въ силѣ, то число $(-a)b$ должно быть равно числу $b(-a)$ или, по формулѣ (2), числу $-(ab)$. Точно такъ же, если формула (3) должна остаться въ силѣ при отрицательномъ значенiи числа b, то

$$(-a)(-b) = -(-ab) = ab.$$

Согласно установленнымъ такимъ образомъ опредѣленіямъ, для любыхъ двухъ цѣлыхъ чиселъ α и β остается въ силѣ перемѣстительный законъ

$$\alpha\beta = \beta\alpha; \tag{6}$$

опредѣленія же (1) — (5) могутъ быть выражены слѣдующимъ правиломъ:

Если одинъ изъ двухъ сомножителей обращается въ нуль, то и произведеніе равно нулю.

Произведеніе двухъ положительныхъ или двухъ отрицательныхъ чиселъ есть число положительное.

Произведеніе положительнаго числа на отрицательное есть число отрицательное.

Законъ сочетательный для умноженія гласитъ:

$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma) = \beta(\alpha\gamma), \tag{7}$$

что нетрудно вывести изъ того же закона для положительныхъ чиселъ и изъ соглашеній п. 1, если перебрать всѣ комбинаціи знаковъ, которыя здѣсь возможны. Вмѣстѣ съ тѣмъ доказывается и общее предложеніе относительно произведенія сколь угодно большого числа сомножителей (§ 9):

$$\mu = \alpha\beta\gamma \cdots \nu,$$

согласно которому это произведеніе можно получить, перемножая произвольные два сомножителя, умножая затѣмъ полученное произведеніе на третьяго множителя, и т. д., пока не останется только одно число; результатъ не зависитъ отъ порядка, въ которомъ ведется это вычисленіе [12]).

2. Въ случаѣ, если между сомножителями имѣются отрицательныя числа, можно сдѣлать слѣдующія заключенія относительно знака всего произведенія.

Чтобы опредѣлить знакъ произведенія, перемножимъ сначала всѣхъ положительныхъ сомножителей; если остается только одинъ отрицательный множитель, то произведеніе имѣетъ, согласно п. 1, отрицательное значеніе; если же имѣется нѣсколько отрицательныхъ произведеній, то мы распредѣлимъ ихъ въ пары и перемножимъ сомножителей каждой пары, которые дадутъ положительныя произведенія. Если послѣ этого остается еще одинъ отрицательный множитель, то произведеніе отрицательно; если же всѣ отрицательные множители могутъ быть распредѣлены въ пары, то произведеніе положительно.

Это заставляетъ насъ дѣлать слѣдующее различіе между натуральными числами. Если нѣкоторый комлексъ обладаетъ тѣмъ свойствомъ,

---

[12]) Данный въ § 9 выводъ основывается исключительно на сочетательномъ и перемѣстительномъ законахъ. Онъ остается поэтому въ силѣ, коль скоро остаются въ силѣ эти два закона.

что всѣ его элементы могутъ быть безъ остатка распредѣлены въ пары, то соотвѣтствующее ему число называется четнымъ; если послѣ распредѣленія элементовъ въ пары, остается одинъ свободный элементъ, то соотвѣтствующее число называется нечетнымъ.

При помощи совершенной индукціи можно безъ труда убѣдиться, что одно и то же число не можетъ быть одновременно четнымъ и нечетнымъ. За каждымъ четнымъ числомъ слѣдуетъ нечетное число, за нечетнымъ — четное.

1, 3, 5, 7, 9, 11 суть нечетныя числа; 2, 4, 6, 8, 10, 12 суть четныя числа.

Послѣ этого опредѣленія мы можемъ выразить правило знаковъ при умноженіи слѣдующимъ образомъ.

Произведеніе положительно, если число отрицательныхъ сомножителей четно, и отрицательно, если число отрицательныхъ сомножителей нечетно.

3. Когда установлено понятіе о произведеніи какого угодно числа сомножителей, то понятіе о степени отрицательнаго числа опредѣляется само собой. Степень отрицательнаго числа имѣетъ положительное значеніе, если показатель есть число четное, и отрицательное, если показатель есть число нечетное:

$$\begin{aligned} (-a)^n &= a^n, \quad \text{если } n \text{ есть число четное,} \\ &= -a^n, \quad \text{если } n \text{ есть число нечетное.} \end{aligned} \tag{8}$$

Въ частности квадратъ отрицательнаго числа всегда представляетъ собой положительное число.

Обратимъ еще вниманіе на слѣдующій частный случай:

$$\begin{aligned} (-1)^n &= +1, \quad \text{если } n \text{ есть число четное,} \\ &= -1, \quad \text{если } n \text{ есть число нечетное.} \end{aligned} \tag{9}$$

Послѣдней формулой часто пользуются, чтобы выразить, что нѣкоторое число, зависящее отъ n, имѣетъ положительное значеніе при четномъ n и отрицательное значеніе при нечетномъ n. Такъ, напримѣръ, соотношенія (8) могутъ быть выражены такъ:

$$(-a)^n = (-1)^n a^n.$$

ГЛАВА III.

Дѣленіе и введеніе дробей.

§ 15. Дѣленіе и дѣлимость чиселъ.

1. Если a и b суть натуральныя числа, то всегда можно опредѣлить положительное число m такимъ образомъ, чтобы mb было больше, нежели a.

Въ самомъ дѣлѣ, если $a = 1$, то теорема, очевидно, справедлива при всякомъ b, ибо $b \geqq 1$, и достаточно взять $n > 1$, чтобы nb было больше 1 (§ 9, 5); отсюда слѣдуетъ, что, при всякомъ a, $nab > a$ и, слѣдовательно, $mb > a$, если $m \geqq na$.

Если $b < a$, то изъ всѣхъ значеній числа m, удовлетворяющихъ неравенству $mb > a$, имѣется одно наименьшее. Это наименьшее число больше 1; мы его обозначимъ поэтому черезъ $q + 1$, такъ что

$$qb \leqq a < (q + 1)b.$$

Если мы поэтому положимъ

$$a - qb = r,$$

то, когда $qb = a$, число $r = 0$, а въ противномъ случаѣ r есть положительное число, меньшее, нежели b. Отсюда вытекаетъ слѣдующій выводъ.

2. Если a и b суть два натуральныя числа и $b < a$, то можно опредѣлить положительное число q и другое число r, которое равно или больше 0 и меньше, нежели b, такимъ образомъ, чтобы имѣло мѣсто соотношеніе:

$$a = qb + r; \tag{1}$$

эти числа q и r однозначно опредѣляются числами a и b.

Процессъ разысканія чиселъ q и r по заданнымъ числамъ a и b называется дѣленіемъ числа a на число b; число a называется дѣлимымъ, b — дѣлителемъ, q — частнымъ, r — остаткомъ.

При этихъ условіяхъ говорятъ также, что число b содержится q разъ въ числѣ a, при чемъ остается остатокъ r.

Съ этой задачей мы встрѣчаемся, напримѣръ, въ томъ случаѣ, если намъ бываетъ нужно, какъ это часто случается въ жизни, раздѣлить комплексъ, состоящій изъ a недѣлимыхъ объектовъ, на b равныхъ частей Вообще говоря, такое дѣленіе не совершается безъ остатка.

Какъ находятся числа q и r, когда a и b заданы въ десятичной системѣ счисленія, излагается въ элементарной ариѳметикѣ.

3. Если остатокъ равенъ 0, то говорятъ также, что a дѣлится на b, или что b дѣлитъ число a, или что b есть дѣлитель или множитель числа a, или что дѣленіе числа a на b совершается нацѣло, или, наконецъ, что число a кратно числа b.

Такимъ образомъ, число a дѣлится на b, если существуетъ такое цѣлое число m, что

$$a = mb. \tag{2}$$

4. Обобщая это опредѣленіе, мы будемъ говорить, что число 0 дѣлится на всякое положительное или отрицательное число, ибо равенство (2) удовлетворяется при всякомъ значеніи числа b, если положимъ $a = 0$ и $m = 0$. Мы будемъ также говорить, что число $-a$ дѣлится на b или на $-b$, если b есть число, отличное отъ нуля, и a дѣлится на b. Но подъ дѣлителями числа мы будемъ разумѣть исключительно натуральныя (положительныя) числа.

5. Каждое число дѣлится на себя и на единицу, потому что соотношеніе (2) удовлетворяется, если положимъ $b = a$ и $m = 1$ или $b = 1$ и $m = a$.

6. Ни одно число, отличное отъ нуля, не дѣлится на нуль. Въ самомъ дѣлѣ, при $b = 0$ соотношеніе (2) можетъ быть удовлетворено только тогда, если и $a = 0$; въ этомъ же послѣднемъ случаѣ число m можетъ имѣть совершенно произвольное значеніе.

Изъ даннаго выше опредѣленія вытекаютъ далѣе слѣдующія предложенія.

7. Произведеніе нѣсколькихъ множителей

$$p = a_1 a_2 a_3 \cdots a_a$$

дѣлится на число b, если, по крайней мѣрѣ, одинъ изъ сомножителей дѣлится на b. Замѣтимъ, однако, что произведеніе можетъ иногда дѣлиться на b, хотя ни одинъ изъ множителей не дѣлится на b; такъ, напримѣръ, $3 \cdot 4$ дѣлится на 6, хотя ни 3 ни 4 не дѣлятся на 6.

8. Если два числа a и b дѣлятся на третье число c, то числа $a+b$ и $a-b$ также дѣлятся на c. Впрочемъ, это есть только частный случай слѣдующаго болѣе общаго предложенія:

Если каждое изъ чиселъ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ дѣлится на число b, такъ что

$$a_1 = m_1 b, \quad a_2 = m_2 b, \quad a_3 = m_3 b, \ldots, \quad a_n = m_n b,$$

то, каковы бы ни были числа $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$,

$$a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 + \cdots + a_n c_n = b(m_1 c_1 + m_2 c_2 + m_3 c_3 + \cdots + m_n c_n)$$

и, слѣдовательно, число

$$a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 + \cdots + a_n c_n$$

дѣлится на b.

9. Если a дѣлится на b, такъ что

$$a = mb,$$

то m есть частное отъ дѣленія a на b. Это выражаютъ на письмѣ еще и такъ:

$$m = a : b, \quad \text{или} \quad m = \frac{a}{b}, \quad \text{или} \quad m = a/b,$$

(въ словахъ: m равно a, дѣленному на b).

§ 16. Общій наибольшій дѣлитель. Числа, первыя между собой. Общее наименьшее кратное.

1. Если два натуральныхъ числа a и b дѣлятся на третье число c, то послѣднее называется общимъ дѣлителемъ чиселъ a и b. Такъ какъ дѣлитель числа не можетъ быть больше самого числа, то между всѣми общими дѣлителями чиселъ a и b всегда долженъ быть одинъ наибольшій; послѣдній называется общимъ наибольшимъ дѣлителемъ, или же общей наибольшей мѣрой этихъ двухъ чиселъ; разысканіе общаго наибольшаго дѣлителя двухъ чиселъ представляетъ собой одну изъ основныхъ задачъ ариѳметики. Эта задача рѣшается пріемомъ, который былъ уже указанъ Евклидомъ и который поэтому извѣстенъ подъ названіемъ Евклидова алгориѳма, или алгориѳма общаго наибольшаго дѣлителя *).

2. Пусть a и a_1 будутъ два данныя положительныя числа, общій наибольшій дѣлитель которыхъ намъ нужно разыскать. Если они равны между собой, то общее ихъ значеніе и есть ихъ общій наибольшій

*) Подъ алгориѳмомъ въ настоящее время разумѣютъ правило, которое указываетъ, какъ найти нѣкоторый общій результатъ въ каждомъ частномъ случаѣ, хотя оно и не даетъ общаго выраженія для этого результата. Ср. § 7.

дѣлитель. Мы предположимъ поэтому, что $a > a_1$. Раздѣлимъ число a на a_1, и, если дѣленіе не совершается нацѣло, то мы получимъ остатокъ, который меньше, нежели a_1; этотъ остатокъ мы обозначимъ черезъ a_2. Теперь раздѣлимъ a_1 на a_2; если и это дѣленіе не совершается нацѣло, то мы получимъ остатокъ a_3, который меньше, нежели a_2. Продолжая этотъ процессъ, мы будемъ получать постоянно меньшіе остатки; послѣ опредѣленнаго числа такихъ дѣленій мы необходимо должны придти къ такому дѣленію, которое совершается нацѣло, такъ какъ не можетъ быть неограниченнаго числа остатковъ, меньшихъ, нежели данное число a_1. Этимъ заканчивается вычисленіе, и дѣлитель послѣдняго дѣленія есть искомый наибольшій дѣлитель чиселъ a и a_1. Этотъ процессъ становится нагляднѣе, если выразить его нижеслѣдующими равенствами, въ которыхъ буквами $q, q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}$ обозначены частныя послѣдовательныхъ дѣленій:

$$\begin{aligned} a &= q a_1 + a_2, \\ a_1 &= q_1 a_2 + a_3, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ a_{n-2} &= q_{n-2} a_{n-1} + a_n, \\ a_{n-1} &= q_{n-1} a_n. \end{aligned} \tag{1}$$

Наше утвержденіе заключается въ томъ, что a_n есть общій наибольшій дѣлитель чиселъ a и a_1. Это будетъ доказано, если мы обнаружимъ,

α) что a_n есть дѣлитель чиселъ a и a_1, и

β) что каждый общій дѣлитель чиселъ a и a_1 представляетъ собою также дѣлителя числа a_n.

Въ самомъ дѣлѣ, если d есть искомый общій наибольшій дѣлитель, то изъ свойства α) слѣдуетъ, что $a_n \leqq d$, а изъ свойства β) слѣдуетъ, что $a_n \geqq d$; поэтому изъ соотношеній α) и β) вмѣстѣ слѣдуетъ, что $a_n = d$. Что же касается самихъ требованій α) и β), то въ ихъ справедливости легко убѣдиться, разсматривая равенства (1) въ обратномъ порядкѣ, снизу вверхъ, и принимая во вниманіе предложеніе п. 8 § 15-го [1]).

---

[1]) Выяснимъ подробнѣе этотъ основной пунктъ.

α) Послѣднее изъ равенствъ (1) показываетъ, что a_{n-1} дѣлится на a_n; вслѣдствіе этого предпослѣднее изъ равенствъ (1), въ виду предложенія п. 8 § 15-го, обнаруживаетъ, что a_{n-2} дѣлится на a_n. Такимъ же образомъ предыдущее соотношеніе (третье отъ конца) обнаруживаетъ, что a_{n-3} дѣлится на a_n. Восходя такимъ образомъ къ первымъ равенствамъ въ ряду (1), мы получимъ, что числа a и a_1 дѣлятся на a_n.

β) Пусть b будетъ общій дѣлитель чиселъ a и a_1. Если мы представимъ первое изъ равенствъ (1) въ видѣ

$$a_2 = a - q a_1,$$

то, въ силу предложенія п. 8 § 15-го, оно обнаруживаетъ, что a_2 дѣлится на b.

Изъ сказаннаго попутно вытекаетъ слѣдующій выводъ:

Каждый общій дѣлитель двухъ чиселъ есть также дѣлитель общаго наибольшаго дѣлителя ихъ.

Приведемъ слѣдующій примѣръ для выясненія этого алгориѳма.

$$
\begin{aligned}
6552 &= 14 \cdot 448 + 280,\\
448 &= 1 \cdot 280 + 168,\\
280 &= 1 \cdot 168 + 112,\\
168 &= 1 \cdot 112 + 56,\\
112 &= 2 \cdot 56.
\end{aligned}
$$

Итакъ, 56 есть общій наибольшій дѣлитель чиселъ 6552 и 448.

3. Вмѣсто равенства

$$a = qb + r$$

можно при разысканіи общаго наибольшаго дѣлителя пользоваться также равенствомъ

$$a = (q + 1)\,b - (b - r),$$

что представляетъ собой преимущество въ томъ случаѣ, если $b - r$ меньше, нежели r, т. е. если $2r$ больше, нежели b. Въ этомъ случаѣ отрицательное число $-(b - r)$ называютъ абсолютно наименьшимъ остаткомъ отъ дѣленія числа a на число b. Пользуясь въ алгориѳмѣ общаго наибольшаго дѣлителя абсолютно наименьшими остатками, мы скорѣе придемъ къ цѣли.

Въ нашемъ примѣрѣ вычисленіе можно было бы вести такъ:

$$
\begin{aligned}
6552 &= 15 \cdot 448 - 168\\
448 &= 3 \cdot 168 - 56\\
168 &= 3 \cdot 56,
\end{aligned}
$$

что даетъ значительное сокращеніе.

4. Точно такъ же, какъ и для двухъ чиселъ, можно поставить вопросъ о разысканіи общаго наибольшаго дѣлителя для нѣсколькихъ чиселъ, т. е. самаго большого числа, на которое дѣлятся всѣ данныя числа. Но эту задачу можно привести къ предыдущей, основываясь на слѣдующемъ замѣчаніи:

Если d есть общій наибольшій дѣлитель чиселъ a и b, то всякій общій дѣлитель чиселъ a и b дѣлитъ также число d; поэтому всякій

Пользуясь этимъ, мы такимъ же образомъ при помощи второго изъ равенствъ (1) покажемъ, что a_3 дѣлится на b. Продолжая тотъ же рядъ разсужденій, мы докажемъ при помощи предпослѣдняго равенства (1), что число a_n дѣлится на b.

общій дѣлитель чиселъ a, b и c представляетъ собой также общаго дѣлителя чиселъ d и c; обратно, каждый общій дѣлитель чиселъ d и c есть также общій дѣлитель чиселъ a, b и c. Вслѣдствіе этого общій наибольшій дѣлитель чиселъ a, b и c совпадаетъ съ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ чиселъ d и c.

5. Два числа, общій наибольшій дѣлитель которыхъ равенъ 1 и которыя, стало быть, не имѣютъ другихъ дѣлителей, кромѣ 1, называются взаимно простыми или первыми между собою. Говорятъ также, что такія числа не имѣютъ общихъ дѣлителей; при этомъ, конечно, не принимается въ счетъ постоянный общій дѣлитель 1.

Такъ, взаимно-простыми числами являются, напримѣръ, 3 и 7, 15 и 49, 105 и 128. Каковы бы ни были два данныя числа a и b, даже если они очень велики, можно рѣшить сравнительно простымъ вычисленіемъ, имѣютъ ли они общихъ дѣлителей или нѣтъ.

6. Относительно взаимно простыхъ чиселъ имѣетъ мѣсто слѣдующее основное предложеніе:

Если a и b суть числа первыя между собой и число ma, кратное a, дѣлится на b, то число m дѣлится на b.

Въ справедливости этого предложенія нетрудно убѣдиться при помощи алгориѳма (1). Если a и $b = a_1$ суть числа первыя между собой, то $b_n = 1$. Соотвѣтствующій алгориѳмъ имѣетъ въ этомъ случаѣ такой видъ:

$$\begin{aligned} a &= qa_1 + a_2, \\ a_1 &= q_1 a_2 + a_3, \\ &\dots\dots\dots \\ a_{n-2} &= q_{n-2} a_{n-1} + 1. \end{aligned} \tag{2}$$

Умножая обѣ части каждаго изъ этихъ равенствъ на m, мы получимъ:

$$\begin{aligned} ma &= qma_1 + ma_2, \\ ma_1 &= q_1 ma_2 + ma_3, \\ &\dots\dots\dots \\ ma_{n-2} &= q_{n-2} ma_{n-1} + m. \end{aligned} \tag{3}$$

Если теперь ma дѣлится на a_1, то первое изъ этихъ равенствъ обнаруживаетъ, что и ma_2 дѣлится на a_1; вслѣдствіе этого второе равенство обнаруживаетъ, что ma_3 дѣлится на a_1; дальнѣйшія равенства. послѣдовательно обнаруживаютъ (въ силу совершенной индукціи), что числа $ma_1, \dots, ma_{n-1}, . m$ дѣлятся на a_1. А этимъ и доказано наше предложеніе.

Если d есть общій наибольшій дѣлитель чиселъ a и b и если

$$a = da' \text{ и } b = bd', \tag{4}$$

то a' и b' суть числа первыя между собой. Дѣйствительно, если бы числа a' и b' имѣли общаго дѣлителя e, отличнаго отъ 1, то числа a и b дѣлились бы на de, — что противно условію.

7. Число, которое дѣлится на каждое изъ двухъ чиселъ a и b, называется общимъ кратнымъ этихъ чиселъ. Изъ всѣхъ общихъ кратныхъ двухъ чиселъ одно должно быть наименьшимъ, а остальныя должны быть кратны этого наименьшаго.

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что число m дѣлится на a и b; придерживаясь обозначенія (4), мы можемъ сказать, что число m дѣлится на da', т. е. можетъ быть представлено въ видѣ

$$m = da'n.$$

Такъ какъ это число дѣлится на $b'd$, то $a'n$ дѣлится на b'; а такъ какъ a' и b' суть числа первыя между собой, то n дѣлится на b' (п. 6). Если $n = b'p$, то

$$m = da'b'p.$$

Итакъ, каждое число m, кратное a и b, дѣлится на число $da'b' = \frac{ab}{d}$; поэтому $\frac{ab}{d}$ есть общее наименьшее кратное чиселъ a и b.

Вмѣстѣ съ тѣмъ мы видимъ, что общее наименьшее кратное двухъ чиселъ очень просто опредѣляется, если мы знаемъ общаго наибольшаго дѣлителя ихъ.

8. Совершенно такъ же, какъ при общемъ наибольшемъ дѣлителѣ, мы можемъ распространить понятіе объ общемъ наименьшемъ кратномъ нѣсколькихъ чиселъ. Чтобы получить общее наименьшее кратное чиселъ

$$a,\ b,\ c,\ d\ \ldots,$$

поступаемъ слѣдующимъ образомъ: беремъ два изъ этихъ чиселъ, — скажемъ, a и b, — и замѣняемъ эти числа ихъ общимъ наименьшимъ кратнымъ; такимъ образомъ, мы получаемъ рядъ чиселъ, содержащій однимъ числомъ меньше. Съ этимъ рядомъ поступаемъ точно такъ же и продолжаемъ этотъ процессъ до тѣхъ поръ, пока не получимъ только одно число.

§ 17. Простыя и составныя числа.

Натуральное число, которое не имѣетъ никакихъ дѣлителей, кромѣ себя самого и единицы, называется простымъ числомъ; числа же, имѣющія также другихъ дѣлителей, называются составными числами. Число 1 занимаетъ исключительное положеніе: это единственное число, которое имѣетъ только одного дѣлителя, между тѣмъ какъ всѣ другія числа имѣютъ, по крайней мѣрѣ, двухъ дѣлителей. Въ нѣкоторыхъ отношеніяхъ цѣлесообразно не относить 1 къ простымъ числамъ; такимъ образомъ, приходится отличать три категоріи чиселъ: единицу, простыя числа и составныя числа.

Здѣсь, конечно, весь вопросъ въ цѣлесообразности соглашенія; часто относятъ единицу къ простымъ числамъ, какъ оно и кажется естественнѣе на первый взглядъ. Мы предпочитаемъ, однако, не относить единицу къ простымъ числамъ, такъ какъ это даетъ возможность короче выражать нѣкоторыя предложенія.

Относительно простыхъ чиселъ имѣютъ мѣсто слѣдующія предложенія.

1. Если произведеніе двухъ чиселъ ab дѣлится на простое число p, то, по крайней мѣрѣ, одинъ изъ множителей a или b дѣлится на p.

Въ самомъ дѣлѣ, если a не дѣлится на p, то a и p суть числа первыя между собой, такъ какъ p не имѣетъ никакихъ дѣлителей, кромѣ p и 1; если поэтому произведеніе ab все же дѣлится на p, то второй множитель b долженъ дѣлиться на p (§ 16, 6).

Это предложеніе легко обобщить слѣдующимъ образомъ:

Если произведеніе нѣсколькихъ сомножителей $a, b, c, d, \ldots$ дѣлится на простое число p, то, по крайней мѣрѣ, одинъ изъ сомножителей дѣлится на p.

2. Каждое простое число можетъ быть однимъ и только однимъ способомъ представлено въ видѣ произведенія простыхъ сомножителей, или, какъ часто говорятъ, можетъ быть разложено на простыхъ сомножителей.

Чтобы доказать это предложеніе, замѣтимъ прежде всего, что каждое составное число m дѣлится, по крайней мѣрѣ, на одно простое число. Дѣйствительно, если m есть составное число, то оно имѣетъ дѣлителя m_1, который меньше, нежели m, и больше 1. Если m_1 также есть составное число, то и оно имѣетъ дѣлителя, который отличенъ отъ единицы и меньше, нежели m_1. Продолжая это разсужденіе, мы необходимо придемъ къ дѣлителю, который представляетъ собой простое число. Если p_1 есть простой дѣлитель числа m, то

$$m = p_1 m_1, \qquad (1)$$

гдѣ $m_1 < m$. Если m_1 не представляетъ собой простого числа, то оно имѣетъ простого дѣлителя p_2; такимъ образомъ

$$m = p_1 p_2 m_2. \qquad (2)$$

Это разсужденіе мы можемъ продолжить, и, такъ какъ числа m_1, m_2, m_3, . . . постоянно убываютъ и отличны отъ 1, то мы необходимо должны придти къ числу m_n, которое представляетъ собой простое число. Такимъ образомъ мы получемъ разложенiе числа m на простыхъ дѣлителей, число которыхъ обозначимъ черезъ n:

$$m = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_n. \tag{3}$$

Между дѣлителями $p_1, p_2, \ldots, p_n$ нѣкоторые могутъ, конечно, повторяться нѣсколько разъ; эти равные дѣлители даютъ въ произведенiи степень того же числа. Принимая поэтому, что между простыми дѣлителями имѣется π равныхъ p, $\varkappa$ равныхъ q, ϱ равныхъ r,. и т. д., — мы можемъ представить разложенiе (3) въ такомъ видѣ:

$$m = p^\pi q^\varkappa r^\varrho \ \ldots \tag{4}$$

Числа p, q, r, $\cdots$ мы здѣсь уже считаемъ различными, а

$$\pi + \varkappa + \varrho + \cdots = n.$$

Отсюда уже легко вывести, что разложенiе можетъ быть произведено только однимъ способомъ. Дѣйствительно, согласно предложенiю 1, число m, выражаемое произведенiемъ (4), не можетъ дѣлиться ни на какое простое число, кромѣ p, q, r . . .; сверхъ того, число p не можетъ входить множителемъ больше, чѣмъ π разъ; число q не можетъ входить множителемъ больше, чѣмъ $\varkappa$ разъ, и т. д. [2]).

3. Комплексъ, состоящiй изъ всѣхъ простыхъ чиселъ, безконеченъ *).

Если бы комплексъ, содержащiй всѣ простыя числа, былъ конеченъ, то должно было бы существовать наибольшее простое число. Итакъ, допустимъ, что ω представляетъ наибольшее простое число. Въ такомъ случаѣ всѣ простыя числа могутъ быть расположены въ возрастающемъ порядкѣ въ рядъ 2, 3, 5, 7, . . ., ω, оканчивающiйся числомъ ω.

Составивъ произведенiе всѣхъ этихъ чиселъ, прибавимъ къ нему 1:

$$\Omega = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots \omega + 1. \tag{5}$$

Это число Ω больше, нежели ω, но не можетъ дѣлиться ни на одно изъ чиселъ нашего ряда 2, 3, 5, 7, . . ., ω, ибо при дѣленiи числа Ω на каждое изъ нихъ получаемъ въ остаткѣ 1. Поэтому сдѣланное допущенiе, что имѣется наибольшее простое число, неправильно.

---

[2]) Частное $m : p^\pi = q^\varkappa r^\varrho \ldots$; вслѣдствiе предложенiя 1, оно уже не можетъ дѣлиться на p. Слѣдовательно, другое разложенiе не можетъ содержать p въ болѣе высокой степени; но по той же причинѣ первое разложенiе также не можетъ содержать число p въ болѣе высокой степени, чѣмъ второе.

*) Это предложенiе и его доказательство имѣются уже у Евклида. Ср. § 22.

Если мы примемъ въ выраженіи (5) за ω какое-либо опредѣленное простое число, то число Ω будетъ больше, нежели ω, но не будетъ дѣлиться ни на одно простое число, меньшее, нежели ω. Поэтому Ω либо должно быть простымъ числомъ, либо должно дѣлиться на простое число, которое больше, чѣмъ ω. Въ дѣйствительности можетъ имѣть мѣсто какъ то, такъ и другое; напримѣръ,

$$2 \cdot 3 + 1 = 7, \text{ простое число,}$$
$$2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31, \text{ простое число,}$$
$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 211, \text{ простое число,}$$
$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1 = 2311, \text{ простое число,}$$
$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot + 1 = 30031 = 59 \cdot 509, \text{ составное число.}$$

Задача о нахожденіи простыхъ дѣлителей даннаго составного числа, а также рѣшеніе вопроса о томъ, есть ли заданное число простое или составное, гораздо сложнѣе, нежели нахожденіе общаго наибольшаго дѣлителя двухъ чиселъ. Общаго прямого метода для рѣшенія этой задачи мы не имѣемъ; вообще, изслѣдованіе вопроса о распредѣленіи простыхъ чиселъ принадлежитъ къ труднѣйшимъ проблемамъ ариѳметики. Мы будемъ имѣть случай въ главѣ XIV сдѣлать нѣкоторыя указанія по этому вопросу. Здѣсь же мы ограничимся слѣдующими указаніями.

4. Существуютъ простые признаки, посредствомъ которыхъ нетрудно узнать, дѣлится ли данное число, написанное въ десятичной системѣ, на первыя простыя числа 2, 3, 5. Если число m изображается n цифрами $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$, то

$$m = a_1 10^{n-1} + a_2 10^{n-2} + \cdots + a_{n-1} 10 + a_n.$$

Такъ какъ число 10 и всѣ его степени дѣлятся на 2 и на 5, то число m дѣлится на 2 или на 5, если a_n, т. е. число простыхъ его единицъ, дѣлится соотвѣтственно на 2 или на 5.

Такъ какъ 100 дѣлится на 4 и на 25, то мы можемъ еще прибавить, что число m дѣлится на 4 или 25, если $a_{n-1} 10 + a_n$, т. е. если число, составленное изъ его десятковъ и единицъ, дѣлится на 4 или на 25. Тѣмъ же способомъ устанавливаютъ признаки дѣлимости чиселъ на 8 и 125, а также на болѣе высокія степени чиселъ 2 и 5.

Если мы обозначимъ теперь черезъ q сумму цифръ числа m (т. е. сумму чиселъ, изображаемыхъ отдѣльными его цифрами), иными словами, если положимъ

$$q = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n,$$

то

$$m - q = a_1(10^{n-1} - 1) + a_2(10^{n-2} - 1) + \cdots + a_{n-1}(10 - 1);$$

а такъ какъ числа

$$10 - 1 = 9, \quad 10^2 - 1 = 99, \quad 10^3 - 1 = 999, \cdots$$

дѣлятся на 9, то число $m - q$ дѣлятся на 9. Если поэтому одно изъ этихъ чиселъ дѣлится на 3 или на 9, то и другое дѣлится на это число. Такимъ образомъ мы получаемъ слѣдующее правило:

Число m дѣлится на 3 или на 9, если сумма его цифръ дѣлится на это число.

Точно такъ же, если мы положимъ

$$q' = a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3} + \cdots \pm a_1,$$

то

$$m - q' = a_{n-1}(10 + 1) + a_{n-2}(10^2 - 1) + a_{n-3}(10^3 + 1) \cdots;$$

такъ какъ числа

$$10 + 1 = 11, \; 10^2 - 1 = 99, \; 10^3 + 1 = 1001, \cdots$$

дѣлятся на 11, то число m дѣлится на 11, если q' дѣлится на 11, и обратно.

5. Если m есть составное число, то оно можетъ быть во всякомъ случаѣ разложено на двухъ множителей, изъ которыхъ каждое больше 1. Если $m = ab$ и $a \leqq b$, то

$$a^2 \leqq m.$$

Слѣдовательно, между дѣлителями числа m долженъ быть, по крайней мѣрѣ, одинъ, квадратъ котораго не превышаетъ m. Поэтому, чтобы опредѣлить, есть ли заданное число простое или составное, нужно прежде всего опредѣлить при помощи вышеприведенныхъ признаковъ, дѣлится ли оно на 2, 3, 5, 11. Если это не имѣетъ мѣста, то нужно дѣлить заданное число далѣе послѣдовательно на всѣ простыя числа, квадраты которыхъ не превышаютъ даннаго числа; эти числа мы предполагаемъ, слѣдовательно, извѣстными. Если ни одно изъ этихъ не совершается нацѣло, то m есть простое число; если же одно изъ дѣленій совершается нацѣло, то m есть число составное, и для производства разложенія нужно подвергнуть такому же изслѣдованію частное. Такимъ образомъ, если число, меньшее 100, не дѣлится на 2, 3, 5 и 7, то оно представляетъ собой простое число; точно такъ же числа, не превышающія 10000, приходится для той же цѣли дѣлить только на простыя числа, меньшія 100.

6. Вопросъ объ опредѣленіи простыхъ чиселъ очень интересовалъ уже древнихъ. Мы упомянули уже, что Евклидъ доказываетъ предложенія, касающіяся простыхъ чиселъ. Сохранился отрывокъ сочиненія, подъ названіемъ „Рѣшето“ (*κόσκινον*, cribrum Eratosthenis), принадлежащаго Эратосѳену *), въ которомъ указанъ остроумный методъ для опредѣленія всѣхъ простыхъ чиселъ, не превышающихъ даннаго числа; методъ этотъ заключается въ слѣдующемъ.

Напишемъ всѣ числа до указаннаго числа. Начнемъ счетъ съ перваго простого числа 2; это число мы оставимъ на мѣстѣ, а послѣ него будемъ зачеркивать каждое второе число; такимъ образомъ всѣ числа, кратныя 2, кромѣ самого числа 2, будутъ вычеркнуты. Затѣмъ начинаемъ счетъ съ ближайшаго оставшагося числа, т. е. съ 3; сохраняемъ число 3, а послѣ него вычеркиваемъ каждое третье число, считая, однако, при этомъ и тѣ числа, которыя уже были перечеркнуты прежде. Этотъ процессъ мы продолжаемъ дальше, т. е. начинаемъ съ ближайшаго незачеркнутаго числа, оставляемъ его, а послѣ него зачеркиваемъ числа черезъ столько мѣстъ, сколько единицъ въ томъ числѣ, съ котораго мы начали. Послѣ окончанія этой операціи останутся исключительно простыя числа. Однако, согласно п. 5, мы должны продолжать этотъ процессъ только до тѣхъ поръ, пока квадратъ числа, съ котораго мы начинаемъ, не превышаетъ послѣдняго числа нашего ряда. Такъ, напримѣръ, при опредѣленіи простыхъ чиселъ, которыя меньше $121 = 11^2$, намъ пришлось бы только вычеркнуть числа, кратныя 2, 3, 5 и 7. Чтобы уяснить себѣ этотъ процессъ, полезно продѣлать его дѣйствительно для чиселъ, не превышающихъ 100.

Само собой разумѣется, что примѣненіе какъ этого способа „просѣиванія“, такъ и дѣленія на извѣстныя уже простыя числа при большихъ числахъ скоро становится совершенно неосуществимымъ вслѣдствіе того, что они требуетъ слишкомъ громоздкихъ вычисленій. Въ виду этого нахожденіе дѣлителей очень большихъ чиселъ, а также распознаваніе простыхъ чиселъ представляетъ собой одну изъ труднѣйшихъ задачъ математики. Поэтому старались составить таблицы, содержащія разложенія чиселъ и простыя числа до извѣстнаго предѣла. Мы имѣемъ теперь такія таблицы до 9 милліоновъ включительно **). Простыхъ чиселъ, меньшихъ 100, имѣется 15, меньшихъ 1000 — имѣется 168, а до 9 000 000 по подсчету, произведенному Глейзеромъ (Glaisher), имѣется 602 567 простыхъ чиселъ. Итакъ, поскольку можно полагаться на точность таблицъ,

---

*) Эратосѳенъ Киренскій жилъ, повидимому, отъ 275 до 194 г. до Р. Х.; большую часть жизни онъ провелъ въ Александріи. (Ср. Cantor, „Gesch. der Mathematik.“ Bd. I, S. 313 и сл.).

**) Такія таблицы вычислены Л. Чернакомъ (L. Chernac) до 1 020 000, I. Буркгардтомъ (J. Burckhardt) до 3 036 000, З. Дазомъ (Z. Dase) для чиселъ отъ 7-го до 9-го милліона, а Глейзеромъ (Glaisher) отъ 4-го до 6-го милліона включительно. Меньшія таблицы для настольнаго употребленія (до 400 000) имѣются въ сочиненіи „Sammlung mathematischer Tafeln“ nach Vega, herausgegeben von Hülsse. Berlin, Weidmannsche Buchhandlung, 1865.

мы можемъ считать извѣстными всѣ простыя числа, меньшія 9 000 000. Но такъ какъ всякое вычисленіе, производимое человѣкомъ, можетъ содержать ошибки, а такой огромный числовой матеріалъ, конечно, не былъ провѣренъ многими калькуляторами, то къ этимъ числамъ всегда нужно относиться съ извѣстной осторожностью. За указанными предѣлами намъ извѣстны только отдѣльныя простыя числа; самое большое изъ нихъ слѣдующее

$$2^{61} - 1 = 2\,305\,843\,009\,213\,693\,951 \text{ *)}.$$

Для разложенія весьма большихъ чиселъ пользовались средствами высшей математики и въ частности теоріей квадратичныхъ формъ. Ниже мы приведемъ простой примѣръ такого рода пріемовъ.

§ 18. Дроби.

1. Задача дѣленія числа a на другое число b въ томъ случаѣ, когда a кратно b, можетъ быть формулирована слѣдующимъ образомъ. Требуется найти такое число c, которое нужно умножить на данное число b, чтобы получить другое данное число a.

Съ этой точки зрѣнія дѣленіе можетъ быть разсматриваемо, какъ дѣйствіе, обратное умноженію. Въ предыдущей главѣ мы обобщили дѣйствіе, обратное сложенію; чтобы сдѣлать это дѣйствіе всегда выполнимымъ, мы вынуждены были ввести новаго рода числа — отрицательныя числа. Такимъ же образомъ мы можемъ обобщить и задачу дѣленія, но для этого необходимо вновь расширить область чиселъ, — именно, кромѣ цѣлыхъ чиселъ, которыя мы изучали до сихъ поръ, необходимо ввести еще такъ называемыя дробныя числа или дроби. Мы введемъ эти числа сначала совершенно формально и формально же установимъ для нихъ правила дѣйствій. Тѣмъ не менѣе новая система чиселъ которую мы такимъ образомъ получимъ, также находитъ себѣ примѣненіе для выраженія извѣстныхъ соотношеній между объектами внѣшняго міра.

2. Къ понятію о дроби мы приходимъ проще всего слѣдующимъ путемъ. Пусть m будетъ знакъ, символъ, который можетъ обозначать любое цѣлое число (нуль, положительное или отрицательное число); пусть n будетъ знакъ, выражающій какое-нибудь положительное число. Символъ m/n или $\frac{m}{n}$, составленный изъ этихъ двухъ знаковъ, вполнѣ опредѣляется заданными значеніями чиселъ m и n. Такого рода символы мы будемъ называть дробными числами или дробями; относительно нихъ мы установимъ слѣдующія соглашенія.

*) Это было констатировано сначала Зельгофомъ (Seelhof), а потомъ подтверждено другими изслѣдователями (Zeitschrift für Mathematik und Fhysik, 31 Jahrgang, S. 174).

Число m называется числителемъ, а n — знаменателемъ дроби.

Если знаменатель равенъ, напримѣръ, 2, 3, 4, ..., 10, то дробь читается такъ: m вторыхъ, m третьихъ, m четвертыхъ, ..., m десятыхъ.

Символы $\frac{m}{n}$ и $\frac{qm}{qn}$ должны имѣть одно и то же значенiе, каково бы ни было положительное число q [3]).

Вслѣдствiе послѣдняго соглашенiя, общаго дѣлителя числителя и знаменателя каждой дроби можно опустить, не измѣняя значенiя дроби (такъ, напримѣръ, $\frac{2}{3}$ означаетъ то же, что $\frac{4}{6}$ или $\frac{10}{15}$, и т. д.).

Уничтоженiе общаго дѣлителя q въ числителѣ и знаменателѣ, т. е. замѣна дроби $\frac{qm}{qn}$ дробью $\frac{m}{n}$, называется сокращенiемъ дроби на q.

Сообразно этому для каждой дроби существуетъ нѣкоторая простѣйшая форма, которую называютъ несократимой формой; чтобы получить несократимую форму дроби, нужно раздѣлить числителя и знаменателя на ихъ общаго наибольшаго дѣлителя. Въ несократимой дроби числитель и знаменатель суть числа первыя между собой.

Если намъ дано нѣсколько дробей, то мы можемъ представить ихъ въ такомъ видѣ, чтобы они имѣли одного и того же знаменателя. Для этого достаточно выбрать общимъ знаменателемъ любое число m, кратное всѣхъ знаменателей, и помножить числителя и знаменателя каждой дроби на множителя, недостающаго знаменателю до числа m. Такъ, напримѣръ, любыя три дроби $\frac{a}{a_1}$, $\frac{b}{b_1}$, $\frac{c}{c_1}$ мы можемъ представить въ видѣ

$$\frac{a}{a_1}=\frac{ab_1c_1}{n},\quad \frac{b}{b_1}=\frac{bc_1a_1}{n},\quad \frac{c}{c_1}=\frac{ca_1b_1}{n},$$

гдѣ $n=a_1b_1c_1$.

---

[3]) Смыслъ послѣдняго соглашенiя заключается въ слѣдующемъ: подъ дробями мы разумѣемъ, какъ сказано, только опредѣленнаго рода символы; ближайшаго значенiя мы этимъ символамъ не приписываемъ, сохраняя за собой право разумѣть подъ ними, что намъ угодно, приписать имъ то значенiе, какое мы найдемъ цѣлесообразнымъ. Мы уславливаемся, однако, подъ символами $\frac{m}{n}$ и $\frac{qm}{qn}$ всегда разумѣть одно и то же; это значитъ: если мы припишемъ какое-либо значенiе символу $\frac{m}{n}$, то то же значенiе мы, въ силу этого соглашенiя, должны приписать и символу $\frac{qm}{qn}$. Это соглашенiе допускаетъ, впрочемъ, и болѣе формальное (быть можетъ, и болѣе правильное) толкованiе. Но мы не считаемъ возможнымъ развивать здѣсь точку зрѣнiя, которой авторъ, повидимому, не придерживается.

3. Теперь мы условимся изъ двухъ дробей съ общимъ знаменателемъ считать большей ту, которая имѣетъ большаго числителя.

Это соглашенiе вполнѣ совмѣстимо съ опредѣленiемъ п. 2-го, потому что умноженiе или дѣленiе числителя и знаменателя на одно и то же число не влiяетъ на критерiй, по которому мы условились отличать большую дробь отъ меньшей [4]). Это соглашенiе удовлетворяетъ также основному требованiю, которому должно удовлетворять всякое расположенiе чиселъ по величинѣ (§ 6). Если α, β и γ суть три дроби и α больше, нежели β, а β больше, нежели γ, то α больше, нежели γ.

Условiя, установленныя для сравненiя дробей, могутъ быть также выражены слѣдующимъ образомъ:

Изъ двухъ дробей $\alpha = \frac{a}{a_1}$ и $\beta = \frac{b}{b_1}$ первая меньше, равна или больше второй, смотря по тому, которое изъ трехъ соотношенiй имѣетъ мѣсто:

$$\begin{aligned} ab_1 &< a_1 b, \\ ab_1 &= a_1 b, \qquad (2) \\ ab_1 &> a_1 b. \end{aligned}$$

Это вытекаетъ непосредственно изъ предыдущаго опредѣленiя, если мы приведемъ обѣ дроби къ общему знаменателю $a_1 b_1$, такъ что

$$\alpha = \frac{ab_1}{a_1 b_1}, \quad \beta = \frac{ba_1}{a_1 b_1}.$$

4. Чтобы въ составъ дробныхъ чиселъ вошли также всѣ цѣлыя числа, введемъ слѣдующее соглашенiе: условимся разумѣть подъ дробью со знаменателемъ 1 цѣлое число, выраженное ея числителемъ, т. е. положимъ

$$\frac{a}{1} = a. \qquad (3)$$

При этомъ условiи установленное выше расположенiе цѣлыхъ чиселъ по величинѣ (§ 6) вытекаетъ, какъ слѣдствiе, изъ общаго критерiя сравненiя дробныхъ чиселъ.

---

[4]) Авторъ хочетъ сказать слѣдующее: если, въ силу приведеннаго выше соглашенiя, дробь $\frac{a}{a_1}$ окажется большей, нежели дробь $\frac{b}{b_1}$, то и дробь $\frac{ma}{ma_1}$ окажется большей, нежели $\frac{b}{b_1}$; это, конечно, очень легко доказать, приводя къ одному знаменателю какъ дроби $\frac{a}{a_1}$ и $\frac{b}{b_1}$, такъ и дроби $\frac{ma}{ma_1}$ и $\frac{b}{b_1}$.

Такимъ образомъ, совокупность всѣхъ дробныхъ чиселъ, включая сюда также и всѣ положительныя и отрицательныя цѣлыя числа, оказывается расположенной въ одинъ рядъ, который мы будемъ называть рядомъ раціональныхъ чиселъ. Такъ же, какъ и у цѣлыхъ чиселъ, мы будемъ и у раціональныхъ чиселъ отличать ихъ абсолютную величину и ихъ алгебраическую величину. При сравненіи чиселъ по абсолютной величинѣ принимаются во вниманіе только ихъ абсолютныя или положительныя значенія; при алгебраическомъ же расположеніи чиселъ всѣ отрицательныя числа меньше положительныхъ, а изъ двухъ отрицательныхъ чиселъ больше то, которое имѣетъ меньшую абсолютную величину. Дробь, абсолютная величина которой меньше единицы, называется правильной дробью. Правильной дробью является, слѣдовательно, такая дробь, числитель которой по абсолютной величинѣ меньше знаменателя.

5. Чтобы дать наглядное представленіе о дробяхъ и вмѣстѣ съ тѣмъ указать важное примѣненіе ихъ къ реальнымъ объектамъ, представимъ себѣ рядъ точекъ, нанесенныхъ на прямой линіи, какъ на масштабѣ, на равныхъ разстояніяхъ одна отъ другой,—скажемъ, на разстояніи сантиметра; это разстояніе мы будемъ называть единицей длины. Затѣмъ любую изъ этихъ точекъ обозначимъ числомъ 0; далѣе, точки, расположенныя направо отъ нея, будемъ послѣдовательно обозначать цѣлыми положительными числами $+1$, $+2$, $+3$, ...; точки же, расположенныя налѣво, помѣтимъ числами -1, -2, -3, ... Теперь раздѣлимъ каждый интервалъ на опредѣленное число — скажемъ, на n — равныхъ частей; эти точки мы опять будемъ отмѣчать числами $+1$, $+2$, $+3$ ... направо отъ нуля и числами -1, -2, -3, ... налѣво. Эти точки даютъ въ такомъ случаѣ картину послѣдовательнаго расположенія тѣхъ дробей, которыя имѣютъ знаменателя n или могутъ быть приведены къ этому знаменателю. Въ приложеніяхъ обыкновенно полагаютъ n равнымъ 10 или степени 10.

6. Изъ соотношенія (2) п. 3-го слѣдуетъ, что изъ двухъ положительныхъ дробей съ одинаковымъ числителемъ та меньше, которая имѣетъ большаго знаменателя. Въ самомъ дѣлѣ, если $a = b$ и $a_1 > b_1$, то $ab_1 < ba_1$; отсюда слѣдуетъ, что мы можемъ указать сколько угодно дробей, которыя по абсолютной величинѣ меньше заданной дроби. Такимъ образомъ, дробь $\frac{1}{n}$ тѣмъ меньше, чѣмъ больше знаменатель n; какова бы ни была положительная дробь $\frac{a}{b}$, можно выбрать число n настолько большимъ, чтобы было $\frac{1}{n} < \frac{a}{b}$ [5]). Это предложеніе представляетъ собой частный случай слѣдующей общей теоремы.

[5]) Въ силу § 15, 1, мы всегда можемъ выбрать число n настолько большимъ, чтобы было $na > b$; тогда $\frac{1}{n} < \frac{a}{b}$.

Если α и β суть два произвольныхъ раціональныхъ числа, неравныхъ между собой, то можно найти сколько угодно дробей, содержащихся между α и β.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ $\alpha > \beta$ и

$$\alpha = \frac{a}{a_1}, \quad \beta = \frac{b}{b_1}.$$

Слѣдовательно, $ab_1 > ba_1$, а потому разность $ab_1 - ba_1$ представляетъ собой положительное цѣлое число. Вслѣдствіе этого можно всегда подобрать множитель q такимъ образомъ, чтобы произведеніе $q(ab_1 - ba_1)$ было больше, нежели произвольно заданное число r (§ 15, 1), — иными словами, чтобы между числами qab_1 и qba_1 содержалось больше, чѣмъ r цѣлыхъ чиселъ. Если x есть одно изъ такихъ чиселъ, то

$$qab_1 > x > qba_1;$$

а потому

$$\frac{a}{a_1} > \frac{x}{qa_1b_1} > \frac{b}{b_1}.$$

Въ приведенномъ выше представленіи раціональныхъ чиселъ при помощи дѣленія масштаба съ понятіемъ объ абсолютномъ уменьшеніи дроби связывается представленіе о постоянно убывающемъ отрѣзкѣ; то же самое имѣетъ мѣсто при всѣхъ примѣненіяхъ дробныхъ чиселъ къ реальнымъ объектамъ; но съ точки зрѣнія теоретической въ установленномъ выше критеріи сравненія дробей не содержится ничего, объективно указывающаго на большую или меньшую величину,

7. До сихъ поръ мы разсматривали только дроби $\frac{m}{n}$ съ положительными знаменателями, и по существу дѣла этого достаточно; тѣмъ не менѣе часто бываетъ цѣлесообразно пользоваться также дробями съ отрицательными знаменателями. Эти дроби мы опредѣлимъ равенствомъ.

$$\frac{m}{-n} = \frac{-m}{n} \text{ [6]}. \tag{4}$$

Только числа нуль мы никогда не будемъ употреблять въ качествѣ знаменателя дроби.

§ 19. Дѣйствія надъ дробями.

1. Чтобы сложить двѣ дроби или вычесть одну дробь изъ другой, ихъ приводятъ къ общему знаменателю (§ 18, 2). Общимъ знаме-

---

[6]) Иными словами, подъ дробью $\frac{m}{-n}$ мы условимся разумѣть то же, что подъ дробью $\frac{-m}{n}$.

нателемъ служитъ общее кратное знаменателей данныхъ дробей; если же данныя дроби несократимы, то проще всего взять за общій знаменатель общее наименьшее кратное ихъ знаменателей.

Если же

$$\alpha = \frac{a}{n} \text{ и } \beta = \frac{b}{n},$$

то мы опредѣлимъ сумму и разность этихъ дробей равенствами

$$\alpha + \beta = \frac{a+b}{n} \text{ и } \alpha - \beta = \frac{a-b}{n}. \tag{1}$$

Согласно этому опредѣленію, сумма или разность двухъ дробей также представляетъ собой нѣкоторую дробь. Результатъ, который мы такимъ образомъ получаемъ, иногда оказывается сократимой дробью (напримѣръ, $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1$); но результатъ этотъ никогда не зависитъ отъ той формы, въ которой заданы данныя дроби: если мы умножимъ числителя и знаменателя одной изъ дробей α и β или обѣихъ дробей на q, то въ результатѣ числитель и знаменатель также окажутся умноженными на q.

Сообразно этому уже ясно, какъ слѣдуетъ опредѣлить сумму нѣсколькихъ дробей; легко также видѣть, что и основные законы этихъ операцій, которыя были изложены для цѣлыхъ чиселъ въ §§ 8 и 13, сохраняютъ свою силу и для дробей. Вообще, поскольку рѣчь идетъ только о сложеніи и вычитаніи, вычисленія надъ дробями представляютъ собой не что иное, какъ вычисленія надъ цѣлыми числами въ примѣненіи къ особаго рода объектамъ, единица которыхъ называется $1/n$. Характернымъ для этихъ вычисленій является лишь то, что здѣсь приходится предварительно привести данныя числа къ опредѣленному виду, а затѣмъ результатъ, если возможно, сократить.

2. Умноженіе. Подъ произведеніемъ двухъ дробей a/a_1 и b/b_1 мы будемъ разумѣть дробь $ab/a_1 b_1$. Мы получаемъ такимъ образомъ правило умноженія, которое непосредственно распространяется на случай какого угодно числа сомножителей.

Чтобы перемножить нѣсколько дробей, нужно перемножить всѣхъ числителей и всѣхъ знаменателей. Произведеніемъ дробей будетъ дробь, числителемъ которой служитъ произведеніе всѣхъ числителей, а знаменателемъ — произведеніе всѣхъ знаменателей заданныхъ дробей.

Само собою разумѣется, что въ результатѣ можно сдѣлать всѣ сокращенія, которыя онъ допускаетъ. Умноженіе цѣлыхъ чиселъ содержится, какъ частный случай, въ этомъ общемъ правилѣ умноженія дробей. Что сочетательный и перемѣстительный законы остаются въ силѣ и при умноженіи дробей, вытекаетъ непосредственно изъ опредѣленія, потому что этимъ законамъ слѣдуютъ въ отдѣльности произведенія, служащія числителемъ и знаменателемъ произведенія дробей.

Точно такъ же и относительно знака произведенія остается въ силѣ то же правило, что и при умноженіи цѣлыхъ чиселъ: произведеніе будетъ положительнымъ или отрицательнымъ, смотря по тому, имѣется ли четное или нечетное число отрицательныхъ сомножителей.

И здѣсь произведеніе равно нулю въ томъ и только въ томъ случаѣ, если одинъ изъ сомножителей равенъ нулю [7]).

Но относительно измѣненія абсолютной величины произведеніе дробей слѣдуетъ не тѣмъ законамъ, что произведеніе цѣлыхъ чиселъ. Именно:

Произведеніе $\alpha\beta$ по абсолютной величинѣ больше или меньше, нежели α, смотря по тому, представляетъ ли собой β правильную или неправильную дробь. Въ самомъ дѣлѣ, если мы положимъ $\alpha = \frac{a}{a_1}$, $\beta = \frac{b}{b_1}$, то $\alpha\beta$ меньше или больше, нежели α, смотря по тому, которое изъ двухъ неравенствъ имѣетъ мѣсто (§ 18, 3):

$$aa_1b < aa_1b_1 \quad \text{или} \quad aa_1b > aa_1b_1;$$

если a и a_1 суть положительныя числа, то это сводится къ тому, будетъ ли $b < b_1$ или $b > b_1$, т. е. будетъ ли β правильная или неправильная дробь.

3. Если α, β, γ суть три дроби, изъ которыхъ послѣдняя отлична отъ нуля, то равенство $\alpha\gamma = \beta\gamma$ будетъ имѣть мѣсто только въ томъ случаѣ, если $\alpha = \beta$. Это слѣдуетъ изъ критерія, содержащагося въ п. 3 § 18-го. Въ самомъ дѣлѣ, пусть $\alpha = \frac{a}{a_1}$, $\beta = \frac{b}{b_1}$, $\gamma = \frac{c}{c_1}$; если $\alpha\gamma = \beta\gamma$, то

$$acb_1c_1 = bca_1c_1;$$

а такъ какъ числа c и c_1 отличны отъ нуля, то отсюда, въ силу послѣдняго предложенія § 9-го, слѣдуетъ, что

$$ab_1 = ba_1,$$

т. е. $\alpha = \beta$.

[7]) Опредѣленіе § 18, 2 вводитъ также дроби вида $\frac{0}{n}$; согласно же опредѣленію § 18, 4, дробь $\frac{0}{1} = 0$; а такъ какъ $\frac{0}{n} = \frac{0 \cdot n}{1 \cdot n}$, то дробь $\frac{0}{n}$ равна нулю при всякомъ знаменателѣ. Легко показать, что произведеніе нѣсколькихъ дробей обращается въ нуль только въ томъ случаѣ, если одинъ изъ сомножителей имѣетъ видъ $\frac{0}{n}$.

4. Дѣленіе. Въ числовомъ ряду, который мы такимъ образомъ получили, задача о дѣленіи можетъ быть поставлена и рѣшена во всей ея общности.

Пусть α и β будутъ два произвольныхъ раціональныхъ числа. Требуется найти такое число ξ, которое нужно умножить на β, чтобы получить число α, т. е. которое удовлетворяло бы равенству

$$\alpha = \xi\beta. \tag{2}$$

Эта задача, очевидно, не имѣетъ вовсе рѣшенія, если $\beta = 0$, а α не равно нулю, потому что при $\beta = 0$ произведеніе $\xi\beta = 0$, каково бы ни было значеніе множителя ξ. Если $\alpha = 0$ и $\beta = 0$, то ξ можетъ имѣть совершенно произвольное значеніе, ибо каждое число удовлетворяетъ требованію. Если же β отлично отъ нуля, то задача можетъ имѣть не болѣе одного рѣшенія. Дѣйствительно, если бы существовало два числа ξ и ξ', удовлетворяющихъ требованію, то должно было бы имѣть мѣсто равенство $\xi\beta = \xi'\beta$; согласно п. 3, это возможно только въ томъ случаѣ, когда $\xi = \xi'$.

Итакъ, дѣло сводится къ тому, чтобы найти одно число, удовлетворяющее требованію (2). Если $\alpha = \dfrac{a}{a_1}$ и $\beta = \dfrac{b}{b_1}$, то мы получимъ такое число, полагая

$$\xi = \frac{ab_1}{ba_1}, \tag{3}$$

ибо въ такомъ случаѣ

$$\xi\beta = \frac{ab_1b}{ba_1b_1} = \frac{a}{a_1} = \alpha.$$

Нахожденіе числа ξ мы будемъ называть дѣленіемъ числа α на число β; число α мы будемъ называть дѣлимымъ, β — дѣлителемъ, ξ — частнымъ.

Если α и β суть цѣлыя числа, то ξ есть дробь, которая сводится къ цѣлому числу, когда α кратно β. Такимъ образомъ, задача о дѣленіи двухъ цѣлыхъ чиселъ безъ остатка можетъ быть, вообще говоря, разрѣшена только при помощи дробей и содержится, какъ частный случай, въ задачѣ о дѣленіи дробей.

Частное отъ дѣленія двухъ дробей мы будемъ также изображать такъ:

$$\alpha : \beta,\ \alpha/\beta,\ \frac{\alpha}{\beta} = \frac{ab_1}{ba_1} \tag{4}$$

(α, дѣленное на β); вмѣстѣ съ тѣмъ мы выразимъ полученный нами результатъ слѣдующимъ правиломъ:

Чтобы раздѣлить одну дробь на другую, нужно помножить числителя дѣлимаго на знаменателя дѣлителя и знаменателя дѣлимаго на числителя дѣлителя; первое произведенiе будетъ числителемъ частнаго, второе — его знаменателемъ.

Въ выраженiи (4) число α также называютъ часто числителемъ, а β — знаменателемъ дроби α/β.

Дробь $1/\alpha$ называется обратной по отношенiю къ α; она получается путемъ обращенiя числа α, т. е. путемъ замѣщенiя числителя и знаменателя другъ другомъ.

Дѣленiе можетъ быть приведено къ умноженiю при помощи слѣдующаго правила:

5. Чтобы раздѣлить дробь α на дробь β, можно помножить дѣлимое на обращеннаго дѣлителя.

Вслѣдствiе того, что равенство (2) при $\beta = 0$ либо вовсе не имѣетъ рѣшенiя, либо имѣетъ ихъ безчисленное множество, изъ ариѳметики дѣленiе на нуль вовсе исключено. Однако, въ нѣкоторыхъ отдѣлахъ высшаго анализа бываетъ цѣлесообразно приписывать извѣстное значенiе также символу $1/0$.

6. Возвышенiе въ степень. Когда понятiе объ умноженiи дробей установлено, то возвышенiе въ степень опредѣляется само собой. Если α есть дробь, а n — натуральное число, то α^n представляетъ собой произведенiе n сомножителей, равныхъ α. Число α называется основанiемъ, n — показателемъ, α^n — n-ой степенью числа α. Всѣ эти понятiя опредѣлены только для цѣлыхъ и положительныхъ значенiй числа n. Мы обобщимъ, однако, это понятiе; именно — мы распространимъ его на тотъ случай, когда показатель равенъ нулю или имѣетъ отрицательное значенiе. Мы достигнемъ этого лучше всего тѣмъ, что распространимъ на всѣ эти случаи основное равенство

$$\alpha^m \cdot \alpha^n = \alpha^{m+n}, \tag{5}$$

которое для цѣлыхъ положительныхъ показателей вытекаетъ непосредственно изъ опредѣленiя [8]).

Если мы, сообразно этому, положимъ въ равенствѣ (5) $n = 0$, то получимъ:

$$\alpha^m \cdot \alpha^0 = \alpha^m;$$

[8]) Иными словами, мы постараемся опредѣлить степень съ отрицательнымъ или нулевымъ показателемъ такимъ образомъ, чтобы равенство (5) осталось въ силѣ при всѣхъ цѣлыхъ значенiяхъ показателя.

если поэтому a, а, стало быть, и a^m, отлично отъ нуля, что мы и будемъ теперь предполагать, то

$$a^0 = 1. \tag{6}$$

Далѣе, если мы положимъ въ равенствѣ (5) $n = -m$, то получимъ:

$$a^m \cdot a^{-m} = a^0 = 1,$$

такъ что

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}. \tag{7}$$

7. Итакъ, если мы хотимъ, чтобы соотношенiе (5) сохранило свою силу, то мы должны подъ a^0 разумѣть 1, а подъ a^{-m} — число, обратное a^m.

Равенство $1^m = 1$ остается справедливымъ и при этомъ обобщенiи.

8. Если a есть неправильная дробь, то степень a^n растетъ вмѣстѣ съ показателемъ n. Это вытекаетъ непосредственно изъ опредѣленiя степени, какъ произведенiя равныхъ сомножителей. Мы имѣемъ, однако, теперь возможность установить ближе ходъ этого возрастанiя.

Если p есть цѣлое положительное число, большее, нежели 1, то a^p больше, нежели a, и мы можемъ вставить между a и a^p число γ такимъ образомъ чтобы имѣло мѣсто соотношенiе:

$$a^p > \gamma > a. \tag{8}$$

Умножая всѣ члены этихъ неравенствъ на a, мы получимъ:

$$a^{p+1} > \gamma a = \gamma + \gamma(a-1) > \gamma + a(a-1) > a. \tag{9}$$

Если мы повторимъ то же разсужденiе, замѣняя въ соотношенiи (8) p черезъ $p+1$ и, на основанiи неравенствъ (9), γ черезъ $\gamma + a(a-1)$, то мы получимъ:

$$a^{p+2} > \gamma + 2a(a-1);\ ^{9})$$

отсюда помощью индукцiи заключаемъ, что для каждаго цѣлаго положительнаго числа n

$$a^{p+n} > \gamma + na(a-1). \tag{10}$$

Такъ какъ $a(a-1)$ есть положительное число, то число n можно выбрать настолько большимъ, чтобы $\gamma + na(a-1)$ было больше любого

---

[9]) Подробнѣе: умножая всѣ члены неравенства $a^{p+1} > \gamma + a(a-1)$ на a, получимъ:

$$a^{p+2} > a\gamma + a^2(a-1), \text{ откуда } a^{p+2} > a\gamma + a(a-1) > \gamma + a(a-1) + a(a-1),$$

т. е.

$$a^{p+2} > \gamma + 2a(a-1).$$

заданнаго числа c. Мы приходимъ, такимъ образомъ, къ слѣдующему выводу:

Если $a > 1$ и c есть произвольно заданное положительное число, то $a^n > c$, коль скоро n превышаетъ нѣкоторое достаточно большое число m. Это представляетъ собой обобщенiе предложенiя § 11, 5.

Примѣняя это предложенiе къ числу $1/a$, гдѣ $a < 1$, мы легко заключаемъ отсюда, что a^n становится меньше любого заданнаго положительнаго числа c, если показатель n принимаетъ достаточно большiя значенiя.

Возвратимся къ тому случаю, когда $a > 1$. Изъ соотношенiя (10) слѣдуетъ, что

$$a^{p+n} > na(a-1);$$

поэтому

$$a^n > na(a-1)a^{-p}.$$

Если мы здѣсь положимъ для сокращенiя $a(a-1)a^{-p} = \varDelta$, то получимъ:

$$a^n > \varDelta n, \tag{11}$$

гдѣ $\varDelta$ представляетъ собой положительное число, зависящее отъ a, но не зависящее отъ n. Эта формула имѣетъ мѣсто для всякаго цѣлаго положительнаго числа n.

Если $k+1$ есть произвольно заданное цѣлое положительное число, то, какъ бы ни было велико цѣлое число m, всегда можно найти два послѣдовательныхъ кратныхъ числа $k+1$, между которыми лежитъ число m, такъ что

$$(k+1)n \leqq m < (k+1)(n+1). \tag{12}$$

Возводя теперь обѣ части неравенства (11) въ $(k+1)$-ую степень и принимая во вниманiе, что $a^m \geqq a^{(k+1)n}$, получимъ:

$$a^m > \varDelta^{k+1} n^{k+1}. \tag{13}$$

Далѣе, изъ соотношенiя (12) находимъ:

$$n > \frac{m-k-1}{k+1} = \frac{m}{k+1}\left(1 - \frac{k+1}{m}\right).$$

Въ случаѣ, когда $m > 2(k+1)$ и, стало быть, $1 - \dfrac{k+1}{m} > \dfrac{1}{2}$, предыдущее неравенство даетъ:

$$n > \frac{m}{2(k+1)};$$

поэтому, согласно неравенству (13),

$$a^m > m^k \cdot \frac{\Delta^{k+1} m}{[2(k+1)]^{k+1}}. \tag{14}$$

Съ другой стороны, если c есть произвольно заданное число, то мы можемъ взять число m настолько большимъ, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{\Delta^{k+1} m}{[2(k+1)]^{k+1}} > c;$$

тогда

$$a^m > cm^k. \tag{15}$$

Такимъ образомъ, доказано слѣдующее предложенiе:

Если $a > 1$, а k есть произвольно заданное натуральное число, и, наконецъ, c представляетъ собою сколь угодно большое положительное число, то $a^m > cm^k$, коль скоро m превосходитъ нѣкоторое достаточно большое число.

Это предложенiе выражаютъ еще такъ: a^m возрастаетъ быстрѣе, нежели сколь угодно высокая степень числа m.

§ 20. Десятичныя дроби.

1. При нашей индусской системѣ счисленiя каждое натуральное число можно изображать сколь угодно большимъ количествомъ цифръ; для этого достаточно приписать съ лѣвой стороны надлежащее число нулей. Такимъ образомъ, 03 означаетъ то же, что 3, а 000 650 — то же, что 650. Но эти нули съ лѣвой стороны излишни, и потому ихъ не пишутъ.

Разсмотримъ теперь дроби, знаменателями которыхъ служатъ степени числа 10; такiя дроби имѣютъ видъ

$$a = A \cdot 10^{-n}, \tag{1}$$

гдѣ A есть натуральное число. Въ виду сдѣланнаго выше замѣчанiя такого рода дроби можно опредѣленнымъ образомъ обозначать безъ знаменателя, пользуясь только значенiемъ мѣста, занимаемаго цифрой.

Съ этой цѣлью мы пишемъ число A такъ, чтобы оно имѣло болѣе n цифръ, — скажемъ, $n + m + 1$ цифръ, гдѣ $m \geqq 0$ [10]). Цифру высшаго

[10]) Если число A нормально изображается болѣе, нежели n цифрами, то мы сохраняемъ обычное изображенiе; если же число A въ обычномъ изображенiи имѣетъ меньше n цифръ или ровно n цифръ, то мы его дополняемъ нулями съ лѣвой стороны такъ, чтобы получить $n+1$ цифръ. Число m при этомъ условiи всегда имѣетъ опредѣленное значенiе; но можно сдѣлать m больше, если приписать съ лѣвой стороны еще лишнiе нули.

разряда мы обозначимъ черезъ a_m, а затѣмъ слѣдующія цифры обозначимъ тою же буквою съ послѣдовательно убывающими индексами, такъ что нѣкоторые изъ этихъ индексовъ будутъ отрицательны:

$$A = a_m a_{m-1} a_{m-2} \cdots a_1 a_0 a_{-1} a_{-2} \cdots a_{-n};$$

буквы a имѣютъ, конечно, значенія, принадлежащія ряду 0, 1, . . ., 9. Въ случаѣ надобности въ началѣ должно быть написано надлежащее число нулей. Теперь положимъ

$$a = A \cdot 10^{-n} = a_m a_{m-1} \cdots a_1 a_0,\ a_{-1} a_{-2} \cdots a_{-n}, \qquad (2)$$

приписывая этому выраженію значеніе

$$a_m 10^m + a_{m-1} 10^{m-1} + \cdots + a_1 10 + a_0 + a_{-1} 10^{-1} + \\ + a_{-2} 10^{-2} + \cdots + a_{-n} 10^{-n}.$$

Такимъ образомъ, запятая указываетъ, гдѣ начинаются отрицательныя степени основанія 10 *).

Если $A < 10^n$, т. е. если a есть правильная дробь, то всѣ цифры, стоящія до запятой, должны быть нулями. Въ этомъ случаѣ передъ запятой достаточно писать только одинъ нуль. Можно было бы даже опустить и этотъ нуль, но было бы очень непривычно, а иногда даже неясно, начинать число просто запятой. Нули же, стоящіе непосредственно послѣ запятой, если таковые имѣются, имѣютъ существенное значеніе, — точно такъ же, какъ нули, стоящіе въ концѣ цѣлаго числа. Напротивъ того, послѣ послѣдней цифры можно приписать сколько угодно нулей. Обыкновенно нули, стоящіе въ концѣ десятичной дроби послѣ послѣдней значащей цифры, опускаются.

Если мы будемъ пользоваться для обозначенія числа въ десятичной системѣ общимъ символомъ a съ послѣдовательными индексами, т. е. будетъ писать

$$a_{m-1} a_{m-2} \cdots a_n,$$

гдѣ m и n могутъ имѣть положительныя, отрицательныя или нулевыя цѣлыя значенія ($m > n$), а самые символы $a_{m-1}, a_{m-2}, \ldots$ означаютъ цифры (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), то мы можемъ вовсе не ставить зяпятой; значеніе цифры вполнѣ опредѣляется индексомъ.

Дробь, имѣющая знаменателемъ степень десяти и написанная въ формѣ (2), называется **десятичною дробью**. Въ отличіе отъ десятичныхъ дробей остальныя называются **простыми** дробями.

---

*) Этимъ обозначеніемъ десятичныхъ дробей въ первый разъ сталъ пользоваться, повидимому, Jobst Bürgi; онъ, имѣлъ, правда, предшественниковъ, но вполнѣ правильная постановка этого вопроса принадлежитъ ему.

2. Дѣйствія надъ десятичными дробями совершаются тѣми же способами, что и надъ цѣлыми числами.

При сложеніи и при вычитаніи нужно писать числа такимъ образомъ, чтобы цифры, выражающія одни и тѣ же разряды, стояли одни подъ другими, т. е. чтобы запятыя во всѣхъ числахъ стояли одна подъ другой. Если при этомъ приписать нули такъ, чтобы всѣ числа имѣли послѣ запятой одинаковое число цифръ, то вычисленіе можно вести такъ, какъ будто бы запятой и вовсе не было; въ результатѣ нужно только поставить запятую на томъ же мѣстѣ, на которомъ она стоитъ въ данныхъ числахъ.

3. Для того, чтобы умножить десятичную дробь на 10, запятую перемѣщаютъ на одинъ знакъ вправо; при умноженіи же на 10^h ее перемѣщаютъ на h знаковъ вправо. При дѣленіи десятичной дроби на 10^h запятую перемѣщаютъ на h знаковъ влѣво. Эти операціи всегда могутъ быть выполнены; иногда только бываетъ нужно приписать справа или слѣва надлежащее число нулей.

4. Если нужно перемножить двѣ десятичныя дроби α и β, изъ которыхъ первая имѣетъ μ, а вторая ν десятичныхъ знаковъ послѣ запятой, то опускаютъ прежде всего обѣ запятыя, т. е. перемножаютъ числа $10^\mu \cdot \alpha$ и $10^\nu \cdot \beta$. Произведеніе равно поэтому $10^{\mu+\nu}\alpha\beta$; чтобы получить $\alpha\beta$, остается раздѣлить полученное число на $10^{\mu+\nu}$, т. е. отдѣлить въ результатѣ съ правой стороны $\mu+\nu$ знаковъ съ помощью запятой. Такимъ образомъ, умноженіе десятичныхъ дробей сводится къ умноженію цѣлыхъ чиселъ.

§ 21. Приближенныя значенія десятичныхъ дробей.

1. Значеніе цифры въ десятичной дроби становится тѣмъ меньше, чѣмъ далѣе эта цифра отстоитъ отъ запятой по направленію слѣва направо. Часто случается, что при числовыхъ заданіяхъ или вычисленіяхъ цифры, занимающія послѣднія мѣста, начиная съ нѣкоторой, вовсе не принимаются во вниманіе („опускаются“); иногда это обусловливается тѣмъ, что дальнѣйшія цифры вовсе неизвѣстны, иногда же эти цифры не имѣютъ значенія въ виду самаго характера задачи. Дробь, которую мы получаемъ, опуская послѣдніе десятичные знаки въ десятичной дроби, называется *приближеннымъ ея значеніемъ*.

Пріемъ этотъ находитъ себѣ оправданіе въ слѣдующемъ предложеніи:

Написанное въ десятичной системѣ число

$$\varrho = a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_k \tag{1}$$

(гдѣ какъ n, такъ и k могутъ имѣть также отрицательныя значенія, но $n > k$ (§ 20, 1)) всегда меньше, нежели 10^n [11]).

[11]) Здѣсь указатель $n-1$ при первой цифрѣ указываетъ, что число начинается n-ымъ разрядомъ; если это число цѣлое, то $k=0$; если же оно имѣетъ деся-

Въ самомъ дѣлѣ, если мы замѣнимъ всѣ цифры $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_k$ девятками, то мы это число увеличимъ или, по крайней мѣрѣ, не уменьшимъ, такъ что

$$\varrho \leqq 9 \cdot 10^k + 9 \cdot 10^{k+1} + \cdots + 9 \cdot 10^{n-1}.$$

Если мы придадимъ къ правой части 10^k, т. е. увеличимъ послѣднюю цифру единицей, то мы получимъ:

$$\begin{aligned} 9 \cdot 10^k \quad + 10^k \quad &= 10^{k+1}, \\ 9 \cdot 10^{k+1} + 10^{k+1} &= 10^{k+2}, \\ \cdots\cdots\cdots & \\ 9 \cdot 10^{n-1} + 10^{n-1} &= 10^n. \end{aligned}$$

Складывая эти равенства и опуская съ обѣихъ сторонъ числа 10^{k+1}, $10^{k+2}, \ldots, 10^{n-1}$, получимъ:

$$\varrho + 10^k \leqq 10^n;$$

слѣдовательно, и подавно

$$\varrho < 10^n, \tag{2}$$

что и требовалось доказать.

Отсюда слѣдуетъ:

Значеніе написаннаго въ десятичной системѣ числа a

$$a = a_m a_{m-1} \cdots a_n a_{n-1} \cdots a_k$$

больше, нежели

$$A = a_m a_{m-1} \cdots a_n,$$

и меньше, нежели

$$A' = a_m a_{m-1} \cdots (a_n + 1) = A + 10^n \text{ [12]}).$$

Если $a_n = 9$, то здѣсь, конечно, нужно вмѣсто $a_{n+1}[a_n + 1]$ написать $[a_{n+1} + 1]\,0$.

Такимъ образомъ, ошибка, которую мы дѣлаемъ, опуская цифры, стоящія послѣ a_n, меньше, нежели 10^n.

Вообще говоря, замѣняя десятичную дробь ея приближеннымъ значеніемъ, всегда стараются сдѣлать абсолютную величину ошибки воз-

---

тичные знаки, то k имѣетъ отрицательное значеніе; если, наконецъ, число представляетъ собой правильную дробь, т. е. начинается десятичными знаками, то не только k, но и n имѣетъ отрицательное значеніе.

[12]) Ибо $a = a_m 10^m + a_{m-1} 10^{m-1} + \cdots + a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_k 10^k$, но, какъ выше доказано, $a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_k 10^k \leqq 10^n$, а потому $a \leqq a_m 10^m + a_{m-1} 10^{m-1} + \cdots + a_n 10^n + 10^n = a_m 10^m + \cdots + (a_n + 1) 10^n = A'$.

можно меньшей. Сохраняя одно и то же число десятичныхъ знаковъ, мы можемъ замѣнить число a либо числомъ A, либо числомъ A'. Такъ какъ

$$a = A + \varrho = A' - (10^n - \varrho),$$

гдѣ ϱ имѣетъ прежнее значенie (1), то ошибка въ первомъ случаѣ равна ϱ, а во второмъ случаѣ равна $\varrho' = 10^n - \varrho$ (по абсолютной величинѣ). Послѣдняя ошибка меньше первой, если $\varrho > 10^n - \varrho$, т. е. если $2\varrho > 10^n$. Это имѣетъ мѣсто, если первая отбрасываемая цифра $a_{n-1} = 5, 6, 7, 8$ или 9; напротивъ, $\varrho < 10^n - \varrho$, если a_{n-1} равно 0, 1, 2, 3, 4. Единственное исключенie имѣетъ мѣсто, если $a_{n-1} = 5$, а всѣ слѣдующiя цифры равны 0; въ этомъ случаѣ $\varrho = \varrho'$, и оба приближенiя A и A' даютъ ту же ошибку. Мы получаемъ отсюда слѣдующее правило:

Опуская въ десятичной дроби для полученiя приближеннаго ея значенiя послѣднiе десятичные знаки, слѣдуетъ увеличить послѣднюю удерживаемую цифру на единнцу, если первая изъ отбрасываемыхъ цифръ больше 4-хъ.

2. При производствѣ ариѳметическихъ дѣйствiй надъ приближенными значенiями десятичныхъ дробей опущенные десятичные знаки могутъ иногда оказать влiянiе на тѣ знаки, которые мы желаемъ сохранить. Если, напримѣръ, мы складываемъ k приближенныхъ дробей, составленныхъ по указанному выше правилу, то послѣднiй десятичный знакъ, который мы сохраняемъ, можетъ оказаться maximum на $k/2$ единицъ больше или меньше истиннаго своего значенiя. Но этого наибольшаго значенiя ошибка достигаетъ только въ томъ случаѣ, если ошибки всѣхъ приближенiй имѣютъ одинъ и тотъ же знакъ и всѣ достигаютъ наибольшаго значенiя. Если же намъ даны только приближенiя, то о вѣроятности той или другой ошибки можно судить по правиламъ, указываемымъ исчисленiемъ вѣроятностей. Большiя ошибки оказываются при этомъ менѣе вѣроятными, чѣмъ меньшiя.

Если мы имѣемъ еще какiя-нибудь свѣдѣнiя относительно ошибки, если мы знаемъ, напримѣръ, что имѣется число съ положительной ошибкой или число съ отрицательной ошибкой, то предѣлы возможной ошибки результата еще болѣе сближаются.

3. Если нужно перемножить двѣ приближенныя десятичныя дроби, то обыкновенный прieмъ умноженiя въ примѣненiи къ низшимъ десятичнымъ знакамъ даетъ совершенно безполезный результатъ и представляетъ собой до нѣкоторой степени безплодную работу. Въ этихъ случаяхъ пользуются поэтому такъ называемымъ сокращеннымъ умноженiемъ.

Соображенiя, на которыхъ этотъ прieмъ основанъ, лучше всего уясняются на примѣрѣ.

Положимъ, что намъ нужно перемножить два четырехзначныхъ числа

$$\alpha = a_3 a_2 a_1 a_0,$$
$$\beta = b_3 b_2 b_1 b_0.$$

Если мы начнемъ умноженіе съ высшаго разряда множителя β, то вычисленіе, согласно обычному способу умноженія, расположится слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{ccccccc}
a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & & & \\
b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & & & \\
\hline
a_3 b_3 & a_2 b_3 & a_1 b_3 & a_0 b_3 & * & * & * \\
 & a_3 b_2 & a_2 b_2 & a_1 b_2 & a_0 b_2 & * & * \\
 & & a_3 b_1 & a_2 b_1 & a_1 b_1 & a_0 b_1 & * \\
 & & & a_3 b_0 & a_2 b_0 & a_1 b_0 & a_0 b_0 \\
\hline
c_6 & c_5 & c_4 & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 .
\end{array}$$

При этомъ, естественно, какъ въ произведеніяхъ $a_h b_k$, такъ и въ суммахъ c_k, превосходящихъ число 9, десятки должны быть присоединены къ слѣдующему разряду.

Однако, на тѣхъ мѣстахъ, на которыхъ въ нашей схемѣ поставлены звѣздочки, должны были стоять не нули, а неизвѣстныя цифры. Такимъ образомъ цифры c_2, c_1, c_0 могутъ также оказаться ошибочными. При этомъ цифры по направленію отъ c_2 къ c_0 становятся все менѣе надежными. Ошибка въ числѣ c_2 можетъ въ неблагопріятномъ случаѣ, когда всѣ слагаемыя, изъ которыхъ оно получается, достигаютъ наибольшаго значенія, отразиться на цифрѣ c_4, можетъ даже дорасти до 3 единицъ этого разряда. Вслѣдствіе этого въ окончательномъ результатѣ цифра c_2 уже не проставляется, но отдѣльныя слагаемыя этого разряда оказывается нужнымъ вычислить для исправленія цифръ c_3 и c_4. Точно такъ же каждымъ свѣдѣніемъ, какое мы имѣемъ относительно цифръ, помѣченныхъ звѣздочками, можно воспользоваться для исправленія результата. Но умѣлое примѣненіе всѣхъ этихъ пріемовъ на практикѣ достигается только упражненіемъ *).

---

*) Lüroth. Vorlesungen über numerisches Rechnen. Leipzig, Teubner, 1900.

Полная теорія приближеннаго вычисленія довольно сложна. Введеніемъ въ этотъ вопросъ могутъ служить небольшія сочиненія:

В. Циммерманъ. Приближенныя вычисленія.

В. Ермаковъ. Приближенное вычисленіе. Кіевъ, 1905

§ 22. Работы Евклида, Діофанта и Фермата по теоріи чиселъ.

О свѣдѣніяхъ, которыми располагали греки до Евклида, мы знаемъ очень мало. Отъ пиѳагорейцевъ, въ ученіи которыхъ числа играли такую важную роль, сохранились нѣкоторыя довольно глубокія предложенія теоріи чиселъ, но безъ всякой систематической связи (см. Cantor, Geschichte der Mathematik, 2 Aufl., Bd. I, Kap. 6, S. 137). Только въ „Началахъ" Евклида мы находимъ теорію чиселъ, содержащую, по существу, почти все то, что и въ настоящее время составляетъ основу высшей ариѳметики. Свойственная Евклиду геометрическая форма изложенія обусловливается недостаткомъ простой системы обозначенія чиселъ, какой мы располагаемъ теперь въ видѣ индусскаго счисленія и буквеннаго знакоположенія, и при нашихъ привычкахъ затрудняетъ намъ пониманіе.

Если, напримѣръ, Евклидъ изображаетъ неопредѣленныя простыя числа (книга IX, 20) произвольно выбранными отрѣзками, то это рѣшительно ничего не вноситъ въ доказательство теоремы, о которой идетъ рѣчь, и обусловливается только потребностью имѣть передъ глазами конкретный образъ абстрактныхъ представленій

Мы здѣсь вкратцѣ приведемъ предложенія, къ которымъ, на нашъ взглядъ, приводится сущность дѣла.

Во II-ой книгѣ приведены основныя предложенія объ умноженіи многочленовъ (см. выше § 10). Здѣсь геометрическій методъ имѣетъ болѣе глубокое значеніе, нежели въ теоріи чиселъ: если разсматривать фигурирующія здѣсь величины дѣйствительно, какъ отрѣзки, и ихъ произведенія, какъ площади, то доказательство по существу аппеллируетъ къ геометрической интуиціи.

Въ VII-ой книгѣ даются опредѣленія (часто въ мало понятной формѣ), изъ которыхъ ясно вытекаетъ, что рѣчь идетъ только о цѣлыхъ положительныхъ (натуральныхъ) числахъ. Здѣсь даются опредѣленія четныхъ чиселъ, простыхъ чиселъ, взаимно простыхъ чиселъ, квадратныхъ чиселъ, кубическихъ чиселъ, совершенныхъ чиселъ. Изслѣдованіе начинается съ вопроса, который въ настоящее время всегда принимается за основу теоріи чиселъ, съ разысканія наибольшей общей мѣры двухъ чиселъ и распознаванія взаимно простыхъ чиселъ (VII, 1, 2, Евклидовъ алгориѳмъ. См. § 16).

Лишь значительно позже (VII, 34, 36) опредѣляется наименьшее кратное двухъ или нѣсколькихъ чиселъ и даются способы для его разысканія.

Далѣе (VII, 15, 16) приводится теорема о перемѣстимости множителей въ произведеніи, но доказывается она не при помощи площади прямоугольника, а посредствомъ мало наглядныхъ соображеній, основанныхъ на дѣленіи отрѣзковъ на единицы.

Особенно подчеркнуть нужно еще предложеніе VII, 30, заключающееся въ томъ, что произведеніе двухъ чиселъ можетъ дѣлиться на простое число только въ томъ случаѣ, если, по крайней мѣрѣ, одинъ изъ сомножителей дѣлится на это число. Это предложеніе, собственнно говоря, содержитъ наиболѣе глубокое опредѣленіе простыхъ чиселъ и въ послѣднее время въ теоріи общихъ алгебраическихъ чиселъ и алгебраическихъ функцій привело къ доказательству существованія такъ называемыхъ идеальныхъ простыхъ множителей. При помощи этого предложенія прежде всего доказывается, что каждое число либо представляетъ собой простое число, либо дѣлится на простое число. Отсюда непосредственно выводится, что каждое число однимъ и только однимъ способомъ разлагается на конечное число простыхъ множителей; впрочемъ, это предложеніе высказано у Евклида недостаточно опредѣленно. Только значительно ниже (IX, 14) приводится относящееся сюда же предложеніе, что произведеніе нѣсколькихъ простыхъ чиселъ не дѣлится ни на одно простое число, отличное отъ этихъ сомножителей. О степеняхъ простыхъ чиселъ здѣсь не упоминается.

Очень замѣчательно также доказательство предложенія, что число простыхъ чиселъ превышаетъ всякое число, которое можетъ быть указано, или, какъ мы теперь выражаемся, что число простыхъ чиселъ безконечно велико (IX, 20; § 17). Это доказательство отличается такой простотой и наглядностью, что врядъ ли оно можетъ быть замѣнено болѣе простымъ. Однако, это доказательство не можетъ быть распространено на болѣе глубокіе вопросы,—напримѣръ, о числѣ простыхъ чиселъ въ ариѳметической прогрессіи или о числѣ простыхъ множителей въ высшихъ числовыхъ корпусахъ. Поэтому пріобрѣтаетъ важное значеніе другое доказательство, гораздо болѣе трудное и опирающееся на свойства безконечныхъ рядовъ. Доказательство это принадлежитъ Эйлеру и позднѣе было развито Дирихле.

Заключеніе IX-ой книги, въ которой оканчивается изслѣдованіе цѣлыхъ чиселъ, содержитъ формулу суммы геометрической прогрессіи и основную теорему о совершенныхъ числахъ.

О жизни Евклида мы имѣемъ очень мало свѣдѣній; онъ жилъ въ царствованіе перваго Птоломея, который управлялъ Египтомъ отъ 324 до 285 г. до Р. Х., и училъ и писалъ въ Александріи. Его сочиненія, изъ которыхъ сравнительно многія дошли до насъ, во всѣ времена пользовались глубокимъ уваженіемъ, вышли въ многочисленныхъ изданіяхъ и переводахъ и вызвали очень обширную литературу. Изъ сочиненій, въ которыхъ можно найти болѣе подробныя свѣдѣнія по этому вопросу, мы приведемъ, кромѣ общихъ сочиненій по исторіи математики, указанныхъ на страницахъ 21 и 22, только слѣдующія:

M. Cantor. Euklid und sein Jahrhundert. Leipzig. 1867.

J. L. Heiberg. Literaturgeschichtliche Studien über Euklid. Leipzig. 1882.

M. Simon. Euklid und die sechs planimetrischen Bücher. Leipzig. 1901.

Изъ греческихъ авторовъ, писавшихъ послѣ Евклида по теоріи чиселъ, до Діофанта серьезное значеніе имѣетъ только Эратосѳенъ; изобрѣтенный имъ методъ разысканія простыхъ чиселъ былъ изложенъ выше на стр. 57 и 58.

Совершенно неожиданнымъ, безъ предшественниковъ, представляется появленіе Діофанта, личность и вся дѣятельность котораго кажутся до нѣкоторой степени загадочными. Нельзя сказать точно, назывался ли онъ Diophantus или Diophantes, хотя послѣднее начертаніе представляется болѣе вѣроятнымъ. Относительно времени его жизни можно съ увѣренностью указать только на промежутокъ отъ 180 г. до Р. Хр. до 370 г. послѣ Р. Хр., т. е. промежутокъ въ 550 лѣтъ; нѣкоторыя соображенія, болѣе или менѣе вѣроятныя, даютъ основаніе отнести расцвѣтъ его дѣятельности скорѣе къ концу этого періода. Онъ жилъ въ центрѣ современной греческой науки, въ Александріи, и писалъ по-гречески. Но странность его появленія приводитъ Ганкеля даже къ предположенію, что Діофантъ не былъ грекомъ, а варваромъ, и что онъ происходилъ изъ одного изъ тѣхъ племенъ, которыя около этого времени стали проникать въ греческій міръ; предположеніе это, однако, никакихъ положительныхъ данныхъ за себя не имѣетъ.

Огромное большинство задачъ, разработкой которыхъ занимался Діофантъ, относится къ категоріи, сохранившей и по настоящее время его имя — Діофантовы задачи; это задачи о разысканіи цѣлыхъ чиселъ, удовлетворяющихъ извѣстнаго рода уравненіямъ. Если Діофантъ иногда не ограничивается цѣлыми числами, а ищетъ раціональныя рѣшенія соотвѣтственныхъ уравненій, то въ этомъ нѣтъ принципіальной разницы, такъ какъ раціональное число представляетъ собой частное двухъ цѣлыхъ чиселъ [13]). Однако, самой простой изъ этихъ задачъ, рѣшенія неопредѣленнаго уравненія первой степени съ двумя неизвѣстными, которое излагается въ настоящее время въ элементарныхъ школахъ подъ названіемъ ученія объ уравненіяхъ Діофанта и приводится къ Евклидову алгориѳму, этой именно задачи въ сочиненіяхъ Діофанта нѣтъ.

Эту задачу и ея рѣшеніе мы находимъ въ Европѣ послѣ Діофанта впервые только у Баше (въ Китаѣ и Индіи она была разрѣшена раньше) въ его сочиненіи „Занятныя и пріятныя задачи въ области чиселъ“ *), а также въ его примѣчаніяхъ къ выпущенному имъ же первому печатному

---

[13]) И задача, такимъ образомъ, всегда сводится къ разысканію цѣлыхъ чиселъ.

*) Bachet de Méziriac. „Problèmes plaisants et délectables qui se font sur les nombres“. 1612, 2-ое изд. 1624. Вновь переиздана въ Парижѣ въ 1884 г. Claude Gaspard Bachet, Sieur de Méziriac, іезуитъ, былъ профессоромъ риторики въ Миланѣ, а позже членомъ французской Академіи въ Парижѣ. 1587—1638.

изданію Діофанта (1621). Я не раздѣляю той сдержанной оцѣнки, которую далъ ариѳметикѣ Діофанта Ганкель. Правда, въ задачахъ, поставленныхъ и разрѣшенныхъ Діофантомъ, нельзя найти внутренней связи, системы, или метода; но таковъ уже характеръ вопросовъ теоріи чиселъ, что они всегда кажутся произвольно поставленными и каждый изъ нихъ требуетъ своеобразнаго метода рѣшенія. „Эта вѣтвь математики представляетъ ту замѣчательную особенность, что здѣсь значительные успѣхи почти всегда были достигаемы попытками убѣдиться, что то или иное индуктивно найденное положеніе справедливо вообще; между тѣмъ во всѣхъ другихъ отрасляхъ анализа значительные результаты обыкновенно получались благодаря новымъ точкамъ зрѣнія, къ которымъ авторы рѣдко приходили путемъ попытокъ сконцентрировать отдѣльныя разрозненныя предложенія; новые горизонты чаще раскрывались благодаря сознанной необходимости, обнаружившейся при разработкѣ вопросовъ, недоступныхъ при прежнихъ методахъ изслѣдованія“ *).

Къ изслѣдованію внутренней связи ариѳметическихъ вопросовъ приступлено только въ послѣднее время. Именно, эта произвольность, эта непосредственность въ методахъ изслѣдованія въ области теоріи чиселъ, которая иной разъ затрудняетъ начинающаго, составляетъ для знатока дѣла неотразимую прелесть этой дисциплины, обаяніе которой его никогда не покидаетъ. Во всякомъ случаѣ можно сказать, что теорія чиселъ построена на Діофантѣ; его книга во всѣ времена занимала наиболѣе талантливые умы.

Наиболѣе выдающійся французскій алгебраистъ XVI столѣтія Віета **) въ своемъ пятитомномъ „Zetetica“ собралъ рядъ задачъ, частью заимствованныхъ у Діофанта, частью составленныхъ по его образцамъ; такой же характеръ имѣетъ и книга Баше, о которой мы упоминали выше. Но самымъ крупнымъ изъ всѣхъ этихъ авторовъ по теоріи чиселъ, примыкающихъ къ Діофанту, является Ферматъ ***). Важнѣйшія свои открытія въ области теоріи чиселъ онъ излагалъ въ письмахъ къ различнымъ ученымъ, а чаще въ видѣ примѣчаній на поляхъ сочиненій Діофанта, изданныхъ Баше. Послѣ его смерти всѣ эти сообщенія и примѣчанія были опубликованы его сыномъ въ новомъ изданіи Діофанта ****).

*) Dirichlet. „Untersuchungen über die Theorie der quadratischen Formen“.

**) François Vieta, 1560—1603 г.

***) Было бы правильнѣе называть его Ферма, но у насъ настолько установилось названіе „теорема Фермата“, что мы рѣшили сохранить эту неправильность имени.

Pierre Fermat родился въ 1601 г., умеръ въ 1665 г., былъ не математикомъ по спеціальности, а юристомъ (совѣтникомъ парламента въ Тулузѣ). Сочиненія Фермата въ послѣднее время переизданы П. Таннери и Ш. Генри (P. Tannery, Ch. Henry, Paris, 1891).

****) Эти примѣчанія приведены въ нѣмецкомъ переводѣ Діофанта, принадлежащемъ Вертгейму (Wertheim), также на нѣмецкомъ языкѣ.

Предложеніе, преимущественно извѣстное подъ названіемъ „теоремы Ферматa“, согласно которому разность $a^n - a$ всегда дѣлится на n, если a есть произвольное цѣлое, а n простое число, и которое въ обобщеніи пріобрѣло величайшее значеніе для теоріи чиселъ, появилось въ первый разъ въ письмѣ къ Френиклю (Frénicle), относящемся къ 1640 г. Доказательство этого предложенія не представляетъ затрудненій; но съ другими теоремами, высказанными Ферматомъ, дѣло обстоитъ иначе.

Въ качествѣ примѣра можно указать предложеніе, которое Кронекеръ назвалъ „великой теоремой Ферматa“, предложеніе, интересное не столько по своему содержанію, сколько по доказательству. Во второй книгѣ (задача 8, 3) Діофантъ изслѣдуетъ задачу о разложеніи полнаго квадрата на сумму двухъ другихъ квадратовъ. По этому поводу Ферматъ замѣчаетъ:

„Между тѣмъ совершенно невозможно разложить полный кубъ на сумму двухъ кубовъ, четвертую степень на сумму двухъ четвертыхъ степеней, вообще какую-либо степень на сумму двухъ степеней съ тѣмъ же показателемъ. Я нашелъ поистинѣ удивительное доказательство этого предложенія, но здѣсь (въ книгѣ, въ которую онъ записывалъ свои примѣчанія) слишкомъ мало мѣста, чтобы его помѣстить“.

Никакихъ другихъ указаній относительно доказательства этого предложенія у Фермата не найдено, а наиболѣе выдающимся изслѣдователямъ не удалось вновь его открыть. Для третьей и четвертой степеней предложеніе доказано Эйлеромъ, для пятой—Дирихле. Дальше идетъ доказательство Куммера, которое уже охватываетъ обширную категорію показателей; однако, Куммеръ, пользуется наиболѣе глубокими и трудными средствами анализа, которыми Ферматъ во всякомъ случаѣ еще не владѣлъ.

Иначе обстоитъ дѣло съ другой теоремой, которую Ферматъ считалъ правильной, именно, что увеличенная единицей степень числа 2, показателемъ которой также служитъ степень числа 2, есть простое число. Но здѣсь Ферматъ самъ заявляетъ, что ему еще не удалось дать исчерпывающее доказательство этого предложенія. Если бы это предложеніе было правильнымъ, то оно давало бы возможность находить сколь угодно большія простыя числа, для чего мы иныхъ средствъ въ настоящее время не имѣемъ. Однако, какъ показалъ Эйлеръ, предложеніе это неправильно: уже $2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297$ разлагается на множителей, именно дѣлится на 641.

ГЛАВА IV.

Ирраціональныя числа.

§ 23. Извлеченіе квадратныхъ корней.

1. Среди чиселъ натуральнаго ряда есть такія, которыя представляютъ собою вторыя степени (квадраты) другихъ чиселъ того же ряда; напримѣръ:

$$\begin{array}{l} 1 = 1^2,\quad 4 = 2^2,\quad 9 = 3^2,\quad 16 = 4^2,\quad 25 = 5^2, \\ 36 = 6^2,\ 49 = 7^2,\ 64 = 8^2,\quad 81 = 9^2,\ 100 = 10^2. \end{array} \qquad (1)$$

Эти числа 1, 4, 9, 16, ... называются **полными квадратами**, такъ какъ они являются вторыми степенями чиселъ 1, 2, 3, 4, ...; эти послѣднія называются **корнями** (точнѣе: **квадратными корнями**) предыдущихъ. Это взаимоотношеніе изображается такъ:

$$1 = \sqrt{1},\quad 2 = \sqrt{4},\quad 3 = \sqrt{9},\quad 4 = \sqrt{16},\ \ldots$$

Число n^2 есть n-ый полный квадратъ; разность между n-мъ и $(n-1)$-мъ квадратами равна, слѣдовательно, числу $n^2 - (n-1)^2$, или $2n - 1$, т. е. n-ому нечетному числу.

2. Задача. Дано цѣлое число a, написанное въ десятичной системѣ; нужно узнать, представляетъ ли оно собой полный квадратъ или нѣтъ; въ первомъ случаѣ нужно найти его корень, во второмъ — опредѣлить наибольшій полный квадратъ, содержащійся въ числѣ a, и найти корень изъ этого послѣдняго числа.

Вычисленіе, помощью котораго рѣшается предложенная задача, называется **извлеченіемъ квадратнаго корня** и обозначается знакомъ $\sqrt{}$, который ставится впереди числа a. Если послѣднее не превосходитъ 100, то задача можетъ быть рѣшена непосредственно помощью таблицы (1).

Предположимъ, что задача наша рѣшена для какого-нибудь числа a, т. е. найдено число α, удовлетворяющее условію

$$\alpha^2 \leqq a < (\alpha + 1)^2. \tag{2}$$

Мы покажемъ, какимъ образомъ, пользуясь этимъ, можно рѣшить ту же задачу для другого числа a_1, связаннаго съ числомъ a равенствомъ:

$$a_1 = 100a + 10b + c, \tag{3}$$

гдѣ буквы b и c обозначаютъ нѣкоторыя цифры. Число a_1 имѣетъ двумя цифрами больше, нежели число a, и получается, если приписать къ послѣднему двѣ цифры bc. Мы положимъ

$$\alpha_1 = 10\alpha + \beta \tag{4}$$

и опредѣлимъ число β, удовлетворяющее условію:

$$(10\alpha + \beta)^2 \leqq a_1 < (10\alpha + \beta + 1)^2. \tag{5}$$

Докажемъ, что буква β обозначаетъ нѣкоторую цифру. Въ самомъ дѣлѣ, если бы было $\beta \geqq 10$, то, согласно условію (5), мы имѣли бы:

$$100(\alpha + 1)^2 \leqq (10\alpha + \beta)^2 \leqq 100a + 10b + c\ ^{1)},$$

или

$$(\alpha + 1)^2 \leqq a + b10^{-1} + c10^{-2},$$

а въ виду того, что $(\alpha + 1)^2$ есть цѣлое число и, кромѣ того, $b10^{-1} + c10^{-2}$ меньше единицы, мы пришли бы къ заключенію, что

$$(\alpha + 1)^2 \leqq a;$$

но это противорѣчитъ условію (2), согласно которому $(\alpha + 1)^2 > a$.

Такимъ образомъ, число β должно имѣть одно изъ десяти значеній: 0, 1, 2, ..., 9; согласно же соотношенію (5), это должно быть самое большее число, удовлетворящее условію

$$\beta(20\alpha + \beta) \leqq 100(a - \alpha^2) + 10b + c. \tag{6}$$

Нетрудно поэтому рѣшить, какое именно значеніе нужно выбрать для числа β. На практикѣ это дѣлается слѣдующимъ образомъ. Число $10(a - \alpha^2) + b$ дѣлимъ на число 2α; въ частномъ получимъ для числа β нѣкоторое предварительное значеніе, которое послѣ соотвѣтствующей повѣрки иногда должно быть уменьшено на одну или нѣсколько единицъ; при нѣкоторомъ навыкѣ вычисленіе дѣлается легко и быстро. На этомъ основанъ извѣстный алгориѳмъ извлеченія квадратнаго корня.

---

[1]) Ибо при $\beta \geqq 10$

$$(10\alpha + 10)^2 \leqq (10\alpha + \beta)^2, \quad \text{или} \quad 100(\alpha + 1)^2 \leqq (10\alpha + \beta)^2.$$

Примѣръ:

$$
\begin{array}{l}
\sqrt{8 \cdot 40 \cdot 00 \cdot 00} = 2898 \\
4 \\
\hline
440 : 4 \mid 8 \\
384 \\
\hline
\quad 5600 : 56 \mid 9 \\
\quad 5121 \\
\hline
\qquad 47900 : 578 \mid 8 \\
\qquad 46304 \\
\hline
\qquad\quad 1596
\end{array}
$$

Вторая цифра результата 8 здѣсь получена послѣ дѣленія 44 : 4, т. е. частное 11 пришлось уменьшить на три единицы.

3. Пользуясь указаннымъ пріемомъ, можно получить десятичную дробь, квадратъ которой сколь угодно мало отличается отъ даннаго числа a.

Съ этой цѣлью ищемъ цѣлое число α^2, которое представляетъ собою наибольшій полный квадратъ, содержащійся въ числѣ $10^{2n}a$. Тогда имѣемъ:

$$\alpha^2 \leqq 10^{2n}a < (\alpha + 1)^2. \tag{7}$$

Дѣля всѣ члены послѣдняго выраженія на 10^{2n} и вводя обозначеніе

$$\alpha_n = \alpha 10^{-n}, \tag{8}$$

получимъ:

$$\alpha^2{}_n \leqq a < (\alpha_n + 10^{-n})^2. \tag{9}$$

Число $10^{2n}a$ получится изъ числа a, если къ послѣднему приписать $2n$ нулей; число α_n получится изъ числа α, если отдѣлимъ въ немъ послѣднія n цифръ запятой. Если послѣднюю цифру дроби α_n увеличимъ на одну единицу, то получится уже слишкомъ большое значеніе.

Числа α_n называются приближенными значеніями квадратнаго корня изъ числа a. Такъ, въ вышеприведенномъ примѣрѣ число 28,98 есть приближенное значеніе квадратнаго корня изъ 840.

Тѣмъ же пріемомъ можно пользоваться и при нахожденіи приближенныхъ значеній квадратныхъ корней изъ десятичныхъ дробей. Предварительно нужно лишь разбить дробь на грани въ ту и въ другую сторону отъ запятой по двѣ цифры въ каждой грани, кромѣ первой, въ которой иногда можетъ быть только одна цифра; въ концѣ дроби, если нужно, приписываютъ еще одинъ нуль.

§ 24. Ирраціональныя числа.

1. О каждомъ числѣ натуральнаго ряда легко судить, представляетъ ли оно собою полный квадратъ или нѣтъ, если только извѣстно разложеніе этого числа на первоначальныхъ множителей. Дѣйствительно, обозначимъ черезъ a, b, c, ... отличныя другъ отъ друга первоначальныя числа, а черезъ α, β, γ ... — положительные показатели; пусть, далѣе,

$$m = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots;$$

число m представляетъ собою полный квадратъ въ томъ и только въ томъ случаѣ, если всѣ показатели — числа четныя.

Это слѣдуетъ изъ теоремы объ однозначности разложенія натуральнаго числа на первоначальныхъ множителей.

Если указанное условіе выполнено, т. е. $\alpha = 2\alpha'$, $\beta = 2\beta'$, $\gamma = 2\gamma'$, ..., то квадратный корень числа m представится въ такой формѣ:

$$\sqrt{m} = a^{\alpha'} b^{\beta'} c^{\gamma'} \ldots.$$

Если же число m не представляетъ собою полнаго квадрата, то нельзя также указать такой дроби p/q, квадратъ которой равнялся бы числу m.

Дѣйствительно, если у какого-нибудь первоначальнаго множителя a числа m показателемъ степени служитъ нечетное число α, то равенство $mq^2 = p^2$ невозможно; въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ показатель числа a представляетъ собой нечетное число, то это равенство было бы возможно только въ томъ случаѣ, если бы и въ число p^2 множитель a входилъ съ нечетнымъ показателемъ.

Точно такъ же несократимая дробь m/n представляетъ собою полный квадратъ нѣкоторой дроби p/q лишь въ томъ случаѣ, когда числа m и n оба представляютъ собой полные квадраты.

Дѣйствительно, предположимъ, что числа m и n не имѣютъ ни одного общаго множителя; положимъ далѣе, что въ составъ числа m входитъ простое число a съ нечетнымъ показателемъ α; если бы при этихъ условіяхъ имѣло мѣсто равенство $mq^2 = np^2$, то правая его часть np^2 должна была бы содержать множителя a^{α}; въ виду того, однако, что знаменатель n не содержитъ множителя a, мы должны были бы придти къ заключенію, что полный квадратъ p^2 содержитъ множитель a въ нечетной степени; но это не можетъ имѣть мѣста *).

2. Такимъ образомъ, выполненіе дѣйствія, обратнаго возвышенію въ степень, оказывается иногда невозможнымъ уже при показателѣ 2. Задача эта представляется въ той же степени неразрѣшимой, какъ вопросъ о дѣленіи цѣлыхъ чиселъ до введенія дробей.

Если же мы, тѣмъ не менѣе, желаемъ сдѣлать нашу задачу разрѣшимой, намъ необходимо вновь расширить понятіе о числѣ, введя числа

---

*) Дедекиндъ въ своемъ сочиненіи „Непрерывность и ирраціональныя числа" (Braunschweig, 1872) приводитъ другое доказательство, не основанное на теоремахъ о разложеніи числа на первоначальныхъ множителей.

новой природы; эти послѣднія мы будемъ называть вообще ирраціональными числами; въ противоположность имъ мы будемъ впредь называть раціональными тѣ числа, которыми мы занимались до сихъ поръ; они должны подходить, какъ частный случай, подъ вновь расширенное понятіе о числѣ.

Эти новыя числа, какъ и вообще всякаго рода числа, являются продуктомъ свободнаго творчества нашего духа; пользуемся ли мы этимъ расширеннымъ понятіемъ о числѣ или нѣтъ, даемъ ли ему новое названіе или нѣтъ, это исключительно вопросъ точки зрѣнія и цѣлесообразности.

Вопросъ этотъ не имѣетъ значенія при практическихъ вычисленіяхъ, такъ какъ здѣсь приходится, въ концѣ концовъ, оперировать исключительно надъ раціональными числами. Однако же указанное расширеніе понятія о числѣ необходимо для внутренней гармоніи ученія о числѣ; безъ этой эволюціи формулировка и изложеніе многихъ теоремъ, особенно въ высшемъ анализѣ, представляла бы огромныя трудности и требовала бы чрезвычайной пространности.

Мы имѣемъ, конечно, право давать особое названіе каждому строго опредѣленному родовому понятію. Но при этомъ безусловно необходимо установить содержаніе понятія съ такой опредѣленностью, чтобы во всѣхъ случаяхъ можно было безъ всякаго сомнѣнія рѣшить, что подходитъ и что не подходитъ подъ это понятіе; лишь такія безукоризненно опредѣленныя понятія могутъ составлять тотъ матеріалъ, надъ которымъ оперируетъ математика.

Понятіе объ ирраціональномъ числѣ, какъ и вообще понятіе о числѣ, есть родовое понятіе. Можно установить безконечное число системъ такъ, чтобы между индивидуумами любыхъ двухъ такихъ системъ могло существовать однозначное соотвѣтствіе, и чтобы всѣ такія системы одинаково хорошо могли служить той цѣли, ради которой вводятся ирраціональныя числа [2]). Напримѣръ, мы можемъ исходить отъ безконечныхъ десятичныхъ дробей, или отъ безконечныхъ непрерывныхъ дробей; той же цѣли служатъ и „числовые ряды“ Г. Кантора (G. Cantor) и

---

[2]) Эта мысль требуетъ, повидимому, поясненія. Изложеніе ариѳметики начато введеніемъ комплекса логическихъ объектовъ (понятій), которые названы натуральными числами. Этотъ комплексъ затѣмъ расширенъ введеніемъ новыхъ элементовъ —дробныхъ и отрицательныхъ чиселъ. Теперь необходимо произвести дальнѣйшее расширеніе этого комплекса. Та цѣль, которая имѣется при этомъ въ виду, можетъ быть достигнута различными путями. Иначе говоря, можно различнымъ образомъ построить такіе комплексы, чтобы въ составъ каждаго изъ нихъ вошли всѣ раціональныя числа и чтобы каждый изъ нихъ удовлетворялъ поставленной цѣли; но всѣ эти комплексы будутъ эквивалентны. Указанные въ текстѣ примѣры не могутъ получить здѣсь значительнаго развитія, такъ какъ это потребовало бы довольно пространныхъ разсужденій.

„характеристики“ Христофеля (Christoffel). При выборѣ точки исхода мы будемъ руководствоваться лишь большей простотой и удобопонятностью: въ этомъ отношенiи предпочтенiя заслуживаетъ предложенное Дедекиндомъ (Dedekind) понятiе о „сѣченiи“.

Совокупность всѣхъ элементовъ каждой изъ эквивалентныхъ между собою системъ, о введенiи которыхъ мы говорили выше, образуетъ родовое понятiе, которое мы называемъ ирраціональнымъ числомъ. Совершенно безразлично, какимъ представителемъ этого понятiя мы будемъ пользоваться для его изученiя. Такого рода представителей этого понятiя мы будемъ иногда также называть ирраціональными числами (напримѣръ, безконечную десятичную дробь).

3. Легче всего и проще всего было бы воспользоваться пространственными представленiями и разсматривать числа, какъ отрѣзки прямой [3]). Исходнымъ пунктомъ тогда послужила бы аксiома, примѣрно, такого содержанiя:

Если совокупность точекъ прямой (расположенной, скажемъ, горизонтально передъ нашими глазами) подраздѣляется на двѣ группы A и A' такого рода, что каждая точка группы A лежитъ влѣво отъ каждой точки группы A', то самая прямая дѣлится нѣкоторой опредѣленной точкой a на двѣ части, изъ которыхъ одна заключаетъ въ себѣ всѣ точки группы A, а другая—всѣ точки группы A'.

Существованiе такой точки a составляетъ аксiому, которая никоимъ образомъ не можетъ быть доказана чисто логическимъ путемъ: источникъ ея коренится въ природѣ нашихъ пространственныхъ представленiй.

Поэтому при всей наглядности указанной аксiомы мы не можемъ положить ее въ основу чисто ариѳметическаго построенiя понятiя о числѣ. Въ дальнѣйшемъ мы будемъ ею, однако, пользоваться, но не для доказательства положенiй, а лишь въ качествѣ иллюстрацiи, въ качествѣ, такъ сказать, символическаго языка, для фиксированiя мыслей и для большей доступности изложенiя.

4. Сѣченiемъ въ области раціональныхъ чиселъ мы назовемъ подраздѣленiе совокупности раціональныхъ чиселъ (положительныхъ и отрицательныхъ) на двѣ группы такого рода, что каждое число группы A меньше каждаго числа группы A'.

Такое сѣченiе мы символически будемъ изображать знакомъ A/A' или, короче, греческой буквой α; любое раціональное число группы A мы будемъ обозначать буквой a, а число группы A' — буквой a'. Въ томъ же смыслѣ мы будемъ употреблять другiя буквы трехъ алфавитовъ.

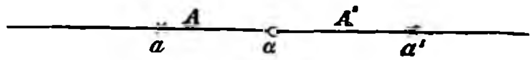
---

[3]) Т. е. остановиться на этомъ именно комплексѣ представителей понятiя объ ирраціональномъ числѣ.

Эти обозначенія наглядно представлены на приложенной здѣсь фигурѣ 2, изображающей числовую прямую.

Каждое раціональное число r образуетъ одно или, точнѣе говоря, два сѣченія R/R'.

Дѣйствительно, всѣ числа, меньшія числа r, мы отнесемъ къ группѣ R, числа бо́льшія его, — къ группѣ R'; самое же число r мы, по желанію, можемъ отнести либо къ группѣ R, либо къ группѣ R'; сообразно этому число r образуетъ два сѣченія: въ одномъ изъ нихъ число r есть наибольшее изъ чиселъ группы R, въ другомъ — наименьшее изъ чиселъ группы R'. Произведенныя такимъ образомъ сѣченія мы называемъ раціональными сѣченіями [4]).



Фиг. 2.

Существуютъ, однако, и другія сѣченія, которыя не производятся раціональными числами: мы ихъ назовемъ ирраціональными сѣченіями; слѣдующій примѣръ доказываетъ существованіе ирраціональныхъ сѣченій.

Къ группѣ A мы отнесемъ всѣ тѣ числа, квадратъ которыхъ меньше 2, къ группѣ A' — всѣ тѣ числа, квадратъ которыхъ больше 2. Тогда группами A и A' исчерпываются всѣ раціональныя числа, такъ какъ такого раціональнаго числа, квадратъ котораго былъ бы равенъ 2, не существуетъ; кромѣ того, любое число a меньше любого a'. Такимъ образомъ, группы A и A' образуютъ нѣкоторое сѣченіе, которому, однако, не соотвѣтствуетъ никакое раціональное число, его образующее; т. е. нельзя указать ни наибольшаго числа въ группѣ A, ни наименьшаго числа въ группѣ A'. Дѣйствительно, если, напримѣръ, $a^2 < 2$, то всегда можно указать такое натуральное число n, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} < 2 - a^2,$$

или иначе

$$\left(a + \frac{1}{n}\right)^2 < 2.$$

---

[4]) Подъ раціональнымъ сѣченіемъ авторъ разумѣетъ, слѣдовательно, такое дѣленіе раціональныхъ чиселъ, при которыхъ существуетъ наибольшее число группы R или наименьшее число группы R'; про это именно число онъ говоритъ, что оно производитъ сѣченіе—это формулировано имъ же въ текстѣ. Если, напримѣръ, мы раздѣлимъ всѣ положительныя числа на двѣ группы, относя къ группѣ R всѣ правильныя дроби, а къ группѣ R' всѣ неправильныя дроби, то получимъ раціональное сѣченіе, которое производится числомъ 1, наименьшимъ числомъ группы R'.

Это значитъ, что существуетъ число $a+\frac{1}{n}$, квадратъ котораго меньше 2, хотя само оно больше числа a [5]).

Такимъ же способомъ можно доказать, что въ группѣ A' не существуетъ наименьшаго числа.

5. Итакъ, группамъ A и A' соотвѣтствуетъ раціональное сѣченіе A/A', если можно указать наибольшее число a въ первой группѣ или наименьшее число a' во второй; если же ни того ни другого числа не существуетъ, то группамъ соотвѣтствуетъ ирраціональное сѣченіе A/A'.

Но если A/A' означаетъ ирраціональное сѣченіе, то для любого числа a можно указать другія, бóльшія его, числа a той же группы A, а для любого числа a' группы A' можно указать меньшія его числа a' той же группы.

Въ каждомъ сѣченіи A/A' существуетъ сколько угодно паръ чиселъ a и a' разность которыхъ $a'-a$ меньше любого заданнаго числа d.

Для доказательства выберемъ такое натуральное число n, чтобы было $\frac{1}{n}<d$. Выберемъ два такихъ цѣлыхъ положительныхъ или отрицательныхъ числа k и k', чтобы число k/n было меньше нѣкотораго числа a (изъ группы A), а число k'/n было больше нѣкотораго числа a'; подобрать такія числа k и k' всегда возможно. Тогда число k/n должно быть отнесено къ группѣ A, а число k'/n — къ группѣ A'. Перебираемъ по порядку числа слѣдующаго ряда:

$$\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}, \frac{k+2}{n}, \ldots, \frac{k'}{n}.$$

Крайній лѣвый членъ принадлежитъ группѣ A', крайній правый—группѣ A'; гдѣ-нибудь между $\frac{k}{n}$ и $\frac{k'}{n}$ мы найдемъ такой членъ — пусть это будетъ число m/n—который самъ еще принадлежитъ группѣ A, между тѣмъ какъ непосредственно слѣдующій относится уже къ группѣ A'. Тогда имѣемъ

$$\frac{m}{n}=a, \quad \frac{m+1}{n}=a'$$

и

$$a'-a=1/n<d.$$

[5]) Иначе говоря, каково бы ни было число a группы A, всегда существуетъ большее число $a+\frac{1}{n}$, также принадлежащее группѣ A.

Въ ирраціональномъ сѣченіи между такими двумя числами a и a' можно указать сколько угодно другихъ чиселъ обѣихъ группъ [6]). Въ раціональномъ сѣченіи между нашими двумя числами a и a' также существуетъ сколько угодно другихъ чиселъ, удовлетворяющихъ тому же требованію; но если одно изъ этихъ чиселъ a или a' есть крайнее число соотвѣтствующей группы, то варіировать можно только второе число.

Обоимъ сѣченіямъ, производимымъ раціональнымъ числомъ r, мы будемъ относить это число r, какъ соотвѣтствующее этимъ сѣченіямъ; обоимъ этимъ сѣченіямъ мы, такъ сказать, приписываемъ одно и то же численное значеніе r.

Каждому же ирраціональному сѣченію мы отнесемъ нѣкоторый индивидуумъ новой категоріи чиселъ, ирраціональное число, которое мы будемъ обозначать символомъ α.

Въ нижеслѣдующемъ изложеніи латинскія буквы означаютъ раціональныя, греческія — ирраціональныя числа.

6. Теперь нужно расположить ирраціональныя числа по величинѣ и при томъ такъ, чтобы каждое раціональное число нашло себѣ опредѣленное мѣсто въ этомъ расположеніи.

Разсмотримъ два различныхъ сѣченія A/A' и B/B'. Положимъ, что въ группѣ A' можно указать одно и только одно число a'_1, равное нѣкоторому числу b_1 группы B; въ такомъ случаѣ a'_1 есть наименьшее число въ группѣ A', а число b_1 есть наибольшее въ группѣ B [7]). Стало быть, наши сѣченія A/A' и B/B' таковы, что въ группѣ A' есть наименьшее число a_1', а въ группѣ B наибольшее число b_1, т. е. наши сѣченія раціональны, и при томъ имѣютъ одно и то же численное значеніе ($\alpha = \beta$). Имѣя это въ виду, устанавливаемъ слѣдующее опредѣленіе:

Мы принимаемъ, что число α меньше числа β,

$$\alpha < \beta,$$

если можно указать, по крайней мѣрѣ, два числа a' группы A', которыя были бы въ то же время числами b изъ группы B.

Въ этомъ случаѣ есть безчисленное множество чиселъ a' и чиселъ b, удовлетворяющихъ равенству $a' = b$. Это наглядно усматривается изъ

---

[6]) Такъ какъ ни въ группѣ A нѣтъ наибольшаго числа, ни въ группѣ A' нѣтъ наименьшаго числа, то мы можемъ увеличивать число a и уменьшать число a'.

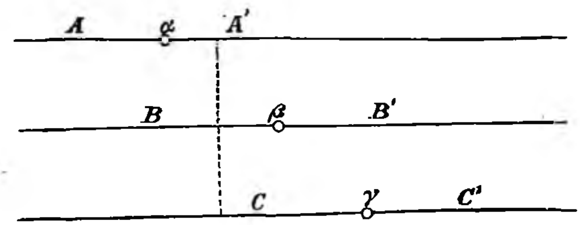
[7]) Дѣйствительно, по условію, всякое другое число группы A' равно числу b' группы B', а потому оно больше, нежели a'_1 (ибо $b' > b_1$). Такимъ же образомъ всякое другое число группы B равно нѣкоторому числу группы A, а потому оно меньше, нежели a'_1, т. е. нежели b_1.

фигуры 3. Ею же можно пользоваться для доказательства слѣдующаго предложенія:

Если $\alpha < \beta$ и $\beta < \gamma$, то $\alpha < \gamma$.

Если мы отнесемъ раціональнымъ сѣченіямъ числовыя значенія, равныя производящимъ ихъ раціональнымъ числамъ, то данныя здѣсь опредѣленія равенства и неравенства совпадаютъ съ обычными: изъ двухъ раціональныхъ чиселъ первое меньше второго, если можно указать третье раціональное число, которое больше перваго и меньше второго [8]).

Если дано сѣченіе A/A', то каждое число $-a'$ меньше любого числа $-a$; обозначивъ совокупность чиселъ $-a$ и $-a'$ соотвѣтственно



Фиг. 3.

черезъ $-A$ и $-A'$, получимъ новое сѣченіе $-A'/-A$. Соотвѣтствующее число обозначается символомъ $-\alpha$ и называется ирраціональнымъ числомъ, противоположнымъ числу α.

7. Казалось бы, что, пользуясь принципомъ сѣченій, можно получить еще новаго рода числа: примѣрно, мы могли бы отнести къ одной группѣ **A** совокупность раціональныхъ и ирраціональныхъ чиселъ, меньшихъ числа α, а къ группѣ **A'** — совокупность раціональныхъ и ирраціональныхъ чиселъ, не меньшихъ числа α. Покажемъ, что, поступая такимъ образомъ, мы не расширяемъ понятія о числѣ, и что получаемыя указаннымъ образомъ сѣченія **A**/**A'** въ области ирраціональныхъ чиселъ имѣютъ такія же численныя значенія, какъ сѣченія въ области раціональныхъ чиселъ, такъ что новыя сѣченія не обогащаютъ имѣющагося уже запаса чиселъ.

Дѣйствительно, пусть **A**/**A'** означаетъ сѣченіе въ области ирраціональныхъ чиселъ, такъ что каждое число α группы **A** меньше любого числа α' группы **A'**. Чтобы показать, что такого рода сѣченіе не вызываетъ потребности въ новаго рода числахъ, т. е. что оно производится какимъ-нибудь уже извѣстнымъ намъ числомъ, мы докажемъ, что либо

---

[8]) Здѣсь умѣстно замѣтить, что ирраціональное число α больше любого числа a группы A соотвѣтствующаго сѣченія A/A' и меньше любого числа a' группы A'.

въ группѣ **A** есть наибольшее число σ, либо въ группѣ **A′** есть наименьшее число σ, такъ что ирраціональное число σ и есть то, которымъ производится сѣченіе **A/A′**.

Если разсматривать раціональное число r, какъ частный случай ирраціональнаго числа, то оно заключается либо въ группѣ **A**, либо же въ группѣ **A′**; обозначая раціональныя числа группы **A** черезъ a, группы **A′** черезъ a', получимъ сѣченіе A/A' въ области раціональныхъ чиселъ, каковое опредѣляетъ собою нѣкоторое ирраціональное число σ; какъ и всякое ирраціональное число, оно непремѣнно заключается либо въ группѣ **A**, либо въ группѣ **A′**. Въ первомъ случаѣ число σ должно быть наибольшимъ среди чиселъ группы **A**; въ самомъ дѣлѣ, если бы нѣкоторое число a этой группы было больше числа σ, то послѣднее было бы меньше всякаго раціональнаго числа, заключеннаго между σ и a и содержащагося поэтому еще въ группѣ **A**, а, слѣдовательно, и въ группѣ A; но число σ не можетъ быть меньше ни одного изъ чиселъ группы A. Такимъ образомъ, если только число σ входитъ въ группу **A**, оно должно быть здѣсь наибольшимъ. Такъ же можно доказать, что, если число σ принадлежитъ группѣ **A′**, то оно должно быть въ ней наименьшимъ. Итакъ, мы заключаемъ, что въ сѣченіи **A/A′** либо существуетъ наибольшее число въ группѣ **A**, либо наименьшее число въ группѣ **A′**.

§ 25. Верхняя и нижняя граница.

1. Обозначимъ черезъ T нѣкоторый числовой комплексъ, элементы котораго суть раціональныя или ирраціональныя числа τ, τ', ...; если всѣ эти числа меньше нѣкотораго числа t, то существуетъ одно и только одно число γ, имѣющее слѣдующія два свойства:

a) Каждое число комплекса T меньше числа γ или, по крайней мѣрѣ, не превышаетъ γ.

b) Напротивъ, всякому числу ε, которое меньше числа γ, отвѣчаетъ, по крайней мѣрѣ, одно такое число τ комплекса T, которое заключается между числами ε и γ, такъ что число τ удовлетворяетъ соотношенію:

$$\varepsilon < \tau \leqq \gamma. \tag{1}$$

Число γ, существованіе котораго мы сейчасъ докажемъ, называется верхней границей числового комплекса T.

Короче его можно опредѣлить такъ:

Верхней границей комплекса называется такое число, котораго не превышаетъ ни одно число τ этого комплекса, но сколь угодно близко къ которому имѣются числа комплекса.

Прежде всего легко усмотрѣть, что можетъ быть **только одно** такое число γ. Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ, что такихъ чиселъ было бы два, — напримѣръ, γ и γ', при чемъ $\gamma < \gamma'$; въ виду того, что число γ' есть верхняя граница, а число γ меньше, нежели γ', мы могли бы, согласно пункту b), указать число τ, удовлетворяющее условію $\gamma < \tau \leqq \gamma'$, такъ что число γ, будучи меньше нѣкотораго числа τ нашего комплекса, не могло бы служить его верхней границей. Итакъ, верхняя граница, если таковая существуетъ, можетъ быть только одна.

Чтобы доказать ея существованіе, замѣтимъ, что относительно каждаго числа r мы должны сказать одно изъ двухъ: либо въ нашемъ комплексѣ есть число τ, превышающее r, — такія числа r мы будемъ обозначать буквой c; либо же ни одно число τ нашего комплекса не превышаетъ числа r; такія числа r обозначимъ буквой c'. Легко видѣть, что имѣются какъ числа c, такъ и числа c': къ числамъ c' относятся всѣ тѣ раціональныя числа r, которыя превышаютъ число t; къ числамъ c относятся всѣ тѣ раціональныя числа r, которыя меньше нѣкотораго опредѣленнаго числа τ нашего комплекса T. Любое число c меньше любого числа c', такъ что числа c, c' образуютъ сѣченіе C/C' и опредѣляютъ нѣкоторое число γ, которое, какъ легко усмотрѣть, удовлетворяетъ условіямъ a) и b).

Дѣйствительно, если бы нашлось въ комплексѣ T хоть одно число, превышающее γ, то существовало бы раціональное число r такого рода, что было бы $\gamma < r < \tau$, и это число r, съ одной стороны, будучи меньше τ, должно быть отнесено къ числамъ c; съ другой стороны, превышая γ, оно должно быть отнесено къ числамъ c' [9]); мы заключаемъ изъ этого противорѣчія, что ни одно число τ нашего комплекса не превышаетъ числа γ. Если же $\varepsilon < \gamma$, то между числами ε и γ заключено нѣкоторое число c; слѣдовательно, согласно опредѣленію чиселъ c, существуетъ нѣкоторое число τ, удовлетворяющее условію $\varepsilon < c < \tau \leqq \gamma$, такъ что число γ обладаетъ также и свойствомъ b) [10]).

2. Аналогично доказывается слѣдующее предложеніе:

Если всѣ числа комплекса T превышаютъ нѣкоторое число t', то существуетъ одно и только одно число γ', имѣющее слѣдующія два свойства:

a′) Число γ' не превышаетъ ни одного числа нашего комплекса T.

---

[9]) См. примѣчаніе 8.

[10]) Не лишнимъ, можетъ быть, будетъ выяснить, въ какомъ случаѣ въ правой части соотношенія (1) неравенство уступаетъ мѣсто равенству. Возьмемъ, напримѣръ, комплексъ, состоящій изъ всѣхъ чиселъ отъ 0 до 1 включительно и [illegible] 2. [illegible] $\gamma = 2$, [illegible] за [illegible] возьмемъ 1, то $\tau = 2 = \gamma$.

b') Если же нѣкоторое число ε' больше числа γ', то въ комплексѣ T можно указать, по крайней мѣрѣ, одно число τ', которое заключено между числами γ' и ε', такъ что τ' удовлетворяетъ неравенству:

$$\gamma' \leqq \tau' < \varepsilon'.$$

Это число γ' называется **нижней границей** числового комплекса T. Существованіе ея доказывается тѣмъ же путемъ, что и существованіе верхней границы, или же проще такъ: числовой комплексъ $-T$, состоящій изъ чиселъ $-\tau$, $-\tau'$, ... имѣетъ, по доказанному, верхнюю границу; перемѣнивъ знакъ ея, получимъ нижнюю границу комплекса T.

Нѣкоторые комплексы имѣютъ только верхнюю границу, другіе — только нижнюю. Такъ, напримѣръ, комплексъ положительныхъ чиселъ имѣетъ своей нижней границей нуль, а верхней границы не имѣетъ. Наоборотъ, совокупность отрицательныхъ чиселъ нижней границы не имѣетъ, а верхней границей ея служитъ нуль. Совокупность правильныхъ положительныхъ дробей имѣетъ и нижнюю границу — нуль и верхнюю границу — единицу.

Верхняя и нижняя граница можетъ входить въ составъ комплекса, какъ элементъ его, но можетъ и не входить въ него. Въ первомъ случаѣ нижняя граница называется **минимумомъ** комплекса, а верхняя граница — **максимумомъ** его [11]).

Если сѣченіе A/A' опредѣляетъ собою число α, то это послѣднее одновременно является верхней границей всѣхъ чиселъ a и нижней границей всѣхъ чиселъ a'.

§ 26. Дѣйствія надъ ирраціональными числами.

1. Теперь займемся опредѣленіемъ основныхъ ариѳметическихъ дѣйствій въ области ирраціональныхъ чиселъ. Для этого достаточно остановиться подробно на одномъ какомъ-либо дѣйствіи, напримѣръ, на сложеніи: прочія тогда уже не представятъ намъ ничего существенно новаго. Пусть α и β обозначаютъ числа, опредѣляемыя соотвѣтственно сѣченіями A/A' и B/B'; въ виду того, что всѣ числа a и b не превышаютъ соотвѣтственно чиселъ α и β, а эти послѣднія не превышаютъ чиселъ a' и b',

---

[11]) Если, напримѣръ, комплексъ T состоитъ изъ всѣхъ чиселъ вида $\frac{k-1}{k}$, гдѣ k есть цѣлое положительное число, то его нижней границей служитъ 0, а верхней 1; но ни то ни другое число комплексу не принадлежитъ. Если, однако, мы присоединимъ число 0 къ нашему комплексу, то нижняя граница войдетъ въ его составъ и будетъ служить его минимумомъ. Если мы присоединимъ къ комплексу и 1, то и верхняя граница войдетъ въ составъ комплекса и будетъ служить его максимумомъ.

то комплексъ суммъ $a+b$ имѣетъ нѣкоторую верхнюю границу γ, а комплексъ суммъ $a'+b'$ имѣетъ нижнюю границу γ'. Обѣ эти границы γ и γ' не могутъ быть отличны одна отъ другой.

Въ самомъ дѣлѣ, если бы было $\gamma' < \gamma$, то мы вынуждены были бы заключить, что нѣкоторая сумма $a'+b'$ меньше нѣкоторой суммы $a+b$: стоитъ лишь выбрать первую достаточно близко къ γ', а вторую достаточно близко къ γ; но неравенство $a'+b' < a+b$ невозможно, такъ какъ всегда $a' > a$ и $b' > b$.

Если же мы примемъ, что $\gamma < \gamma'$, то мы могли бы подобрать два раціональныхъ числа c и c', удовлетворяющихъ неравенствамъ

$$\gamma < c < c' < \gamma'.$$

Всѣ суммы $a'+b'$ были бы больше числа c', а всѣ суммы $a+b$ были бы меньше числа c, т. е.

$$c' < a'+b' \quad \text{для всѣхъ значеній } a' \text{ и } b',$$

$$c > a+b \quad \text{для всѣхъ значеній } a \text{ и } b.$$

Слѣдовательно, мы получили бы, что для всѣхъ чиселъ a, b, a', b', имѣетъ мѣсто неравенство

$$c' - c < (a'-a) + (b'-b).$$

Это заключеніе противорѣчитъ доказанному раньше предложенію, что положительныя разности $a'-a$ и $b'-b$ можно сдѣлать сколь угодно малыми, если подобрать соотвѣтствующимъ образомъ числа a и a', b и b' (§ 24, 5).

Итакъ, числа γ и γ' не могутъ быть отличны другъ отъ друга. Имѣя это въ виду, мы устанавливаемъ слѣдующее опредѣленіе:

Суммой $\alpha+\beta$ чиселъ α и β мы называемъ верхнюю границу всѣхъ суммъ $a+b$ и равную ей нижнюю границу всѣхъ суммъ $a'+b'$.

2. Раньше, чѣмъ дать опредѣленіе разности ирраціональныхъ чиселъ, замѣтимъ, что разности $a-b'$ и $a'-b$ имѣютъ соотвѣтственно верхнюю и нижнюю границу. Повторяя разсужденія предыдущаго параграфа, мы докажемъ, что обѣ границы не могутъ быть отличны другъ отъ друга. Сообразно этому

разностью $\alpha-\beta$ чиселъ α и β мы называемъ верхнюю границу чиселъ $a-b'$ и равную ей нижнюю границу чиселъ $a'-b$.

3. Дадимъ теперь опредѣленіе умноженія и дѣленія, имѣя въ виду сперва лишь положительныя числа α и β; числа a и числа b мы точно такъ же пока беремъ исключительно положительными. Тогда легко, по предыдущему, найти, что произведенія ab и частныя a/b' имѣютъ верхнія границы, а произведенія $a'b'$ и частныя a'/b имѣютъ нижнія границы, при чемъ верхняя граница произведеній ab равна нижней границѣ произведеній $a'b'$, а верхняя граница частныхъ a/b' равна нижней границѣ частныхъ a'/b.

Произведеніемъ $\alpha\beta$ положительныхъ чиселъ α и β называется общая граница (соотвѣтственно верхняя или нижняя) чиселъ ab и $a'b'$. Частнымъ α/β положительныхъ чиселъ α и β называется общая граница (соотвѣтственно верхняя или нижняя) чиселъ a/b' и a'/b.

Чтобы распространить умноженіе и дѣленіе и на отрицательныя ирраціональныя числа, мы оставимъ для нихъ въ силѣ тѣ условія, которыя мы приняли относительно умноженія раціональныхъ чиселъ (§ 14); именно:

$$(-\alpha)\beta = \alpha(-\beta) = -\alpha\beta,\ (-\alpha)(-\beta) = \alpha\beta$$

$$\frac{-\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{-\beta} = -\frac{\alpha}{\beta};\ \frac{-\alpha}{-\beta} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Если одинъ изъ множителей произведенія $\alpha\beta$ или дѣлимое частнаго α/β есть нуль, то соотвѣтствующее произведеніе или частное мы считаемъ равнымъ нулю. По прежнему дѣлитель β частнаго α/β не долженъ быть нулемъ (случай, когда дѣлитель равенъ нулю, исключается изъ разсмотрѣнія).

4. Практическая цѣнность данныхъ нами опредѣленій основныхъ четырехъ дѣйствій обнаруживается при разсмотрѣніи вытекающей изъ этихъ опредѣленій важной теоремы, которую мы назовемъ теоремой о непрерывности. Эта теорема имѣетъ слѣдующее содержаніе.

Возьмемъ два произвольныхъ числа α и β, при чемъ разъ навсегда замѣтимъ, что случай, когда дѣлитель β частнаго α/β есть нуль, исключается; черезъ $f(\alpha, \beta) = \varrho$ обозначимъ результатъ какого-либо изъ четырехъ основныхъ дѣйствій, которое мы желаемъ совершить надъ числами α, β; далѣе, черезъ $f(a, b) = r$ обозначимъ результатъ тѣхъ же дѣйствій, выполненныхъ надъ раціональными числами a, b.

Возьмемъ теперь два произвольныхъ раціональныхъ или ирраціональныхъ числа g и g', удовлетворяющихъ неравенствамъ

$$g < \varrho < g'. \tag{1}$$

Мы утверждаемъ, что можно такимъ образомъ подобрать числа a_1, a_1', b_1, b_1', чтобы они удовлетворяли неравенствамъ

$$a_1 < \alpha < a_1', \quad b_1 < \beta < b_1', \tag{2}$$

и чтобы при всякой парѣ раціональныхъ чиселъ a, b, удовлетворяющихъ неравенствамъ

$$a_1 < a < a_1', \quad b_1 < b < b_1', \tag{3}$$

выполнялось неравенство

$$g < r < g'. \tag{4}$$

Смыслъ всѣхъ этихъ неравенствъ словами можно передать такъ:

Къ результату $f(\alpha, \beta)$ нѣкотораго дѣйствія надъ ирраціональными числами можно подойти **сколь угодно** близко, находя результатъ $f(a, b)$ того же дѣйствія надъ раціональными числами a и b: стоитъ лишь подобрать эти числа a и b такъ, чтобы они **достаточно** мало отличались отъ чиселъ α и β.

Такія числа a и b называются приближенными значеніями чиселъ α и β.

Доказательство приведенной теоремы вытекаетъ непосредственно изъ данныхъ нами опредѣленій дѣйствій надъ ирраціональными числами. Мы ограничимся доказательствомъ теоремы для того случая, когда разсматриваемое дѣйствіе есть сложеніе, т. е. $\varrho = \alpha + \beta$. Такъ какъ число ϱ есть верхняя граница суммъ $a + b$ и нижняя граница суммъ $a' + b'$, то для всякой пары чиселъ c и c' сѣченія C/C', соотвѣтствующаго числу ϱ, мы можемъ подобрать сумму $a_1 + b_1$ и сумму $a_1' + b_1'$ такъ, чтобы численныя значенія этихъ суммъ заключались соотвѣтственно между числами c и ϱ, и числами ϱ и c'; имѣемъ, слѣдовательно:

$$c < a_1 + b_1 < a_1' + b_1' < c'. \tag{5}$$

Если теперь выбрать такую пару чиселъ a и b, чтобы удовлетворялись неравенства (3), то получимъ:

$$a_1 + b_1 < a + b < a_1' + b_1'; \tag{6}$$

откуда слѣдуетъ, что

$$c < a + b < c'.$$

что и требовалось доказать [12]).

. Изложенную теорему можно обобщить:

Основная теорема о непрерывности. Обозначимъ черезъ ϱ результатъ нѣкотораго вычисленія $F(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$, состоящаго изъ произвольной комбинаціи основныхъ четырехъ дѣйствій и выполненнаго надъ числами $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$; выберемъ, далѣе, любую пару чиселъ g и g', удовлетворяющихъ неравенствамъ

$$g < \varrho < g'. \tag{7}$$

[12]) Ясно, что числа c и c' замѣняютъ здѣсь числа g и g' неравенства (1).

Мы утверждаемъ, что можно подобрать числа a_1, a_1', b_1, b_1', c_1, c_1' ... такимъ образомъ, чтобы они удовлетворяли неравенствамъ

$$a_1 < a < a_1', \quad b_1 < \beta < b_1', \quad c_1 < \gamma < c_1', \ldots, \tag{8}$$

и чтобы число $r = F(a, b, c, \ldots)$ удовлетворяло соотношенію

$$g < r < g', \tag{9}$$

коль скоро выполняются неравенства:

$$a_1 < a < a_1', \quad b_1 < b < b_1', \quad c_1 < c < c_1', \ldots. \tag{10}$$

Мы докажемъ эту теорему по способу математической индукціи, исходя изъ того частнаго случая, который мы изложили въ пунктѣ 4.

Итакъ, допустимъ, что теорема наша доказана для нѣкоторой системы чиселъ

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots \tag{11}$$

и для нѣкотораго дѣйствія

$$f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) = \varrho, \tag{12}$$

а также для другой системы чиселъ

$$\mu, \nu, \ldots \tag{13}$$

и для дѣйствія

$$\varphi(\mu, \nu, \ldots) = \sigma; \tag{14}$$

нужно доказать, что теорема справедлива и для дѣйствія

$$F(\varrho, \sigma) = \tau, \tag{15}$$

выполненнаго надъ числами ϱ и σ.

Выбираемъ произвольно два числа g и g' такъ, чтобы было

$$g < \tau < g'. \tag{16}$$

Согласно пункту 4, можно подобрать для чиселъ ϱ и σ значенія k, l, k', l', которыя удовлетворяютъ неравенствамъ

$$k < \varrho < k', \quad l < \sigma < l', \tag{17}$$

при чемъ результатъ $F(r, s)$ заключается между тѣми же предѣлами g и g', что и число τ, если только приближенныя значенія r и s чиселъ ϱ и σ выбраны въ предѣлахъ, указанныхъ въ формулѣ (17), т. е. если

$$k < r < k', \quad l < s < l'. \tag{18}$$

Послѣднее же условіе можетъ быть выполнено. Дѣйствительно, согласно нашему предположенію, теорема доказана для чиселъ ϱ и σ; это значитъ, что, выбравъ достаточно тѣсные предѣлы для раціональныхъ приближенныхъ значеній $a, b, c, \ldots, m, n, \ldots$ чиселъ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \mu, \nu, \ldots$, мы получимъ въ результатѣ дѣйствій

$$f(a, b, c, \ldots) = r \text{ и } \varphi(m, n, \ldots) = s$$

числа r и s въ предѣлахъ, указанныхъ въ формулѣ (18). Такимъ образомъ, теорема доказана въ общемъ видѣ [13]).

6. Теоремѣ о непрерывности можно дать нѣсколько иную формулировку, которая необходима во многихъ случаяхъ, при чемъ доказательство остается прежнее:

Если по прежнему число $\varrho = f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ есть результатъ нѣкоторыхъ вычисленій, произведенныхъ надъ числами $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, и если $g < \varrho$, то можно замѣнить числа $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ ихъ раціональными приближенными значеніями $a, b, c, \ldots$ такимъ образомъ, чтобы число $r = f(a, b, c, \ldots)$ удовлетворяло соотношенію $g < r < \varrho$.

Теорема эта съ соотвѣтственными измѣненіями остается въ силѣ и въ томъ случаѣ, если принять $\varrho < g'$ [14]).

Эти теоремы можно непосредственно распространить на результаты нѣсколькихъ дѣйствій надъ одними и тѣми же числами. Напримѣръ:

Если результаты дѣйствій

$$f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) = \varrho \quad \text{и} \quad \varphi(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) = \sigma$$

удовлетворяютъ неравенствамъ:

$$g < \varrho < g', \quad k < \sigma < k',$$

то можно числа $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ заключить въ такія границы, чтобы всякій разъ, какъ раціональныя числа $a, b, c, \ldots$ падаютъ между этими грани-

---

[13]) Индуктивный пріемъ доказательства здѣсь примѣняется, стало-быть, къ числу дѣйствій, которыя нужно произвести надъ данными числами. Если этихъ дѣйствій имѣется, напримѣръ, три, то третье дѣйствіе можно разсматривать, какъ операцію $F(\varrho, \sigma)$, производимую надъ результатомъ ϱ первыхъ двухъ дѣйствій и надъ новымъ числомъ σ.

[14]) Мы привели послѣднее предложеніе цѣликомъ въ томъ видѣ, какъ оно формулировано авторомъ, но должны указать на то, что оно не всегда справедливо; такъ, напримѣръ, если положимъ

$$f(\alpha, \beta) = (\alpha - \beta)^2,$$

то при $\alpha = \beta$ число $\varrho = 0$; въ этомъ случаѣ, очевидно, нельзя замѣнить α и β такими приближенными значеніями, чтобы получить результатъ меньшій, нежели ϱ. Это любопытный примѣръ того, какъ легко впасть въ ошибку, если опускать доказательства.

цами, результаты тѣхъ же дѣйствій $f(a, b, c, \ldots) = r$ и $\varphi(a, b, c, \ldots) = s$ надъ числами $a, b, c, \ldots$ удовлетворяли тѣмъ же неравенствамъ

$$g < r < g', \quad k < s < k'.$$

Въ самомъ дѣлѣ, опредѣливъ требуемыя границы для каждаго изъ дѣйствій f и φ въ отдѣльности такъ, какъ мы это дѣлали въ п. 5 (неравенства (10)), мы можемъ затѣмъ выбрать границы для чиселъ $a, b, c, \ldots$ такъ, чтобы числа $r = f(a, b, c, \ldots)$ и $s = \varphi(a, b, c, \ldots)$ удовлетворяли требуемымъ неравенствамъ. [15]).

7. Изложенная нами теорема имѣетъ двоякое значенiе. Съ одной стороны, она даетъ намъ увѣренность, что въ практическихъ вычисленiяхъ, которыя по существу дѣла приходится выполнять лишь надъ приближенными значенiями, мы можемъ достичь какой угодно степени точности. Съ другой стороны, изъ нашей теоремы вытекаетъ теоретически важное слѣдствiе: **равенство или неравенство, которое справедливо для всѣхъ рацiональныхъ значенiй входящихъ въ него буквъ, остается въ силѣ и для иррацiональныхъ значенiй ихъ.**

Въ самомъ дѣлѣ, любое равенство, связывающее рацiональныя числа, можетъ быть представлено въ формѣ

$$f(a, b, c, \ldots) = 0, \tag{19}$$

гдѣ знакъ f обозначаетъ нѣкоторое сочетанiе четырехъ основныхъ дѣйствій. Если это равенство справедливо при всѣхъ значенiяхъ рацiональныхъ чиселъ $a, b, c, \ldots$, то оно остается въ силѣ и для иррацiональныхъ значенiй $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, т. е. имѣетъ мѣсто равенство

$$f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) = 0. \tag{20}$$

Дѣйствительно, если бы результатъ $f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ былъ отличенъ отъ нуля,—напримѣръ, если бы было $f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) > 0$,—то можно было бы указать два такихъ положительныхъ числа g и g', чтобы было

$$g < f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) < g'; \tag{21}$$

согласно теоремѣ о непрерывности, этимъ же неравенствамъ должны удовлетворять и нѣкоторыя приближенныя рацiональныя значенiя $a, b, c, \ldots$ чиселъ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, т. е. число $f(a, b, c, \ldots)$ оказалось бы положительнымъ, что противорѣчило бы условiю (19).

---

[15]) Такъ, напримѣръ, допустимъ, что для числа a опредѣлены въ отдѣльности границы a_1, a_1' и a_2, a_2', при чемъ $a_1 > a_2$, а $a_1' > a_2'$. Если мы заключимъ числа a въ границы a_1, a_2', то они будутъ лежать какъ между числами a_1 и a_1', такъ и между числами a_2 и a_2'.

Изложенное предложеніе имѣетъ мѣсто и для неравенствъ; только въ этомъ случаѣ для доказательства приходится пользоваться той формулировкой основной теоремы, которая дана въ пунктѣ 6.

Предположимъ, напримѣръ, что для всѣхъ раціональныхъ чиселъ $a, b, c, \ldots$, удовлетворяющихъ условію $\varphi(a, b, c, \ldots) > 0$, выполняется и неравенство $f(a, b, c, \ldots) > 0$; мы утверждаемъ, что то же соотношеніе имѣетъ мѣсто и для ирраціональныхъ чиселъ, т. е. что, если $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) > 0$, то и $f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) > 0$. Въ самомъ дѣлѣ, если бы неравенство $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) > 0$ было совмѣстимо съ неравенствомъ $f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) < 0$, то можно было бы выбрать пару отрицательныхъ чиселъ g и g' и пару положительныхъ чиселъ k и k' такъ, чтобы выполнялись неравенства

$$g < f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) < g', \quad k < \varphi(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) < k'.$$

Но тогда мы могли бы подобрать для чиселъ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ такія приближенныя значенія $a, b, c, \ldots$, чтобы число $\varphi(a, b, c, \ldots)$ имѣло положительное значеніе, а число $f(a, b, c, \ldots)$—отрицательное, что противорѣчило бы условію. Точно такъ же число $f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ не можетъ быть равно нулю; для доказательства обратимся къ той формулировкѣ основной теоремы, которая дана въ пунктѣ 6. Изъ этой теоремы слѣдуетъ, что, если бы число $f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ равнялось нулю, то можно было бы подобрать такія приближенныя значенія a, b, c, чтобы результатъ $f(a, b, c, \ldots)$ оказался отрицательнымъ числомъ, тогда какъ число $\varphi(a, b, c, \ldots)$ по прежнему имѣло бы положительное значеніе [16]).

Приведемъ теперь нѣсколько предложеній, составляющихъ частные случаи доказанной нами общей теоремы:

1) Для ирраціональныхъ чиселъ остаются въ силѣ перемѣстительный и сочетательный законы при сложеніи и умноженіи.

2) Вычитаніе есть дѣйствіе, обратное сложенію:

$$(\alpha - \beta) + \beta = \alpha.$$

---

[16]) Это предложеніе такъ же не вполнѣ справедливо, какъ и то, на которое авторъ ссылается. Справедливо только слѣдующее предложеніе: если для всѣхъ раціональныхъ значеній чиселъ $a, b, c, \ldots$, при которыхъ $\varphi(a, b, c, \ldots) > 0$, и $f(a, b, c, \ldots) > 0$, то при ирраціональныхъ значеніяхъ чиселъ $\alpha, \beta, \gamma \ldots$, при которыхъ $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) > 0$, имѣетъ мѣсто соотношеніе $f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) \geqq 0$; возможность равенства не исключается. Такъ, напримѣръ, неравенство

$$(a^2 - 2)^2 + (b^2 - 2)^2 > 0,$$

справедливое при всѣхъ раціональныхъ значеніяхъ чиселъ a и b, обращается въ равенство при $a = \pm\sqrt{2}$ и $b = \pm\sqrt{2}$.

3) Дѣленіе есть дѣйствіе, обратное умноженію:

$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \beta = \alpha.$$

4) Съ возрастаніемъ слагаемаго возрастаетъ и сумма.

5) Произведеніе положительныхъ сомножителей увеличивается съ возрастаніемъ любого изъ сомножителей и, конечно, еще больше возрастаетъ, если всѣ множители возрастаютъ.

6) Частное двухъ чиселъ убываетъ съ возрастаніемъ дѣлителя.

7) Разность двухъ чиселъ бываетъ положительнымъ или отрицательнымъ числомъ, смотря по тому, будетъ ли вычитаемое меньше или больше уменьшаемаго.

8) Степень числа, превосходящаго единицу, возрастаетъ съ увеличеніемъ показателя и при томъ безпредѣльно возрастаетъ.

9) Степень положительной правильной дроби есть число положительное, которое съ возрастаніемъ показателя можетъ быть сдѣлано сколь угодно малымъ.

На этомъ именно основаніи знаменатель дроби никогда не можетъ имѣть значеніе 0. Ибо, если бы мы пожелали приписать символу $\frac{a}{0}$ опредѣленное значеніе, то это противорѣчило бы предложенію 6).

§ 27. Безконечныя десятичныя дроби.

1. Обозначимъ черезъ A_n десятичную дробь съ произвольнымъ числомъ знаковъ до запятой и n знаками справа отъ запятой, такъ что A_0, напримѣръ, означаетъ нѣкоторое цѣлое число, которое можетъ быть и нулемъ. Положимъ, что намъ указанъ рядъ дѣйствій, т. е. какой-либо алгориѳмъ, при помощи котораго можно отъ десятичной дроби A_n перейти къ одной и только одной дроби A_{n+1}, содержащей тѣ же цифры и въ томъ же порядкѣ, что и дробь A_n, и, кромѣ того, еще одну прибавочную цифру справа. Предположимъ, что алгориѳмъ этотъ имѣетъ то свойство, что его можно примѣнять послѣдовательно неограниченное число разъ. Съ однимъ такимъ алгориѳмомъ, а именно съ приближеннымъ вычисленіемъ квадратнаго корня изъ неполныхъ квадратовъ, мы уже познакомились въ § 23. Подобный алгориѳмъ или, точнѣе говоря, опредѣляемый имъ рядъ цифръ съ запятой на опредѣленномъ мѣстѣ мы называемъ безконечной десятичной дробью [17].

---

[17]) Правило приближеннаго вычисленія квадратнаго корня даетъ намъ возможность послѣдовательно опредѣлить десятичные знаки корня; такъ что, если A_n есть корень, вычисленный съ приближеніемъ до n-го десятичнаго знака (приближенно меньшее его значеніе), то мы имѣемъ алгориѳмъ, дающій возможность опредѣлить A_{n+1}, т. е. дробь, состоящую изъ дроби A_n и еще одного опредѣленнымъ образомъ устанавливаемаго десятичнаго знака.

Каждой безконечной десятичной дроби можетъ быть отнесено нѣкоторое число слѣдующимъ образомъ.

Пусть

$$A'_n = A_n + 10^{-n}, \tag{1}$$

гдѣ $n > 0$, такъ что десятичная дробь A'_n получается изъ дроби A_n, если въ ней увеличить на одну единицу послѣднюю цифру (при этомъ, если эта послѣдняя цифра равна 9, то пишутъ вмѣсто нея нуль, а предпослѣднюю цифру увеличиваютъ на одну единицу). Если къ дроби A_n приписать $(n+1)$-ую цифру, то получимъ дробь A_{n+1}, такъ что

$$A_{n+1} = A_n + z10^{-n-1}, \quad A'_{n+1} = A_n + (z+1)10^{-n-1}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$A_n \leqq A_{n+1} < A'_{n+1} \leqq A'_n. \tag{2}$$

Такимъ образомъ, всѣ дроби A_n, A_{n+1}, A_{n+2}, ... порознь меньше дроби A'_n, а всѣ дроби A'_n, A'_{n+1}, A'_{n+2}, ... больше дроби A_n. Слѣдовательно, дроби A_n имѣютъ верхнюю границу, а дроби A'_n — нижнюю границу; обѣ эти границы должны необходимо совпадать, такъ какъ разность $A'_n - A_n = 10^{-n}$ при достаточно большомъ n можетъ быть сдѣлана сколь угодно малой. Число a, составляющее общую границу этихъ двухъ числовыхъ комплексовъ, называется численнымъ значеніемъ безконечной десятичной дроби. Число a заключено между двумя значеніями каждой пары A_n и A'_n; эти послѣднія называются нижнимъ и верхнимъ приближенными значеніями числа a; онѣ тѣмъ менѣе отличаются другъ отъ друга и отъ дроби a, чѣмъ больше число n. Такъ какъ числа A_n всѣ положительны, то a также есть число положительное.

2. Подобно тому, какъ каждой безконечной десятичной дроби мы относимъ нѣкоторое положительное число a, точно такъ же для каждаго положительнаго числа a можно опредѣлить соотвѣтствующую безконечную десятичную дробь. Всѣ раціональныя дроби, имѣющія знаменателемъ число 10^n, расположимъ въ порядкѣ по ихъ величинѣ и наибольшую изъ нихъ, не превосходящую числа a, обозначимъ черезъ A_n, такъ что

$$A_n \leqq a < A'_n. \tag{3}$$

Тогда найдется одна и только одна цифра z, удовлетворяющая неравенствамъ

$$A_{n+1} \leqq a < A'_{n+1}. \tag{4}$$

Такимъ образомъ можно наращать дробь A_n, приписывая къ ней справа каждый разъ одну опредѣленную цифру, при чемъ число a будетъ представлять собою верхнюю границу дробей A_n.

3. Разсмотримъ теперь вопросъ, могутъ ли двѣ различныя безконечныя десятичныя дроби имѣть одну и ту же численную величину.

Допустимъ, что двѣ различныя десятичныя дроби съ нижними приближенными значеніями A_n и B_n имѣютъ одинаковую численную величину a. Дроби A_n и B_n, начиная съ нѣкотораго значенія указателя n, должны отличаться другъ отъ друга одной или нѣсколькими цифрами; пусть a_k и b_k обозначаютъ первыя несходныя между собою цифры дробей A_n и B_n; допустимъ еще, что $a_k < b_k$. Тогда имѣемъ:

$$\begin{aligned} B_k - A_k &= (b_k - a_k)10^{-k}, \\ B_k - A'_k &= (b_k - a_k - 1)10^{-k}. \end{aligned} \tag{5}$$

Если $n \geqq k$, то, согласно формулѣ (2),

$$B_n \geqq B_k \quad \text{и} \quad A'_n \leqq A'_k,$$

такъ что

$$B_n - A'_n \geqq (b_k - a_k - 1)10^{-k}. \tag{6}$$

Такъ какъ съ увеличеніемъ числа n лѣвая часть безпредѣльно уменьшается, а число $(b_k - a_k - 1)10^{-k}$ не мѣняется, то неравенство (6) возможно лишь при условіи: $b_k - a_k - 1 = 0$, такъ что

$$b_k = a_k + 1. \tag{7}$$

Отсюда слѣдуетъ, что при любомъ значеніи $n \geqq k$, согласно формулѣ (6), получимъ:

$$B_n = A'_n = A_n + 10^{-n}. \tag{8}$$

Обозначивъ $(n+1)$-ыя цифры черезъ a_{n+1} и b_{n+1}, получимъ:

$$B_n + b_{n+1}10^{-n-1} = A_n + (a_{n+1} + 1)10^{-n-1} \text{ [18]}, \tag{9}$$

или, подставляя сюда значеніе числа B_n изъ формулы (8):

$$10^{-n} + b_{n+1}10^{-n-1} = (a_{n+1} + 1)10^{-n-1},$$

т. е.

$$a_{n+1} = b_{n+1} + 9.$$

Такъ какъ цифра a_{n+1} не можетъ превосходить девяти, то заключаемъ, что, если только $n \geqq k$, то $b_{n+1} = 0$ и $a_{n+1} = 9$. А въ такомъ случаѣ

---

[18]) Это есть равенство $B_{n+1} = A'_{n+1}$.

обѣ десятичныя дроби A_n и B_n дѣйствительно стремятся къ одному и тому же предѣлу: къ конечной десятичной дроби B_k. Напримѣръ, десятичныя дроби 0,999 . . ., 1,000 . . . имѣютъ одинъ и тотъ же предѣлъ, одно и то же численное значенiе — единицу.

4. Сообразно этому, теорiю ирраціональныхъ чиселъ можно было бы обосновать, исходя изъ понятiя о безконечныхъ десятичныхъ дробяхъ. Для этого пришлось бы производить сѣченiя не въ области всѣхъ раціональныхъ дробей, но лишь въ области (конечныхъ) десятичныхъ дробей. Съ одной стороны, это имѣло бы то удобство, что установленiе новаго понятiя примыкало бы непосредственно къ алгориѳму, обычно употребляемому для вычисленiя ирраціональныхъ чиселъ, но зато, съ другой стороны, доказательства теоремъ были бы болѣе сложны. При первомъ способѣ изложенiя (принятомъ нами) любому раціональному числу соотвѣтствуютъ два различныхъ сѣченiя; при второмъ же способѣ этимъ свойствомъ обладаютъ лишь десятичныя дроби.

5. И вообще, если только какая-либо система S раціональныхъ чиселъ обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что, какъ бы мы ни выбирали два любыхъ раціональныхъ числа, между ними все еще будутъ заключаться числа системы S, то такая система даетъ возможность такъ же обосновать понятiе объ ирраціональномъ числѣ, какъ это было выполнено нами при помощи системы R всѣхъ раціональныхъ чиселъ. Въ самомъ дѣлѣ, для каждаго сѣченiя Z/Z' въ области чиселъ S можно установить отвѣчающее ему сѣченiе A/A' въ области чиселъ R, если отнести къ группѣ A всѣ числа системы R, которыя меньше хотя бы одного числа группы Z, а къ группѣ A' — всѣ числа, которыя больше хотя бы одного числа группы Z'. Точно такъ же можно, наоборотъ, каждому сѣченiю A/A' въ области R отнести нѣкоторое сѣченiе Z/Z' въ области S.

§ 28. Обращенiе обыкновенныхъ дробей въ десятичныя.

1. Обыкновенная дробь обратима въ десятичную лишь въ томъ случаѣ, если по умноженiи на нѣкоторую степень десяти, она даетъ въ произведенiи цѣлое число. Для этого необходимо и достаточно, чтобы данная дробь въ несократимомъ видѣ m/n имѣла въ знаменателѣ число n, не содержащее другихъ первоначальныхъ множителей, кромѣ 2 и 5, т. е. чтобы было $n = 2^a 5^b$, гдѣ a и b суть цѣлыя числа; если тогда возьмемъ произвольное цѣлое число c, которое не меньше большаго изъ чиселъ a и b, и помножимъ нашу дробь на 10^c, то получимъ въ произведенiи цѣлое число $10^c m/n$.

Если же дробь m/n взята произвольно, то связь ея съ десятичными дробями можетъ быть установлена слѣдующимъ образомъ.

Произведя дѣленіе числа m на число n, мы получимъ частное ζ и остатокъ m_1, который меньше дѣлителя n, такъ что

$$m = \zeta n + m_1. \tag{1}$$

Здѣсь ζ обозначаетъ цѣлое число, положительное или нуль. Остатокъ m_1 также есть положительное число, которое меньше дѣлителя n, и равенъ нулю лишь въ томъ случаѣ, когда число m дѣлится безъ остатка на число n, т. е. когда m/n есть цѣлое число.

Оставляя тотъ же дѣлитель n, дѣлимъ на него число $10m_1$; получимъ:

$$10m_1 = \zeta_1 n + m_2 \quad \text{и} \quad 10m_1 \geqq \zeta_1 n, \tag{2}$$

такъ что $\zeta_1 < 10$. Слѣдовательно, ζ_1 означаетъ нѣкоторую цифру (0, 1, 2, ... 9). Если $m_2 = 0$, то число m/n равно десятичной дроби ζ, ζ_1. Если же число $m_2 > 0$, то оно меньше дѣлителя n, и мы можемъ продолжать дѣленіе по тому же правилу:

$$\left.\begin{aligned} 10m_2 &= \zeta_2 n + m_3, \\ 10m_3 &= \zeta_3 n + m_4, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 10m_s &= \zeta_s n + m_{s+1}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

пока остатки $m_1, m_2, \ldots m_s$ отличны отъ нуля. Числа $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_s$ всѣ суть цифры, т. е. не превосходятъ девяти, а число ζ можетъ быть и больше девяти. Изъ равенствъ (1), (2) и (3) слѣдуетъ:

$$\frac{m}{n} = \zeta + \frac{m_1}{n},$$

$$\frac{m_1}{n} = \zeta_1 10^{-1} + \frac{m_2}{n} 10^{-1},$$

$$\frac{m_2}{n} = \zeta_2 10^{-1} + \frac{m_3}{n} 10^{-1} \quad \text{и т. д.}$$

Отсюда найдемъ:

$$\frac{m}{n} = \zeta + \zeta_1 10^{-1} + \zeta_2 10^{-2} + \cdots + \zeta_s 10^{-s} + \frac{m_{s+1}}{n} 10^{-s},$$

или же, представляя правую часть послѣдняго равенства въ видѣ десятичной дроби,

$$\frac{m}{n} = \zeta, \zeta_1 \zeta_2 \cdots \zeta_s + \frac{m_{s+1}}{n} 10^{-s}. \tag{4}$$

Если послѣдній остатокъ $m_{s+1} = 0$, то дробь m/n можетъ быть представлена въ видѣ десятичной дроби; это имѣетъ мѣсто лишь въ выше-упомянутомъ случаѣ, когда число n имѣетъ форму $2^a 5^b$ (въ предположеніи, что дробь m/n приведена къ несократимому виду). Въ другихъ случаяхъ вычисленіе, которое, очевидно, представляетъ собою не что иное, какъ обыкновенное дѣленіе элементарной ариѳметики, можетъ быть продолжено безконечно, такъ что въ формулѣ (4) число s можетъ быть сдѣлано сколь угодно большимъ. Въ этомъ случаѣ десятичная дробь

$$\delta_s = \zeta, \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \ldots \zeta_s \tag{5}$$

всегда меньше обыкновенной дроби

$$\gamma = \frac{m}{n}; \tag{6}$$

такъ какъ $m_{s+1} < n$, то разность $\gamma - \delta_s$ меньше дроби 10^{-s}. Слѣдовательно, разность эта тѣмъ меньше, чѣмъ больше число десятичныхъ знаковъ дроби δ_s; она можетъ быть сдѣлана сколь угодно малой, если выбрать число s достаточно большимъ. Поэтому обыкновенныя дроби могутъ быть съ любой степенью точности замѣнены десятичными во всѣхъ тѣхъ приложеніяхъ, гдѣ числа вообще извѣстны лишь приблизительно: напримѣръ, въ вычисленіяхъ, гдѣ данныя суть результаты измѣреній. Десятичная дробь δ_s называется тогда **приближеннымъ значеніемъ** обыкновенной дроби γ. Вычисленіе десятичной дроби δ_s по заданной дроби γ называется **обращеніемъ** обыкновенной дроби въ десятичную,

Въ равенствѣ (4) часто опускаютъ остатокъ $m_{s+1}/10^s n$; вмѣсто него ставятъ многоточіе и этимъ выражаютъ, что дробь безконечна:

$$\frac{m}{n} = \zeta, \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \ldots .$$

Для вычисленія цифръ $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ нѣтъ надобности приводить предварительно дробь m/n къ несократимому виду, т. е. въ этомъ отношеніи безразлично, имѣютъ ли числа m и n общаго множителя или нѣтъ.

2. Рядъ цифръ

$$Z = \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4 \ldots$$

называется **мантиссой** дроби m/n (Gauss, „Disq. arithmeticae", Art. 312. Въ этомъ сочиненіи Гауссъ впервые сталъ употреблять это слово, которымъ раньше пользовались въ теоріи Бригговыхъ логариѳмовъ, въ указанномъ въ текстѣ смыслѣ).

Мантисса имѣетъ конечное число цифръ, если дробь m/n можетъ быть точно выражена въ видѣ десятичной дроби; въ противномъ случаѣ число цифръ мантиссы можно увеличивать безпредѣльно. Двѣ мантиссы

$$Z = \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \ldots$$

и

$$Z' = \zeta'_1 \zeta'_2 \zeta'_3 \ldots$$

называются **отличными другъ отъ друга**, если можно найти въ нихъ хотя бы по одному десятичному знаку z_s и z'_s, которые отличны другъ отъ друга по величинѣ, но занимаютъ въ мантиссахъ одно и то же мѣсто.

Дроби, различающіяся между собою цѣлымъ числомъ, имѣютъ всѣ одну и ту же мантиссу; поэтому, для того, чтобы вычислить мантиссы всѣхъ дробей со знаменателемъ n, достаточно разсмотрѣть однѣ лишь правильныя дроби m/n.

Докажемъ слѣдующую теорему:

Отличныя другъ отъ друга правильныя дроби γ и γ' имѣютъ различныя мантиссы [19].

Для доказательства предположимъ, что $\gamma' > \gamma$; найдемъ такое число s, чтобы было

$$10^s(\gamma' - \gamma) > 1$$

(найти такое число s всегда возможно: см. § 19, 8); тогда получимъ:

$$\gamma' > \gamma + 10^{-s}. \tag{7}$$

Положимъ, что

$$\delta_s = 0,\ z_1 z_2 \dots z_s, \quad \delta'_s = 0,\ z'_1 z'_2 \dots z'_s;$$

тогда, какъ намъ уже извѣстно (§ 28, 1),

$$\gamma > \delta_s, \quad \gamma' < \delta'_s + 10^{-s};$$

принимая во вниманіе неравенство (7), найдемъ:

$$\delta'_s + 10^{-s} > \gamma' > \gamma + 10^{-s} > \delta_s + 10^{-s};$$

слѣдовательно, $\delta'_s > \delta_s$. Поэтому мантиссы Z и Z' дробей γ и γ' отличаются другъ отъ друга, по крайней мѣрѣ, въ s-мъ десятичномъ знакѣ (если не въ которомъ-нибудь изъ предыдущихъ).

Дополнимъ доказанную теорему другой, аналогичной:

Нѣтъ такой правильной дроби γ, мантисса которой состояла бы только изъ однѣхъ девятокъ.

Въ самомъ дѣлѣ, при достаточно большомъ s мы найдемъ, что $10^s(1-\gamma) > 1$; слѣдовательно, $1 > \gamma + 10^{-s}$ и a fortiori $1 > \delta_s + 10^{-s}$. Но если бы всѣ цифры $z_1, z_2, \dots, z_s$ были девятками, то мы нашли бы равенство $\delta_s + 10^{-s} = 1$, что противорѣчило бы предыдущему неравенству. Поэтому уже s-ый десятичный знакъ (если не который-нибудь изъ предыдущихъ) мантиссы дроби γ представляетъ собой цифру, меньшую девяти.

---

[19]) Это есть предложеніе, обратное тому, которое доказано въ § 27, 3.

Каждая обыкновенная дробь производитъ сѣченіе въ совокупности безконечныхъ десятичныхъ дробей; поэтому и обыкновенныя дроби находятъ себѣ мѣсто въ той области чиселъ, которая опредѣляется совокупностью безконечныхъ десятичныхъ дробей.

Впослѣдствіи мы разсмотримъ подробнѣе нѣкоторыя своеобразныя особенности, присущія тѣмъ безконечнымъ десятичнымъ дробямъ, которыя соотвѣтствуютъ раціональнымъ дробямъ.

§ 29. Историческія свѣдѣнія объ ирраціональныхъ числахъ.

Теорія ирраціональныхъ чиселъ также начинается съ Евклида. Пятая книга „Началъ" посвящена отношеніямъ. Опредѣленія 3 нельзя признать опредѣленіемъ слова „отношеніе"; но опредѣленіе 4 устанавливаетъ, въ какомъ случаѣ двѣ величины имѣютъ отношеніе, — именно: если меньшая изъ нихъ, будучи повторена достаточное число разъ, превзойдетъ большую*). Далѣе опредѣленія 5 и 7 строго устанавливаютъ, въ какомъ случаѣ два отношенія равны и въ какомъ случаѣ одно отношеніе больше другого (§ 31).

Опредѣленіе 4 замѣняетъ то, что мы въ настоящее время называемъ аксіомой непрерывности; послѣдняя въ книгѣ X, 1 находитъ себѣ слѣдующее выраженіе: если мы отъ нѣкоторой величины отнимемъ больше половины, отъ остатка вновь отнимемъ больше половины его и т. д., то мы такимъ образомъ всегда придемъ къ величинѣ меньшей, нежели любая заданная величина (вмѣсто „больше половины" можно было бы брать любую дробь).

Что существуютъ соизмѣримыя и несоизмѣримыя величины, т. е., въ нашей терминологіи, раціональныя и ирраціональныя отношенія, это, повидимому, ясно понималъ уже Пиѳагоръ. Евклидъ въ книгѣ X, 9 показываетъ, что стороны двухъ квадратовъ, площади которыхъ не относятся между собой, какъ полные квадраты, несоизмѣримы. Частный случай этого предложенія разбирается особо въ книгѣ X, 117, гдѣ мы находимъ два доказательства, что діагональ квадрата несоизмѣрима съ его стороной. Это доказательство, намѣченное еще Аристотелемъ, обнаруживаетъ, что нѣтъ двухъ цѣлыхъ взаимно простыхъ чиселъ x и y, которыя удовлетворяютъ соотношенію $2x^2 = y^2$. Въ самомъ дѣлѣ, если бы такое равенство имѣло мѣсто, то y должно было бы быть четнымъ числомъ, а потому y^2

*) Это положеніе совпадаетъ съ V-ымъ постулатомъ въ сочиненіи Архимеда „О цилиндрѣ и конусѣ" (изданіе Гейберга, т. I, стр. 11); поэтому оно извѣстно подъ названіемъ „аксіомы Архимеда" (См. O. Stolz, „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik", I; Mathematische Annalen, 39; Hilbert, „Grundlagen der Geometrie"). Исторически было бы правильнѣе называть это предложеніе Евклидовымъ; но это могло бы привести къ смѣшенію съ другими аксіомами Евклида.

должно было бы дѣлиться на 4. Но въ такомъ случаѣ x^2 должно было бы дѣлиться на 2, и x было бы четнымъ числомъ. Между тѣмъ это невозможно, такъ какъ x и y не имѣютъ общихъ множителей.

Если бы Евклидъ объединилъ всѣ равныя между собой отношенія въ одну идею (въ одно родовое понятіе), то онъ далъ бы строгое опредѣленіе общаго понятія о числѣ (раціональномъ и ирраціональномъ). Но такая мысль далека отъ тѣхъ точекъ зрѣнія, на которыхъ стоялъ Евклидъ *). Лишь въ новѣйшее время сознательно установлены такія системы понятій (категоріи), которыя можно разсматривать, какъ общее опредѣленіе числа. Всѣ эти системы равносильны, если между ними можетъ быть установлено взаимно-однозначное сопряженіе.

Соотвѣтствующіе элементы всѣхъ этихъ системъ, равно какъ и тѣхъ системъ, которыя еще, быть можетъ, будутъ построены со временемъ, могутъ быть, въ свою очередь, объединены въ одно родовое понятіе, которое представляло бы понятіе о числѣ въ еще болѣе глубокомъ смыслѣ. Изъ этихъ системъ, которыя, такимъ образомъ, могутъ быть разсматриваемы, какъ представители понятія о числѣ, наиболѣе важными и наиболѣе простыми являются тѣ, которыя установлены Р. Дедекиндомъ и Г. Канторомъ. Оба автора исходятъ уже изъ понятія о раціональномъ числѣ, которое они принимаютъ, какъ извѣстное. Дедекиндъ **) построилъ понятіе о сѣченіи (въ области раціональныхъ чиселъ, ср. § 24, 4). Канторъ же примѣняетъ для той же цѣли понятіе о числовыхъ рядахъ ***). Въ тѣсной связи съ числовыми рядами Кантора находятся такъ называемые „варіанты" (variantes), къ которымъ прибѣгаетъ Мерэ для опредѣленія ирраціональнаго числа ****). Болѣе подробныя свѣдѣнія о литературѣ этого вопроса можно найти въ статьѣ Прингсгейма „Ирраціональныя числа и сходимость безконечныхъ процессовъ" въ I-омъ томѣ „Энциклопедіи математическихъ наукъ". Еще обстоятельнѣе вопросъ изложенъ Молькомъ въ I-омъ томѣ французскаго изданія „Энциклопедіи".

Нельзя не отмѣтить, что Кронекеръ вовсе отвергаетъ понятіе объ ирраціональномъ числѣ и стремится облечь всю математику въ такую

---

*) Евклидъ опредѣляетъ понятія „раціональное и „ирраціональное" (ῥητός, ἄλογος) такимъ образомъ, что онъ нѣкоторый опредѣленный отрѣзокъ и всѣ соизмѣримые съ нимъ отрѣзки называетъ раціональными, а всѣ несоизмѣримые съ нимъ отрѣзки — ирраціональными. Впрочемъ, квадратные корни онъ при этомъ относитъ къ раціональнымъ числамъ.

**) R. Dedekind. „Stetigkeit und Irrazionale Zahlen". Braunschweig, 1872.
Имѣется русскій переводъ, принадлежащій С. Шатуновскому:
Р. Дедекиндъ. „Непрерывность и ирраціональныя числа". Одесса. 1906. Mathesis.

***) Mathematische Annalen, 5.

****) Ch. Méray. Revue des sociétées savantes: sc. math. 1869, Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale. Première partie, chapitre II. Paris, 1894.

форму, чтобъ она оперировала только цѣлыми числами. Возможность такой постановки вопроса, какъ замѣчаетъ Дедекиндъ, высказывалъ уже Дирихле. Но именно для того, чтобы избѣжать необычайной сложности, которая съ такой постановкой связана, наша наука и расширяла систематически понятіе о числѣ; это производилось постепенно, сообразно обнаруживавшейся потребности, въ безукоризненно логической формѣ, и именно поэтому точка зрѣнія Кронекера по сіе время не нашла себѣ послѣдователей.

Нужно, однако, сказать, что изслѣдованія, относящіяся къ теоріи комплексовъ, не во всѣхъ пунктахъ привели къ достаточно яснымъ результатамъ. Такъ, въ самое послѣднее время возникли нѣкоторыя сомнѣнія, которыя связаны съ противорѣчивымъ понятіемъ о „комплексѣ всѣхъ комплексовъ“ и которыя еще недостаточно выяснены. По этому вопросу нужно упомянуть сочиненія Фреге „Основные законы ариѳметики“ и Рёсселя „Основанія математики“ *). Послѣднее сочиненіе содержитъ также и другія интересныя изслѣдованія, относящіяся къ теоріи познанія. Въ „Отчетахъ Гейдельбергскаго конгресса 1904 г.“ **) Гильбертъ далъ обзоръ своихъ изслѣдованій, которыя также еще нуждаются въ дальнѣйшемъ выясненіи.

---

*) Frege. „Grundgesetze der Arithmetik“. 2 Bde, Jena, 1893. B. Russel. „The Principles of mathematics“. Cambridge, 1903.

**) Verhandlungen des dritten Kongresses der Mathematiker in Heidelberg vom 8 bis 13 August 1904.

ГЛАВА V.

Отношенія.

§ 30. Измѣримость.

1. Теперь намъ предстоитъ разсмотрѣть вопросъ, какимъ образомъ числа, которыя, какъ мы уже не разъ указывали, представляютъ собой продуктъ творчества нашего духа, находятъ себѣ примѣненіе во внѣшнемъ мірѣ. Что касается чиселъ натуральнаго ряда, то ими мы пользуемся при счетѣ; это было изложено въ первой главѣ, и мы не будемъ здѣсь возвращаться къ этому вопросу. Раціональныя же дроби и числа ирраціональныя находятъ себѣ примѣненіе въ томъ процессѣ, который называется измѣреніемъ.

Измѣримо все то, что производитъ на наши чувства впечатлѣнія различной интенсивности: напряженность (яркость) свѣта, температура, высота звука, сила звука, тяжесть, твердость, боль и т. п. Непосредственное чувственное воспріятіе доставляетъ намъ лишь ту неопредѣленную оцѣнку впечатлѣній, которая выражается словами „больше“ и „меньше“. Точныя измѣренія возможны лишь послѣ того, какъ между даннымъ явленіемъ, съ одной стороны, и временемъ и пространствомъ, съ другой, установлена такая связь, что каждому усиленію впечатлѣнія, относящагося къ этому явленію, соотвѣтствуетъ опредѣленное измѣненіе въ пространствѣ или во времени; связь эта устанавливается помощью измѣрительныхъ приборовъ. Пространственныя величины мы различаемъ троякаго рода: длину, площадь и объемъ: геометрія даемъ намъ способы свести измѣреніе всѣхъ этихъ трехъ величинъ къ измѣренію длинъ.

Возможность измѣрять пространство основывается на предположеніи, что существуетъ тѣло, которое мы можемъ переносить изъ одного мѣста на другое, не измѣняя его состоянія во всѣхъ прочихъ отношеніяхъ. Подобное тѣло называется масштабомъ. Ясно, что предположеніе это заключаетъ въ себѣ нѣкоторое допущенie какъ о природѣ пространства, такъ и о свойствахъ тѣлъ, его наполняющихъ [1]).

Измѣренie промежутковъ времени основывается на допущенiи, что можно наблюдать нѣкоторый процессъ, который одинаково протекаетъ во всякое время: таково, напримѣръ, движенie часовой стрѣлки, если оно всегда происходитъ равномѣрно; самымъ совершеннымъ образцомъ часовъ мы считаемъ вращенie земли вокругъ ея оси [2]).

Третью группу основныхъ величинъ составляютъ массы, которыя мы измѣряемъ помощью вѣсовъ: это измѣренie предполагаетъ существованie правильныхъ вѣсовъ и неизмѣнямость массъ.

Всѣ эти предположенiя не совсѣмъ согласуются съ дѣйствительностью: менѣе всего съ ней расходится первое допущенie, наиболѣе послѣднее: въ качествѣ идеальныхъ мѣръ приходится разсматривать лишь нѣкоторыя среднiя значенiя, которыя путемъ долгаго и многократнаго опыта образовались въ нашемъ представленiи, какъ результатъ взаимной компенсацiи отступленiй въ ту и въ другую сторону отъ истинныхъ мѣръ.

2. Въ области чистыхъ чиселъ произвольно созданныя нами понятiя „больше" и „меньше" имѣютъ отвлеченный характеръ и лишены наглядности: наоборотъ, въ области измѣряемыхъ предметовъ внѣшняго мiра „большее" и меньшее" являются уже наглядными представленiями, находящимися въ связи съ той или другой степенью или силой чувственныхъ впечатлѣнiй. Даже съ такими выраженiями, какъ „очень большое", „очень малое", „приблизительно" мы связываемъ нѣкоторыя представленiя, хотя и не совсѣмъ опредѣленныя, — напримѣръ: мы называемъ очень малыми тѣ величины, которыхъ мы не можемъ или почти не можемъ непосредственно воспринять нашими чувствами, а только съ помощью инструментовъ.

Такъ какъ никакое измѣренie не можетъ быть выполнено съ абсолютной точностью, и, кромѣ того, наши геометрическiя построенiя не даютъ намъ дѣйствительныхъ точекъ, линiй и поверхностей, то эмпирически полученные результаты измѣренiй вполнѣ удовлетворительно представляются одними лишь рацiональными числами: здѣсь никогда не сказывается надобность въ дальнѣйшемъ развитiи понятiя о числѣ.

---

[1]) Утвержденie это врядъ ли соотвѣтствуетъ современному взгляду на пространство и геометрiю.

[2]) Это утвержденie, кажущееся столь яснымъ на первый взглядъ, въ дѣйствительности не имѣетъ содержанiя. Входить въ подробное выясненie этого мы не можемъ. Читатель можетъ найти обстоятельный анализъ этого вопроса въ книгѣ H. Poincaré „La science et l'hypothèse" (имѣется русскiй переводъ подъ названiемъ „Наука и гипотеза"), а еще лучшiй—въ статьѣ того же автора подъ заглавiемъ „Mesure du temps", напечатанной въ „Revue de Métaphysique et de Morale" за 1898 г.

Тѣмъ не менѣе мы не можемъ отказаться отъ мысли, что, напримѣръ, діагональ квадрата или окружность круга имѣютъ опредѣленную длину, выражаемую опредѣленнымъ числомъ; то же имѣетъ мѣсто и для промежутковъ времени и вѣса; мы склонны принять, что измѣряемые объекты представляютъ собой эквиваленты всей совокупности чиселъ *).

3. Условія измѣримости элементовъ нѣкотораго комплекса можно, на нашъ взглядъ, выразить въ слѣдующихъ положеніяхъ:

1. Два элементы a и b даннаго комплекса либо равны другъ другу, либо одинъ изъ нихъ больше, а другой меньше.

2. Если a есть нѣкоторый элементъ этого комплекса, то можно указать элементы, которые меньше элемента a (безконечная дѣлимость).

3. Если a и b суть нѣкоторые элементы нашего комплекса (равные другъ другу или различные), то въ этомъ же комплексѣ существуетъ элементъ $c = a + b$, представляющій собою сумму обоихъ элементовъ и превосходящій каждое изъ слагаемыхъ.

При суммированіи имѣетъ мѣсто перемѣстительный и сочетательный законы сложенія (§ 8).

4. Если элементъ b меньше элемента c, то существуетъ опредѣленный элементъ $a = c - b$, имѣющій то свойство, что $a + b = c$.

5. Повторное суммированіе нѣсколькихъ равныхъ другъ другу элементовъ a приводитъ къ понятію объ элементѣ ma, кратномъ a, гдѣ m означаетъ число натуральнаго ряда. Относительно кратныхъ элементовъ имѣетъ мѣсто принципъ Архимеда (Евклида):

Если a и b суть два произвольные элемента нашей группы, то можно указать элементъ ma, кратный элемента a, который превосходитъ элементъ b.

Такимъ образомъ, среди элементовъ измѣримаго комплекса нѣтъ ни наибольшаго ни наименьшаго; изъ свойствъ 2), 3) и 4) слѣдуетъ, что между двумя любыми элементами заключены еще другіе элементы. Кромѣ того, должно быть выполнено слѣдующее условіе:

6. Если a обозначаетъ какой-либо элементъ комплекса, а n есть число натуральнаго ряда, то существуетъ элементъ b, удовлетворяющій равенству $nb = a$. Этотъ элементъ b называется n-ой частью элемента a

*) Понятіе о непрерывности, столь простое и наглядное въ области отвлеченныхъ чиселъ, представляетъ почти непреодолимыя трудности въ области измѣряемыхъ величинъ, т. е. въ области объектовъ внѣшняго міра.

П. Дю Буа-Реймонъ (Paul du Bois-Reymond) разработалъ этотъ вопросъ въ своемъ трудѣ „Allgemeine Functionentheorie“ (Tübingen, 1882). Онъ пришелъ къ тому выводу, что по этому вопросу равно возможны и равно правильны двѣ взаимно другъ друга исключающія точки зрѣнія: идеалистическая и эмпирическая.

и обозначается такъ: $b = a/n$. Что существуетъ одинъ лишь элементъ b, легко заключить изъ изложенныхъ посылокъ. Дѣйствительно, если $b' > b$, то элементъ $nb' = nb + n(b' - b)$ превосходитъ элементъ nb.

§ 31. Отношенія.

1. Соизмѣримыми называются такіе два элемента a и b измѣримаго комплекса, для которыхъ можно указать два натуральныхъ числа p и q, удовлетворяющихъ условію

$$qa = pb. \tag{1}$$

Изъ равенства (1) видно, что, раздѣливъ (согласно § 30, 6) элементъ a на p частей, а элементъ b на q частей, мы получимъ равныя другъ другу части:

$$a/p = b/q = d, \tag{2}$$

такъ что $a = pd$, $b = qd$. Элементъ d, слѣдовательно, есть общая мѣра элементовъ a и b (отсюда терминъ: „соизмѣримый“).

Въ этомъ случаѣ выражаются такъ: отношеніе элементовъ a и b равно отношенію чиселъ p и q.

Равенство (1) остается въ силѣ, если элементы a и b умножить или раздѣлить на одно и то же число, а также, есла числа p и q умножить на одно и то же число или раздѣлить на общаго дѣлителя. Поэтому отношеніе чиселъ p и q остается неизмѣннымъ, если не мѣняется численное значеніе дроби p/q, и, такимъ образомъ, отношенія всѣхъ цѣлыхъ чиселъ, а, слѣдовательно, и всякихъ двухъ соизмѣримыхъ элементовъ измѣримаго комплекса можно привести въ однозначное соотвѣтствіе съ раціональными дробями. Равенство отношеній, помимо вышеприведенной формы (1), можетъ быть представлено еще такъ:

$$a : b = p : q \quad \text{или} \quad a/b = p/q;$$

отношеніе a/b считается большимъ, нежели отношеніе $a'/b' = p'/q'$, если дробь p/q больше дроби p'/q'.

Элементы a и b называются соотвѣтственно числителемъ и знаменателемъ отношенія. Если $a = b$, то отношеніе ихъ равно 1. Если дано отношеніе p/q, то величина одного изъ элементовъ a и b можетъ быть взята произвольно. Если, напримѣръ, даны: p, q и b, то, раздѣливъ элементъ pb на q частей, получимъ элементъ a, удовлетворяющій равенству (1).

2. Если мы фиксируемъ элементъ b, то всякому другому элементу a того же комплекса, соизмѣримому съ элементомъ b, будетъ, такимъ образомъ, отвѣчать опредѣленное число p/q; самому же элементу b отвѣчаетъ при этомъ число 1. Онъ называется поэтому единицей системы

измѣренія. Въ выборѣ единицы мы ничѣмъ не ограничены и руководимся лишь нашими удобствами. Однако, въ высшей степени важно, особенно для научной практики, чтобы единица была строго опредѣлена и чтобы въ любой моментъ мы имѣли возможность получить ее въ неизмѣнномъ видѣ. Конечно, съ абсолютной точностью требованіе это не можетъ быть выполнено, но путемъ обширныхъ вспомогательныхъ средствъ этому требованію стараются, по возможности, удовлетворить.

Съ древнихъ временъ за единицы времени принимаютъ сутки *) и ихъ подраздѣленія: часы, минуты и секунды. Дѣленіе на 24 и 60 частей также относится къ глубокой древности, и мы съ нимъ настолько сроднились, что трудно даже въ будущемъ ожидать, что оно будетъ замѣнено другимъ подраздѣленіемъ, хотя бы, напримѣръ, десятичнымъ.

Что касается мѣръ длины и массы (послѣднія въ обиходѣ совпадаютъ съ мѣрами вѣса), то еще въ недалекомъ прошломъ здѣсь царило самое пестрое разнообразіе и даже неопредѣленность. Въ 1799 г. французское республиканское правительство ввело новую единицу длины — метръ. Хотя первоначально мѣру эту опредѣляли, какъ одну сорокамилліонную часть земного меридіана, но въ дѣйствительности эталонъ этой мѣры представляетъ собою произвольно выбранный, строго опредѣленный и тщательно сохраняемый нормальный метръ. Большинство культурныхъ государствъ примкнуло къ состоявшейся въ 1875 г. интернаціональной метрической конвенціи: въ нихъ метръ служитъ узаконенной единицей длины, при чемъ въ дальнѣйшихъ подраздѣленіяхъ строго проведенъ принципъ десятичной системы [3]).

На метрической единицѣ длины основанъ выборъ единицъ для мѣръ поверхностей и объемовъ, каковыми являются квадратный метръ и кубическій метръ или ихъ десятичныя доли; точно такъ же и единица массы находится въ связи съ единицей длины: единица массы — граммъ — это масса кубическаго сантиметра воды въ состояніи наибольшей ея плотности **).

Углы также образуютъ измѣримый комплексъ особаго рода. Измѣреніе элементовъ этого комплекса на практикѣ сводится къ измѣренію длины, а именно — къ отсчету на раздѣленномъ кругѣ.

Однако, углы имѣютъ свою особую единицу и даже двѣ единицы: одна употребляется для практическихъ цѣлей, другая — больше въ теоре-

*) Точнѣе: среднія солнечныя сутки, т. е. среднюю величину промежутка времени между двумя кульминаціями солнца.

[3]) Въ Россіи метрическая система введена факультативно, т. е. какъ разрѣшенная для торговой практики система мѣръ, но не обязательная; точно такъ же обстоитъ дѣло и въ Англіи.

**) Ср. статью Runge „Mass und Messen“ въ „Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften“.

тическихъ изслѣдованіяхъ. Чтобы получить первую единицу, дѣлятъ всю окружность на 360 равныхъ частей, которыя называются градусами. Градусъ подраздѣляется на 60 минутъ, минута, въ свою очередь, на 60 секундъ. Прямой уголъ содержитъ 90 градусовъ, выпрямленный уголъ — 180 градусовъ. Для сокращенія градусы, минуты и секунды изображаютъ еще, напримѣръ, такъ: $57^0\ 17'\ 44{,}8''$; читаютъ: 57 градусовъ, 17 минутъ, 44,8 секунды.

Второй единицей угловъ служитъ уголъ, дуга котораго по своей длинѣ равна радіусу. При такомъ выборѣ единицы уголъ въ 180 градусовъ измѣряется числомъ $\pi = 3{,}14159265\ldots$, т. е. числомъ, выражающимъ длину полуокружности, радіусъ которой равенъ 1. Уголъ въ одинъ градусъ измѣряется числомъ 0,0174532925, а уголъ въ одну секунду — числомъ 0,0000048481. Число 1 представляетъ собою мѣру угла въ $57^0\ 17'\ 44{,}8''$, или въ 206264,8 секунды.

Числа, выражающія собою результатъ измѣренія, могутъ быть, собственно говоря, лишь положительными. Тѣмъ не менѣе часто оказывается весьма полезнымъ употреблять и отрицательныя числа — тамъ, гдѣ между измѣряемыми величинами нужно выразить соотношеніе противоположности. При этомъ число не будетъ, собственно говоря, выражать измѣряемой длины, но представитъ нѣкоторую точку, которую получимъ, отложивъ измѣряемую величину отъ нѣкоторой опредѣленной начальной точки. При такомъ условіи положительныя числа выразятъ точки, лежащія по одну сторону отъ начала, отрицательныя числа — точки по другую сторону отъ начала. Нагляднѣе всего это видно на измѣреніи длины и времени, хотя вышеизложенныя соображенія находятъ себѣ примѣненіе и при измѣреніи скоростей, силъ и многихъ другихъ величинъ. При этомъ обнаруживается то удобство, что не только сложеніе, но и вычитаніе можетъ быть всегда выполнено.

§ 32. Физическія мѣры.

1. Измѣряемые предметы, собственно говоря, могутъ измѣряться лишь единицами того же рода, что и измѣряемая величина: длины — нѣкоторой длиной, площади — нѣкоторой площадью, времена — нѣкоторымъ промежуткомъ времени, скорости — нѣкоторой скоростью, электрическое сопротивленіе — сопротивленіемъ же опредѣленнаго размѣра; на практикѣ такой способъ измѣренія является самымъ цѣлесообразнымъ и простымъ, если только не требуется величайшей степени точности. Число измѣряемыхъ величинъ, уже и теперь весьма большое, возрастаетъ безпредѣльно съ успѣхомъ науки; вслѣдствіе этого для науки въ высшей степени важно не имѣть необходимости измѣрять каждую особую величину спеціальной единицей, которую приходилось бы сохранять въ безусловно не-

измѣнномъ состояніи. Поэтому слѣдуетъ считать огромнымъ успѣхомъ новѣйшей физики то, что ей удалось свести всѣ мѣры къ тремъ основнымъ мѣрамъ: длины, времени и массы.

Впервые это было сдѣлано Гауссомъ для магнитныхъ мѣръ; его трудъ пріобрѣлъ огромное значеніе въ новѣйшемъ ученіи объ электричествѣ и въ его техническихъ приложеніяхъ.

Каждая единица мѣры, которая выражена посредствомъ трехъ основныхъ единицъ длины, времени и массы, называется абсолютной единицей, а весь комплексъ такихъ мѣръ называется абсолютной системой мѣръ.

Мы познакомимся съ этой системой на нѣкоторыхъ примѣрахъ, число которыхъ легко можно было бы увеличить.

2. Скорость. Когда тѣло движется, оно можетъ проходить одинаковый путь въ различные промежутки времени и, наоборотъ, пути различной длины въ одинаковые промежутки времени, т. е. тѣло можетъ имѣть различную скорость.

Если тѣло за одинъ и тотъ же промежутокъ времени — напримѣръ, за одну секунду — одинъ разъ проходитъ путь a, другой разъ путь b, а третій разъ путь $a+b$, то скорость тѣла въ третьемъ движеніи есть сумма скоростей въ обоихъ первыхъ движеніяхъ: этимъ обусловливается наличность критеріевъ измѣримости комплекса скоростей (§ 30, 3).

Скорость увеличивается въ два раза, въ три раза и т. д., если отрѣзки пути, проходимые за данный промежутокъ времени, удваиваются или утраиваются, или же, если для прохожденія даннаго отрѣзка пути требуется время, въ два или три раза меньшее.

Мѣра скорости сведется къ мѣрамъ времени и длины, если примемъ за единицу скорости такую скорость, при которой тѣло проходитъ единицу длины за единицу времени.

Тѣло, проходящее путь λ за время τ, имѣетъ скорость λ/τ; частное отъ дѣленія этихъ именованныхъ чиселъ получаетъ такимъ образомъ особое значеніе, выражающее собой величину, отличную какъ отъ длины, такъ и отъ времени.

Слѣдующіе примѣры показываютъ, какъ выбранныя единицы вводятся въ обозначеніе. Предположимъ, что локомотивъ за одинъ часъ проходитъ путь въ 70 километровъ. Скорость его изображаютъ такъ:

$$70\,\frac{\text{километръ}}{\text{часъ}}$$

или

$$70000\,\frac{\text{метръ}}{\text{часъ}} = 1167\,\frac{\text{метръ}}{\text{минута}} = 19{,}44\,\frac{\text{метръ}}{\text{секунда}}.$$

За время полнаго вращенія земли вокругъ ея оси точка земного экватора пробѣгаетъ путь, равный окружности экватора, т. е. приблизительно 40 милліонамъ метровъ. Поэтому скорость этой точки равна

$$40\,000\,000 \frac{\text{метръ}}{\text{сутки}} = 463 \frac{\text{метръ}}{\text{секунда}}.$$

Какова скорость точки, географическая широта которой равна 50°30′ (Берлинъ) или 48°35′ (Страсбургъ)?

Пѣшеходъ среднимъ числомъ проходитъ одинъ километръ за 12 минутъ. Скорость его поэтому равна

$$\frac{1 \text{ километръ}}{12 \text{ минутъ}} = 1{,}4 \frac{\text{метръ}}{\text{секунда}}.$$

Разстояніе земли отъ солнца составляетъ въ среднемъ 149 милліоновъ километровъ, а длина земной орбиты содержитъ 936 милліоновъ километровъ. Этотъ путь земля проходитъ за 365 дней, что соотвѣтствуетъ скорости въ

$$29\,600 \frac{\text{метръ}}{\text{секунда}},$$

или, круглымъ числомъ, 30 километровъ въ секунду.

Какова скорость Меркурія, Венеры, Марса и Юпитера, если среднія разстоянія этихъ планетъ отъ солнца и періоды ихъ обращенія выражаются соотвѣтственно слѣдующими числами:

Меркурій:	58	милліоновъ	километровъ,	88 дней
Венера:	108	„	„	225 „
Марсъ:	227	„	„	688 „
Юпитеръ:	777	„	„	4333 „ ,

и если траекторіи планетъ мы принимаемъ за окружности.

Скорость звука въ сухомъ воздухѣ равна приблизительно 331 $\frac{\text{метръ}}{\text{секунда}}$, тогда какъ скорость свѣта равна 300 000 000 или 300.10^6 $\frac{\text{метръ}}{\text{секунда}}$.

3. Ускореніе. Поѣздъ, начиная двигаться, не тотчасъ получаетъ свою полную скорость, но достигаетъ ея постепенно въ теченіе нѣкотораго промежутка времени. Точно такъ же при остановкѣ онъ не мгновенно теряетъ свою скорость, но лишь постепенно.

Падающее на землю тѣло пробѣгаетъ свой путь не съ одной и той же скоростью все время: скорость увеличивается съ приближеніемъ тѣла къ землѣ. Отсюда проистекаетъ понятіе объ ускореніи и замедленіи движенія.

За единицу ускоренія принимаютъ такое ускореніе, при которомъ въ единицу времени скорость получаетъ приращеніе, равное единицѣ скорости.

Если въ началѣ ускореннаго движенія тѣло имѣетъ скорость, равную нулю, а по прошествіи времени τ получаетъ скорость v, то ускореніе такого движенія равно v/τ. Если за это время тѣло прошло путь λ, то частное λ/τ должно выражать ту скорость, которую тѣло имѣло бы, если бы оно двигалось безъ ускоренія и проходило за то же время τ такой же путь λ. Но эта скорость есть среднее ариѳметическое изъ начальной скорости нуль и скорости v въ концѣ движенія, т. е. $\frac{1}{2}v$; обозначивъ ускореніе черезъ g, мы получимъ:

$$\tfrac{1}{2}v = \lambda/\tau, \quad g = 2\lambda/\tau^2. \tag{1}$$

Если начальная скорость движенія равна не нулю, а v_0, то получимъ:

$$\frac{v + v_0}{2} = \lambda/\tau, \quad g = \frac{v - v_0}{\tau}. \tag{2}$$

Ускореніе падающаго тѣла называется также **ускореніемъ силы тяжести**. Если пренебречь сопротивленіемъ воздуха, то ускореніе это есть величина **постоянная** въ данномъ мѣстѣ земли **для всѣхъ тѣлъ**; на параллели, широта которой равна 45^0, ускореніе это

$$g = 9{,}8062 \, \frac{\text{метръ}}{\text{секунда}^2}.$$

Оно возрастаетъ отъ экватора къ полюсамъ; на экваторѣ оно равно 9,761, на полюсѣ 9,832. Такимъ образомъ, падающее тѣло за первую секунду паденія проходитъ въ среднемъ 4,9 метра.

Чтобы узнать длину пути, пройденнаго за первыя двѣ секунды, нужно въ формулѣ (1) положить $\tau = 2$; получимъ путь, равный 19,6 метра. Слѣдовательно, длина пути, пройденнаго въ продолженіе второй секунды, равна 14,7 метра.

Ускореніе тяжести мѣняется съ измѣненіемъ высоты тѣла надъ уровнемъ земли; при этомъ имѣетъ мѣсто **законъ Ньютона**, по которому ускореніе тяжести въ различныхъ мѣстахъ **обратно пропорціонально квадратамъ разстояній этихъ мѣстъ отъ центра земли**, т. е., если обозначимъ черезъ g и g_1 ускоренія тяжести въ двухъ мѣстахъ, разстоянія которыхъ отъ центра земли равны соотвѣтственно r и r_1, то

$$g : g_1 = \frac{1}{r^2} : \frac{1}{r_1^{\,2}} = r_1^{\,2} : r^2.$$

Каково было бы ускореніе тяжести въ мѣстѣ, которое удалено отъ земли на такое разстояніе, какъ луна, если принять длину земного радіуса и разстояніе земли отъ луны соотвѣтственно въ 858,5 миль и 52000 миль?

628
468
2320
1884
360

(Такъ какъ для рѣшенія этого вопроса нужно знать лишь отношеніе r_1/r, то единица длины можетъ быть выбрана произвольно.)

$$g_1 = 9{,}8 \cdot \frac{858{,}5^2}{52000^2} = 0{,}0027 \; \frac{\text{метръ}}{\text{секунда}^2} = 0{,}27 \; \frac{\text{сантиметръ}}{\text{секунда}^2}.$$

4. Сила. За единицу массы выбираютъ массу кубическаго сантиметра чистой воды, которую называютъ граммомъ. Какая-нибудь масса имѣетъ численное значеніе m, если она можетъ быть уравновѣшена помощью массы, содержащейся въ m кубическихъ сантиметрахъ воды.

Массу отнюдь не слѣдуетъ смѣшивать съ вѣсомъ, который выражается произведеніемъ mg изъ массы на ускореніе силы тяжести.

Масса тѣла одинакова во всѣхъ мѣстахъ земли; вѣсъ тѣла, наоборотъ, зависитъ отъ того, въ какомъ мѣстѣ земли находится разсматриваемое тѣло; онъ уменьшается съ увеличеніемъ географической широты мѣста, а также съ увеличеніемъ разстоянія тѣла отъ земной поверхности.

Вѣсъ — это сила, съ которой можно сравнивать другія силы, напримѣръ, силу нашихъ мускуловъ. Если сила не встрѣчаетъ противодѣйствія, то она сообщаетъ тѣлу, на которое дѣйствуетъ, нѣкоторое ускореніе. Но опредѣленная сила сообщаетъ тѣлу тѣмъ меньшее ускореніе, чѣмъ больше его масса; поэтому за единицу силы можно принять такую силу, которая сообщаетъ единицѣ массы ускореніе, принятое за единицу. Если за единицу массы принятъ граммъ, за единицу длины — сантиметръ и за единицу времени — секунда, то соотвѣтствующая этому единица силы называется диной (отъ греческаго слова δύναμις). Итакъ, имѣемъ:

$$\text{одна дина} = 1 \cdot \frac{\text{граммъ.сантиметръ}}{\text{секунда}^2}.$$

Примѣръ. Выразить въ динахъ силу, съ которой земля притягиваетъ луну.

Объемъ земли содержитъ приблизительно

$$1083 \cdot 10^{24} \text{ кубическихъ сантиметровъ *)}.$$

Если бы земля состояла только изъ воды, то это же самое число выражало бы и массу земли. Но средняя плотность земли приблизительно

---

*) Множитель 10^{24} означаетъ, что число умножается на 10 въ степени 24, т. е. къ нему приписываютъ 24 нуля Когда приходится имѣть дѣло съ очень большими числами, то удобно пользоваться этимъ сокращеннымъ обозначеніемъ. Конечно, въ дѣйствительности, нужно было бы приписывать не нули, а другія цифры. Поэтому указанное обозначеніе примѣняютъ въ тѣхъ лишь случаяхъ, гдѣ истинныя значенія чиселъ неизвѣстны, или же тамъ, гдѣ нѣтъ надобности ихъ знать. Количество цифръ такихъ чиселъ называютъ также порядкомъ ихъ величины. Часто приходится довольствоваться сравненіемъ порядковъ чиселъ за невозможностью сравнивать ихъ истинныя значенія.

въ 5,5 раза больше плотности воды; слѣдовательно, масса земли въ 5,5 раза больше вышеприведеннаго числа, т. е. она равна приблизительно

$$6 \,.\, 10^{27} \text{ граммамъ.}$$

Масса луны составляетъ приблизительно одну восьмидесятую часть массы земли и равна приблизительно

$$75 \,.\, 10^{24} \text{ граммамъ.}$$

Умноживъ это число на выраженную въ сантиметрахъ и секундахъ величину ускоренія, сообщаемаго земнымъ притяженіемъ на разстояніи, равномъ разстоянію луны отъ земли, мы получимъ число

$$2025 \,.\, 10^{22},$$

указывающее, сколько динъ содержитъ сила, съ которой земля притягиваетъ луну.

Силу можно сравнивать также съ вѣсомъ, т. е. выражать ее не въ динахъ, а въ единицахъ вѣса. За единицу силы тогда принимаютъ вѣсъ одного грамма на поверхности земли на широтѣ въ 45^0, гдѣ ускореніе тяжести

$$g_0 = 981 \, \frac{\text{сантиметръ}}{\text{секунда}^2}\,.$$

Сила, которая массѣ m граммовъ сообщаетъ ускореніе g, получитъ тогда численное значеніе mg/g_0, выражающее силу въ граммахъ.

Такимъ образомъ, чтобы выразить вѣсъ луны въ граммахъ, нужно число $2025 \,.\, 10^{22}$ раздѣлить на 981; получимъ приблизительно

$$2 \,.\, 10^{22} \text{ граммовъ.}$$

§ 33. Несоизмѣримыя величины.

1. До сихъ поръ мы въ нашихъ разсужденіяхъ и опредѣленіяхъ исходили изъ предположенія, что величины, отношенія которыхъ мы разсматриваемъ, соизмѣримы, такъ что эти отношенія выражаются раціональными числами; для практическихъ цѣлей можно было бы ограничиться соизмѣримыми величинами. Однако, теперь мы сдѣлаемъ шагъ впередъ и разсмотримъ также ирраціональныя отношенія.

Пусть e будетъ элементъ нѣкотораго измѣримаго комплекса, а r — нѣкоторое положительное раціональное число; изъ понятія объ измѣримости слѣдуетъ, что re, въ свою очередь, есть нѣкоторый элементъ того же комплекса. Такимъ образомъ, если a означаетъ нѣкоторый элементъ даннаго комплекса, то мы можемъ образовать сѣченіе R/R' (§ 24, 4), если отнесемъ къ группѣ R всѣ тѣ числа r, которыя удовлетворяютъ условію $re < a$, и къ группѣ R' — тѣ числа r', которыя удовлетворяютъ неравенству $r'e > a$; при этомъ число r, удовлетворяющее равенству $re = a$, если только такое число r существуетъ, мы можемъ по произволу отнести либо къ группѣ R, либо же къ группѣ R'. Сѣченіе R/R' опредѣляетъ собою нѣкоторое число α, вообще говоря, ирраціональное: это число α мы относимъ элементу a. Мы полагаемъ при этомъ $\alpha e = a$ и говоримъ, что α есть **число, измѣряющее** элементъ a. Понятно, что съ измѣненіемъ элемента e, принятаго за единицу нашей системы измѣренія, мѣняется и число α. Если $\beta e = b$ есть нѣкоторый другой элементъ той же группы и $a < b$, то имѣетъ мѣсто неравенство $\alpha < \beta$.

Итакъ, каждой парѣ a, e элементовъ измѣримаго комплекса отвѣчаетъ опредѣленное число α, измѣряющее элементъ a; это слѣдуетъ, согласно вышеизложенному, изъ тѣхъ предпосылокъ, которыя представляютъ собою опредѣленіе измѣримости. Обратное предложеніе, что при данной единицѣ e всякому числу α соотвѣтствуетъ нѣкоторый элементъ a, численное значеніе котораго равно числу α, есть новое допущеніе, которое мы склонны принять въ силу нѣкотораго рода внутренняго созерцанія: отнынѣ мы принимаемъ эту предпосылку, которую назовемъ **непрерывностью комплекса**[4]).

Съ этой непрерывностью мы не связываемъ никакого (чувственнаго) представленія; никакой внѣшній опытъ не можетъ ни подтвердить ее ни опровергнуть. Однако же совокупность чиселъ есть измѣримый комплексъ, дѣйствительно обладающій свойствомъ непрерывности.

2. Теперь мы перейдемъ къ общему опредѣленію отношеній.

Евклидъ („Элементы", книга V) даетъ слѣдующее опредѣленіе: **Если a и b суть два элемента нѣкотораго измѣримаго комплекса, а A и B представляютъ собою два элемента нѣкотораго другого или даже того же самаго измѣримаго комплекса, то** выберемъ два какихъ-либо числа натуральнаго ряда m и n. Тогда имѣетъ мѣсто одно и только одно изъ трехъ соотношеній:

$$\text{I) } ma < nb, \quad \text{II) } ma = nb, \quad \text{III) } ma > nb. \tag{1}$$

---

[4]) Совершенно непонятно, почему автору понадобилось туманное „внутреннее созерцаніе" (innere Anschauung) и новый постулатъ для введенія этого понятія. Если мы возьмемъ нѣкоторый элементъ какой-либо измѣримой группы и присоединимъ къ нему всѣ соизмѣримые съ нимъ элементы, то получимъ комплексъ, не обладающій непрерывностью. Введеніе ирраціональныхъ чиселъ показываетъ, что мы имѣемъ возможность построить непрерывные комплексы въ области абстрактныхъ объектовъ. Вопросъ же о томъ, существуютъ ли реальные непрерывные комплексы, какъ авторъ ниже справедливо указываетъ, экспериментально рѣшенъ быть не можетъ.

Если вмѣстѣ съ тѣмъ имѣетъ мѣсто соотвѣтственно одно изъ соотношеній

$$\mathrm{I)}\, mA < nB, \quad \mathrm{II)}\, mA = nB, \quad \mathrm{III)}\, mA > nB \tag{2}$$

и это справедливо при всякихъ значеніяхъ чиселъ m и n [5]), то a относится къ b, какъ A къ B. Мы выражаемъ это равенствомъ

$$a : b = A : B. \tag{3}$$

Замѣтимъ еще, что здѣсь мы имѣемъ дѣло только съ абсолютными (положительными) значеніями элементовъ измѣримаго комплекса.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ:

Отношеніе двухъ положительныхъ чиселъ α и β равно отношенію числа α/β къ числу 1, т. е.

$$\alpha : \beta = \alpha/\beta : 1. \tag{4}$$

Дѣйствительно, раздѣливъ обѣ части соотношеній

$$m\alpha \lesseqgtr n\beta$$

на число β, мы получимъ:

$$m\frac{\alpha}{\beta} \lesseqgtr n \cdot 1.$$

Число α/β разсматривается поэтому, какъ мѣра отношенія чиселъ α и β и всѣхъ другихъ равныхъ ему отношеній.

3. Отношеніе двухъ элементовъ a и b нѣкотораго измѣримаго комплекса равно отношенію измѣряющихъ ихъ чиселъ α и β.

Дѣйствительно, если

$$m\alpha < n\beta, \tag{5}$$

то можно указать два такихъ раціональныхъ числа mr и ns, которыя содержатся между числами $m\alpha$ и $n\beta$, т. е. удовлетворяютъ неравенствамъ:

$$m\alpha < mr < ns < n\beta. \tag{6}$$

Тогда $\alpha < r$ и $s < \beta$, такъ что, если e обозначаетъ единицу нашего комплекса, то мы имѣемъ

$$a < er, \quad es < b.$$

---

[5]) Т. е. если соотношеніе I) въ ряду (1) всегда влечетъ за собой соотношеніе I) въ ряду (2), соотношеніе II) въ ряду (1) влечетъ за собой соотношеніе II) въ ряду (2), соотношеніе III) въ ряду (1) влечетъ за собой соотношеніе III) въ ряду (2), каковы бы ни были цѣлыя числа m и n.

Отсюда, принимая во вниманіе неравенства (6), найдемъ:

$$ma < nb. \qquad (7)$$

Точно такъ же, если дано неравенство (7), то изъ него вытекаютъ неравенства (5). Дѣйствительно, мы можемъ подобрать два количества er и es, раціонально кратныхъ единицы мѣры e (т. е. такихъ, чтобы r и s были раціональными числами), такъ, чтобы имѣли мѣсто неравенства:

$$ma < mer < nes < nb. \qquad (8)$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$\alpha < r \text{ и } s < \beta,$$

и, стало быть,

$$m\alpha < n\beta. \qquad (9)$$

Такимъ же образомъ можно показать, что неравенства $ma > nb$ и $m\alpha > n\beta$ вытекаютъ одно изъ другого; отсюда уже слѣдуетъ, что равенство $ma = nb$ всегда обусловливаетъ собою равенство $m\alpha = n\beta$, и обратно.

Поэтому частное α/β также служитъ мѣрой отношенія элементовъ a и b и не зависитъ отъ выбора единицы e. Надъ именованными числами, выражающими элементы комплекса, можно производить такія же вычисленія, какъ и надъ всякими другими числами; можно, однако, задать вопросъ, какое значеніе должны мы приписать результатамъ такихъ вычисленій.

Сложенію и вычитанію присваиваютъ обыкновенно опредѣленное значеніе лишь тогда, когда эти дѣйствія производятся надъ именованными числами одного и того же наименованія; нельзя, напримѣръ, складывать другъ съ другомъ или вычитывать промежутки времени и длины. Если же оба числа выражены посредствомъ одной и той же единицы, напримѣръ, единицы длины, то сумма или разность измѣряющихъ чиселъ представляетъ собою число, измѣряющее сумму или разность соотвѣтственныхъ величинъ, измѣренную той же единицей.

Въ случаѣ, когда измѣряющія числа имѣютъ раціональныя значенія, предложеніе это слѣдуетъ изъ опредѣленій, которыя мы дали въ § 30; для ирраціональныхъ же чиселъ оно вытекаетъ изъ допущенія о непрерывности комплекса.

Произведеніе именованныхъ чиселъ представляетъ собою именованное число нѣкотораго новаго комплекса, единица котораго опредѣляется, какъ произведеніе единицъ умножаемыхъ величинъ; то же самое относится къ частному. Такъ, напримѣръ, произведеніе двухъ мѣръ длины есть мѣра поверхности, произведеніе трехъ мѣръ длины есть мѣра объема, частное отъ дѣленія мѣры длины на мѣру времени есть опредѣленная скорость. Частное же двухъ мѣръ, относящихся къ одному и тому же комплексу, представляетъ собою отношеніе ихъ, а, стало быть, оно есть отвлеченное число.

§ 34. Пропорціи.

1. Пропорціей называется равенство вида

$$a : b = c : d, \tag{1}$$

гдѣ a, b, c и d обозначаютъ элементы измѣримаго комплекса. Равенство это имѣетъ смыслъ лишь въ томъ случаѣ, когда существуетъ отношеніе элементовъ a и b и отношеніе элементовъ c и d, т. е. когда, съ одной стороны, элементы a и b, а, съ другой стороны, элементы c и d принадлежатъ соотвѣтственно одному и тому же комплексу; но комплексъ, къ которому относятся элементы a и b, можетъ быть отличенъ отъ комплекса, которому принадлежатъ элементы c и d; напримѣръ, одинъ изъ нихъ можетъ быть системой массъ, другой — системой длинъ.

Элементы a, b, c и d называются членами пропорціи; a называется первой, b — второй, c — третьей и d — четвертой пропорціональной.

Если числа α, β, γ и δ представляютъ собою числа, измѣряющія элементы a, b, c и d, то изъ равенства (1) слѣдуетъ числовая пропорція:

$$\alpha : \beta = \gamma : \delta, \tag{2}$$

или равенство

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}. \tag{3}$$

Изъ ариѳметическихъ слѣдствій, вытекающихъ изъ этого равенства, можно сдѣлать соотвѣтственныя заключенія относительно элементовъ a, b, c и d.

Любыя три изъ четырехъ чиселъ α, β, γ и δ однозначно опредѣляютъ соотвѣтствующее имъ четвертое число. Принимая во вниманіе, что каждому числовому значенію, согласно нашему допущенію, соотвѣтствуетъ нѣкоторый элементъ комплекса измѣряемыхъ объектовъ, мы можемъ сказать:

Если изъ четырехъ членовъ пропорціи три какихъ-либо члена извѣстны, то они однозначно опредѣляютъ собою четвертый.

2. Изъ формулы (3) можно получить по правиламъ ариѳметики слѣдующія равенства:

$$\frac{\alpha+\beta}{\beta} = \frac{\gamma+\delta}{\delta}, \quad \frac{\alpha-\beta}{\beta} = \frac{\gamma-\delta}{\delta}, \quad \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} = \frac{\gamma+\delta}{\gamma-\delta};$$

сообразно съ этимъ, изъ пропорціи (1) получимъ слѣдующія пропорціи:

$$\begin{aligned}(a+b):b&=(c+d):d,\\(a-b):b&=(c-d):d,\\(a+b):(a-b)&=(c+d):(c-d).\end{aligned}\tag{4}$$

Здѣсь предполагается что $a-b$ и, слѣдовательно, также $c-d$ суть величины положительныя.

3. Изъ формулы (3) слѣдуетъ, что $\alpha/\gamma=\beta/\delta$. Сдѣлать изъ этого равенства выводъ относительно элементовъ a, b, c и d можно лишь въ томъ случаѣ, когда между элементами a и c существуетъ отношеніе, т. е. когда всѣ четыре элемента a, b, c и d принадлежатъ одному и тому же комплексу. Въ этомъ предположеніи мы получимъ:

Изъ пропорціи

$$a:b=c:d\tag{5}$$

слѣдуетъ пропорція

$$a:c=b:d.\tag{6}$$

4. Если въ пропорціи (1) второй и третій члены равны другъ другу, то каждый изъ нихъ называется среднимъ пропорціональнымъ между первымъ членомъ и четвертымъ. Спрашивается, всегда ли можно опредѣлить средній пропорціональный элементъ между двумя произвольно заданными элементами a и b? Иными словами, можно ли опредѣлить элементъ x, удовлетворяющій пропорціи

$$a:x=x:b?\tag{7}$$

Очевидно, это возможно лишь въ томъ случаѣ, когда элементы a и b принадлежатъ одному и тому же комплексу. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ изъ пропорціи (7) слѣдуетъ:

$$\frac{\alpha}{\xi}=\frac{\xi}{\beta},\quad \xi^2=\alpha\beta,$$

гдѣ α, β и ξ суть числа, измѣряющія элементы a, b и x.

Положивъ $\xi=\sqrt{\alpha\beta}$, мы получаемъ значеніе ξ, удовлетворяющее числовой пропорціи:

$$\alpha:\xi=\xi:\beta.\tag{7'}$$

Отсюда уже вытекаетъ и пропорція (7). Такимъ образомъ, нахожденіе средняго пропорціональнаго приводится къ извлеченію квадратнаго корня.

Если черезъ a и b обозначимъ два отрѣзка, то средняя пропорціональная между этими величинами представитъ намъ сторону квадрата, равновеликаго прямоугольнику, построенному на отрѣзкахъ a и b, какъ на сторонахъ.

5. Предыдущую задачу можно обобщить слѣдующимъ образомъ: Опредѣлить двѣ величины x и y такъ, чтобы было

$$a : x = x : y = y : b. \qquad (8)$$

Обозначивъ соотвѣтствующія числа черезъ α, ξ, η и β, имѣемъ:

$$\alpha : \xi = \xi : \eta = \eta : \beta. \qquad (9)$$

Изъ этихъ пропорцій слѣдуетъ, что

$$\alpha\eta = \xi^2, \quad \beta\xi = \eta^2 \text{ и } \alpha\beta = \xi\eta; \qquad (10)$$

слѣдовательно, имѣемъ:

$$\alpha^2\beta = \xi^3 \text{ и } \alpha\beta^2 = \eta^3. \qquad (11)$$

Отсюда найдемъ:

$$\xi = \sqrt[3]{\alpha^2\beta}; \quad \eta = \sqrt[3]{\alpha\beta^2}. \qquad (12)$$

Найденныя значенія ξ и η удовлетворяютъ пропорціямъ (9), а, слѣдовательно, и пропорціямъ (8).

Но число $\alpha^2\beta$ выражаетъ объемъ четырехугольной призмы, имѣющей высоту b и квадратное основаніе со стороной a; число ξ выражаетъ длину ребра куба, объемъ котораго равенъ $\alpha^2\beta$. Такимъ образомъ, посредствомъ нашей пропорціи рѣшается задача о превращеніи четырехугольной призмы въ равновеликій ей кубъ. Комбинируя эту задачу съ задачей 4, мы можемъ превратить любой параллелопипедъ въ кубъ.

Частный случай, когда $b = 2a$, есть не что иное, какъ знаменитая Делосская задача объ удвоеніи куба *).

6. Золотое сѣченіе.. Данный отрѣзокъ a раздѣлить на такія двѣ части x и $a - x$, чтобы меньшая часть $a - x$ относилась къ большей части x такъ, какъ большая часть относится ко всему отрѣзку. Иными словами, должна быть удовлетворена пропорція:

$$(a - x) : x = x : a; \qquad (13)$$

---

*) Преданіе разсказываетъ, что оракулъ, къ которому обратились жители Делоса во время свирѣпствовавшей среди нихъ эпидеміи, посовѣтовалъ имъ удвоить алтарь Апполона, имѣвшій форму куба. Геометрическое рѣшеніе задачи приписываютъ Платону. Подробности этого преданія, а также исторію задачи можно найти въ трудѣ Кантора, т. I, стр. 199 и сл.

обозначивъ числа, измѣряющія элементы a и x соотвѣтственно черезъ a и ξ, получимъ уравненіе $\xi^2 = a(a-\xi)$, или

$$\xi(\xi + a) = a^2.$$

Представивъ это уравненіе въ другомъ видѣ:

$$\left(\xi + \frac{a}{2} - \frac{a}{2}\right)\left(\xi + \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right) = a^2$$

и примѣняя формулу $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, мы найдемъ:

$$\left(\xi + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}a^2;$$

слѣдовательно,

$$\xi + \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{5}a}{2} \; *).$$

Въ примѣрахъ этого отдѣла мы отчасти пользовались такими понятіями и теоремами, которыя мы ближе разсмотримъ лишь впослѣдствіи, въ отдѣлахъ, посвященныхъ вопросамъ геометріи и механики.

---

*) Задачѣ этой, получившей впослѣдствіи названіе „золотого сѣченія", пиѳагорейцы приписывали мистическое значеніе. Сѣченіе это, какъ наиболѣе пріятное для глазъ отношеніе, часто примѣнялось въ греческомъ строительномъ искусствѣ. Эстетическая сторона золотого сѣченія подробно разработана въ трудѣ Луки Пачіоло (Luca Paciuolo, 1509) „Divina Proportio"; трудъ этотъ возникъ подъ вліяніемъ Леонардо-да-Винчи (Lionardo da Vinci) и при его сотрудничествѣ.

Изъ новыхъ сочиненій о золотомъ сѣченіи заслуживаетъ вниманія: Adolf Zeising, „Neue Lehre von den Proportionen des menschlichen Körpers aus einem bisher unbekannt gebliebenen, die ganze Natur und Kunst durchdringenden morphologischen Grundgesetz entwickelt". Leipzig, 1854.

Подъ основнымъ закономъ, о которомъ идетъ рѣчь въ этомъ сочиненіи, авторъ разумѣетъ именно золотое сѣченіе, которое, какъ авторъ пытается доказать, проявляется не только въ человѣческомъ тѣлѣ, но вообще повсюду въ природѣ и въ искусствѣ.

ГЛАВА VI.

Степени и логариѳмы.

§ 35. Корни.

1. Если p есть число натуральнаго ряда и a произвольное положительное число, то существуетъ одно и только одно положительное число x, которое удовлетворяетъ условію $x^p = a$.

Что не можетъ быть болѣе одного такого числа, слѣдуетъ изъ предложенія о степеняхъ, согласно которому съ возрастаніемъ числа x возрастаетъ также число x^p. Поэтому, если x отлично отъ y, то невозможно, чтобы было $x^p = y^p$.

Чтобы показать существованіе одного такого числа x, мы составимъ сѣченіе X/X', относя къ комплексу X всѣ числа, p-ая степень которыхъ меньше или равна a, а къ комплексу X' — числа, p-ая степень которыхъ превосходитъ a. Тогда любое число содержится либо въ X, либо въ X'; если x есть число, опредѣляемое этимъ сѣченіемъ, то $x^p = a$.

Дѣйствительно если бы было $x^p < a$, то по теоремѣ о непрерывности (§ 26, 5) въ комплексѣ X' должны были бы заключаться и такія числа, p-ая степень которыхъ меньше, чѣмъ a, что противорѣчитъ опредѣленію этого комплекса; въ силу такихъ же соображеній неравенство $x^p > a$ также невозможно [1]).

Опредѣленное такимъ образомъ число x называется корнемъ p-ой степени изъ числа a и обозначается еще такъ:

$$x = \sqrt[p]{a};$$

число p называется показателемъ корня или также показателемъ степени корня. Число a, которое и само можетъ быть ирраціональнымъ, называется подкореннымъ числомъ.

---

[1]) Согласно § 26, 5, если $x^p < a$, то существуютъ числа x', большія, нежели x, также удовлетворяющія этому неравенству. Но такъ какъ число x опредѣляется нашимъ сѣченіемъ, то числа x' принадлежатъ комплексу X'; между тѣмъ, по условію, числа комплекса X' удовлетворяютъ неравенству $(x')^p > a$.

Случай $p = 1$ не представляетъ интереса, такъ какъ при этомъ $x = a$. Корень второй степени, встрѣчающійся чаще всего, называется также **корнемъ квадратнымъ**; при немъ показатель 2 часто опускается, такъ что $\sqrt{a}$ обозначаетъ то же, что $\sqrt[2]{a}$ (какъ въ § 23). Корень третьей степени называется **корнемъ кубичнымъ**. Числа вида $\sqrt[p]{a}$ называются также **радикалами**.

2. Для производства вычисленій надъ радикалами служатъ двѣ формулы:

$$\sqrt[p]{a}\sqrt[p]{b} = \sqrt[p]{ab}, \quad \sqrt[p]{a} / \sqrt[p]{b} = \sqrt[p]{a/b},$$

которыя выражаютъ слѣдующее:

Чтобы умножить или раздѣлить другъ на друга два радикала одинаковой степени p, соотвѣтственно умножаютъ или дѣлятъ подкоренныя числа и берутъ p-ый корень изъ произведенія или частнаго.

Это легко получается изъ перемѣстительнаго закона при умноженіи, по которому имѣемъ:

$$\left(\sqrt[p]{a}\sqrt[p]{b}\right)^p = \left(\sqrt[p]{a}\right)^p \left(\sqrt[p]{b}\right)^p = ab.$$

Для сложенія и вычитанія нельзя указать такого же простого правила.

Слѣдующія теоремы выражаютъ соотношенія между величинами корней.

3. **Если** $a > b$, **то** $\sqrt[p]{a} > \sqrt[p]{b}$, **или въ словахъ: съ возрастаніемъ подкоренного числа возрастаетъ и корень.**

Дѣйствительно, если бы было $\sqrt[p]{a} \leqq \sqrt[p]{b}$, то мы имѣли бы: $\left(\sqrt[p]{a}\right)^p \leqq \left(\sqrt[p]{b}\right)^p$, т. е. $a \leqq b$.

$\sqrt[p]{1} = 1$; слѣдовательно, если $a > 1$, то и $\sqrt[p]{a} > 1$.

4. **Если** $a > 1$ **и** $p > q$, **то** $\sqrt[p]{a} < \sqrt[q]{a}$, **т. е.: если подкоренное число больше 1, то и корень больше 1, но съ возрастаніемъ показателя корень уменьшается.**

5. **Если** $a < 1$ **и** $p > q$, **то** $1 > \sqrt[p]{a} > \sqrt[q]{a}$, **т. е.: если подкоренное число меньше 1, то и корень меньше 1, но съ возрастаніемъ показателя корень возрастаетъ.**

Три послѣднія теоремы мы соединимъ въ одно болѣе общее предложеніе.

6. Если a обозначаетъ произвольное положительное число, а c_1 и c_2 суть какія-либо два числа, удовлетворяющія соотношенію

$$c_1 < 1 < c_2,$$

то всегда имѣютъ мѣсто неравенства

$$c_1 < \sqrt[p]{a} < c_2,$$

если p достаточно велико, т. е. если оно превосходитъ нѣкоторое опредѣленное число q, зависящее отъ a, c_1 и c_2.

Всѣ эти предложенія легко доказываются на основаніи § 19. Дѣйствительно, если число a больше 1, то вмѣстѣ съ тѣмъ, согласно п. 3, и $\sqrt[p]{a} > 1$; если, далѣе, $p > q$, то $\left(\sqrt[p]{a}\right)^p > \left(\sqrt[p]{a}\right)^q$, т. е. $a > \left(\sqrt[p]{a}\right)^q$ и, слѣдовательно, $\sqrt[q]{a} > \sqrt[p]{a}$; предложеніе п. 4-го, такимъ образомъ, доказано. Примѣнивъ эти разсужденія къ числу, обратному относительно a, получимъ предложеніе п. 5-го.

Такъ какъ c_1 меньше, а c_2 больше 1, то, каково бы ни было число a, согласно § 19, 8, для каждаго достаточно большого показателя p имѣемъ:

$$c_1^p < a < c_2^p;$$

отсюда, при помощи предложенія п. 3-го, выводимъ предложеніе п. 6-го.

§ 36. Общая теорія степеней.

1. Въ § 19 установлено понятіе о степени съ цѣлымъ (положительнымъ или отрицательнымъ) показателемъ. Доказательство существованія корней даетъ намъ возможность установить также понятіе о степени съ дробнымъ и даже съ ирраціональнымъ показателемъ.

Изъ понятія о степени мы вывели формулу

$$(\alpha^m)^n = \alpha^{mn} \tag{1}$$

и, кромѣ того, положили

$$\alpha^{-m} = 1 : \alpha^m, \quad \alpha^0 = 1, \tag{2}$$

гдѣ m и n могутъ имѣть положительныя или отрицательныя цѣлыя значенія, а α есть произвольное число, которое мы теперь обозначаемъ греческой буквой, чтобы указать, что оно можетъ имѣть и ирраціональное значеніе.

Теперь спрашивается, что нужно подразумѣвать подъ степенью a^μ, если μ есть дробное число,—напримѣръ, если $\mu = p/q$?

Если мы при этомъ желаемъ избѣжать большихъ осложненій, то мы сначала должны ограничиться допущеніемъ, что основаніе a есть положительное число. Формула (1) даетъ намъ тогда отвѣтъ на нашъ вооросъ. Дѣйствительно, положивъ въ ней $m = \mu = p/q$, $n = q$, получимъ изъ этой формулы

$$(a^\mu)^q = a^p. \tag{3}$$

Слѣдовательно, [2])

$$a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p; \tag{4}$$

если мы желаемъ, чтобы формула (3) оставалась справедливой и для отрицательныхъ значеній μ, то, измѣнивъ p на $-p$, мы получимъ:

$$a^\mu = 1 : a^{-\mu}. \tag{5}$$

Согласно этому опредѣленію, для всякого показателя μ имѣемъ:

$$1^\mu = 1. \tag{6}$$

Относительно обобщенныхъ степеней имѣютъ мѣсто слѣдующія предложенія.

2. Каковы бы ни были показатели μ и ν,

$$a^{\mu+\nu} = a^\mu a^\nu, \tag{7}$$

$$(a^\mu)^\nu = a^{\mu\nu}. \tag{8}$$

Пусть

$$\mu = \frac{m}{p}, \quad \nu = \frac{n}{q};$$

если тогда p и q суть положительныя числа, то

$$(a^{\mu+\nu})^{pq} = a^{mq+np} = a^{mq} a^{np};$$

извлекая корень pq-ой степени, получимъ:

$$a^{\mu+\nu} = \sqrt[pq]{a^{mq} a^{np}} = a^\mu a^\nu \text{ [3]},$$

[2]) Авторъ пользуется здѣсь, по существу, тѣмъ же пріемомъ, къ которому онъ прибѣгалъ въ § 19 (см. примѣчаніе 8 на стр. 67). Формула (4) представляетъ собой, конечно, только опредѣленіе; но мы необходимо должны придти къ этому опредѣленію, если мы хотимъ ввести понятіе о дробныхъ степеняхъ такъ, чтобы соотношеніе (1) осталось въ силѣ.

[3]) Доказательства соотношеній (7) и (8) основаны на опредѣленіи (4).

чѣмъ и доказываается соотношеніе (7).

Такъ же найдемъ:

$$((a^{\mu})^{\nu})^{q} = (a^{\mu})^{n} = a^{n\mu} = \sqrt[p]{a^{mn}}$$

и

$$(a^{\mu\nu})^{q} = (a^{\mu})^{n} = \sqrt[p]{a^{mn}};$$

извлекая корень q-ой степени, получаемъ отсюда соотношеніе (8).

3. Если $a > 1$ и $\mu > \nu$, то

$$a^{\mu} > a^{\nu}. \tag{9}$$

Дѣйствительно,

$$(a^{\mu})^{pq} = a^{mq},\ (a^{\nu})^{pq} = a^{np};$$

если $\mu > \nu$, то $mq > np$, и, слѣдовательно,

$$(a^{\mu})^{pq} > (a^{\nu})^{pq};$$

отсюда вытекаетъ соотношеніе (9).

4. Если $a > 1$, а c есть какое-нибудь число, удовлетворяющее условію $1 < c$, то можно подобрать достаточно малое число μ_0 такимъ образомъ, чтобы для всякаго показателя μ, удовлетворяющаго соотношенію $0 < \mu < \mu_0$, имѣло мѣсто неравенство:

$$1 < a^{\mu} < c. \tag{10}$$

Въ самомъ дѣлѣ, пусть p будетъ такое число, чтобы было $c^p > a$ (§ 19, 8); тогда $c > a^{1/p} > a^{\mu}$, если $\mu < \frac{1}{p}\cdot$ Такимъ образомъ, неравенство (10) удовлетворяется при всякомъ μ, если

$$0 < \mu < \frac{1}{p}\cdot$$

Въ случаѣ, если $a < 1$, имѣютъ мѣсто соотношенія, которыя получаются изъ (9) и (10) замѣной знака $<$ знакомъ $>$ и обратно.

5. Пусть будетъ $a > 1$ и пусть a и a' обозначаютъ соотвѣтственно меньшее и большее приближенныя значенія числа a; кромѣ того, пусть c_1 и c_2 будутъ два числа, удовлетворяющія неравенствамъ

$$c_1 < a^{\mu} < c_2. \tag{11}$$

Если тогда разность $a' - a$ достаточно мала, то имѣютъ мѣсто соотношенія:

$$c_1 < a^{\mu} < a'^{\mu} < c_2. \tag{12}$$

Дѣйствительно, чтобы убѣдиться въ этомъ, нужно лишь выбрать числа a и a' такъ, чтобы выполнялись слѣдующія неравенства:

$$c_1^{1/\mu} < a < a < a' < c_2^{1/\mu}.$$

6. Теперь легко установить понятіе о степени съ ирраціональнымъ показателемъ. Пусть ξ будетъ ирраціональное число, опредѣляемое сѣченіемъ X/X', и пусть x, x' обозначаютъ числа комплексовъ X и X'. Пусть a будетъ положительное число, которое мы будемъ предполагать большимъ 1. Тогда для всѣхъ значеній x и x' имѣемъ: $x<x'$; слѣдовательно,

$$a^x < a^{x'}. \tag{13}$$

Изъ этого слѣдуетъ, что комплексъ чиселъ a^x имѣетъ верхнюю границу, комплексъ чиселъ $a^{x'}$ — нижнюю границу, при чемъ обѣ эти границы не могутъ быть различны. Дѣйствительно, обозначимъ верхнюю границу черезъ β, а нижнюю черезъ β'; тогда число β' не можетъ быть меньше, нежели β. Въ самомъ дѣлѣ, всегда можно указать такія числа x, x', чтобы числа a^x и $a^{x'}$ сколь угодно мало отличались соотвѣтственно отъ β и β' [4]); поэтому, если бы было $\beta > \beta'$, то можно было бы выбрать числа x, x' такъ, чтобы было $a^x > a^{x'}$, что противорѣчитъ соотношенію (13). Невозможно также, чтобы было $\beta < \beta'$; дѣйствительно, въ такомъ случаѣ дробь β'/β была бы неправильной, и мы имѣли бы

$$1 < \beta'/\beta < a^{x'-x},$$

какъ бы мы ни выбирали числа x' и x. Но, согласно предложенію п. 4-го, это невозможно, такъ какъ разность $x'-x$ можетъ быть сдѣлана сколь угодно малой [5]).

Итакъ, подъ символомъ

$$\beta = a^\xi$$

мы будемъ понимать общую границу комплексовъ, составленныхъ изъ чиселъ a^x и $a^{x'}$; такимъ образомъ, мы опредѣлили степень для всякаго ирраціональнаго показателя.

7. Исходя изъ этого опредѣленія, мы можемъ доказать теорему:

Пусть $\beta = a^\xi$, а b пусть означаетъ число, которое получается изъ β замѣной чиселъ a и ξ ихъ приближенными значе-

---

[4]) По самому смыслу понятія о верхней и нижней границѣ.

[5]) Согласно указанному предложенію $a^{x'-x}$ неопредѣленно приближается къ 1 съ уменьшеніемъ показателя $x'-x$, а потому не можетъ оставаться больше дроби β'/β.

ніями a, a', x, x'; пусть, наконецъ, c_1 и c_2 будутъ два какихъ-нибудь числа, удовлетворяющія условію

$$c_1 < a^{\xi} < c_2;$$

при указанныхъ предположеніяхъ имѣютъ мѣсто неравенства

$$c_1 < b < c_2,$$

если разности $x' - x$ и $a' - a$ будутъ достаточно малы.

Прежде всего изъ понятія о верхней и нижней границѣ имѣемъ:

$$c_1 < a^x < a^{\xi} < a^{x'} < c_2,$$

коль скоро разность $x' - x$ становится меньше нѣкотораго достаточно малаго числа. Но тогда, согласно предложенію п. 5-го, можно выбрать разность $a' - a$ столь малой, чтобы имѣли мѣсто соотношенія:

$$c_1 < a^x < a^x < a^{\xi} < a^{x'} < a'^{x'} < c_2,$$

что и требовалось доказать.

8. Сказанное позволяетъ расширить основную теорему о непрерывности (§ 26, 5) въ томъ смыслѣ, что въ ряду дѣйствій, выражаемыхъ символомъ $F(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$, можетъ быть и возвышеніе въ степень положительнаго основанія съ ирраціональнымъ показателемъ; отсюда слѣдуетъ далѣе, что всѣ теоремы, изложенныя нами относительно степеней съ раціональными показателями, справедливы и въ случаѣ ирраціональныхъ показателей [6]).

§ 37. Логариѳмы.

1. Согласно тому, что мы доказали въ предыдущемъ параграфѣ, если a есть положительное и x — какое угодно число, то положительное число y однозначно опредѣляется уравненіемъ

$$y = a^x.$$

Точно такъ же, если даны число x и положительное число y, то уравненіемъ

$$a = y^{1/x}$$

однозначно опредѣляется число a. Естественно возникаетъ вопросъ:

Если a и y суть данныя положительныя числа, то какъ найти число x? Или другими словами: въ какую степень нужно воз-

[6]) Ибо теоремы въ п.п. 6 и 7 § 26-го выведены изъ указанной основной теоремы.

высить положительное число a, чтобы получить данное положительное число y?

Это число x называется логариѳмомъ числа y при основанiи a и изображается такъ:

$$x = \overset{a}{\log} y.$$

Такъ, число 2 есть логариѳмъ 4 при основанiи 2, число 6 есть логариѳмъ 64 при основанiи 2, а 3 есть логариѳмъ 1000 при основанiи 10. Логариѳмъ единицы равенъ нулю при всякомъ основанiи, потому что $a^0 = 1$ при всякомъ a.

Такъ какъ 1^x равно единицѣ также при всякомъ x, то при основанiи 1 имѣетъ логариѳмъ только число 1, и при томъ этимъ логариѳмомъ можетъ служить совершенно произвольное число. Поэтому основанiемъ 1 не пользуются для практическихъ цѣлей. Мы примемъ, что основанiе a больше единицы, хотя это само по себѣ не является необходимымъ. Такъ какъ при этомъ предположенiи число a^x для положительныхъ показателей x всегда больше, а для отрицательныхъ показателей x — всегда меньше единицы и такъ какъ, кромѣ того, $a^{-x} = 1/a^x$, то неправильныя дроби имѣютъ положительные, а правильныя — отрицательные логариѳмы, и два обратныя другъ другу числа y и $1/y$ имѣютъ логариѳмы, равные по абсолютной величинѣ, но различающiеся знаками.

2. Что при данныхъ числахъ y и a всегда существуетъ логариѳмъ, мы покажемъ снова съ помощью сѣченiя. Соединимъ всѣ числа x, для которыхъ $a^x < y$, въ комплексъ X, а числа x', для которыхъ $a^{x'} > y$, въ комплексъ X'. Тогда любое число x' больше любого числа x, и мы имѣемъ сѣченiе X/X', которое опредѣляетъ нѣкоторое число ξ. Если бы число a^ξ было больше числа y, то можно было бы указать такое число x, для котораго было бы $y < a^x < a^\xi$, что было бы несогласно съ опредѣленiемъ чиселъ x; точно такъ же a^ξ не можетъ быть менѣе y; слѣдовательно,

$$a^\xi = y.$$

Итакъ, всякое положительное число y при всякомъ положительномъ основанiи, отличномъ отъ 1, имѣетъ одинъ и только одинъ логариѳмъ.

3. Основныя формулы для производства вычисленiй съ логариѳмами получаются изъ соотвѣтствующихъ формулъ для степеней. Эти послѣднiя мы представимъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$a^{x_1+x_2} = a^{x_1} a^{x_2}, \quad a^{x_1-x_2} = a^{x_1}/a^{x_2}, \quad a^{\mu x} = (a^x)^\mu,$$

гдѣ x, x_1, x_2, μ суть любыя — положительныя или отрицательныя, раціональныя или ирраціональныя — числа. Введемъ обозначенія:

$$a^x = y,\ a^{x_1} = y_1,\ a^{x_2} = y_2,$$

гдѣ y, y_1, y_2 суть произвольныя, но исключительно положительныя числа; въ такомъ случаѣ мы имѣемъ:

$$x = \log y,\ x_1 = \log y_1,\ x_2 = \log y_2,$$

гдѣ для простоты общее основаніе a не обозначено. Тогда получимъ:

$$x_1 + x_2 = \log(y_1 y_2),\quad x_1 - x_2 = \log\frac{y_1}{y_2},\quad \mu x = \log(y^\mu),$$

т. е. для любыхъ положительныхъ чиселъ y, y_1, y_2 и для любого положительнаго или отрицательнаго показателя μ имѣютъ мѣсто соотношенія:

$$\log y_1 + \log y_2 = \log(y_1 y_2),$$

$$\log y_1 - \log y_2 = \log\frac{y_1}{y_2},$$

$$\mu \log y = \log(y^\mu).$$

Словами эти формулы выражаются такъ:

Логариѳмъ произведенія равенъ суммѣ логариѳмовъ сомножителей.

Логариѳмъ частнаго равенъ разности между логариѳмомъ дѣлимаго и логариѳмомъ дѣлителя.

Логариѳмъ степени равенъ произведенію логариѳма основанія степени на ея показателя.

4. Если a и b суть положительныя числа, то, по опредѣленію логариѳма, имѣемъ:

$$a = b^{\overset{b}{\log} a};$$

слѣдовательно, если x есть произвольное, а y положительное число, то

$$a^x = b^{x \overset{b}{\log} a} = y,$$

или

$$x = \overset{a}{\log} y,\quad x \overset{b}{\log} a = \overset{b}{\log} y;$$

поэтому,

$$\overset{b}{\log} y = \overset{b}{\log} a \overset{a}{\log} y.$$

Посредствомъ этой формулы можно перейти отъ одного основанія a къ другому основанію b.

Если умножить логариѳмы всѣхъ положительныхъ чиселъ, взятыхъ при основанiи a, на одно и то же число $\overset{b}{\log} a$, то получатся логариѳмы тѣхъ же чиселъ, взятыхъ при основанiи b.

5. Если $y = a^x$, т. е. x есть логариѳмъ числа y, то y называется также числомъ (Numerus), соотвѣтствующимъ логариѳму x (при основанiи a), такъ что каждое изъ двухъ равенствъ

$$x = \overset{a}{\log} y, \quad y = \overset{a}{\operatorname{num}} x$$

представляетъ собой слѣдствiе другого. Основанiе a не обозначается, если это не можетъ вести къ недоразумѣнiю.

§ 38. Неперовы логариѳмы.

1. Благодаря необыкновенному облегченiю, которое доставляютъ логариѳмы при практическихъ вычисленiяхъ, они сыграли огромную роль въ развитiи науки, особенно въ развитiи измѣрительныхъ отраслей естествознанiя; въ этомъ отношенiи ихъ можно, пожалуй, сравнить только съ десятичной системой счисленiя.

Исторически, однако, ученiе о логариѳмахъ развилось не изъ систематическаго обобщенiя понятiя о возвышенiи въ степень и объ обращенiи этого дѣйствiя, а изъ сравненiя ариѳметической и геометрической прогрессiи; впрочемъ, принципiально это сводится къ тому же.

Ариѳметической прогрессiей называется послѣдовательный рядъ чиселъ, изъ которыхъ каждое послѣдующее число получается путемъ прибавленiя къ предыдущему одного и того же числа, называемаго разностью ариѳметической прогрессiи. Геометрическая прогрессiя есть рядъ чиселъ, каждый членъ котораго получается умноженiемъ предыдущаго на одного и того же множителя — знаменателя геометрической прогрессiи.

2. Разсмотримъ, напримѣръ, слѣдующую табличку; первая строка содержитъ числа натуральнаго ряда, образующiя ариѳметическую прогрессiю. Соотвѣтствующiя мѣста во второй строкѣ занимаютъ послѣдовательныя степени числа 2, образующiя геометрическую прогрессiю:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

; (1)

передъ нами таблица логариѳмовъ съ основанiемъ 2. Въ первой строкѣ находится логариѳмъ числа, стоящаго подъ нимъ. Таблицей можно пользоваться слѣдующимъ образомъ: напримѣръ, чтобы найти произведенiе 8.64, мы складываемъ логариѳмы чиселъ 8 и 64, т. е. 3 и 6; получимъ 9, которому соотвѣтствуетъ число (Numerus) 512.

Эту таблицу можно продолжить и въ лѣвую сторону

-4	-3	-2	-1	0	1
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2

(2)

Если бы мы пожелали, напримѣръ, вычислить по этой таблицѣ произведенiе $\frac{1}{8} \cdot 512$, мы должны были бы найти число, котораго логариѳмъ есть $9 - 3 = 6$, и получили бы правильный результатъ.

3. Таблица логариѳмовъ въ этомъ видѣ имѣетъ лишь ограниченное примѣненiе, такъ какъ съ помощью нея можно найти логариѳмы лишь немногихъ чиселъ, которыя слѣдуютъ другъ за другомъ черезъ большiе, постоянно возрастающiе промежутки.

Неперъ (John Neper) и до него еще Бюрги (Jobst Bürgi) старались устранить этотъ недостатокъ, уменьшая разность ариѳметической прогрессiи и принимая вмѣстѣ съ тѣмъ знаменателя геометрической прогрессiи близкимъ къ 1. Этимъ можно достигнуть того, что въ извѣстныхъ предѣлахъ произвольно заданное число заключается какъ въ ариѳметической, такъ и въ геометрической прогрессiи; по крайней мѣрѣ, если въ таблицѣ нѣтъ самого числа, то въ ней имѣется близко подходящее къ нему приближенное значенiе.

Пусть Δ обозначаетъ нѣкоторую малую величину; составимъ двѣ прогрессiи — одну ариѳметическую, другую геометрическую слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{llllll} 0, & \Delta, & 2\Delta, & 3\Delta, & 4\Delta, & 5\Delta, \; \ldots \\ 1, & 1+\Delta, & (1+\Delta)^2, & (1+\Delta)^3, & (1+\Delta)^4, & (1+\Delta)^5, \; \ldots \end{array} \qquad (3)$$

Каждое положительное число заключается между двумя сосѣдними членами первой строки и содержится, такимъ образомъ, въ этой строкѣ съ погрѣшностью, не превышающей $\frac{1}{2}\Delta$; каждое число, большее единицы, расположено между двумя числами второй строки, напримѣръ, между $(1+\Delta)^n$ и $(1+\Delta)^{n+1}$; максимумъ ошибки составляетъ здѣсь

$$\tfrac{1}{2}[(1+\Delta)^{n+1} - (1+\Delta)^n] = \tfrac{1}{2}\Delta(1+\Delta)^n,$$

а потому возрастаетъ вмѣстѣ съ числомъ.

Чтобы перемножить два числа второй строки

$$a = (1 + \Delta)^m \text{ и } b = (1 + \Delta)^n,$$

складываютъ соотвѣтствующія числа первой строки

$$\alpha = m\Delta \quad \text{и} \quad \beta = n\Delta$$

и отыскиваютъ во второй строкѣ число $ab = (1 + \Delta)^{m+n}$, соотвѣтствующее суммѣ $\alpha + \beta = (m + n)\Delta$.

Вмѣсто возрастающей геометрической прогрессіи можно вычислить убывающую $1, 1 - \Delta, (1 - \Delta)^2, (1 - \Delta)^3, \ldots$ но при этомъ получаются лишь числа, меньшія единицы *).

4. Пусть

$$a = (1 + \Delta)^m, \quad \alpha = m\Delta;$$

тогда

$$a = (1 + \Delta)^{\frac{\alpha}{\Delta}},$$

и α есть логариѳмъ числа a при основаніи

$$E = (1 + \Delta)^{\frac{1}{\Delta}}.$$

Такимъ образомъ, таблица (3) есть таблица логариѳмовъ при основаніи E.

Неперъ положилъ въ основаніе своей таблицы число

$$\Delta = 0{,}000\,000\,1$$

и получилъ поэтому

$$E = (1{,}000\,000\,1)^{10\,000\,000}.$$

По таблицѣ Непера логариѳмъ числа 2 при указанномъ основаніи оказывается равнымъ 0,693 146 922, а по новѣйшимъ таблицамъ такъ называемый **натуральный логариѳмъ** 2, т. е. логариѳмъ 2 при основаніи

$$e = 2{,}718\,281\,828\,46,$$

почти совпадаетъ съ вышеприведеннымъ; именно онъ равенъ 0,693 147 180. Такимъ образомъ, основаніе Неперовыхъ логариѳмовъ очень мало разнится отъ числа e.

---

*) Такъ, въ дѣйствительности, Неперъ и составилъ свою таблицу, которая сперва предназначалась для тригонометрическихъ величинъ, меньшихъ 1.

§ 39. Бригговы логариѳмы.

Есть еще другой способъ установить два ряда соотвѣтствующихъ другъ другу членовъ ариѳметической и геометрической прогрессіи. Если имѣемъ при любомъ основаніи логариѳмы двухъ чиселъ

$$x_1 = \log y_1, \quad x_2 = \log y_2, \tag{1}$$

то изъ § 37 слѣдуетъ:

$$\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \log \sqrt{y_1 y_2}; \tag{2}$$

число $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ называется среднимъ ариѳметическимъ обоихъ чиселъ x_1, x_2, а $\sqrt{y_1 y_2}$ — среднимъ геометрическимъ (положительныхъ) чиселъ y_1, y_2, такъ что содержаніе формулы (2) можетъ быть изложено такъ:

Среднее ариѳметическое логариѳмовъ двухъ чиселъ есть логариѳмъ средняго геометрическаго этихъ двухъ чиселъ.

Если $x_1 < x_2$, то и $y_1 < y_2$ и, кромѣ того,

$$x_1 < \frac{1}{2}(x_1 + x_2) < x_2$$

$$y_1 < \sqrt{y_1 y_2} < y_2.$$

Поэтому, если извѣстенъ рядъ логариѳмовъ, то простымъ извлеченіемъ квадратнаго корня можно вычислить логариѳмы сколькихъ угодно промежуточныхъ чиселъ и такимъ образомъ строить таблицу логариѳмовъ, постоянно сгущая интервалы между послѣдовательными числами. Таковъ, въ дѣйствительности, и былъ тотъ путь, которымъ были вычислены первыя таблицы логариѳмовъ.

Возьмемъ, напримѣръ, таблицы (1) и (2) § 38-го; слѣдуя этому правилу, получимъ при основаніи 2:

$$0{,}5 = \log \sqrt{2} = \log 1{,}41421,$$

$$1{,}5 = \log \sqrt{8} = \log 2{,}82843,$$

$$0{,}25 = \log \sqrt[4]{2} = \log 1{,}18920.$$

Этимъ способомъ можно составить таблицу логариѳмовъ при любомъ основаніи. Генрихъ Бриггъ (Henry Briggs), современникъ и другъ

Непера, первый понялъ, какія удобства представляетъ основаніе 10, и вычислилъ таблицу при этомъ основаніи. Поэтому логариѳмы эти называются **Бригговыми логариѳмами**. Преимущество этого основанія состоитъ въ слѣдующемъ.

Если какое-нибудь число, выраженное по десятичной системѣ счисленія, будь то цѣлое число или десятичная дробь, имѣетъ m цифръ (до запятой), то по своей величинѣ это число заключается между 10^{m-1} и 10^m, и, слѣдовательно, его Бригговъ логариѳмъ содержится между $m-1$ и m (включая нижній предѣлъ $m-1$).

Легко поэтому указать цѣлую часть логариѳма, т. е. число, стоящее до запятой: для этого достаточно уменьшить на 1 число цифръ заданнаго числа, находящихся до запятой. Это число называется **характеристикой** логариѳма; обыкновенно оно въ таблицахъ вовсе не приводится. Слѣдующіе за запятой десятичные знаки называются **мантиссой** логариѳма. Въ таблицахъ дается лишь мантисса. Если въ таблицѣ ищутъ по данному логариѳму соотвѣтствующее число, то отыскиваютъ данную мантиссу и находятъ соотвѣтствующее ей число; въ этомъ числѣ нужно оставить передъ запятой столько цифръ, чтобы число ихъ превышало на 1 характеристику логариѳма. Числа, меньшія, чѣмъ 1, т. е. числа, въ которыхъ въ десятичной системѣ передъ запятой стоитъ нуль, имѣютъ отрицательные логариѳмы. Чтобы вычисленія приходилось дѣлать только съ положительными числами, мантиссу всегда берутъ положительной, и лишь характеристика можетъ быть отрицательной; а именно, правильную дробь, логариѳмъ которой нужно взять, умножаютъ предварительно на надлежащимъ образомъ выбранную степень десяти [7]), а изъ логариѳма полученнаго такимъ образомъ числа вычитываютъ показателя этой степени десяти. Напримѣръ:

$$\begin{aligned}\log \text{brigg. } 1/3 &= -\log 3 = -0{,}4771212547, \\ &= \quad 0{,}5228787453 - 1, \\ \log \text{brigg. } 0{,}003657 &= 0{,}5631249603 - 3.\end{aligned}$$

Таблица **Бригга** появилась въ свѣтъ въ 1617 — 1624 г.г. Въ нихъ даны были логариѳмы съ 14 десятичными знаками, но имѣлись большіе пробѣлы. Послѣдніе были устранены въ 10-значныхъ таблицахъ **Адріана Влака** (Adrian Vlack, 1628). Таблицы **Влака** даютъ десятизначные логариѳмы всѣхъ цѣлыхъ чиселъ отъ 1 до 100 000.

На опытѣ было замѣчено, что въ большинствѣ случаевъ нѣтъ необходимости примѣнять десятизначныя таблицы, и поэтому наиболѣе

---

[7]) Эту степень нужно выбрать такъ, чтобы по умноженіи получить неправильную дробь; такъ, въ первомъ изъ двухъ приведенныхъ ниже примѣровъ дробь $\frac{1}{3}$

распространенными таблицами являются семизначныя. Въ 1793 г. Вега (Vega) издалъ такія таблицы, которыя въ послѣдовавшей затѣмъ обработкѣ Гюльсе (Hülsse) разошлись въ весьма большомъ числѣ изданій. Послѣ нашли, что и семизначные логариѳмы слишкомъ громоздки для многихъ цѣлей, въ частности для цѣлей педагогическихъ (для упражненія въ примѣненіи логариѳмовъ), а также и въ примѣненіи къ естественнымъ наукамъ въ случаяхъ, не требующихъ особенно большой точности; въ виду этого изданы были шести, пяти и даже четырехзначныя таблицы. Изъ множества трудовъ этого рода, составители которыхъ стремятся обыкновенно облегчить употребленіе логариѳмовъ расположеніемъ матеріала и типографскими пріемами, отмѣтимъ здѣсь таблицы, принадлежащія авторамъ: Schrön, Bremiker, Wittstein, Greve, F. G. Gauss, Heyer, Schülke.

Наоборотъ, иногда не только въ естественныхъ наукахъ—въ особенности, въ астрономіи,— но и при изслѣдованіяхъ въ теоріи чиселъ бываютъ случаи, когда и семизначныя таблицы оказываются недостаточно точными; поэтому математику необходимо пріобрѣсти навыкъ въ употребленіи болѣе точныхъ таблицъ. Среди послѣднихъ самой цѣнной и сравнительно наиболѣе доступной является „Thesaurus logarithmorum“ Вега; это сочиненіе, изданное въ 1794 г. въ Лейпцигѣ, содержитъ полную десятизначную таблицу бригговыхъ логариѳмовъ и, кромѣ того, замѣчательныя таблицы Вольфрама (Wolfram), въ которой даны натуральные логариѳмы чиселъ до 10009 съ 48-ю десятичными знаками.

Каждое число можетъ быть представлено въ видѣ произведенія его первоначальныхъ множителей, и логариѳмъ его можетъ быть полученъ при помощи сложенія логариѳмовъ простыхъ чиселъ; поэтому, если предположить извѣстнымъ разложеніе чиселъ на ихъ первоначальныхъ множителей, то достаточно имѣть таблицы, содержащія лишь логариѳмы простыхъ чиселъ. Въ послѣдней части таблицъ Вольфрама это упрощеніе, затрудняющее, конечно, нѣсколько пользованіе таблицей, нашло себѣ примѣненіе.

Въ виду рѣдкости и дороговизны Thesaurus'а въ 1896 г. во Флоренціи появилось фотоцинкографическое воспроизведеніе его, болѣе доступное по цѣнѣ.

Упомянутыя выше пятизначныя таблицы Греве содержатъ на одной страницѣ небольшую вспомогательную таблицу, въ которой даны 12-значные логариѳмы для чиселъ вида z, $(1+z\,10^{-n})$ при $z=1, 2, \ldots, 9$ и $n=1, 2, \ldots, 12$; эта табличка даетъ возможность при помощи особаго, весьма остроумнаго пріема опредѣлить простымъ вычисленіемъ 12-значные логариѳмы всѣхъ 12-значныхъ чиселъ.

достаточно помножить на 10, а во второмъ примѣрѣ число 0,003 657 слѣдуетъ помножить на 10^3.

§ 40. Интерполяцiя.

1. Въ каждой распространенной логариѳмической таблицѣ во введенiи даются указанiя, какъ ею пользоваться; упражненiе и опытъ научаютъ нѣкоторымъ мелкимъ упрощенiямъ. Здѣсь мы остановимся болѣе подробно лишь на одномъ пунктѣ, имѣющемъ болѣе общее значенiе,— на такъ называемой интерполяцiи.

Семизначныя таблицы, напримѣръ, даютъ непосредственно мантиссы, вычисленныя съ семью знаками, для всѣхъ чиселъ до 99999 включительно, т. е. для всѣхъ пятизначныхъ чиселъ.

Логариѳмъ семизначнаго числа можетъ быть найденъ непосредственно изъ таблицы лишь въ томъ случаѣ, когда обѣ послѣднiя цифры суть нули. Но отъ семизначной таблицы мы вправѣ требовать, чтобы она давала намъ логариѳмы всѣхъ семизначныхъ чиселъ съ одинаковой точностью.

Точно такъ же и данный логариѳмъ, соотвѣтствующее которому число мы желаемъ опредѣлить, вообще говоря, не можетъ быть точно найденъ въ таблицахъ; между тѣмъ бываетъ нужно найти точно семь цифръ этого числа.

Дѣлается это посредствомъ интерполяцiи, основанной на слѣдующихъ соображенiяхъ.

Пусть будетъ x, x_1, x_2, x_3, . . . рядъ чиселъ, составляющихъ ариѳметическую прогрессiю съ разностью D:

$$x_1 - x = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \cdots = D$$

и пусть будетъ:

$$\begin{aligned} y &= \log x, \\ y_1 &= \log x_1, \quad y_1 - y = \Delta, \\ y_2 &= \log x_2, \quad y_2 - y_1 = \Delta_1, \\ y_3 &= \log x_3, \quad y_3 - y_2 = \Delta_2. \end{aligned} \tag{1}$$

Разности Δ, Δ_1, Δ_2, . . . не равны другъ другу, но постепенно убываютъ, какъ это видно изъ таблицъ. Такъ какъ это убыванiе происходитъ чрезвычайно медленно, то безъ замѣтной погрѣшности можно принять, что и числа y внутри достаточно малаго промежутка составляютъ ариѳметическую прогрессiю [8]); это предположенiе въ дѣйствительности не совсѣмъ справедливо, но при пользованiи нашей семизначной таблицей никогда не влечетъ сколько-нибудь замѣтной ошибки.

Положимъ, что нужно отыскать логариѳмъ $y + \beta$ нѣкотораго числа $x + \alpha$, лежащаго между x и x_1, такъ что α есть дробная часть числа D;

[8]) Т. е. что $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \cdots$

согласно слѣланному предположенiю, β окажется такою же частью числа $\varDelta$, такъ что

$$\beta = \frac{\varDelta}{D}\alpha. \qquad (2)$$

Для облегченiя вычисленiя въ таблицахъ подъ заголовкомъ P. P. (Partes proportionales, пропорцiональныя части) даны разности $\varDelta$ и произведенiя:

$$\frac{\varDelta}{10}, \frac{2\varDelta}{10}, \ldots, \frac{9\varDelta}{10}.$$

съ той степенью точности, съ которой производятся вычисленiя.

Изъ тѣхъ же таблицъ можно по данному числу β найти число α по формулѣ

$$\alpha = \frac{D}{\varDelta}\beta.$$

Для этого нужно лишь выполнить небольшое дѣленiе либо по сокращенному способу, либо съ помощью вспомогательныхъ таблицъ P. P.

Такъ какъ разности $\varDelta$ наиболѣе велики у меньшихъ чиселъ (ниже 10000), то въ этихъ частяхъ таблицы интерполяцiя даетъ наименѣе точные результаты; поэтому нѣкоторыя таблицы продолжены за предѣлы пятизначныхъ чиселъ, и эти дополнительные логариѳмы даются съ 8 десятичными знаками. У Вега таблицы продолжены до 107 999.

2. Въ десятичныхъ таблицахъ „Thesaurus“ даны непосредственно логариѳмы всѣхъ пятизначныхъ чиселъ. Интерполяцiя и здѣсь выполняется согласно тѣмъ же основнымъ положенiямъ. Но, чтобы использовать эту таблицу вполнѣ, не всегда бываетъ достаточно принять, что промежуточные логариѳмы образуютъ ариѳметическую прогрессiю.

Тогда принимаютъ, что разности $\varDelta$, $\varDelta_1$, $\varDelta_2$, ... не одинаковы, но составляютъ ариѳметическую прогрессiю, и для логариѳмовъ y получается такимъ образомъ ариѳметическая прогрессiя второго порядка [9]).

Если мы пожелаемъ воспользоваться этимъ предположенiемъ, чтобы отыскать по таблицѣ логариѳмъ $y+\beta$ нѣкотораго числа $x+\alpha$, заключающiйся между двумя послѣдовательными логариѳмами таблицы y и y_1, то нужно положить

$$\beta = m\alpha + m'\alpha(D-\alpha)$$

и опредѣлить числа m и m' такимъ образомъ, чтобы для чиселъ x_1 и x_2, т. е. при $\alpha = D$ и $\alpha = 2D$, изъ этой формулы получались правильные

[9]) Подъ ариѳметической прогрессiей второго порядка разумѣютъ рядъ чиселъ, послѣдовательныя разности которыхъ образуютъ обыкновенную ариѳметическую прогрессiю. Таковъ, напримѣръ, рядъ чиселъ 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, ...

значенія $y_1 = y + \Delta$ и $y_2 = y + \Delta + \Delta_1$ [10]). Отсюда слѣдуетъ:

$$m = \frac{\Delta}{D},$$
$$\Delta + \Delta_1 = 2mD - 2m'D^2,$$
$$2m'D^2 = \Delta - \Delta_1 = \Delta';$$

такимъ образомъ, приращеніе β дается формулой

$$\beta = \frac{\Delta}{D}\,\alpha + \frac{\alpha(D-\alpha)\Delta'}{2D^2}. \tag{3}$$

Число $\Delta - \Delta_1 = \Delta'$ называется разностью второго порядка. Вліяніе послѣдней сказывается на послѣдней цифрѣ логариѳма, иногда также и на предпослѣдней, но не дальше.

Если мы примемъ, что y есть десятичное, а x — пятизначное цѣлое число (безъ десятичныхъ долей), то нужно положить $D = 1$ и $\alpha = 0{,}abcde$, гдѣ буквы a, b, c, d, e обозначаютъ соотвѣтственно цифры, занимающія 6-ое, 7-ое, 8-ое, 9-ое и 10-ое мѣста въ данномъ числѣ $x + \alpha$. Такъ какъ Δ' есть число, весьма малое въ сравненіи съ разностью Δ, то во второмъ членѣ правой части формулы (3) достаточно взять число α лишь съ двумя цифрами [11]).

Если N есть число, логариѳмъ котораго отыскивается, а n есть число, изображаемое пятью первыми цифрами числа N, то изъ таблицы находимъ точно $\log n$ съ десятью знаками, а изъ формулы (3) получается:

$$\log N = \log n + 0{,}abcde\,\Delta + \frac{1}{2}\,0{,}ab\,(1 - 0{,}ab)\,\Delta'. \tag{4}$$

Въ этой формулѣ число N надо понимать такъ, что пять цифръ числа n стоятъ впереди запятой. Въ зависимости отъ дѣйствительнаго положенія запятой каждый разъ выбирается соотвѣтственная характеристика.

---

[10]) Достаточное обоснованіе этого требуетъ пространныхъ разсужденій, которыя относятся къ „теоріи конечныхъ разностей“, дисциплинѣ, въ которой исчерпывающимъ образомъ изслѣдуется вопросъ объ интерполяціи. Мы должны сказать, что въ томъ сжатомъ видѣ, въ какомъ эта теорія здѣсь изложена, въ ней, конечно, трудно вполнѣ разобраться; но развитіе ея выходитъ за предѣлы настоящаго сочиненія.

[11]) Если, напримѣръ, намъ нужно отыскать логариѳмъ числа 32,897 165 34, то мы принимаемъ за x цѣлое число 32 897, за α число 0,165 34, за y логариѳмъ числа x изъ таблицы, а β опредѣляется формулой (3); перенесеніе же запятой вліяетъ только на характеристику. Это авторъ и выражаетъ въ общемъ видѣ формулой (4).

Если число N изображается болѣе, чѣмъ десятью, цифрами, то одиннадцатая изъ нихъ можетъ быть принята во вниманіе при выполненіи умноженія во второмъ членѣ правой части равенства (4).

Ищемъ, напримѣръ, десятизначный бригговъ логариѳмъ числа e

$$e = 2{,}718\,281\,828\,46.$$

Въ таблицѣ находимъ десятизначные логариѳмы слѣдующихъ пяти послѣдовательныхъ чиселъ:

		Δ	Δ'
log 27182 =	4342814081		
3 =	2973851	159770	
4 =	3133615	764	6
5 =	3293373	758	6
6 =	3453126	753	5

Нужно получить сокращеннымъ способомъ произведенія:

$$0{,}8182846 \times 159770$$

и

$$\frac{1}{2} 0{,}82 \times 0{,}18 \times 6.$$

Получается:

$$\begin{array}{r}
4342814081 \\
127816 \\
1597\cdot 7 \\
1278\cdot 16 \\
31\cdot 95 \\
12\cdot 78 \\
64 \\
9 \\
\hline
15 \\
\hline
0{,}434\,294\,481\,8\cdot 77;
\end{array}$$

въ результатѣ первыя десять цифръ точны. Вторая разность даетъ здѣсь только приблизительно половину единицы послѣдняго десятичнаго разряда; она принимается во вниманіе лишь при особенно точныхъ вычисленіяхъ. Вторыя разности возрастаютъ съ уменьшеніемъ чиселъ, логариѳмы которыхъ отыскиваются.

Для упрощенія умноженій въ таблицахъ помѣщаются еще вспомогательныя таблички; ихъ устройство и примѣненіе излагается во введеніи къ таблицамъ.

Рѣшеніе обратной задачи — по данному логариѳму найти соотвѣтствующее число — производится по формулѣ (2), если принимаютъ въ разсчетъ лишь первую разность. Для того, чтобы принять во вниманіе и вторую разность, нужно было бы вывести формулу, аналогичную формулѣ (3); но это требуетъ обширныхъ предварительныхъ вычисленій при самомъ составленіи таблицъ.

Вообще говоря, чѣмъ больше промежутки между числами, логариѳмы которыхъ даны въ таблицѣ непосредственно, тѣмъ важнѣе принять во вниманіе вторую разность. Напримѣръ, можно построить вполнѣ удовлетворительную четырехзначную таблицу логариѳмовъ, помѣщающуюся на половинѣ страницы, выписавши логариѳмы всѣхъ двузначныхъ чиселъ. Съ помощью этой таблицы можно дѣлать вычисленія съ точностью до четвертаго десятичнаго знака, но при этомъ часто необходимо бываетъ принять въ расчетъ вторую разность.

§ 41. Примѣры.

Дадимъ теперь нѣкоторые примѣры логариѳмическихъ вычисленій, при которыхъ для полученія искомаго результата необходимо пользоваться болѣе точными таблицами. Возьмемъ основаніе натуральныхъ логариѳмовъ

$$e = 2{,}718\,281\,828\,46 \qquad (1)$$

и Людольфово (Ludolf) число

$$\pi = 3{,}141\,592\,653\,59. \qquad (2)$$

Съ точностью до десятаго знака находимъ:

$$\log(\pi \log e) = 0{,}134\,934\,184\,0 \;{}^{*}). \qquad (3)$$

Изъ нѣкоторыхъ теоретическихъ соображеній, которыя не могутъ быть здѣсь приведены **), слѣдуетъ, что число

$$z = e^{\pi\sqrt{19}} \qquad (4)$$

отличается отъ ближайшаго большаго цѣлаго числа меньше, чѣмъ на $\frac{1}{4}$. Какое это цѣлое число?

Изъ формулы (4) имѣемъ:

$$\log\log z = \log\sqrt{19} + \log(\pi \log e).$$

*) Необходимыя для вычисленія этого числа данныя находятся на послѣдней страницѣ соч.: Vega „Sammlung mathematischer Tafeln", изд. Hülsse (Berlin, 1865).

**) H. Weber. „Elliptische Functionen und algebraische Zahlen", изд. 2-ое (третій томъ соч.: H. Weber, „Algebra"), § 69, 125, 134, 405. Braunschweig, 1908.

Пользуясь десятичной таблицей, найдемъ:

$$\log \sqrt{19} = 0{,}639\,376\,800\,5,$$

а въ виду соотношенія (3)

$$\log \log z = 0{,}774\,310\,984\,5.$$

Разыскавъ два разъ подъ рядъ соотвѣтствующее число, мы получимъ:

$$\log z = 5{,}947\,178\,65,$$

$$z = 885\,479{,}8.$$

Такимъ образомъ, искомое число

$$A = 885\,480.$$

Доказательствомъ правильности результата (обоснованіе его не можетъ быть здѣсь приведено) служитъ то обстоятельство, что $A - 744$ должно оказаться полнымъ кубомъ; и въ самомъ дѣлѣ, оказывается, что

$$A - 744 = 884\,736 = 96^3.$$

Есть еще нѣкоторыя другія числа, обладающія подобными свойствами, а именно:

$$z = e^{\pi\sqrt{43}}, \quad e^{\pi\sqrt{67}}, \quad e^{\pi\sqrt{163}}.$$

Ихъ значенія отличаются отъ нѣкоторыхъ опредѣленныхъ цѣлыхъ чиселъ A еще менѣе, чѣмъ въ предыдущемъ примѣрѣ, такъ что, напримѣръ, третье изъ нихъ имѣетъ послѣ запятой 12 девятокъ. Для перваго изъ этихъ трехъ чиселъ точное вычисленіе посредствомъ Thesaurus'a даетъ

$$A = 88\,473\,644.$$

Два другія числа выходятъ далеко за предѣлы Thesaurus'a. Ихъ можно, однако, вычислить, пользуясь тѣмъ обстоятельствомъ, что и числа

$$z^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}\pi\sqrt{43}}, \quad e^{\frac{1}{3}\pi\sqrt{67}}, \quad e^{\frac{1}{3}\pi\sqrt{163}}$$

очень мало, хотя и не въ такой степени, какъ z, отличаются отъ нѣкоторыхъ цѣлыхъ чиселъ B, и что, кромѣ того,

$$A = B^3 + 745.$$

Такимъ образомъ, получимъ, напримѣръ,

$$e^{\frac{1}{3}\pi\sqrt{43}} = 960{,}000\,042,$$

или $B = 960$, а въ двухъ другихъ случаяхъ

$$B = 5\,280, \quad B = 640\,320.$$

Примѣры эти иллюстрируютъ нѣкоторыя, глубоко сокрытыя ариѳметическія свойства, присущія числамъ 19, 43, 67, 163 и никакимъ другимъ. (Gauss, Disq. arithm., art 303).

§ 42. Историческія свѣдѣнія о логариѳмахъ.

Когда съ возрожденіемъ наукъ въ XV и XVI столѣтіяхъ вновь ожила астрономія, то очень скоро сказалась потребность въ новыхъ дѣйствительныхъ средствахъ, которыя дали бы возможность справиться съ большими числовыми вычисленіями. Тригонометрія развилась и дала астроному практическія средства для вычисленія, а для тригонометріи были вычислены обширныя таблицы, среди которыхъ наиболѣе значительными является „Opus Palatinum". Этотъ обширный трудъ былъ начатъ на средства курфюрста Пфальцскаго Фридриха IV Георгомъ Ретикусомъ*), который велъ эти вычисленія въ теченіе многихъ лѣтъ; послѣ его смерти таблицы были закончены Валентиномъ Отто (Valentin Otho) въ 1596 году въ Нейштатѣ. Позже эти таблицы были просмотрѣны и исправлены Вареоломеемъ Питискусомъ (Bartholomaeus Pitiscus, „Thesaurus mathematicus", Frankfurt, 1613).

Особенно затруднительнымъ всегда было выполненіе умноженія, поглощающее много времени; отсюда стремленіе замѣнить его сложеніемъ. Первыя попытки въ этомъ направленіи, естественно, примыкали не къ логариѳмамъ, а къ тригонометріи; тригонометрическія функціи въ то время уже представляли собой хорошо извѣстныя, вошедшія въ практику орудія вычисленія, между тѣмъ какъ понятіе о показательной функціи, о степеняхъ съ дробными показателями было въ то время математикамъ совершенно чуждо. Къ этому присоединялось то обстоятельство, что тригонометрическія таблицы находились уже въ распоряженіи вычислителей и давали прекрасныя средства для вычисленія. Такимъ образомъ возникъ методъ, извѣстный подъ своеобразнымъ названіемъ „Prosthaphaeresis" (отъ словъ $\pi\varrho\acute{o}\sigma\vartheta\varepsilon\sigma\iota\varsigma$ и $\grave{\alpha}\varphi\varepsilon\acute{\iota}\varrho\varepsilon\sigma\iota\varsigma$ — прибавленіе и отниманіе), сущность котораго сводилась къ примѣненію извѣстныхъ тригонометрическихъ формулъ:

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)),$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)).$$

---

*) Georg Joachim Rhaeticus родился въ 1514 году въ Фельдкирхѣ въ Форарельбергѣ, умеръ въ 1576 году въ Кашау въ Венгріи.

Если поэтому нужно было вычислить произведеніе двухъ правильныхъ дробей, то по таблицамъ можно было разыскать два угла α и β, косинусами или синусами которыхъ были данныя дроби. Тогда оставалось по таблицамъ разыскать косинусы суммы и разности этихъ угловъ, сложить ихъ или вычесть и полученное число раздѣлить на 2.

Этотъ пріемъ значительно сложнѣе логариѳмическаго вычисленія; онъ, напримѣръ, не можетъ быть непосредственно распространенъ на дѣленіе, возвышеніе въ степень, извлеченіе корня. Но, по существу, онъ покоится на той же основной идеѣ; при современной же точкѣ зрѣнія на тригонометрическія функціи, какъ на показательныя функціи съ мнимыми показателями, онъ и фактически находится въ непосредственной связи съ логариѳмами.

Этотъ методъ былъ изобрѣтенъ Нюренбергскимъ священикомъ Іоанномъ Вернеромъ (Johannes Werner, 1468—1528), который принадлежалъ къ кружку знаменатаго гуманиста Пиркгеймера (Willibald Pirkheimer); но она была забыта, а затѣмъ вновь найдена, развита и доказана въ обсерваторіи Тихо-Браге въ Ураніенбургѣ (1580), а также при дворѣ курфюрста Вильгельма IV въ Касселѣ (1532—1592), оказавшаго значительныя услуги астрономіи *).

Однако, теорія логариѳмовъ оставила далеко за собой всѣ эти попытки. Какъ это обыкновенно бываетъ съ значительными открытіями, появленію логариѳмовъ предшествовали другія, менѣе удачныя попытки того же рода, и точно установить здѣсь пріоритетъ не такъ легко. Къ тому же заслуга автора заключается здѣсь скорѣе въ осуществленіи идеи, въ рѣшимости посвятить цѣлую жизнь такимъ гигантскимъ вычисленіямъ, чѣмъ въ открытіи самой идеи, по существу, крайне простой.

Уже въ книгѣ Архимеда „ψαμμίτης“ авторъ въ одномъ мѣстѣ показываетъ, что въ ряду чиселъ, которыя, начиная съ единицы, возрастаютъ въ геометрической прогрессіи, произведеніе двухъ чиселъ можетъ быть найдено такимъ образомъ, что мы отыщемъ число, отстоящее отъ перваго на столько же членовъ ряда, на сколько второе отстоитъ отъ единицы. По существу, какъ мы видимъ, это есть основное положеніе логариѳмическаго вычисленія. Но только въ эпоху Возрожденія наукъ эта идея на практикѣ находитъ себѣ осуществленіе.

Однимъ изъ наиболѣе замѣчательныхъ предшественниковъ является Михаилъ Штифель (Michael Stifel, род. въ Эслингенѣ въ Вюртембергѣ въ 1486 или 1487 году, умеръ въ Іенѣ въ 1567 г.). Онъ былъ августинскимъ монахомъ, перешелъ въ ученіе Лютера, съ которымъ сдружился

---

*) Этимъ занимались Paul Wittich, Raymarus Ursus и Jobst Bürgi. См. Braunmühl, „Vorlesungen über die Geschichte der Geometrie“.

и работалъ въ качествѣ проповѣдника въ различныхъ мѣстахъ *). Въ 1544 г. Штифель напечаталъ въ Нюренбергѣ сочиненіе „Arithmetica integra“, въ которой онъ ставитъ члены ариѳметической прогрессіи въ связь съ членами геометрической прогрессіи слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{cccccccccc} -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 \end{array}.$$

Числа верхняго ряда онъ называетъ показателями; онъ знаетъ, что оба ряда могутъ быть неограниченно продолжены въ обѣ стороны и что сложенію, вычитанію, умноженію и дѣленію чиселъ перваго ряда отвѣчаютъ во второмъ ряду умноженіе, дѣленіе, возвышеніе въ степень и извлеченіе корня; онъ знаетъ, такимъ образомъ, основныя свойства логариѳмовъ. Но о томъ, что промежуточнымъ числамъ перваго ряда также могутъ быть отнесены числа второго ряда, объ этомъ, т. е. о непрерывности логариѳмовъ, которая собственно и дѣлаетъ ихъ практическимъ средствомъ вычисленія, мы не находимъ у Штифеля никакого слѣда.

Этимъ шагомъ, а также построеніемъ первой таблицы логариѳмовъ, мы обязаны двумъ математикамъ, которыя работали почти одновременно, но независимо другъ отъ друга.

І. Бюрги (Jobst Bürgi, 1552—1632), швейцарецъ изъ Лихтенштейга въ Тоггенбургѣ, работалъ большую часть своей жизни въ Касселѣ, на службѣ у курфюрста Вильгельма IV, который особенно цѣнилъ его за способности къ механикѣ; въ промежуткахъ онъ работалъ также въ Прагѣ, гдѣ онъ находился въ сношеніяхъ съ Кеплеромъ. Его „Arithmetische und geometrische Progress-tabulen“ были вычислены между 1603 и 1611 годами, но появились въ печати только въ 1620 году. По описанію Браунмюля (Braunmühl), устройство этихъ таблицъ заключалось въ томъ, что въ первомъ ряду помѣщены были числа вида $x = 10^n$ (красныя числа), а во второмъ ряду — соотвѣтствующія числа $y = 10^8(1{,}0001)^n$ при $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$ (черныя числа). Такимъ образомъ,

$$y = 10^8\left[\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{10^4}\right]^{\frac{x}{10^5}},$$

а потому $x = 10^5 \log(y\,10^{-8})$, если за основаніе принято число $(1+1/10^4)^{10^4}$, каковое отличается отъ основанія e нашихъ натуральныхъ логариѳмовъ только въ четвертомъ десятичномъ знакѣ. Таким образомъ, таблица Бюрги представляетъ собой, строго говоря, таблицу антилогариѳмовъ, т. е. таблицу, въ которой мы по каждому логариѳму непосредственно находимъ

*) Болѣе обстоятельныя свѣдѣнія объ этомъ замѣчательномъ человѣкѣ можно найти въ статьѣ М. Кантора въ „Allgemeine Deutsche Biographie“.

соотвѣтствующее число. И здѣсь мы имѣемъ, такимъ образомъ, натуральные логариѳмы. Однако, идея разсматривать числа, какъ степени одного опредѣленнаго основанія, а логариѳмы, какъ показателей, была Бюрги совершенно чужда.

Джонъ Неперъ (Neper или Napier, Baron von Merchiston) родился въ 1550 году вблизи Эдинбурга и жилъ до самой смерти (1617) въ Шотландіи. Его „Descriptio mirifici logarithmorum canonis" появилось въ печати въ 1614 году.

Неперъ въ эпоху, когда наше понятіе о функціи еще не было выработано, оченъ остроумно и наглядно представляетъ послѣдовательность логариѳмовъ и чиселъ. Онъ представляетъ себѣ двѣ точки, одновременно движущіяся по прямой линіи. Первая точка проходитъ равныя разстоянія въ равные промежутки времени; если поэтому путь x, который онъ проходитъ въ элементъ времени, есть Δ, то въ n элементовъ времени

$$x = n\Delta;$$

вторая же точка движется къ опредѣленной конечной точкѣ такимъ образомъ, что въ каждый элементъ времени она пробѣгаетъ опредѣленную $1/m$ часть остающагося пути. Если въ первый моментъ вторая точка также пробѣгаетъ разстояніе Δ, то весь ея путь составляетъ $m\Delta$. Если мы это разстояніе примемъ за единицу, то путь, остающійся послѣ перваго элемента времени, есть

$$(m-1)\Delta = \left(1 - \frac{1}{m}\right);$$

по истеченіи же n элементовъ времени разстояніе второй точки отъ конца пути есть

$$y = \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n.$$

Такимъ образомъ,

$$y = \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{mx},$$

т. е. x есть логариѳмъ числа y при основаніи $\left(1 - \frac{1}{m}\right)^m$.

Неперъ принялъ $m = 10^7$, такъ что число $\left(1 - \frac{1}{m}\right)^m$ очень близко подходитъ къ e^{-1}.

Лангранжъ, который въ своихъ дидактическихъ сочиненіяхъ обыкновенно даетъ прекрасное изложеніе историческаго развитія дисциплины, въ своихъ „Leçons élémentaires" *) въ главѣ о логариѳмахъ указываетъ,

*) „Leçons élémentaires sur les mathématiques, données à l'école normale en 1795". Oeuvres de Lagrange, Tome VII.

что задача о музыкальной скалѣ почти необходимо должна была привести къ понятію о логариѳмахъ. Если мы обозначимъ основной тонъ черезъ единицу, то гармоническіе интервалы получаются дѣленіемъ струны монохорда въ очень простыхъ отношеніяхъ; объ этомъ знали еще пиѳагорейцы. Обратныя значенія этихъ отношеній, которыя мы называемъ числами колебаній, суть:

Основной тонъ	1.
Секунда	9/8.
Малая терція	6/5.
Большая терція	5/4.
Кварта	4/3.
Квинта	3/2.
Секста	5/3.
Септима	15/8.
Октава	2.

Въ этой таблицѣ квинта секунды, напримѣръ, которой соотвѣтствуетъ число 27/16, вовсе отсутствуетъ; чтобы получать частные интервалы, нужно еще, такимъ образомъ, вставлять промежуточные тоны. Между тѣмъ, если бы числа колебаній можно было расположить въ геометрическую прогрессію, то мы получили бы гамму, въ которой каждое число колебаній находится въ одномъ и томъ же отношеніи къ предыдущему; исходя отъ любого тона, можно было бы такимъ образомъ получить ту же послѣдовательность интерваловъ. Изъ практическихъ соображеній это постоянное отношеніе не должно быть слишкомъ мало; опытъ музыкантовъ призналъ достаточнымъ 12 тоновъ на октаву. Въ этой такъ называемой равномѣрной модераціи интервалы осуществляются не во всей чистотѣ, а лишь приближенно. Поэтому, если мы будемъ выражать высоту тона логариѳмомъ числа колебаній и раздѣлимъ lg 2 на 12 равныхъ частей, то мы получимъ лучшій способъ модераціи.

Самыя числа колебаній будутъ въ такомъ случаѣ:

$$1,\ 2^{1/12},\ 2^{2/12},\ 2^{3/12},\ \ldots,\ 2^{11/12},\ 2.$$

Для секунды, напримѣръ, мы получаемъ 1,123 ..., между тѣмъ какъ точное число есть 1,125. Для квинты мы получаемъ 1,4983 вмѣсто точнаго числа 1,5.

ГЛАВА VII.

Уравненія первой степени.

§ 43. Уравненія первой степени съ однимъ и двумя неизвѣстными.

Въ § 18 мы показали, что необходимость ввести дробныя числа была вызвана рѣшеніемъ слѣдующей задачи:

1. Даны числа a и b; найти число x, удовлетворяющее условію

$$ax = b. \qquad (1)$$

Мы видѣли, что, если a и b суть произвольныя цѣлыя или дробныя числа и если, кромѣ того, $a \neq 0$, то существуетъ одно и только одно число, удовлетворяющее поставленному требованію. Если же $a = 0$ и $b \neq 0$, то нѣтъ ни одного числа, которое выполняло бы условіе (1). Наконецъ, когда $a=0$ и $b=0$, то всякое число x удовлетворяетъ условію (1).

Послѣ того, какъ мы ввели дробныя и ирраціональныя числа, числа a и b могутъ имѣть также дробныя и ирраціональныя значенія.

Равенство (1) называется уравненіемъ первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ; нахожденіе же неизвѣстнаго числа x называется рѣшеніемъ уравненія.

Въ сборникахъ для упражненій находится множество задачъ, въ которыхъ требуется выразить посредствомъ такого рода равенства вопросъ изъ обыденной жизни или изъ какой-нибудь отрасли науки. Въ унаслѣдованной нами отъ древнихъ грековъ антологіи находится множество прекрасныхъ задачъ этого рода, изложенныхъ въ формѣ эпиграммъ *).

Не всегда, однако, условія, при помощи которыхъ должны быть найдены неизвѣстныя, бываютъ столь просты, какъ въ приведенномъ

---

*) Ариѳметическія эпиграммы греческой антологіи собраны и изданы съ рѣшеніями въ нѣмецкомъ переводѣ Циркелемъ (Zirkel) въ программной работѣ гимназіи въ Боннѣ за 1853 г. Эти эпиграммы въ нѣмецкой переработкѣ содержатся также въ книгѣ Діофанта, переведенной на нѣмецкій языкъ Вертгеймомъ (Wertheim, Leipzig, 1890).

примѣрѣ: иногда, напримѣръ, неизвѣстныхъ чиселъ бываетъ нѣсколько, и условія, которымъ они должны удовлетворять, выражены посредствомъ нѣсколькихъ уравненій. Мы сперва займемся слѣдующей болѣе общей задачей.

2. Даны числа a, b, c, a', b', c'. Найти неизвѣстныя числа x, y, удовлетворяющія двумъ уравненіямъ:

$$\begin{array}{r|cc} ax + by = c & b' & -a' \\ a'x + b'y = c' & -b & a \end{array} \tag{2}$$

(Два уравненія съ двумя неизвѣстными).

Для рѣшенія этой задачи можно поступить слѣдующимъ образомъ. Умножаемъ всѣ члены обоихъ уравненій на написанныхъ сбоку множителей: одинъ разъ соотвѣтственно на $b', -b$, другой разъ соотвѣтственно на $-a'$, a; каждый разъ складываемъ полученные результаты и тогда найдемъ:

$$\begin{aligned} (ab' - ba')\,x &= cb' - bc' \\ (ab' - ba')\,y &= -ca' + ac', \end{aligned} \tag{3}$$

т. е. два уравненія, но каждое съ однимъ только неизвѣстнымъ. Въ обоихъ уравненіяхъ неизвѣстныя x и y имѣютъ одинъ и тотъ же коэффиціентъ

$$\Delta = ab' - ba'. \tag{4}$$

Этотъ коэффиціентъ называется *опредѣлителемъ* (*детерминантомъ*) *системы уравненій* (2) и иногда изображается еще такъ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}. \tag{5}$$

3. *Если опредѣлитель не равенъ нулю, то есть одна и только одна пара чиселъ* x, y, *удовлетворяющихъ уравненіямъ* (2):

$$x = \frac{cb' - bc'}{\Delta}, \quad y = \frac{-ca' + ac'}{\Delta}. \tag{6}$$

Въ изложенномъ способѣ рѣшенія уравненій (2) мы *исключали* изъ обоихъ уравненій поперемѣнно каждое изъ неизвѣстныхъ, и потому этотъ способъ называется *способомъ исключенія*. Можно рѣшать уравненія еще иначе, такъ называемымъ *способомъ подстановки*, отличающимся большей постепенностью.

Если о коэффиціентахъ a, b, a', b' извѣстно, что одинъ изъ нихъ не равенъ нулю, то мы можемъ, не нарушая общности, считать отличнымъ отъ нуля любой изъ четырехъ коэффиціентовъ,—напримѣръ, b': мы можемъ, вѣдь, написать на второмъ мѣстѣ любое изъ двухъ уравненій, а затѣмъ обозначить черезъ y любое изъ двухъ неизвѣстныхъ.

Итакъ, пусть b' не равно нулю. Если бы число x было извѣстно, то посредствомъ второго изъ уравненій (2) мы нашли бы значеніе неизвѣстнаго y:

$$y = \frac{c' - a'x}{b'}. \tag{7}$$

Если подставить это значеніе неизвѣстнаго y въ первое изъ уравненій (2), то посредствомъ простыхъ вычисленій получимъ:

$$\Delta x = cb' - bc'. \tag{8}$$

Если число Δ отлично отъ нуля, то значеніе неизвѣстнаго x окажется такое же, какъ и выше, т. е. совпадаетъ со значеніемъ (6). Затѣмъ изъ уравненія (7) получается выраженіе для неизвѣстнаго y, которое также совпадаетъ со значеніемъ (6).

При этомъ способѣ рѣшенія ясно, что въ случаѣ, когда $\Delta = 0$, но $cb' - bc' \neq 0$, нѣтъ ни одного значенія для неизвѣстнаго x, которое удовлетворяло бы условію (8); слѣдовательно, уравненія (2) въ этомъ случаѣ не имѣютъ рѣшенія. Если же и $\Delta = 0$ и $cb' - bc' = 0$, то уравненіе (8) нисколько не опредѣляетъ значенія неизвѣстнаго x; въ этомъ случаѣ для x можно взять произвольное значеніе, а соотвѣтствующее значеніе для неизвѣстнаго y получится изъ уравненія (7): любая пара чиселъ, полученная такимъ образомъ, удовлетворяетъ уравненіямъ (2).

Наконецъ, когда всѣ коэффиціенты a, b, a', b' суть нули, то уравненія (2) имѣютъ смыслъ лишь при условіи, что и числа c и c' суть нули. Но тогда уравненія удовлетворяются произвольными значеніями неизвѣстныхъ x и y. Соединяя все сказанное, приходимъ къ слѣдующему выводу:

4. Если опредѣлитель уравненій (2) равенъ нулю, то послѣднія либо противорѣчатъ другъ другу и не имѣютъ ни одного рѣшенія, либо же одно изъ двухъ уравненій представляетъ собой слѣдствіе другого и въ этомъ случаѣ уравненія имѣютъ безчисленное множество рѣшеній.

§ 44. Уравненія первой степени съ тремя неизвѣстными.

1. Займемся вопросомъ объ уравненіяхъ первой степени въ нѣсколько болѣе общемъ видѣ. Разсмотримъ систему трехъ уравненій съ тремя неизвѣстными x, y, z:

$$\begin{array}{l|cc} ax + by + cz = e, & & \\ a'x + b'y + c'z = e', & c'' & -b'' \\ a''x + b''y + c''z = e'', & -c' & b' \end{array} \tag{1}$$

гдѣ двѣнадцать коэффиціентовъ a, b, c, e, ... суть данныя числа.

Если всѣ девять коэффиціентовъ $a, b, \ldots, c''$ равны нулю, то имѣетъ мѣсто одно изъ двухъ: либо коэффиціенты e, e', e'' не всѣ равны нулю, и тогда уравненія заключаютъ въ себѣ противорѣчіе, либо же $e = e' = e'' = 0$, и тогда уравненія не даютъ никакихъ условій для опредѣленія неизвѣстныхъ x, y, z.

Будемъ разсматривать каждую пару изъ трехъ уравненій (1), какъ систему двухъ уравненій первой степени попеременно относительно каждой изъ трехъ паръ неизвѣстныхъ: y и z, z и x, x и y. Тогда изъ девяти коэффиціентовъ

$$\begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{matrix} \tag{2}$$

мы составимъ для девяти указанныхъ системъ уравненій девять опредѣлителей:

$$\begin{aligned} \alpha &= b'c'' - c'b'', & \beta &= c'a'' - a'c'', & \gamma &= a'b'' - b'a'', \\ \alpha' &= b''c - c''b, & \beta' &= c''a - a''c, & \gamma' &= a''b - b''a, \\ \alpha'' &= bc' - cb', & \beta'' &= ca' - ac', & \gamma'' &= ab' - ba'. \end{aligned} \tag{3}$$

Если всѣ коэффиціенты (2) равны нулю, то и всѣ опредѣлители (3) суть нули. Разсмотримъ случай, когда всѣ опредѣлители (3) равны нулю, но коэффиціенты (2) не всѣ суть нули; легко видѣть, что въ этомъ случаѣ либо уравненія (1) другъ другу противорѣчатъ, либо два изъ нихъ представляютъ собой слѣдствія третьяго. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что коэффиціентъ c'' отличенъ отъ нуля; тогда послѣднее изъ уравненій (1) дастъ намъ:

$$z = \frac{e'' - a''x - b''y}{c''}; \tag{4}$$

подставивъ это значеніе неизвѣстнаго z въ первыя два уравненія системы (1) и пользуясь обозначеніями (3), получимъ:

$$\begin{aligned} \beta'x - \alpha'y &= ec'' - ce'', \\ -\beta x + \alpha y &= e'c'' - c'e''. \end{aligned} \tag{5}$$

Слѣдовательно, если $\alpha = \beta = \alpha' = \beta' = 0$, но правыя части уравненій (5) не равны нулю, то наши уравненія оказываются невозможными; если же и $ec'' - ce'' = 0$, $e'c'' - c'e'' = 0$, то уравненія (5) удовлетворяются при произвольныхъ значеніяхъ неизвѣстныхъ x и y; значеніе неизвѣстнаго z, соотвѣтствующее каждой системѣ значеній x и y, получится подстановкой изъ уравненія (4).

2. Разсмотримъ теперь случай, когда не всѣ опредѣлители (3) равны нулю; мы нисколько не потерямъ въ общности, если примемъ, что отличный отъ нуля опредѣлитель есть $\alpha = b'c'' - c'b''$. Тогда, считая величину x извѣстной, опредѣлимъ изъ двухъ послѣднихъ уравненій (1) неизвѣстныя y и z; по правиламъ, изложеннымъ въ п. 2 § 43-го, получимъ:

$$\begin{aligned} \alpha y &= \quad e'c'' - e''c' + \beta x, \\ \alpha z &= -e'b'' + e''b' + \gamma x. \end{aligned} \tag{6}$$

Подставляя полученныя отсюда значенія неизвѣстныхъ y и z въ первое изъ уравненій (1), получимъ:

$$(a\alpha + b\beta + c\gamma)x = e\alpha + e'\alpha' + e''\alpha''.$$

Введемъ снова обозначеніе

$$\Delta = a\alpha + b\beta + c\gamma, \tag{7}$$

при чемъ, принимая во вниманіе формулы (3), найдемъ, что

$$\begin{aligned} \Delta = {} & ab'c'' - ac'b'' \\ & + bc'a'' - ba'c'' \\ & + ca'b'' - cb'a''. \end{aligned} \tag{8}$$

Тогда

$$\Delta x = e\alpha + e'\alpha' + e''\alpha''. \tag{9}$$

Отсюда вполнѣ опредѣляется величина неизвѣстнаго x, если только опредѣлитель Δ отличенъ отъ нуля; значенія неизвѣстныхъ y и z получатся тогда съ помощью формулъ (6).

Если же $\Delta = 0$, то уравненіе (9) возможно лишь при условіи, что

$$e\alpha + e'\alpha' + e''\alpha'' = 0; \tag{10}$$

но въ этомъ случаѣ уравненіе (9) не опредѣляетъ значенія неизвѣстнаго x; величина x можетъ быть взята произвольно; значенія неизвѣстныхъ y и z найдутся изъ уравненій (6).

Величина Δ и здѣсь называется опредѣлителемъ системы (1) и часто обозначается еще такъ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Разсматривая формулу (8), находимъ, что величина Δ останется безъ измѣненія, если замѣнить другъ другомъ соотвѣтственно коэффиціенты b на a', c на a'' и c' на b'', такъ что можно писать и такъ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \\ c, & c', & c'' \end{vmatrix}.$$

Девять величинъ: $\alpha = b'c'' - c'b''$, . . ., опредѣляемыя равенствами (3), называются **минорами** опредѣлителя Δ.

3. Изложенное къ двухъ предыдущихъ пунктахъ сводится къ слѣдующему.

Если опредѣлитель системы (1) отличенъ отъ нуля, то неизвѣстныя x, y, z опредѣляются ею однозначно. Если же $\Delta = 0$, то уравненія (1) либо противорѣчатъ другъ другу, либо одно, или два, или всѣ три неизвѣстныя остаются произвольными; число неизвѣстныхъ, получающихъ произвольныя значенія, зависитъ отъ того, будетъ ли одна изъ величинъ (3) отлична отъ нуля, — или всѣ онѣ равны нулю, но одинъ изъ коэффиціентовъ (2) отличенъ отъ нуля, — или же, наконецъ, всѣ коэффиціенты (2) обращаются въ нуль.

4. Опредѣлитель Δ выражается любой изъ шести слѣдующихъ формулъ:

$$\begin{aligned} \Delta &= a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' &&= a\alpha + b\beta + c\gamma \\ &= b\beta + b'\beta' + b''\beta'' &&= a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' \\ &= c\gamma + c'\gamma' + c''\gamma'' &&= a''\alpha'' + b''\beta'' + c''\gamma''. \end{aligned} \tag{12}$$

Эти шесть формулъ получаются изъ выраженія (8), если въ послѣднемъ соединить въ группы члены, имѣющіе множителемъ соотвѣтственно a, a' и a'', либо b, b' и b'', либо c, c' и c'', либо a, b, c и т. д., и принять во вниманіе обозначенія (3).

Далѣе имѣютъ мѣсто слѣдующія соотношенія:

$$\begin{aligned} b\alpha + b'\alpha' + b''\alpha'' &= 0, \\ c\alpha + c'\alpha' + c''\alpha'' &= 0, \\ c\beta + c'\beta' + c''\beta'' &= 0, \\ a\beta + a'\beta' + a''\beta'' &= 0, \\ a\gamma + a'\gamma' + a''\gamma'' &= 0, \\ b\gamma + b'\gamma' + b''\gamma'' &= 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Непосредственнымъ вычисленіемъ обнаружимъ справедливость перваго изъ равенствъ (13). Получимъ тождество:

$$b(b'c''-c'b'')+b'(b''c-c''b)+b''(bc'-cb')=0.$$

Чтобы убѣдиться въ справедливости прочихъ равенствъ (13), достаточно въ написанномъ тождествѣ всевозможными способами замѣщать одна другою буквы a, b, c.

Съ помощью соотношеній (12) и (13) систему (1) можно рѣшить непосредственно **способомъ исключенія**. Для этого умножаемъ уравненія (1) три раза соотвѣтственно на множителей, указанныхъ ниже, и складываемъ каждый разъ почленно полученные результаты:

$$\begin{array}{l|lll} ax+by+cz=e & \alpha & \beta & \gamma \\ a'x+b'y+c'z=e' & \alpha' & \beta' & \gamma' \\ a''x+b''y+c''z=e'' & \alpha'' & \beta'' & \gamma''. \end{array}$$

Пользуясь соотношеніями (12) и (13), найдемъ:

$$\begin{aligned} \Delta x &= e\alpha+e'\alpha'+e''\alpha'', \\ \Delta y &= e\beta+e'\beta'+e''\beta'', \\ \Delta z &= e\gamma+e'\gamma'+e''\gamma''. \end{aligned} \tag{14}$$

Первое изъ этихъ равенствъ совпадаетъ съ полученнымъ раньше равенствомъ (9). Два другія равенства совпадаютъ съ тѣми, которыя получатся изъ формулъ (6), если подставимъ вмѣсто x его значеніе изъ равенства (9); въ этомъ легко убѣдиться вычисленіемъ, котораго нѣтъ надобности здѣсь приводить.

Если нѣкоторыя величины имѣютъ въ какомъ-либо заданіи аналогичныя значенія и при рѣшеніи съ каждой изъ этихъ величинъ приходится поступать одинаково, то такой способъ рѣшенія называется **симметричнымъ**; такимъ образомъ, изложенный выше способъ исключенія можетъ быть названъ **симметричнымъ**, чего нельзя сказать о способѣ подстановки.

5. Изложенная выше теорія уравненій первой степени съ тремя неизвѣстными x, y, z, допускаетъ геометрическое толкованіе. (Мы предполагаемъ извѣстными основныя свѣдѣнія изъ аналитической геометріи трехъ измѣреній въ томъ размѣрѣ, въ какомъ они изложены во второмъ томѣ настоящаго сочиненія). Любыя три числа x, y, z могутъ быть разсматриваемы, какъ **координаты** нѣкоторой точки въ пространствѣ. Всѣ точки, координаты которыхъ удовлетворяютъ уравненію первой степени

$$ax+by+cz=e,$$

лежатъ въ одной плоскости, если только не всѣ коэффиціенты a, b, c равны нулю. Точки, координаты которыхъ удовлетворяютъ какъ предыдущему уравненію, такъ еще и другому

$$a'x + b'y + c'z = e',$$

лежатъ въ обѣихъ плоскостяхъ и образуютъ поэтому прямую, по которой обѣ плоскости пересѣкаются. Если дано еще третье уравненіе

$$a''x + b''y + c''z = e'',$$

то всѣ три уравненія удовлетворяются координатами точки пересѣченія трехъ плоскостей, или, вообще говоря, координатами всѣхъ точекъ, одновременно лежащихъ на этихъ трехъ плоскостяхъ.

Если детерминантъ Δ отличенъ отъ нуля, то три плоскости пересѣкаются въ одной точкѣ.

Если же $\Delta = 0$, но миноры (3) не всѣ равны нулю, то имѣетъ мѣсто одно изъ двухъ: либо равенство (10) справедливо, и, слѣдовательно, одна изъ трехъ величинъ x, y, z остается произвольной, либо же равенство (10) несправедливо. Въ первомъ случаѣ три плоскости пересѣкаются по прямой; во второмъ случаѣ нѣтъ ни одной точки, которая принадлежала бы всѣмъ тремъ плоскостямъ; плоскости пересѣкаются попарно по тремъ параллельнымъ прямымъ, подобно боковымъ гранямъ треугольной призмы, или же двѣ плоскости параллельны другъ другу и пересѣкаются съ третьей по параллельнымъ прямымъ.

Если, наконецъ, всѣ миноры (3) обращаются въ нуль, то лѣвыя части уравненій (1) отличаются другъ отъ друга лишь нѣкоторымъ постояннымъ множителемъ, и наши три плоскости либо параллельны, либо совпадаютъ; въ первомъ случаѣ онѣ не имѣютъ ни одной общей точки, во второмъ случаѣ — безчисленное множество ихъ.

§ 45. Однородныя уравненія.

1. Однородныя уравненія составляютъ особый классъ уравненій первой степени. Сюда относятся такія уравненія, каждый членъ которыхъ содержитъ которое-нибудь изъ неизвѣстныхъ. Таковы, напримѣръ, уравненія вида

$$ax + by + cz = 0.$$

Очевидно, что подобныя уравненія удовлетворяются, если положить $x = y = z = 0$. Такое рѣшеніе называется несобственнымъ. Если же, по крайней мѣрѣ, одно неизвѣстное отлично отъ нуля, то рѣшеніе называется собственнымъ. Въ послѣднемъ случаѣ всѣ члены уравненія можно раздѣлить на наизвѣстное, отличное отъ нуля, за каковое примемъ, напримѣръ, z, и получить уравненіе, содержащее лишь отношенія x/z, y/z.

Итакъ, **однородныя уравненія выражаютъ условія, связывающія не самыя неизвѣстныя, но лишь отношенія неизвѣстныхъ къ одному изъ нихъ.**

Разсмотримъ сначала систему двухъ однородныхъ уравненій:

$$\begin{aligned} a'x + b'y + c'z &= 0, \\ a''x + b''y + c''z &= 0. \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{cc} b'' & -a'' \\ -b' & a' \end{array} \right.$$

Способомъ, указаннымъ въ § 43, мы можемъ опредѣлить отсюда отношенія x/z, y/z; для этого умножаемъ всѣ члены уравненій на множителей, написанныхъ сбоку, и полученные результаты складываемъ. Тогда найдемъ:

$$\begin{aligned} (a'b'' - b'a'')x + (c'b'' - b'c'')z &= 0, \\ (a'b'' - b'a'')y + (a'c'' - c'a'')z &= 0, \end{aligned}$$

или, пользуясь обозначеніями (3) § 44-го,

$$\gamma x - \alpha z = 0, \quad \gamma y - \beta z = 0.$$

Если исключить случай, когда $\alpha = \beta = \gamma = 0$, то найдемъ:

$$\frac{x}{z} = \frac{\alpha}{\gamma}, \quad \frac{y}{z} = \frac{\beta}{\gamma}, \quad \frac{x}{y} = \frac{\alpha}{\beta};$$

эти уравненія можно представить и въ слѣдующемъ видѣ:

$$x : y : z = \alpha : \beta : \gamma.$$

2. Разсмотримъ теперь систему трехъ однородныхъ уравненій:

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= 0, \\ a'x + b'y + c'z &= 0, \\ a''x + b''y + c''z &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Опредѣливъ изъ двухъ послѣднихъ уравненій отношенія $x : z$ и $y : z$, подставляемъ ихъ въ первое уравненіе. Тогда найдемъ:

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0, \quad \text{т. е.} \quad \Delta = 0.$$

Если же $\alpha = \beta = \gamma = 0$, то детерминантъ Δ во всякомъ случаѣ равенъ нулю [1]).

---

[1]) Эта оговорка необходима потому, что при $\alpha = \beta = \gamma = 0$ отношенія двухъ неизвѣстныхъ къ третьему изъ двухъ послѣднихъ уравненій (1) опредѣлены быть не могутъ (§ 43, 4).

Итакъ, система трехъ однородныхъ уравненій съ тремя неизвѣстными лишь въ томъ случаѣ имѣетъ собственное рѣшеніе, когда опредѣлитель $\varDelta$ обращается въ нуль.

Если $\varDelta = 0$, а миноры α, β, γ не всѣ равны нулю, то мы получимъ рѣшеніе, указанное въ пунктѣ 1.

Если же $\alpha = \beta = \gamma = 0$, то изъ двухъ послѣднихъ уравненій (1) одно есть слѣдствіе другого; отношенія двухъ неизвѣстныхъ къ третьему опредѣляются тогда изъ первыхъ двухъ уравненій (1).

3. Въ аналитической геометріи однородное уравненіе первой степени выражаетъ плоскость, проходящую черезъ начало координатъ. Двѣ такія плоскости всегда имѣютъ общую прямую, которая также проходитъ черезъ начало координатъ. Уравненіе $\varDelta = 0$ представляетъ собой условіе, которому должны удовлетворять коэффиціенты уравненій (1), если выражаемыя ими 3 плоскости пересѣкаются всѣ по одной прямой.

4. Изъ вышеизложенныхъ разсужденій ясно, какимъ образомъ можно обобщить задачу о рѣшеніи линейныхъ уравненій.

Если дана система уравненій первой степени съ произвольнымъ числомъ неизвѣстныхъ x, y, z, . . ., то посредствомъ одного изъ уравненій, въ которомъ коэффиціентъ при одномъ изъ неизвѣстныхъ, — напримѣръ, при x, — не равенъ нулю, выражаютъ неизвѣстное x при помощи прочихъ неизвѣстныхъ. Подставивъ это выраженіе неизвѣстнаго x во всѣ прочія уравненія данной системы, получимъ новую систему, въ которой число неизвѣстныхъ, по крайней мѣрѣ, на единицу меньше, такъ какъ неизвѣстное x въ нее не входитъ.

Продолжая тотъ же процессъ, мы исключаемъ изъ уравненій всѣ неизвѣстныя, пока таковыя остаются. Но послѣ этого мы можемъ получить равенства, содержащія лишь извѣстныя величины; равенства эти либо выполняются, либо не выполняются. Въ послѣднемъ случаѣ система не имѣетъ рѣшеній. Если же равенства выполняются, то либо всѣ неизвѣстныя могутъ быть вполнѣ опредѣлены, либо же нѣкоторыя остаются произвольными. Съ увеличеніемъ числа неизвѣстныхъ и уравненій вычисленія усложняются, и вмѣстѣ съ тѣмъ становится труднѣе усмотрѣть общіе законы, которые здѣсь имѣютъ мѣсто. Къ счастью, Якоби (Jacobi) своей теоріей опредѣлителей создалъ алгориѳмъ, при помощи котораго общія свойства линейныхъ уравненій получаютъ чрезвычайно изящное выраженіе. Впослѣдствіи, когда мы изучимъ свойства перестановокъ, мы вновь вернемся къ этому вопросу *).

---

*) Опредѣлители были впервые примѣнены въ теоріи уравненій 1-ой степени Лейбницемъ (письмо къ Л'Опиталю, 1693; „Acta Eruditorum", 1700). Послѣ этого тотъ же пріемъ былъ вновь открытъ и развитъ Габріэлемъ Крамеромъ („Intro-

§ 46. Приложенія.

1. Линейныя уравненія весьма часто примѣняются въ геометріи и естественныхъ наукахъ. Разсмотримъ сперва простой примѣръ изъ химіи, такъ называемый косвенный анализъ. Обозначимъ черезъ A, B и P три химическихъ элемента и черезъ AP и BP два химическихъ соединенія, въ которыхъ на каждый атомъ одного элемента приходится одинъ атомъ другого. Дана смѣсь соединеній AP и BP, при чемъ извѣстны:

1) общій вѣсъ g смѣси;

2) вѣсъ q всего входящаго въ смѣсь вещества P.

Требуется найти содержащіяся въ смѣси вѣсовыя количества соединеній AP и BP.

Обозначивъ искомыя количества соотвѣтственно черезъ x и y, имѣемъ одно уравненіе:

$$x + y = g. \tag{1}$$

Второе уравненіе можно составить, основываясь на законахъ теоретической химіи. Если черезъ a, b и p обозначимъ соотвѣтственно атомные вѣса элементовъ A, B и P, то молекулярный вѣсъ соединенія AP выразится числомъ $a + p$, число же молекулъ въ x вѣсовыхъ единицахъ этого соединенія есть $x/(a + p)$. Вѣсъ всѣхъ атомовъ элемента P, содержащихся въ соединеніи AP, есть $px/(a + p)$; въ соединеніи же BP вѣсовое количество того же элемента выразится черезъ $py/(b+p)$. Такъ какъ число q обозначаетъ вѣсъ всего находящагося въ смѣси вещества P, то мы можемъ составить второе уравненіе:

$$\frac{x}{a+p} + \frac{y}{b+p} = \frac{q}{p}. \tag{2}$$

---

duction à l'analyse des lignes algébriques", Genf, 1750). Укажемъ еще на слѣдующія сочиненія: Cauchy (Journ. de l'école polytechnique, Cah. 17, Exercices de Mathématiques); Jacobi, „De formatione et proprietatibus determinantium"; Crelles Journal für Mathematik, Bd. 22 (1841): эта работа, снабженная историческими примѣчаніями П. Штекеля (P. Stäckel), вышла также въ изданіи Оствальда (Klassiker der exakten Wissenschaften). Baltzer, „Theorie und Anwendung der Determinanten", 4. Aufl. (Leipzig, 1875). Терминъ „детерминантъ" („опредѣлитель") введенъ былъ впервые Гауссомъ въ его „Disquisitiones arithmeticae". Коши употреблялъ также выраженіе „fonction alternée" и „Resultante" (по Лапласу).

На русскомъ языкѣ наиболѣе обстоятельнымъ сочиненіемъ по теоріи детерминантовъ является сочиненіе проф. Ващенко-Захарченко „Теорія опредѣлителей и теорія формъ" (Кіевъ, 1877). Кромѣ того: проф. Ярошенко, „Теорія опредѣлителей" (Одесса, 1871).

Изъ уравненій (1) и (2) можно опредѣлить числа x и y (за исключеніемъ того случая, когда $a = b$). Мы получимъ:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{a+p}{p} \cdot \frac{gp - q(b+p)}{a-b}, \\ y &= \frac{b+p}{p} \cdot \frac{q(a+p) - gp}{a-b}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Изложенная задача имѣетъ для химика важное практическое значеніе: часто случается, что не составляетъ большой трудности выдѣлить изъ смѣси элементъ P и количественно его опредѣлить, тогда какъ отдѣленіе элементовъ A и B другъ отъ друга сопряжено съ несравненно большими затрудненіями.

2. Примѣры *). Имѣемъ, напримѣръ, три грамма смѣси хлористаго калія и хлористаго натрія и найдено, что вѣсъ хлора, содержащагося въ смѣси, есть 1,7 грамма; числа a, b, p обозначаютъ соотвѣтственно атомные вѣса калія, натрія и хлора:

$$\begin{aligned} a &= 39{,}1, & b &= 23, & p &= 35{,}4, \\ a - b &= 16{,}1, & a + p &= 74{,}5, & b + p &= 58{,}4, \\ g &= 3, & q &= 1{,}7. \end{aligned}$$

Находимъ приближенно:

$$x = \frac{74{,}5 \,.\, (3 \,.\, 35{,}4 - 1{,}7 \,.\, 58{,}4)}{35{,}4 \,.\, 16{,}1} = \frac{74{,}5 \,.\, 6{,}9}{35{,}4 \,.\, 16{,}1} = 0{,}9;$$

$$y = \frac{58{,}4 \,.\, (1{,}7 \,.\, 74{,}5 - 3 \,.\, 35{,}4)}{35{,}4 \,.\, 16{,}1} = \frac{58{,}4 \,.\, 20{,}4}{35{,}4 \,.\, 16{,}1} = 2{,}1.$$

Иногда, вмѣсто атомовъ, могутъ быть даны атомныя группы. Напримѣръ, имѣемъ два грамма смѣси углекислаго кальція ($CaCO_3$) и углекислаго стронція ($SrCO_3$), при чемъ углекислоты (CO_2) во всей смѣси находится 0,7 грамма. Въ формулахъ (3) тогда нужно положить:

$$\begin{aligned} SrO&: & a &= 103{,}6, & a - b &= 47{,}6, \\ CaO&: & b &= 56, & a + p &= 147{,}6, \\ CO_2&: & p &= 44, & b + p &= 100, \\ && g &= 2, & q &= 0{,}7. \end{aligned}$$

---

*) Fresenius. Quantitative chemische Analyse, Bd. II, S. 130. Braunschweig, 1877 — 1887.

Изъ формулъ (3) получимъ приближенно:

$$x = 1{,}3, \quad y = 0{,}7.$$

3. Изложенный прiемъ непримѣнимъ въ томъ случаѣ, когда число веществъ, составляющихъ данную смѣсь, болѣе двухъ. Въ этомъ можно убѣдиться слѣдующимъ образомъ. Въ смѣси соединенiй AP, BP и CP замѣнимъ элементъ P другимъ элементомъ P' и получимъ смѣсь изъ соединенiй AP', BP' и CP'. Обозначимъ вѣсовыя количества обѣихъ смѣсей соотвѣтственно черезъ g и g', а атомные вѣса элементовъ — черезъ a, b, c, p, p'; вѣса вещества P въ первой смѣси и вещества P' во второй обозначимъ черезъ q и q'. Числа x y, z пусть означаютъ вѣсовыя количества веществъ A, B и C, находящiяся въ каждой смѣси. Имѣемъ 4 уравненiя:

$$\frac{a+p}{a}x + \frac{b+p}{b}y + \frac{c+p}{c}z = g,$$

$$\frac{a+p'}{a}x + \frac{b+p'}{b}y + \frac{c+p'}{c}z = g',$$

$$\frac{p}{a}x + \frac{p}{b}y + \frac{p}{c}z = q,$$

$$\frac{p'}{a}x + \frac{p'}{b}y + \frac{p'}{c}z = q'.$$

Изъ этихъ четырехъ уравненiй невозможно выбрать три такiя, которыя были бы независимы другъ отъ друга. Изъ двухъ послѣднихъ уравненiй слѣдуетъ, что $q/p = q'/p'$, такъ что эти два уравненiя сводятся къ одному лишь слѣдующему:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \frac{q}{p};$$

изъ двухъ же первыхъ уравненiй при помощи послѣдняго получаемъ:

$$x + y + z = g - q = g' - q'.$$

Такимъ образомъ, мы имѣемъ всего лишь два независимыхъ уравненiя; для опредѣленiя трехъ неизвѣстныхъ этого недостаточно.

4. Покажемъ теперь, какъ примѣняются линейныя уравненiя для изслѣдованiя вопроса о развѣтвленiи электрическаго тока въ системѣ проволокъ. Мы предполагаемъ извѣстными понятiя о силѣ тока и о сопротивленiи цѣпи; замѣтимъ лишь, что сопротивленiе отрѣзка проволоки можно измѣрять его длиной, если на всемъ протяженiи разсматриваемой системы проволока сдѣлана изъ одного и того же матерiала и имѣетъ одну и ту же толщину.

Силу тока можно разсматривать, какъ количество электричества, протекающее за единицу времени черезъ поперечное сѣченіе цѣпи. Если въ какой-нибудь части цѣпи мы выберемъ одно направленіе за положительное, то сила тока въ зависимости отъ его направленія выражается положительнымъ или отрицательнымъ числомъ.

Рѣшимъ слѣдующую задачу. Дана сѣть проволокъ; въ нее входитъ въ опредѣленномъ мѣстѣ токъ данной силы, который развѣтвляется по проволокамъ и входитъ изъ сѣти въ другой вполнѣ опредѣленной точкѣ. Спрашивается, какъ велика сила тока въ каждой части сѣти?

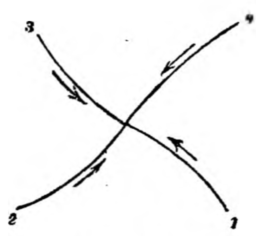
Кирхгоффъ установилъ два закона, которые даютъ возможность составить для рѣшенія данной задачи достаточное число линейныхъ уравненій. Законы эти слѣдующіе.

1. Если въ какой-либо точкѣ сѣти (такъ называемой узловой точкѣ) пересѣкаются нѣсколько проволокъ (фиг. 4), въ которыхъ силы тока равны соотвѣтственно i_1, i_2, i_3, ... (силу тока будемъ выражать положительнымъ числомъ, если токъ направленъ въ проволокѣ къ узловой точкѣ), то имѣетъ мѣсто равенство:

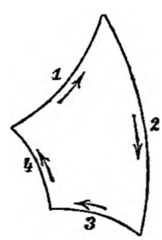
$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + \cdots = 0.$$

2. Для каждой замкнутой группы проволокъ 1, 2, 3, ... (фиг. 5), сопротивленія которыхъ обозначены черезъ w_1, w_2, w_3, ..., имѣетъ мѣсто равенство:

$$i_1 w_1 + i_2 w_2 + i_3 w_3 + \cdots = 0.$$



Фиг. 4.



Фиг. 5.

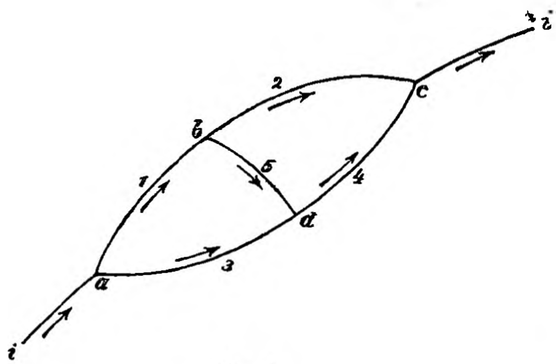
3. Изложенными законами мы воспользуемся для разсмотрѣнія такъ называемаго Уитстонова мостика, который употребляется для измѣренія сопротивленія. Существенную часть этого мостика составляетъ система проволокъ, схематически изображенная на фигурѣ 6.

Буквами a, b, c и d обозначены узловыя точки. Черезъ точку a въ систему вводится токъ силы i, а черезъ точку c выходитъ токъ такой же силы. Въ отрѣзкахъ проволоки, отмѣченныхъ цифрами 1, 2, 3, 4, 5, силы тока выражаются соотвѣтственно числами i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, а сопротивленія — числами w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, при чемъ въ каждомъ отрѣзкѣ проволоки положительное направленіе тока указано стрѣлкой.

Согласно съ первымъ закономъ, мы имѣемъ для четырехъ узловыхъ точекъ слѣдующія четыре уравненія:

$$\begin{aligned} i &= i_1 + i_3 = i_2 + i_4, \\ i_5 &= i_1 - i_2 = i_4 - i_3. \end{aligned} \qquad (4)$$

Система эта сводится лишь къ тремъ независимымъ уравненіямъ, такъ какъ изъ перваго ряда равенствъ слѣдуетъ, что $i_1 - i_2 = i_4 - i_3$. Раз-



Фиг. 6.

сматривая контуры abd, bcd и $abcd$, мы въ силу второго закона можемъ составить соотвѣтственно слѣдующія три уравненія:

$$\begin{aligned} i_5 w_5 &= i_3 w_3 - i_1 w_1, \\ i_5 w_5 &= i_2 w_2 - i_4 w_4. \end{aligned} \qquad (5)$$

Третье уравненіе $i_1 w_1 + i_2 w_2 = i_3 w_3 + i_4 w_4$ представляетъ собою лишь слѣдствіе первыхъ двухъ.

Изъ уравненій (4) получимъ:

$$i_4 = i - i_2, \quad i_3 = i - i_1, \quad i_5 = i_1 - i_2.$$

Подставивъ эти значенія величинъ i_4, i_3 и i_5 въ уравненія (5), найдемъ:

$$\begin{aligned} i_1(w_1 + w_3 + w_5) - i_2 w_5 &= i w_3, \\ - i_1 w_5 + i_2(w_2 + w_4 + w_5) &= i w_4; \end{aligned}$$

отсюда можно опредѣлить величины i_1 и i_2.

Чаще всего одна изъ узловыхъ точекъ — напримѣръ, d — устанавливается такимъ образомъ, чтобы сила тока i_5 оказалась равной нулю.

Этотъ результатъ достигается съ помощью наблюденія весьма точно. Вслѣдствіе перемѣщенія узловой точки d сопротивленія w_3 и w_4 мѣняютъ свою величину. Такъ какъ $i_5 = 0$, то изъ уравненій (4) получимъ равенства: $i_1 = i_2$ и $i_3 = i_4$. При помощи послѣднихъ двухъ равенствъ и уравненій (5) найдемъ соотвѣтствующее этому случаю соотношеніе:

$$w_1 : w_2 = w_3 : w_4.$$

Эта формула примѣняется для вычисленія одной изъ величинъ w_1, w_2, w_3, w_4 посредствомъ трехъ другихъ *).

---

*) Kirchhoff. Poggendorffs Annalen, Bd. 72 (1847); W. Ahrens, Mathematische Annalen, Bd. 49 (1897).

ГЛАВА VIII.

Квадратныя уравненія и мнимыя числа.

§ 47. Квадратныя уравненія.

1. Въ седьмой главѣ мы разсмотрѣли лишь такія уравненія, въ которыя неизвѣстныя входятъ только въ первой степени, а произведенія неизвѣстныхъ вовсе не входятъ. Поэтому мы и назвали эти уравненія уравненіями первой степени. Вслѣдствіе тѣхъ примѣненій, которыя эти уравненія находятъ въ геометріи, ихъ называютъ еще линейными уравненіями.

Обратимся теперь къ разсмотрѣнію такихъ уравненій, которыя содержатъ неизвѣстныя не только въ первой степени, но и во второй; они называются уравненіями второй степени, а также квадратными уравненіями. Сперва мы займемся уравненіями этого типа, содержащими лишь одно неизвѣстное. Покажемъ, какъ рѣшаются такія уравненія.

2. Квадратное уравненіе имѣетъ слѣдующую форму:

$$ax^2 + bx + c = 0. \qquad (1)$$

Коэффиціенты a, b и c представляютъ собою данныя числа, а x есть неизвѣстное число, для котораго нужно найти значеніе, удовлетворяющее уравненію (1). Такое значеніе неизвѣстнаго x называется корнемъ уравненія. Не будемъ пока касаться вопроса, имѣетъ ли вообще данное уравненіе корни и сколько оно имѣетъ корней.

Коэффиціентъ a мы условимся считать отличнымъ отъ нуля, потому что въ противномъ случаѣ уравненіе (1) имѣло бы видъ $bx + c = 0$, т. е. представляло бы собою линейное уравненіе, котораго мы здѣсь уже не будемъ болѣе разсматривать. Умноживъ всѣ члены уравненія (1) на произвольнаго множителя g, мы получимъ новое уравненіе $gax^2 + gbx + gc = 0$, которое удовлетворяется тѣми же значеніями неизвѣстнаго x, что и уравненіе (1). Положивъ $g = 1/a$, мы упростили бы уравеніе, такъ какъ коэффиціентъ при неизвѣстномъ x^2 сдѣлался бы равнымъ единицѣ. Цѣлесообразнѣе, однако, выбрать для множителя g другое значеніе, именно $g = 4a$. Мы получимъ тогда уравненіе:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0;$$

въ силу же тождества $(2ax + b)^2 = 4a^2x^2 + 4abx + b^2$ мы можемъ представить послѣднее уравненіе въ видѣ:

$$(2ax + b)^2 - b^2 + 4ac = 0.$$

Для сокращенія введемъ обозначеніе

$$b^2 - 4ac = D, \qquad (2)$$

и тогда наше уравненіе приметъ слѣдующій видъ:

$$(2ax + b)^2 = D.$$

Извлекая изъ обѣихъ частей уравненія квадратный корень, мы сведемъ наше квадратное уравненіе къ линейному

$$2ax + b = \sqrt{D}.$$

Такъ какъ квадраты двухъ чиселъ, имѣющихъ одну и ту же абсолютную величину, но различные знаки, равны другъ другу, то мы получимъ еще слѣдующее уравненіе:

$$2ax + b = -\sqrt{D}.$$

Оба уравненія ничѣмъ не отличаются другъ отъ друга, если $D = 0$. Такъ какъ до сихъ поръ мы не знаемъ такихъ чиселъ, квадраты которыхъ суть отрицательныя числа, то мы будемъ различать три случая:

1) D есть число отрицательное; уравненіе не имѣетъ ни одного корня.

2) $D = 0$; уравненіе имѣетъ одинъ корень $x = -b/2a$.

3) D есть положительное число; уравненіе имѣетъ два корня:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}. \qquad (3)$$

Такимъ образомъ, отъ значенія числа D зависитъ, будетъ ли квадратное уравненіе имѣть одинъ корень, или два, или ни одного корня. Замѣнимъ въ формулѣ (2) числа a, b и c соотвѣтственно числами ga, gb и gc, гдѣ g есть произвольное число, отличное отъ нуля; вмѣсто числа D мы теперь получимъ число g^2D съ тѣмъ же знакомъ, что и число D; вмѣстѣ съ тѣмъ будетъ имѣть мѣсто тотъ же изъ трехъ случаевъ 1, 2 или 3. Такимъ образомъ, квадратное уравненіе не опредѣляетъ числа D, оставляя при немъ множителя, представляющаго собой квадратъ произвольнаго числа; но выраженіе $ax^2 + bx + c$ вполнѣ опредѣляетъ число D [1]). Мы будемъ называть число D **дискриминантомъ** выраженія $ax^2 + bx + c$.

Введемъ новыя обозначенія коэффиціентовъ квадратнаго уравненія (1), а именно: представимъ его въ слѣдующей формѣ:

$$x^2 + 2ax + b = 0. \tag{4}$$

Для этого уравненія $D = 4(a^2 - b)$; если $D > 0$, уравненіе имѣетъ два корня:

$$\begin{aligned} x_1 &= -a - \sqrt{a^2 - b}, \\ x_2 &= -a + \sqrt{a^2 - b}. \end{aligned} \tag{5}$$

§ 48. Мнимыя числа.

1. Для того, чтобы всякое квадратное уравненіе имѣло корни, приходится снова **расширить понятіе о числѣ**. Мы вводимъ такъ называемыя **мнимыя числа**. Введеніе этихъ чиселъ въ науку оказалось весьма плодотворнымъ; благодаря имъ почти всѣ отрасли математики выигрываютъ въ полнотѣ и законченности.

2. Всѣ разсмотрѣнныя нами до сихъ поръ числа, положительныя и отрицательныя, раціональныя и ирраціональныя, мы будемъ называть **вещественными числами**.

Мы будемъ соединять вещественныя числа въ пары; каждую такую пару, составленную изъ вещественныхъ чиселъ a и b, мы будемъ обозначать символомъ (a, b). Эти числовыя символы мы будемъ называть **мнимыми или комплексными числами**.

Основная мысль здѣсь та же, которой мы руководились выше, когда мы посредствомъ цѣлыхъ чиселъ устанавливали понятіе о дробяхъ; но правила дѣйствій надъ новыми числами, которыя мы теперь вводимъ,

---

[1]) Въ трехчленѣ $ax^2 + bx + c$ коэффиціенты имѣютъ вполнѣ опредѣленныя значенія, которыми опредѣляется дискриминантъ $b^2 - 4ac$. Въ уравненіи же

$$ax^2 + bx + c = 0$$

коэффиціенты a, b и c могутъ быть замѣнены пропорціональными имъ числами ga, gb, gc, вслѣдствіе чего дискриминантъ, какъ указано въ текстѣ, пріобрѣтаетъ множителя g^2.

совершенно иныя. Въ установленіи этихъ правилъ мы ничѣмъ не стѣснены; къ этому мы и перейдемъ.

1) Два комплексныхъ числа $\alpha = (a, b)$ и $\alpha' = (a', b')$ мы будемъ считать равными въ томъ и только въ томъ случаѣ, если $a = a'$ и $b = b'$ *).

2) Чтобы имѣть возможность представить вещественное число, какъ частный случай комплекснаго, мы примемъ, что $(a, 0) = a$ [2]). Отсюда слѣдуетъ, что $(0, 0) = 0$.

3) Сложеніе и вычитаніе опредѣляется слѣдующимъ образомъ:

$$(a, b) \pm (a', b') = (a \pm a', \ b \pm b'). \qquad (1)$$

Отсюда слѣдуетъ, что сочетательный и перемѣстительный законы сложенія остаются справедливыми и для комплексныхъ чиселъ, что вычитаніе есть дѣйствіе, обратное сложенію, и что при $b = b' = 0$ сложеніе и вычитаніе комплексныхъ чиселъ приводятся соотвѣтственно къ тѣмъ же дѣйствіямъ надъ вещественными числами [3]).

---

*) Для комплексныхъ чиселъ не принято устанавливать понятій „больше" и „меньше". Лишь въ очень рѣдкихъ случаяхъ приходится пользоваться этими понятіями и тогда ихъ можно опредѣлять различнымъ образомъ. Можно, напримѣръ, условиться считать, что число (a, b) больше числа (a', b'), если $a > a'$ или если $a = a'$ и $b > b'$.

[2]) Это значитъ: подъ символомъ $(a, 0)$ мы будемъ разумѣть то же, что и подъ символомъ a.

[3]) Остановимся нѣсколько подробнѣе на вопросѣ о введеніи мнимыхъ чиселъ. Въ § 18 дроби были опредѣлены, какъ символы вида $\frac{m}{n}$; были установлены условія равенства и неравенства ихъ и правила дѣйствій надъ ними; было обнаружено, что дѣйствія эти подчинены тѣмъ же формальнымъ законамъ, что и дѣйствія надъ цѣлыми числами.

Этого же пути авторъ, слѣдуя Гамильтону, придерживается и здѣсь. Вводятся новые символы (a, b), гдѣ a и b суть вещественныя числа. Такимъ образомъ, получается комплексъ новыхъ символовъ, которые мы называемъ комплексными числами. Мы устанавливаемъ условія равенства и неравенства этихъ чиселъ и правила дѣйствій надъ ними, именно: подъ суммой двухъ мнимыхъ чиселъ (a, b) и (a', b') мы уславливаемся разумѣть число $(a + a', \ b + b')$. Тогда ясно, что законы сочетательный и перемѣстительный остаются въ силѣ; дѣйствительно:

$$\big[(a, b) + (a', b')\big] + (a'', b'') = \big((a + a') + a'', \ (b + b') + b''\big),$$

$$(a, b) + \big[(a', b') + (a'', b'')\big] = \big(a + (a' + a''), \ b + (b' + b'')\big).$$

И такъ какъ

$$(a + a') + a'' = a + (a' + a''), \quad (b + b') + b'' = b + (b' + b''),$$

то

$$\big[(a, b) + (a', b')\big] + (a'', b'') = (a, b) + \big[(a', b') + (a'', b'')\big].$$

Аналогичнымъ образомъ устанавливаются остальныя дѣйствія надъ комплексными числами и доказывается, что они слѣдуютъ тѣмъ же формальнымъ законамъ, что и вещественныя числа.

4) Умноженіе опредѣляется равенствомъ

$$(a,\ b)(a',\ b') = (aa' - bb',\ ab' + ba'). \tag{2}$$

При $b=0$ и $b'=0$ дѣйствіе это сведется къ умноженію вещественныхъ чиселъ. Законы сочетательный и перемѣстительный остаются въ силѣ.

Возвышеніе въ цѣлую и положительную степень выполняется посредствомъ умноженія, повтореннаго соотвѣтственное число разъ.

5) Дѣленіе разсматривается, какъ дѣйствіе, обратное умноженію.

Даны два комплексныхъ числа $(a,\ b)$ и $(a',\ b')$; требуется найти третье число $(x,\ y)$, удовлетворяющее равенству:

$$(a,\ b)(x,\ y) = (a',\ b'). \tag{3}$$

Если такое число существуетъ, то оно представляетъ собою частное

$$(a',\ b')/(a,\ b).$$

Изъ равенствъ (2) и (3) и опредѣленія 1) имѣемъ:

$$\begin{aligned} ax - by &= a', \\ bx + ay &= b'. \end{aligned} \tag{4}$$

Для нахожденія чиселъ x и y нужно рѣшить два уравненія первой степени по правиламъ, даннымъ въ § 43.

Опредѣлитель Δ этой системы равенъ суммѣ a^2+b^2: онъ обращается въ нуль лишь въ томъ случаѣ, когда числа a и b одновременно равны нулю, т. е. когда число $(a,\ b)$ есть нуль. Поэтому мы исключимъ случай, когда дѣлитель равенъ нулю, подобно тому, какъ мы это сдѣлали при дѣленіи вещественныхъ чиселъ.

Изъ уравненій (4) получаемъ:

$$x = \frac{aa' + bb'}{a^2 + b^2}, \quad y = \frac{-a'b + ab'}{a^2 + b^2}. \tag{5}$$

Такимъ образомъ, дѣленіе однозначно опредѣляется слѣдующей формулой:

$$\frac{(a',\ b')}{(a,\ b)} = \left(\frac{aa' + bb'}{a^2 + b^2},\ \frac{ab' - a'b}{a^2 + b^2}\right).$$

Дѣленіе вещественныхъ чиселъ содержится здѣсь, какъ частный случай.

Установленныя такимъ образомъ опредѣленія четырехъ дѣйствій надъ комплексными числами вполнѣ согласованы съ понятіями о соотвѣтствующихъ дѣйствіяхъ надъ вещественными числами; мало того, теоремы, выведенныя нами, какъ слѣдствія изъ опредѣленій, относящихся къ дѣйствіямъ надъ вещественными числами, остаются справедливыми и для комплексныхъ чиселъ.

3. Изъ данныхъ опредѣленій вытекаетъ предложеніе:

Произведеніе нѣсколькихъ комплексныхъ чиселъ обращается въ нуль въ томъ и только въ томъ случаѣ, если, по крайней мѣрѣ, одинъ изъ сомножителей равенъ нулю.

Теорему нужно доказать только для случая двухъ сомножителей; повторно примѣняя этотъ частный случай, мы легко докажемъ тогда предложеніе для любого числа сомножителей. Если мы примемъ, что въ равенствѣ (3) произведеніе равно нулю, то $a' = 0$ и $b' = 0$. Но тогда изъ уравненій (4) слѣдуетъ, что $x = 0$ и $y = 0$, если только оба коэффиціента a и b не обращаются одновременно въ нуль. Такимъ образомъ, либо $(a, b) = 0$, либо $(x, y) = 0$, что и требовалось доказать.

4. Исходя изъ основныхъ опредѣленій, можно получить для комплексныхъ чиселъ весьма простыя обозначенія.

Согласно опредѣленіямъ 3), 2) и 4) имѣемъ послѣдовательно:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b), \tag{7}$$

или

$$(a, b) = a + b(0, 1). \tag{8}$$

Такимъ образомъ, любое комплексное число можетъ быть представлено посредствомъ вещественныхъ множителей и одного лишь мнимаго числа $(0, 1)$. Для сокращенія вводятъ обозначенія

$$(0, 1) = i, \quad (-1)i = -i \tag{9}$$

и называютъ число i мнимой единицей. Изъ равенства (8) получимъ:

$$(a, b) = a + bi. \tag{10}$$

Благодаря этому, мы можемъ оставить обозначеніе (a, b), которымъ мы временно пользовались; число a называется вещественной частью, bi или ib — мнимой частью комплекснаго числа $a + bi$. Мнимая часть называется положительной или отрицательной въ зависимости отъ того, будетъ ли число b положительнымъ или отрицательнымъ. Мнимое число, вещественная часть котораго равна нулю, т. е. число bi, называется чисто мнимымъ. Числа $a + bi$ и $a - bi$, въ которыхъ вещественныя части одинаковы, а мнимыя отличаются лишь знаками, называются сопряженными мнимыми числами.

Подставивъ въ формулу (2) $a = a' = 0$, $b = b' = +1$ или -1, получимъ:

$$i^2 = -1, \quad (-i)^2 = -1. \tag{11}$$

Поэтому число i называется еще корнемъ квадратнымъ изъ -1, т. е.

$$i = \sqrt{-1}. \tag{12}$$

Такимъ образомъ, въ области мнимыхъ чиселъ существуютъ и такія числа, квадраты которыхъ представляютъ собой отрицательныя числа; сообразно этому, въ области мнимыхъ чиселъ корни квадратнаго уравненія x_1 и x_2 (§ 47, (3)) имѣютъ опредѣленныя значенія и въ случаѣ отрицательнаго дискриминанта.

5. Изъ сказаннаго выводимъ слѣдующія формулы для сложенія вычитанія, умноженія и дѣленія мнимыхъ чиселъ:

$$\begin{gathered}(a + bi) \pm (a' + b'i) = (a \pm a') + i(b \pm b'),\\ (a + bi)(a' + b'i) = aa' - bb' + i(ab' + ba'),\\ \frac{a' + b'i}{a + bi} = \frac{aa' + bb' + i(ab' - ba')}{a^2 + b^2}.\end{gathered} \tag{13}$$

Эти формулы содержатся въ общихъ правилахъ дѣйствій надъ алгебраическими дробями [4]).

6. Изъ приведенныхъ формулъ слѣдуетъ, что результатъ вычисленій надъ мнимыми числами всегда можно представить въ видѣ выраженія $A + Bi$, гдѣ A и B обозначаютъ вещественныя числа. Если при вычисленіяхъ замѣнимъ каждое число сопряженнымъ ему числомъ, то въ результатѣ получится число $A - Bi$, сопряженное съ результатомъ, полученнымъ раньше. Отсюда слѣдуетъ, что равенство, содержащее мнимыя числа, не нарушится, если замѣнить въ обѣихъ частяхъ его число i числомъ $-i$.

§ 49. Извлеченіе квадратнаго корня изъ мнимыхъ чиселъ.

1. Мы показали уже, какъ выполняются въ области комплексныхъ чиселъ такъ называемыя раціональныя дѣйствія, т. е. сложеніе, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе. Такимъ образомъ, изложенная выше теорія линейныхъ уравненій остается справедливой и для комплексныхъ чиселъ. Чтобы развить для этихъ чиселъ также теорію квадратныхъ урав-

---

[4]) Это значитъ: дѣйствія совершаются здѣсь по тѣмъ же правиламъ, по которымъ они производятся надъ буквенными выраженіями, и въ результатѣ i^2 замѣняется черезъ -1. Въ частности, правая часть послѣдняго изъ равенствъ (13) можетъ быть получена изъ лѣвой, если мы числителя и знаменателя умножимъ на $a - bi$, затѣмъ выполнимъ дѣйствія въ числителѣ и знаменателѣ, какъ надъ буквенными выраженіями, и въ результатѣ замѣнимъ i^2 черезъ -1.

ненiй, мы должны предварительно установить понятiе о корнѣ квадратномъ изъ комплекснаго числа. Итакъ, мы ставимъ слѣдующiй вопросъ.

Дано комплексное число $a+bi$; найти другое комплексное число $x+yi$, квадратъ котораго равенъ числу $a+bi$. Иными словами, если число $x+yi$ удовлетворяетъ уравненiю

$$a+bi=(x+yi)^2, \tag{1}$$

то мы называемъ это число корнемъ квадратнымъ изъ числа $a+bi$ и обозначаемъ его символомъ

$$x+yi=\sqrt{a+bi}.$$

Въ правой части уравненiя (1) выполнимъ дѣйствiе; согласно опредѣленiю равенства комплексныхъ чиселъ, уравненiе (1) равносильно системѣ двухъ уравненiй:

$$\begin{aligned} x^2-y^2&=a,\\ 2xy&=b. \end{aligned} \tag{2}$$

Итакъ, намъ нужно опредѣлить неизвѣстныя x и y изъ двухъ уравненiй, степени которыхъ выше первой. Получивъ изъ второго уравненiя для неизвѣстнаго y выраженiе $b/2x$, мы подставимъ его въ первое уравненiе. Получимъ уравненiе, содержащее одно лишь неизвѣстное x:

$$x^2-\frac{b^2}{4x^2}=a,$$

или

$$4x^4-4ax^2-b^2=0.$$

Хотя это уравненiе четвертой степени, но, благодаря своей спецiальной формѣ, оно можетъ быть легко рѣшено: оно превращается въ квадратное уравненiе, если за неизвѣстное примемъ не число x, но число x^2. Рѣшая уравненiе относительно x^2, мы получимъ по формуламъ (3) § 47-го:

$$x_1^2=\frac{a-\sqrt{a^2+b^2}}{2},\quad x_2^2=\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}.$$

Замѣтимъ, что x должно быть вещественнымъ числомъ, такъ что x^2 есть положительное число. Такъ какъ $a^2<a^2+b^2$, то $a<\sqrt{a^2+b^2}$, и $a-\sqrt{a^2+b^2}<0$; поэтому для неизвѣстнаго x^2 мы можемъ взять лишь второй корень. Такимъ образомъ для неизвѣстнаго x мы получимъ два значенiя: одно положительное, а другое отрицательное:

$$x=\pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}. \tag{3}$$

Число x обращается въ нуль только въ томъ случаѣ, когда $b=0$ и a есть отрицательное число (потому что тогда $+\sqrt{a^2}=-a$, такъ что $a+\sqrt{a^2}=0$). Въ этомъ частномъ случаѣ значенiе неизвѣстнаго y опредѣляется непосредственно первымъ изъ уравненiй (2):

$$y=\pm\sqrt{-a}.$$

Если же число x отлично отъ нуля, то, подставивъ его значенiе во второе уравненiе системы (2), получимъ линейное уравненiе относительно неизвѣстнаго y. Каждому значенiю неизвѣстнаго x соотвѣтствуетъ одно лишь значенiе неизвѣстнаго y; при $b>0$ значенiя обоихъ неизвѣстныхъ имѣютъ одинаковые знаки, при $b<0$ — различные.

2. Тотъ же результатъ можно получить слѣдующимъ, болѣе изящнымъ способомъ.

Возвышая обѣ части каждаго изъ уравненiй системы (2) въ квадратъ, получимъ:

$$x^4+y^4-2x^2y^2=a^2,$$
$$4x^2y^2=b^2;$$

складывая почленно полученныя уравненiя и замѣчая, что $x^4+y^4+2x^2y^2=(x^2+y^2)^2$, найдемъ:

$$x^2+y^2=+\sqrt{a^2+b^2};$$

прибавляя къ этому уравненiю и вычитывая изъ него почленно первое изъ уравненiй системы (2), мы получимъ:

$$x^2=\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2},\quad y^2=\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2};$$

каковы бы ни были значенiя вещественныхъ чиселъ a и b, полученныя выраженiя неизвѣстныхъ x^2 и y^2 имѣютъ положительныя значенiя, такъ какъ $+\sqrt{a^2+b^2}>a$. Такимъ образомъ, для неизвѣстныхъ x и y найдемъ по два рѣшенiя:

$$x=\pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}},\quad y=\pm\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}.\qquad(4)$$

Комбинируя полученныя рѣшенiя, мы получимъ четыре пары значенiй неизвѣстныхъ x и y: двѣ пары съ одинаковыми знаками и двѣ съ противоположными. Изъ этихъ четырехъ комбинацiй допустимы либо только первыя двѣ, если b есть число положительное, — либо же только вторыя двѣ, если b есть число отрицательное.

Такимъ образомъ оказывается, что квадратный корень изъ комплекснаго числа имѣетъ два значенія, различающіяся лишь знаками, т. е. символъ $\sqrt{a+bi}$ двузначенъ. Подъ нимъ разумѣютъ либо безразлично которое-нибудь изъ двухъ значеній квадратнаго корня, либо же одно опредѣленное; въ послѣднемъ случаѣ должно быть оговорено, о которомъ изъ двухъ корней идетъ рѣчь: напримѣръ, двузначность можетъ быть устранена требованіемъ, чтобы вещественная часть корня, т. е. число x, была положительнымъ числомъ.

Теорія корней высшихъ степеней изъ комплексныхъ чиселъ, а также логариѳмовъ комплексныхъ чиселъ и степеней съ комплексными показателями, будетъ изложена ниже.

§ 50. Функціи второй степени.

1. Послѣ того, какъ введены комплексныя числа, становится всегда возможнымъ рѣшить уравненіе второй степени независимо отъ того, будетъ ли дискриминантъ величина положительная или отрицательная; мы можемъ рѣшить уравненіе 2-ой степени даже въ томъ случаѣ, когда коэффиціенты его и дискриминантъ суть числа комплексныя. Мы всегда получимъ **два корня** за исключеніемъ того случая, когда дискриминантъ обращается въ нуль; въ послѣднемъ случаѣ уравненіе имѣетъ всего одинъ корень.

Выраженіе

$$ax^2+bx+c,$$

въ которомъ число x имѣетъ произвольное значеніе, называется **функціей второй степени** отъ x. Мы будемъ обозначать это выраженіе символомъ $f(x)$, гдѣ буква f для краткости замѣняетъ слово „functio“. Числа a, b и c называются **коэффиціентами** функціи, а число x — ея **аргументомъ**. Эта функція обращается въ нуль лишь въ томъ случаѣ, когда аргументъ x получаетъ одно изъ двухъ значеній x_1 и x_2 (§ 47, (3)), а именно:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a},\quad x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\quad (D=b^2-4ac).$$

Изъ этихъ выраженій легко найдемъ:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1-x_2=-\frac{\sqrt{D}}{a},$$

$$x_1x_2=\frac{b^2-D}{4a^2}=\frac{c}{a},$$

а отсюда получимъ:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + x\frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right) = a\,[x^2 - x(x_1 + x_2) + x_1x_2];$$

слѣдовательно,

$$f(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2). \qquad (1)$$

Полученный результатъ выражается слѣдующимъ образомъ:

Функція второй степени можетъ быть представлена въ видѣ произведенія одного численнаго множителя a на двухъ множителей первой степени: $x - x_1$ и $x - x_2$.

Изъ выраженія (1) легко усмотрѣть, что $f(x)$ обращается въ нуль при $x = x_1$ или $x = x_2$. Однако, равенство (1) справедливо при всѣхъ значеніяхъ аргумента x, и поэтому оно называется **тождествомъ**. Числа x_1 и x_2, которыя мы назвали корнями уравненія $f(x) = 0$, называютъ также **корнями функціи** $f(x)$.

2. Чтобы найти разложеніе (1), нужно знать корни квадратнаго уравненія $f(x) = 0$; предложеніе о возможности такого разложенія по существу тождественно съ предложеніемъ, доказаннымъ раньше, что всякое квадратное уравненіе имѣетъ два корня. Однако, первое предложеніе (о разложеніи функціи) имѣетъ то преимущество предъ послѣднимъ, что не допускаетъ исключенія для случая, когда дискриминантъ обращается въ нуль. Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ оба линейныхъ множителя выраженія (1) тождественны, такъ что мы получаемъ:

$$f(x) = a\,(x - x_1)^2,$$

т. е. при $D = 0$ функція второй степени обращается въ **квадратъ линейной функціи.**

Чтобы вполнѣ согласовать оба предложенія, говорятъ, что **въ томъ случаѣ, когда дискриминантъ уравненія обращается въ нуль, оба корня его, которые вообще отличны одинъ отъ другого, дѣлаются равными;** число x_1 называется тогда **двойнымъ корнемъ.**

3. Примемъ коэффиціентъ a равнымъ 1; тогда квадратная функція приметъ слѣдующій видъ:

$$f(x) = x^2 + bx + c; \qquad (2)$$

вмѣстѣ съ тѣмъ имѣемъ:

$$x_1 + x_2 = -\,b, \quad x_1x_2 = c, \quad (x_1 - x_2)^2 = D.$$

Таким образомъ, если коэффиціентъ при x^2 равенъ единицѣ, то коэффиціентъ при x представляетъ сумму корней, взятую съ обратнымъ знакомъ; членъ же, не содержащій x, равенъ произведенію корней, а дискриминантъ — квадрату ихъ разности.

Отсюда непосредственно слѣдуетъ, что равенство $x_1 = x_2$ есть условіе, необходимое и достаточное для того, чтобы дискриминантъ D обратился въ нуль.

4. Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что задача о нахожденіи двухъ неизвѣстныхъ чиселъ, когда даны ихъ сумма и произведеніе, сводится къ рѣшенію нѣкотораго квадратнаго уравненія. Если x и y обозначаютъ неизвѣстныя числа и дано, что

$$\begin{aligned} x + y &= a, \\ xy &= b, \end{aligned} \tag{3}$$

то числа x и y представляютъ собою корни квадратнаго уравненія

$$z^2 - az + b = 0;$$

значеніе неизвѣстнаго x можетъ быть представлено любымъ изъ двухъ корней этого уравненія, при чемъ другой корень дастъ значеніе неизвѣстнаго y, такъ что предложенная задача рѣшается однозначно. Уравненія (3) могутъ быть рѣшены и непосредственно. Для этого обѣ части перваго уравненія возводимъ въ квадратъ, а обѣ части второго умножаемъ на четыре и вычитываемъ почленно изъ перваго уравненія. Мы получимъ:

$$(x + y)^2 - 4xy = a^2 - 4b,$$

или

$$(x - y)^2 = a^2 - 4b.$$

Отсюда

$$x - y = \sqrt{a^2 - 4b};$$

слѣдовательно,

$$2x = a + \sqrt{a^2 - 4b}, \quad 2y = a - \sqrt{a^2 - 4b}.$$

Если мы возьмемъ квадратный корень со знакомъ минусъ, то неизвѣстныя x и y помѣняются своими значеніями.

Если даны разность и произведеніе неизвѣстныхъ, т. е. если

$$x - y = a, \quad xy = b,$$

то, подобно предыдущему, найдемъ:

$$(x - y)^2 + 4xy = a^2 + 4b,$$

или

$$(x+y)^2 = a^2 + 4b.$$

Отсюда

$$x+y = \sqrt{a^2+4b};$$

слѣдовательно,

$$2x = a + \sqrt{a^2+4b}, \quad 2y = -a + \sqrt{a^2+4b}.$$

Если мы возьмемъ выраженіе $\sqrt{a^2+4b}$ со знакомъ минусъ, то неизвѣстное x приметъ значеніе, которое раньше имѣло неизвѣстное $-y$, а неизвѣстное y получитъ значеніе, которое имѣло неизвѣстное $-x$. Такимъ образомъ, эта задача допускаетъ два различныхъ рѣшенія.

5. Когда коэффиціенты квадратнаго уравненія суть числа вещественныя, то корни его все-таки могутъ быть комплексными числами; это бываетъ, когда дискриминантъ уравненія представляетъ собою отрицательное число. Такъ какъ $\sqrt{D}$ въ этомъ случаѣ есть чисто мнимое число, то, представивъ одинъ корень въ видѣ $\alpha+\beta i$, гдѣ α и β суть вещественныя числа, мы получимъ для другого корня значеніе $\alpha-\beta i$.

Итакъ, если квадратное уравненіе съ вещественными коэффиціентами имѣетъ одинъ комплексный корень, то второй его корень есть также число комплексное, сопряженное съ первымъ корнемъ.

Если же нѣкоторыми коэффиціентами квадратнаго уравненія служатъ мнимыя числа, то корни этого уравненія могутъ быть, хотя и комплексными, но не сопряженными числами; оно и очевидно, такъ какъ мы можемъ составить функцію второй степени $(x-\alpha)(x-\beta)$, корнями которой служатъ произвольныя два числа α и β.

§ 51. Геометрическое изображеніе комплексныхъ чиселъ.

1. Мы видѣли, что совокупность всѣхъ вещественныхъ чиселъ можно представить геометрически посредствомъ точекъ прямой линіи; равнымъ образомъ и комплексныя числа могутъ быть изображены точками двумѣрнаго пространства, — напримѣръ, плоскости.

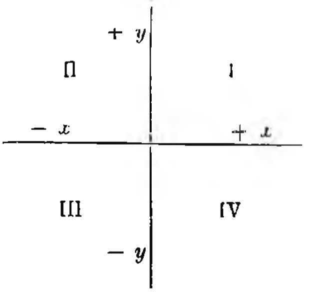
Вообразимъ себѣ плоскость и на ней двѣ взаимно перпендикулярныя прямыя; послѣднія называются координатными осями: одну изъ нихъ называютъ осью x-овъ, другую — осью y-овъ. Точку пересѣченія обѣихъ осей мы будемъ называть точкой нуля или началомъ координатъ и будемъ ее разсматривать, какъ изображеніе числа нуль.

Считая отъ начала координатъ, мы будемъ на обѣихъ осяхъ произвольно различать двѣ стороны: положительную и отрицательную. Согласимся разъ навсегда считать ось x-овъ направленной съ запада на востокъ, а ось y-овъ — съ юга на сѣверъ; восточную половину первой оси и сѣверную половину второй мы будемъ называть положительными (нужно представить себѣ географическую карту).

Каждая ось дѣлитъ плоскость на двѣ полуплоскости: изъ нихъ положительной полуплоскостью называютъ ту, которая содержитъ положительную половину другой оси; вторая полуплоскость называется отрицательной.

Выберемъ еще нѣкоторую единицу длины (остановимся, напримѣръ, на сантиметрѣ); на координатныхъ осяхъ отложимъ, считая отъ начала, два числа x и y въ видѣ двухъ отрѣзковъ, направленія которыхъ возьмемъ въ зависимости отъ знаковъ чиселъ x и y.

Изъ концовъ отложенныхъ отрѣзковъ возставимъ къ обѣимъ осямъ перпендикуляры, которые пересѣкутся въ опредѣленной точкѣ z нашей плоскости. Отрѣзки x и y называются координатами точки z: отрѣзокъ x называется ея абсциссой, отрѣзокъ y — ординатой.



Фиг. 7.

Четыре квадранта нашей плоскости различаются знаками координатъ x и y (фиг. 7):

1-й квадрантъ: x имѣетъ положительное значеніе, y также имѣетъ положительное значеніе;

2-й квадрантъ: x имѣетъ отрицательное значеніе, y имѣетъ положительное значеніе;

3-й квадрантъ: x имѣетъ отрицательное значеніе, y имѣетъ отрицательное значеніе;

4-й квадрантъ: x имѣетъ положительное значеніе, y имѣетъ отрицательное значеніе.

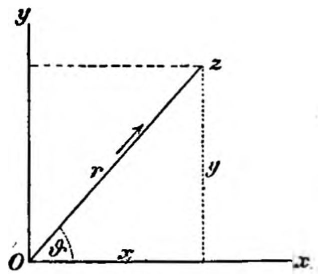
Точку z разсматриваютъ, какъ изображеніе мнимаго числа

$$z = x + yi. \tag{1}$$

Такимъ образомъ, каждой точкѣ плоскости соотвѣтствуетъ одно мнимое число и, наоборотъ, каждое мнимое число изображается одной и только одной точкой плоскости.

Выше мы видѣли, что вещественныя числа могутъ быть изображены на прямой линіи какъ въ видѣ точекъ, такъ и въ видѣ отрѣзковъ, при чемъ положительнымъ числамъ соотвѣтствуютъ отрѣзки, направленные въ одну сторону, — напримѣръ, вправо, а отрицательнымъ числамъ — отрѣзки, направленные въ противоположную сторону. Подобнымъ же образомъ комплексныя числа можно наглядно представить въ видѣ отрѣзковъ опредѣленной величины и опредѣленнаго направленія, при чемъ приходится различать не два только направленія, но всѣ возможныя направленія въ плоскости. На фигурѣ 8 отрѣзокъ $0z$, имѣющій направленіе, указанное стрѣлкой, является изображеніемъ комплекснаго числа z.

Весьма цѣлесообразнымъ является названіе, предложенное Вейерштрасомъ (Weierstrass); именно, длина отрѣзка $0z = r$, независимо отъ его направленія, называется абсолютной величиной [5]) комплекснаго числа z. Численное значеніе этой величины выражается формулой



Фиг. 8.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \qquad (2)$$

это легко усмотрѣть изъ прямоугольнаго треугольника, въ которомъ координаты x и y служатъ катетами, а отрѣзокъ r — гипотенузой.

Направленіе отрѣзка $0z$ опредѣляется угломъ, который онъ образуетъ съ какимъ-нибудь напередъ установленнымъ направленіемъ, — напримѣръ, съ положительной осью x-овъ.

Угломъ этимъ измѣряется поворотъ, который долженъ совершить отрѣзокъ, чтобы отъ направленія положительной оси x-овъ перейти въ положеніе $0z$; мы будемъ считать вращеніе положительнымъ, если оно направлено отъ положительной оси x-овъ къ положительной оси y-овъ (т. е. противъ направленія часовой стрѣлки: съ востока черезъ сѣверъ къ западу и югу).

Въ тѣхъ случаяхъ, когда разсматривается не самое вращеніе отрѣзка $0z$, а лишь его положеніе, послѣднее всегда опредѣляется однозначно угломъ, взятымъ въ интервалѣ, содержащемъ 360^0, — напримѣръ, отъ 0^0 до 360^0 или отъ -180^0 до $+180^0$.

Этотъ уголъ мы будемъ называть фазой [6]) комплекснаго числа z. Къ одному и тому же положенію отрѣзка $0z$, а, стало быть, къ одной и той же фазѣ, приводитъ любое изъ безчисленнаго множества вращеній, отличающихся другъ отъ друга на цѣлое (положительное или отрицательное) число окружностей.

Вмѣсто градуснаго измѣренія угловъ часто употребляется ихъ дуговое измѣреніе (§ 31). Тогда уголъ въ 180^0 выражается числомъ π, а полный оборотъ — числомъ 2π; при этомъ подъ фазой подразумѣвается уголъ, находящійся въ предѣлахъ отъ 0 до 2π или въ предѣлахъ отъ $-\pi$ до $+\pi$.

2. Цѣлесообразность геометрическаго изображенія комплексныхъ чиселъ при помощи отрѣзковъ опредѣленнаго направленія особенно про-

---

[5]) Часто абсолютную величину комплекснаго числа называютъ его модулемъ

[6]) Гораздо употребительнѣе терминъ „аргументъ комплекснаго числа“.

является въ той наглядности, которую при этомъ получаютъ сложенiе и вычитанiе.

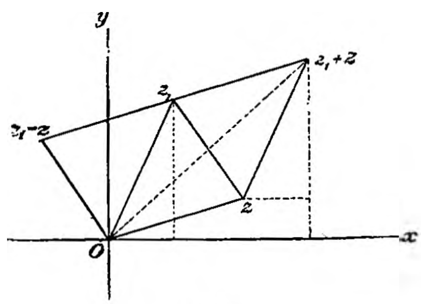
Согласно опредѣленiю, которое дано въ п. 5 § 48-го, сумма двухъ комплексныхъ чиселъ

$$z = x + yi, \quad z_1 = x_1 + y_1 i$$

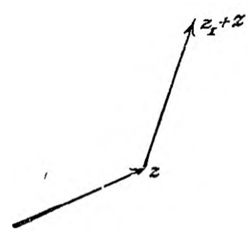
представится такъ:

$$z_1 + z = x_1 + x + i(y_1 + y).$$

Такимъ образомъ, полученная сумма изобразится точкой, координаты которой равны $x_1 + x$ и $y_1 + y$; точка эта, какъ видно изъ фиг. 9, есть четвертая вершина параллелограмма, тремя другими вершинами котораго



Фиг. 9.



Фиг 10.

служатъ точки 0, z и z_1; при этомъ точка $z_1 + z$ и начало координатъ составляютъ концы одной и той же дiагонали разсматриваемаго параллелограмма.

Подобнымъ же образомъ и разность $z_1 - z$ представляется четвертой вершиной параллелограмма, въ которой остальными вершинами служатъ точки 0, z, z_1; но при этомъ вершина $z_1 - z$ противолежитъ вершинѣ z.

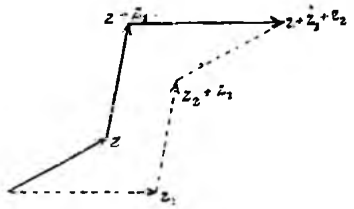
Изъ построенiя слѣдуетъ, что положенiе точки $z_1 + z$ опредѣлится, если отложить отрѣзокъ z_1 въ соотвѣтствующемъ ему направленiи, начиная отъ конца отрѣзка z (фиг. 10); такое же построенiе приходится повторять при нахожденiи суммы какого угодно числа слагаемыхъ

$$z + z_1 + z_2 + \cdots$$

При этомъ получится ломанная линiя съ вершинами z, $z + z_1$, $z + z_1 + z_2$ и т. д., которая составлена изъ отрѣзковъ, имѣющихъ каждый длину и направленiе, соотвѣтствующiя отрѣзкамъ z, z_1, z_2 и т. д. Конечная вершина этой ломанной и представитъ собою искомую сумму.

Если при сложенiи мы переставимъ нѣкоторыя слагаемыя, то въ результатѣ мы получимъ другую ломанную линiю, но съ той же конечной вершиной; въ этомъ обстоятельствѣ сказывается перемѣстительный законъ сложенія (фиг. 11).

Вычитаніе какого-нибудь отрѣзка можно замѣнить прибавленіемъ отрѣзка, имѣющаго противоположное направленіе. Такимъ образомъ, мы можемъ построить разность $z_1 - z$, если отъ конца отрѣзка z_1 отложимъ отрѣзокъ z въ направленіи, противоположномъ тому, которое онъ въ дѣйствительности имѣетъ.



Фиг. 11.

3. Чтобы выразить комплексное число при помощи его фазы и абсолютной величины, пользуются тригонометрическими функціями $\sin\vartheta$ и $\cos\vartheta$. Геометрическая теорія этихъ функцій обстоятельно изложена во второмъ томѣ этого сочиненія; простѣйшія свойства этихъ функцій мы здѣсь предполагаемъ извѣстными.

Припомнимъ, что въ прямоугольномъ треугольникѣ съ острымъ угломъ ϑ отношеніе катета, лежащаго противъ этого угла, къ гипотенузѣ называется синусомъ угла ϑ, а отношеніе катета, прилежащаго къ углу ϑ, къ гипотенузѣ — косинусомъ этого угла; функціи эти обозначаются символами $\sin\vartheta$ и $\cos\vartheta$. Между этими двумя функціями имѣютъ мѣсто слѣдующія соотношенія:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = \cos\vartheta, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = \sin\vartheta,$$
$$\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta = 1.$$

Для угловъ, большихъ прямого, названныя функціи опредѣляются слѣдующими равенствами:

$$\sin(\pi - \vartheta) = \sin\vartheta, \quad \cos(\pi - \vartheta) = -\cos\vartheta$$
$$\sin(\vartheta + \pi) = -\sin\vartheta, \quad \cos(\vartheta + \pi) = -\cos\vartheta.$$

Такимъ образомъ, во всѣхъ четырехъ квадрантахъ функціи $\cos\vartheta$ и $\sin\vartheta$ имѣютъ соотвѣтственно такіе же знаки, какъ координаты x и y (въ п. 1). Кромѣ того, имѣемъ еще:

$$\sin(\vartheta + 2\pi) = \sin\vartheta, \quad \cos(\vartheta + 2\pi) = \cos\vartheta,$$
$$\sin(-\vartheta) = -\sin\vartheta, \quad \cos(-\vartheta) = \cos\vartheta;$$

поэтому всѣ вращенія, которыя приводятъ къ одной и той же фазѣ, производятъ углы, имѣющіе одинъ и тотъ же синусъ и одинъ и тотъ же косинусъ.

Мы будемъ еще пользоваться формулами сложенія:

$$\cos(\vartheta+\vartheta_1)=\cos\vartheta\cos\vartheta_1-\sin\vartheta\sin\vartheta_1,$$
$$\sin(\vartheta+\vartheta_1)=\sin\vartheta\cos\vartheta_1+\cos\vartheta\sin\vartheta_1,$$
$$\cos(\vartheta-\vartheta_1)=\cos\vartheta\cos\vartheta_1+\sin\vartheta\sin\vartheta_1,$$
$$\sin(\vartheta-\vartheta_1)=\sin\vartheta\cos\vartheta_1-\cos\vartheta\sin\vartheta_1.$$

Замѣтимъ также формулу, которая выражаетъ соотношеніе между сторонами треугольника a, b и c и косинусомъ одного изъ угловъ треугольника:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha,$$

гдѣ черезъ α обозначенъ уголъ, лежащій противъ стороны a.

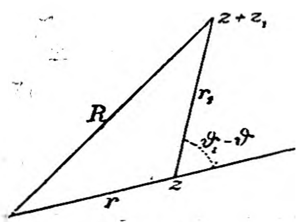
4. Разсмотримъ теперь прямоугольный треугольникъ, изображенный на фигурѣ 7, съ гипотенузой r и катетами x и y. Имѣемъ:

$$x=r\cos\vartheta,\quad y=r\sin\vartheta,$$

а, слѣдовательно,

$$z=r(\cos\vartheta+i\sin\vartheta).$$

Эта формула остается справедливой независимо отъ того, въ которомъ изъ четырехъ квадрантовъ находится точка z. Формула эта сохраняетъ смыслъ и тогда, если черезъ ϑ обозначимъ не фазу, но уголъ, описываемый любымъ изъ вращеній, приводящихъ къ точкѣ z [7]).



Фиг. 12.

5. Обозначимъ черезъ z и z_1 два комплексныхъ числа, которыя имѣютъ абсолютныя величины соотвѣтственно r и r_1 и фазы ϑ и ϑ_1. Абсолютную величину суммы $z+z_1$ назовемъ черезъ R (фиг. 12). Изъ треугольника со сторонами R, r и r_1, гдѣ между сторонами r и r_1 заключенъ уголъ $\pi-(\vartheta_1-\vartheta)$, имѣемъ:

$$R^2={r_1}^2+r^2+2rr_1\cos(\vartheta_1-\vartheta):$$

это соотношеніе можетъ быть выражено двояко слѣдующимъ образомъ:

$$R^2=(r_1+r)^2-2rr_1[1-\cos(\vartheta_1-\vartheta)],$$
$$R^2=(r_1-r)^2+2rr_1[1+\cos(\vartheta_1-\vartheta)].$$

Такъ какъ косинусъ любого угла по своей абсолютной величинѣ не превышаетъ единицы, то множители $1-\cos(\vartheta_1-\vartheta)$ и $1+\cos(\vartheta_1-\vartheta)$

---

[7]) Этотъ уголъ можетъ, слѣдовательно, отличаться отъ ϑ на $2k\pi$, гдѣ k — цѣлое число.

никогда не бываютъ отрицательными; слѣдовательно, R^2 меньше, чѣмъ $(r_1 + r)^2$, и больше, чѣмъ $(r_1 - r)^2$. Отсюда слѣдуетъ предложеніе:

Абсолютная величина суммы никогда не превышаетъ суммы абсолютныхъ величинъ слагаемыхъ и никогда не бываетъ меньше ихъ разности.

Въ этомъ нельзя не усмотрѣть выраженія извѣстной геометрической теоремы: во всякомъ треугольникѣ одна сторона меньше суммы двухъ другихъ сторонъ и больше ихъ разности.

Абсолютная величина суммы равна суммѣ абсолютныхъ величинъ слагаемыхъ лишь въ томъ случаѣ, когда $\vartheta_1 = \vartheta$; она равна разности послѣднихъ, когда уголъ $\vartheta_1 - \vartheta$ равенъ двумъ прямымъ. Въ обоихъ этихъ случаяхъ отношеніе $z/z_1 = \pm r/r_1$, слѣдовательно, есть число вещественное; знакъ плюсъ нужно взять для перваго случая, знакъ минусъ — для второго.

6. Дадимъ теперь геометрическую интерпретацію умноженія и дѣленія комплексныхъ чиселъ. Изъ чиселъ

$$z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$

и

$$z_1 = r_1(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1)$$

мы составимъ по формуламъ п. 5 § 48-го произведеніе zz_1 и частное z_1/z.

Имѣемъ:

$$zz_1 = rr_1[(\cos\vartheta\cos\vartheta_1 - \sin\vartheta\sin\vartheta_1) + i(\cos\vartheta\sin\vartheta_1 + \sin\vartheta\cos\vartheta_1)],$$

$$\frac{z_1}{z} = \frac{r_1}{r}[(\cos\vartheta\cos\vartheta_1 + \sin\vartheta\sin\vartheta_1) + i(\cos\vartheta\sin\vartheta_1 - \sin\vartheta\cos\vartheta_1)].$$

Согласно формуламъ сложенія, которыя приведены въ п. 3, мы получимъ:

$$\begin{aligned} zz_1 &= rr_1[\cos(\vartheta_1 + \vartheta) + i\sin(\vartheta_1 + \vartheta)], \\ \frac{z_1}{z} &= \frac{r_1}{r}[\cos(\vartheta_1 - \vartheta) + i\sin(\vartheta_1 - \vartheta)]. \end{aligned} \tag{3}$$

Формулы (3) мы видоизмѣнимъ слѣдующимъ образомъ. Пусть

$$zz_1 = R(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\frac{z_1}{z} = R'(\cos\theta' + i\sin\theta');$$

тогда

$$R = rr_1, \quad R' = \frac{r_1}{r}.$$

Если для фазъ будемъ брать, какъ мы условились выше, углы въ интервалѣ отъ 0 до 2π, то разность $\vartheta_1 - \vartheta$ можетъ быть отрицательной, но во всякомъ случаѣ она превышаетъ -2π; сумма же $\vartheta_1 + \vartheta$ можетъ прешать 2π, но она меньше 4π. Въ виду этого

$$\begin{aligned} \theta &= \vartheta_1 + \vartheta, && \text{если } \vartheta_1 + \vartheta < 2\pi, \\ &= \vartheta_1 + \vartheta - 2\pi, && \quad ,, \quad \vartheta_1 + \vartheta \geqq 2\pi, \\ \theta' &= \vartheta_1 - \vartheta, && \quad ,, \quad \vartheta_1 \geqq \vartheta, \\ &= \vartheta_1 - \vartheta + 2\pi, && \quad ,, \quad \vartheta_1 < \vartheta. \end{aligned}$$

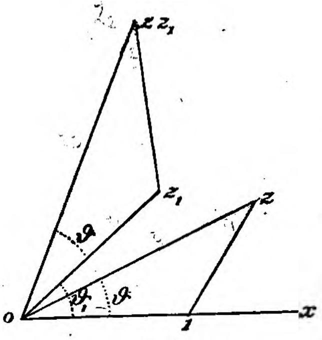
Отсюда слѣдуетъ:

Абсолютная величина произведенія или частнаго двухъ комплексныхъ чиселъ равна произведенію или частному абсолютныхъ величинъ этихъ чиселъ.

Фаза произведенія или частнаго двухъ комплексныхъ чиселъ либо равна суммѣ или разности фазъ данныхъ чиселъ, либо отличается отъ нихъ на 2π.

7. Вышеизложенное даетъ способъ построить произведеніе комплексныхъ чиселъ.

На положительной оси x-овъ отложимъ отрѣзокъ 1 (т. е. единицу длины) и построимъ треугольникъ $(0, z_1, z_2)$, подобный треугольнику $(0, 1, z)$. По извѣстной теоремѣ изъ теоріи подобныхъ треугольниковъ имѣемъ:



Фиг. 13.

$$r_2 : r_1 = r : 1,$$

откуда $r_2 = rr_1 = R$; уголъ $z_2 0 1 = \vartheta + \vartheta_1 = \theta$. Такимъ образомъ, точка z_2 является изображеніемъ произведенія zz_1.

Точно такъ же можно представить частное $z_2/z = z_1$ посредствомъ подобныхъ треугольниковъ $(0, 1, z)$ и $(0, z_1, z_2)$. Число z_2/z изобразится точкой, имѣющей относительно точки z_2 такое же положеніе, какое занимаетъ точка 1 относительно точки z.

8. Пусть $\vartheta_1 = \vartheta$ и $r_1 = r$. Тогда изъ формулы умноженія (п. 6, (3)) получимъ:

$$z^2 = r^2(\cos 2\vartheta + i \sin 2\vartheta);$$

положивъ въ той же формулѣ $z_1 = z^2$, $r_1 = r^2$ и $\vartheta_1 = 2\vartheta$, получимъ:

$$z^3 = r^3(\cos 3\vartheta + i \sin 3\vartheta).$$

При помощи совершенной индукціи легко доказать справедливость общей формулы:

$$z^n = r^n(\cos n\vartheta + i\sin n\vartheta); \qquad (4)$$

для этого нужно въ формулѣ (3) подставить: $z_1 = z^n$, $r_1 = r^n$ и $\vartheta_1 = n\vartheta$.

Если мы во второй изъ двухъ формулъ (3) положимъ:

$$z_1 = 1, \quad r_1 = 1 \quad \text{и} \quad \vartheta_1 = 0,$$

то получимъ:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos\vartheta - i\sin\vartheta).$$

Если въ этой формулѣ мы возьмемъ дѣлителемъ не число z, а число z^n, то, согласно формулѣ (4), мы должны замѣнить модуль r и фазу ϑ соотвѣтственно черезъ r^n и $n\vartheta$, такъ что окончательно найдемъ:

$$z^{-n} = r^{-n}(\cos n\vartheta - i\sin n\vartheta).$$

Такимъ образомъ, формула (4) справедлива при всякомъ цѣломъ n — какъ положительномъ, такъ и отрицательномъ.

Формула (4) извѣстна подъ названіемъ формулы Муавра (Moivre). Посредствомъ нея можно получить любую степень комплекснаго числа съ цѣлымъ показателемъ. Позже мы покажемъ, какъ можно воспользоваться этой формулой для опредѣленія степени, когда показатель не есть цѣлое число.

Въ заключеніе скажемъ два слова объ историческомъ развитіи теоріи мнимыхъ чиселъ. Давно уже было извѣстно, что нѣкоторыя уравненія не имѣютъ ни одного корня въ области чиселъ, надъ которыми оперировали. Столь же давно стали дѣлать условно вычисленія надъ выраженіями, содержащими знакъ $\sqrt{-1}$, такъ, какъ будто бы онъ дѣйствительно представлялъ собою число. Напримѣръ, Карданъ (Hieronymus Cardanus, 1501 — 1576) зналъ уже, что отрицательные корни уравненій имѣютъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ опредѣленный смыслъ, но онъ еще не былъ въ состояніи приписать какой-нибудь смыслъ такимъ символамъ, какъ $\sqrt{-1}$. Въ главѣ XVI-ой мы увидимъ, что по формулѣ Кардана даже вещественные корни кубическихъ уравненій въ нѣкоторыхъ случаяхъ могутъ быть алгебраически представлены только въ видѣ суммы двухъ сопряженныхъ мнимыхъ выраженій. Это представляло собой, такимъ образомъ, прямой поводъ къ тому, чтобы производить вычисленія, пользуясь символомъ $\sqrt{-1}$. Но впервые это вполнѣ понялъ Бомбелли [8]).

---

[8]) См. Ф. Кэджори. „Исторія элементарной математики". Одесса, „Mathesis", 1909. Дополненія И. Ю. Тимченко.

У Декарта (Descartes, 1596 — 1650) мы уже встрѣчаемъ термины „вещественные корни“ и „мнимые корни“. Въ такомъ видѣ вопросъ о мнимыхъ числахъ находился вплоть до XIX-го столѣтія, хотя къ этому времени мнимыя числа все чаще и чаще примѣнялись въ вычисленіяхъ; много занимались этими формальными вычисленіями между прочими Лейбницъ, Ньютонъ, Даламберъ и, въ особенности, Эйлеръ. Долгое время мнимыя числа считались чѣмъ-то загадочнымъ, пока не выработалось сознаніе, что эти числа представляютъ результатъ вполнѣ законнаго и цѣлесообразнаго расширенія созданнаго нашимъ духомъ понятія о числѣ; тогда убѣдились, что эти числа имѣютъ такой же реальный смыслъ, какъ и вещественныя числа, такъ какъ, подобно послѣднимъ, они служатъ для выраженія извѣстнаго рода соотношеній между вещами. Это было выяснено, главнымъ образомъ, работами Коши (Cauchy) и Гаусса (Gauss); послѣднему принадлежитъ изложенная выше геометрическая интерпретація мнимыхъ чиселъ *).

Въ связи съ этими идеями естественно возникла мысль идти въ этомъ направленіи дальше, т. е. создать комплексныя числа болѣе высокаго порядка, при посредствѣ которыхъ можно было бы выражать точки пространства совершенно такъ же, какъ мы выражаемъ при помощи обыкновенныхъ комплексныхъ чиселъ точки плоскости; при этомъ старались, конечно, сохранить обычныя простыя правила дѣйствій. Однако, уже Гауссъ сообщилъ, что нѣкоторыя его изслѣдованія выясняютъ, почему эти попытки необходимо должны были потерпѣть неудачу. Но самыя эти изслѣдованія остались намъ неизвѣстными. Мы возвратимся еще къ этому вопросу въ XII-ой главѣ.

---

*) Рафаэль Бомбелли (Rafael Bombelli) изъ Болоньи опубликовалъ свое сочиненіе „l'Algebra“ въ 1572 г. въ Венеціи.

Abraham de Moivre, 1667—1754; будучи протестантомъ, онъ послѣ отмѣны Нантскаго эдикта эмигрировалъ изъ Франціи, жилъ и работалъ въ Лондонѣ, въ кругу Ньютона; въ 1730 г. появился его трудъ „Miscellanea analytica“, въ которомъ находится приведенная нами формула.

Gauss, „Göttinger gelehrte Anzeigen“, 23 April 1831, въ статьѣ „Theoria residuorum biquadraticorum commentatio secunda“. Въ 1880 г. было опубликовано письмо Гаусса къ Бесселю (Bessel), помѣченное 1811 г.; въ этомъ письмѣ изложены весьма важныя соображенія относительно даннаго вопроса.

Cauchy, „Analyse algébrique“ (1821), „Exercices d'analyse“, т. III (1844).

Изъ новѣйшихъ сочиненій по этому вопросу упомянемъ:

Heine, „Die Elemente der Functionentheorie“, Crelles Journal, т. 74 (1871).

ГЛАВА IX.

Перестановки и сочетанія.

---

§ 52. Перестановки.

1. Предположимъ, что мы имѣемъ комплексъ, содержащій конечное число предметовъ; обозначимъ это число черезъ n. Какъ мы уже раньше видѣли, это число можетъ быть отсчитано различными способами; другими словами, мы можемъ различнымъ образомъ сопрягать элементы нашего комплекса съ числами 1, 2, 3, ..., n, или, еще иначе, можно различными способами расположить предметы нашего комплекса.

Одинъ единственный элементъ допускаетъ, естественно, только одно расположеніе; два элемента a и b могутъ быть расположены двояко: ab и ba; три элемента a, b и c могутъ быть расположены шестью способами: abc, acb, bac, bca, cab, cba. Эти шесть расположеній можно получить слѣдующимъ образомъ: пишемъ на первомъ мѣстѣ поочередно каждый изъ трехъ элементовъ a, b и c и каждый разъ располагаемъ послѣ перваго элемента прочіе два двумя возможными способами.

Эти различныя расположенія называются **перестановками** изъ n элементовъ нашего комплекса. Какъ показываютъ приведенные примѣры, эти перестановки, въ свою очередь, образуютъ нѣкоторый комплексъ, состоящій изъ конечнаго числа элементовъ; это предложеніе мы сейчасъ докажемъ способомъ математической индукціи, при чемъ доказательство дастъ намъ еще способъ опредѣлить число перестановокъ изъ n элементовъ.

Итакъ, допустимъ, что число перестановокъ изъ $n-1$ элементовъ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$ конечно; обозначимъ это число черезъ $\Pi(n-1)$. Присоединимъ къ нашемъ комплексу еще n-тый элементъ a_n. Въ каждой изъ имѣющихся у насъ $\Pi(n-1)$ перестановокъ изъ $n-1$ элементовъ мы можемъ помѣстить новый элементъ a_n на первомъ, на второмъ, на третьемъ, ..., или, наконецъ, на n-томъ мѣстѣ. Такимъ образомъ, каждая перестановка изъ $n-1$ элементовъ дастъ n перестановокъ изъ n элементовъ, и всѣ получаемыя перестановки отличны другъ отъ друга. Отсюда слѣдуетъ, что

$$\Pi(n) = n\,\Pi(n-1). \tag{1}$$

Мы видѣли, что $\Pi(1) = 1$ и $\Pi(2) = 2$; слѣдовательно, по формулѣ (1), $\Pi(3) = 2 \,.\, 3$ и вообще (въ силу совершенной индукціи)

$$\Pi(n) = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n, \tag{2}$$

т. е. **число перестановокъ изъ n элементовъ равно произведенію всѣхъ цѣлыхъ чиселъ отъ 1 до n.**

Это произведеніе имѣетъ еще особое названіе: **факультетъ числа** n (n-факультетъ) и обозначается слѣдующимъ символомъ:

$$1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n = n!$$

Такимъ образомъ, мы вполнѣ опредѣлили число перестановокъ въ комплексѣ, состоящемъ изъ n элементовъ.

Формулу (1) можно представить въ болѣе общемъ видѣ. Если подъ m мы будемъ подразумѣвать натуральное число, которое меньше числа n, то имѣемъ:

$$\Pi(n) = (m+1)(m+2) \ldots n\,\Pi(m). \tag{3}$$

Если увеличивать число n, то число $\Pi(n)$ возрастаетъ очень быстро; напримѣръ:

$$\Pi(1) = 1,\ \Pi(2) = 2,\ \Pi(3) = 6,\ \Pi(4) = 24,\ \Pi(5) = 120,\ \Pi(6) = 720,$$
$$\Pi(7) = 5040,\ \Pi(8) = 40\,320,\ \Pi(9) = 362\,880,\ \Pi(10) = 3\,628\,800.$$

Относительно того, въ какой мѣрѣ быстро увеличивается число $\Pi(n)$ съ возрастаніемъ числа n, мы докажемъ слѣдующее предложеніе.

2. Каково бы ни было положительное число $a > 1$, можно указать такое число m, что $\Pi(n) > a^n$, коль скоро $n > m$.

Для доказательства выберемъ произвольное цѣлое число $p > a$; тогда $\dfrac{a}{p} = \Theta$ есть положительная правильная дробь; возьмемъ теперь цѣлое число $n > p$; имѣемъ:

$$\frac{a}{p+1} < \Theta,\quad \frac{a}{p+2} < \Theta,\ \ldots,\ \frac{a}{n} < \Theta.$$

Перемножая эти неравенства почленно, получимъ:

$$\frac{a^{n-p}}{(p+1)(p+2)\cdots n} < \Theta^{n-p}.$$

Помноживъ объ части полученнаго неравенства на $a^p/\Pi(p)$ и пользуясь формулой (3), получимъ:

$$\frac{a^n}{\Pi(n)} < \frac{a^p \Theta^n}{\Theta^p \Pi(p)}. \tag{4}$$

Согласно предложенію, изложенному въ п. 8 § 19-го, можно подобрать столь большое число m, чтобы было

$$\Theta^n < \Theta^p a^{-p} \Pi(p),$$

коль скоро $n > m$. Поэтому при достаточно большихъ значеніяхъ числа n правая часть неравенства (4) обращается въ правильную дробь, и, слѣдовательно, $\frac{a^n}{\Pi(n)} < 1$, т. е.

$$\Pi(n) > a^n, \tag{5}$$

что и требовалось доказать.

3. Подъ многосторонникомъ (n-сторонникомъ) разумѣютъ замкнутую ломанную линію, состоящую изъ n отрѣзковъ, попарно сходящихся въ каждой изъ данныхъ n вершинъ; отрѣзки эти (стороны) могутъ иногда взаимно перекрещиваться, какъ это бываетъ у такъ называемыхъ звѣздныхъ многосторонниковъ. Мы можемъ теперь рѣшить такую задачу: **сколько n-сторонниковъ можно построить на данныхъ n точкахъ, какъ на вершинахъ.** Въ каждомъ многосторонникѣ мы можемъ любую вершину считать первой, такъ что при построеніи нашихъ многосторонниковъ мы можемъ выбрать любую изъ данныхъ n точекъ за общую ихъ начальную вершину; прочія же $n-1$ точекъ можно брать въ различной послѣдовательности столькими различными способами, сколько единицъ содержится въ числѣ $\Pi(n-1)$. Всего получится, однако, не $\Pi(n-1)$ многосторонниковъ, а вдвое меньше, т. е. $\frac{1}{2}\Pi(n-1)$. Въ самомъ дѣлѣ, *одна и та же* фигура получится, если мы будемъ брать вершины въ одной послѣдовательности и въ противоположной послѣдовательности, такъ что одинъ многосторонникъ приходится не на одну перестановку вершинъ, но на двѣ перестановки. Такимъ образомъ, изъ трехъ точекъ можно получить *одинъ* лишь трехсторонникъ, изъ четырехъ точекъ — три четырехсторонника, изъ пяти точекъ — двѣнадцать пятисторонниковъ, изъ шести точекъ — шестьдесятъ шестисторонниковъ и т. д. Читатель легко можетъ выяснить себѣ расположеніе этихъ многосторонниковъ посредствомъ простыхъ чертежей.

§ 53. Четныя и нечетныя перестановки.

1. Будемъ обозначачать элементы нѣкотораго комплекса числами натуральнаго ряда 1, 2, 3, ..., n. Среди всѣхъ возможныхъ перестановокъ этихъ элементовъ есть одна

$$E = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,$$

въ которой числа расположены въ той же послѣдовательности, какъ и въ натуральномъ ряду. Назовемъ эту перестановку главной или основной перестановкой. Всякую другую перестановку мы будемъ обозначать такъ:

$$A = a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n;$$

здѣсь буквы a_1, a_2, a_3, ..., a_n обозначаютъ числа того же ряда 1, 2, 3, ..., n, но только расположенныя въ другой послѣдовательности.

Напримѣръ, при $n = 3$ мы имѣемъ шесть перестановокъ:

$$\begin{aligned} A_1 &= 1{,}2{,}3, & A_4 &= 1{,}3{,}2, \\ A_2 &= 2{,}3{,}1, & A_5 &= 2{,}1{,}3, \\ A_3 &= 3{,}1{,}2, & A_6 &= 3{,}2{,}1. \end{aligned}$$

Чтобы получить изъ главной перестановки E какую-нибудь перестановку A, поступаютъ слѣдующимъ образомъ. Если $a_1 = 1$, то первый элементъ главной перестановки оставляютъ на прежнемъ мѣстѣ. Если же a_1 отлично отъ 1, то мы перемѣщаемъ въ перестановкѣ E элементы a_1 и 1 одинъ на мѣсто другого. Тогда элементъ a_1 окажется на надлежащемъ мѣстѣ, котораго мы болѣе не будемъ мѣнять. Послѣ того, какъ элементъ a_1 займетъ принадлежащее ему въ перестановкѣ A первое мѣсто, мы аналогичнымъ образомъ помѣняемъ мѣстами элементы 2 и a_2; чтобы получить требуемую перестановку A, потребуется выполнить не болѣе $n - 1$ подобныхъ замѣщеній [1]). Такое взаимное замѣщеніе двухъ элементовъ называется транспозиціей. Такимъ образомъ, любую перестановку можно получить изъ главной путемъ ряда послѣдовательныхъ транспозицій. Точно такъ же посредствомъ транспозицій можно получить любую заданную перестановку, исходя не изъ главной перестановки, а изъ какой-либо другой. Это можно выполнить безконечнымъ числомъ способовъ: напримѣръ, можно сперва сдѣлать какое угодно число совершенно про-

---

[1]) Напримѣръ, чтобы изъ главной перестановки $E = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ получить перестановку 3, 1, 4, 2, нужно сначала замѣстить другъ другомъ элементы 1 и 3; получимъ перестановку 3, 2, 1, 4; теперь нужно здѣсь замѣстить другъ другомъ элементы 2 и 1; получимъ: 3, 1, 2, 4; остается перемѣстить элементы 2 и 4, послѣ чего получимъ требуемую перестановку 3, 1, 4, 2.

извольныхъ транспозицій, а потомъ ужъ дѣйствовать планомѣрно вышеописаннымъ образомъ:

2. Тѣ $n!$ перестановокъ, которыя получаются изъ n элементовъ $1, 2, 3, \ldots, n$, можно раздѣлить на два класса, исходя изъ слѣдующихъ соображеній.

Если въ какой-нибудь перестановкѣ меньшее число стоитъ не впереди бо́льшаго, а позади него, то говорятъ, что соотвѣтствующіе элементы составляютъ **инверсію**. Напримѣръ, въ перестановкѣ A два элемента a_i и a_k при $i < k$ составляютъ инверсію, если $a_i > a_k$, и не составляютъ инверсіи, если $a_i < a_k$. Поэтому, за исключеніемъ главной перестановки E, не имѣющей ни одной инверсіи, всякая перестановка имѣетъ **опредѣленное число инверсій**. Напримѣръ, перестановка $n, n-1, n-2, \ldots, 1$ имѣетъ слѣдующее число инверсій:

$$(n-1)+(n-2)+(n-3)+\cdots+1=\frac{1}{2}n(n-1)\ ^{2}).$$

Это — наибольшее число инверсій, которымъ можетъ обладать какая-либо перестановка нашего комплекса. Въ вышеприведенномъ примѣрѣ $n=3$ перестановки $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ имѣютъ инверсій соотвѣтственно $0, 2, 2, 1, 1, 3$. По числу инверсій мы подраздѣляемъ перестановки каждаго комплекса на два класса.

Четными перестановками называются такія, которыя имѣютъ четное число (включая сюда и нуль) инверсій.

Нечетными перестановками называются такія, которыя имѣютъ нечетное число инверсій.

При $n=3$ перестановки A_1, A_2 и A_3 суть четныя, а перестановки A_4, A_5, A_6 — нечетныя.

3. Если мы въ какой-нибудь перестановкѣ A перемѣстимъ два элемента одинъ на мѣсто другого, то количество инверсій этой перестановки измѣнится на нечетное число.

Справедливость этого предложенія легко обнаружить слѣдующимъ образомъ. Примемъ, что въ перестановкѣ A элементъ a_g находится впереди элемента a_k (т. е. $g<k$); замѣняя другъ другомъ элементы a_g и a_k, мы этимъ совершенно не измѣняемъ инверсій, которыя они образуютъ съ элементами, стоящими впереди элемента a_g или позади элемента a_k.

Если черезъ a_l обозначимъ элементъ, который находится въ перестановкѣ A между элементами a_g и a_k, то двѣ пары элементовъ a_g, a_l

---

[2]) Въ этой перестановкѣ каждый элементъ образуетъ инверсію съ каждымъ изъ послѣдующихъ элементовъ; т. е. элементъ n образуетъ съ послѣдующими элементами $n-1$ инверсій, элементъ $n-1$ образуетъ $n-2$ инверсій и т. д.

и a_l, a_k либо не даютъ ни одной инверсіи, либо образуютъ одну, либо же двѣ инверсіи; при замѣщеніи элементовъ a_g и a_k другъ другомъ двѣ пары a_k, a_l и a_l, a_g образуютъ соотвѣтственно либо двѣ инверсіи, либо одну, либо же не даютъ ни одной, такъ что число этихъ инверсій разсматриваемой перестановки или увеличилось на два, или осталось безъ перемѣны, или же уменьшилось на два; во всякомъ случаѣ, стало быть, оно измѣняется на четное число. Наконецъ, если пара a_g, a_k образуетъ инверсію, то пара a_k, a_g не даетъ ни одной инверсіи, и, наоборотъ, если пара a_g, a_k не образуетъ инверсіи, то пара a_k, a_g образуетъ одну инверсію; число инверсій, такимъ образомъ, измѣняется еще на 1. Этимъ и подтверждается справедливость нашего предложенія.

Отсюда непосредственно слѣдуетъ:

4. Число четныхъ перестановокъ равно числу нечетныхъ, а именно, тѣхъ и другихъ въ каждомъ комплексѣ имѣется по $\frac{1}{2}n!$ Дѣйствительно, мы можемъ во всѣхъ перестановкахъ A замѣстить другъ другомъ два какихъ-либо опредѣленныхъ элемента, — напримѣръ, 1 и 2; тогда, съ одной стороны, каждая четная перестановка перейдетъ въ нечетную и, обратно, каждая нечетная перестановка — въ четную, при чемъ каждыя двѣ различныя между собою перестановки никогда не перейдутъ въ одинаковыя; но такъ какъ въ общемъ мы получимъ всѣ тѣ же перестановки, которыя мы имѣли раньше, то необходимо заключить, что четныхъ перестановокъ столько же, сколько нечетныхъ.

5. Будемъ выводить помощью транспозицій всевозможныя перестановки даннаго комплекса изъ n элементовъ изъ главной перестановки; въ какомъ бы порядкѣ мы ни вели этотъ процессъ, всякая четная перестановка получится послѣ четнаго числа транспозицій, а всякая нечетная перестановка — послѣ нечетнаго числа транспозицій. Въ самомъ дѣлѣ, главная перестановка, не имѣя ни одной инверсіи, принадлежитъ къ четнымъ перестановкамъ, а каждая транспозиція измѣняетъ количество инверсій на нечетное число.

§ 54. Составленіе перестановокъ.

1. Какъ мы видѣли выше, изъ любыхъ n элементовъ можно составить $n!$ перестановокъ A. Хотя эти перестановки не представляютъ собою численныхъ величинъ, все же онѣ поддаются математической обработкѣ; въ области перестановокъ можно установить правила дѣйствій, имѣющія аналогію съ правилами обыкновенной ариѳметики въ однихъ пунктахъ и существенно отличающіяся отъ послѣднихъ въ другихъ. Эти дѣйствія надъ перестановками имѣютъ огромное значеніе для алгебры; мы сейчасъ разсмотримъ ихъ вкратцѣ, такъ какъ эти своеобразныя дѣйствія имѣютъ совершенно элементарный характеръ; къ тому же они представляютъ собою прекрасный примѣръ свободнаго творчества въ области понятія о числахъ и дѣйствіяхъ надъ ними.

2. Чтобы перейти отъ основной перестановки

$$E = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n$$

къ какой-либо другой перестановкѣ

$$A = a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,$$

нужно замѣнить элементъ 1 элементомъ a_1, элементъ 2 — элементомъ a_2, . . ., элементъ n — элементомъ a_n. Это дѣйствіе называется **субституціей** [3]); для наглядности его изображаютъ такъ:

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & \ldots, & n \\ a_1, & a_2, & a_3, & \ldots, & a_n \end{pmatrix}, \tag{1}$$

т. е. **подъ** каждымъ элементомъ пишутъ тотъ элементъ, которымъ его замѣняютъ.

Эта субституція обозначается одной какой-либо буквой, — напримѣръ, буквой S, такъ что символъ (1) читается такъ: субституція S. Такимъ образомъ, посредствомъ субституціи S мы переходимъ отъ главной перестановки E къ перестановкѣ A.

Когда мы производимъ субституцію, то безразлично, въ какой послѣдовательности мы замѣняемъ прежніе элементы 1, 2, 3, ..., n новымм элементами a_1, a_2, a_3, . . ., a_n; можно, напримѣръ, замѣнить сперва элементъ 1 элементомъ a_1, а потомъ элементъ 2 элементомъ a_2; но можно также сперва замѣнить элементъ 2 элементомъ a_2, а потомъ уже элементъ 1 — элементомъ a_1, такъ что субституцію S можно представить еще такъ:

$$\begin{pmatrix} 2, & 1, & 3, & \ldots, & n \\ a_2, & a_1, & a_3, & \ldots, & a_n \end{pmatrix},$$

и, вообще, въ символѣ (1) можно переставлять любыя двѣ **пары** стоящихъ одна подъ другой **цифръ** (т. е. любыя вертикали), при чемъ значеніе

---

[3]) Нѣкоторые русскіе авторы употребляютъ терминъ **подстановка**, другіе въ томъ же смыслѣ — терминъ **перестановка**; въ виду того, что русская терминологія, такимъ образомъ, не установилась, мы рѣшили сохранить терминъ **субституція** (какъ и выше терминъ **транспозиція**), принятый во всей европейской литературѣ.

символа S отъ этого не измѣняется, потому что послѣ такой перестановки онъ выражаетъ ту же субституцію, что и до нея [4]).

Какой-либо элементъ b изъ ряда $1, 2, 3, \ldots, n$ послѣ субституціи S замѣнится элементомъ a_b, такъ что, если обозначимъ какую-либо перестановку нашего комплекса черезъ

$$B = b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots,\ b_n,$$

то субституцію S можно представить еще такъ:

$$S = \begin{pmatrix} b_1, & b_2, & \ldots, & b_n \\ a_{b_1}, & a_{b_2}, & \ldots, & a_{b_n} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Однако, перестановка A сравнительно со всѣми другими перестановками находится въ особенной связи съ субституціей S; именно, она получается при помощи суституціи S изъ основной перестановки E.

3. Если мы будемъ выполнять замѣну элементовъ, выражаемую субституціей S, исходя не изъ главной перестановки E, но изъ какой-либо другой перестановки B, то, какъ показываетъ формула (2), мы при этомъ получимъ нѣкоторую перестановку

$$M = a_{b_1},\ a_{b_2},\ \ldots,\ a_{b_n}; \tag{3}$$

мы могли бы обозначить эту перестановку черезъ A_b; однако, предпочитаютъ пользоваться другимъ символомъ, а именно символомъ

$$M = BA. \tag{4}$$

Понятно что выражаемое символомъ BA дѣйствіе не есть умноженіе въ обычномъ смыслѣ [5]).

---

[4]) Это очень важно хорошо себѣ уяснить. Символы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

выражаютъ одну и ту же субституцію, именно ту, которая замѣняетъ элементъ 1 элементомъ 2, элементъ 2 элементомъ 3 и элементъ 3 элементомъ 1. Субституція опредѣляется, такимъ образомъ, только тѣмъ, какимъ элементомъ она замѣняетъ каждый элементъ комплекса.

[5]) Итакъ, подъ символомъ BA мы разумѣемъ перестановку, которая получается изъ перестановки B посредствомъ той же субституціи, при помощи которой перестановка A получается изъ основной перестановки E.

Пусть, напримѣръ,

$$B = 3,\ 1,\ 2;\quad A = 2,\ 1,\ 3;$$

тогда субституція

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 2, & 1, & 3 \end{pmatrix},$$

Аналогичнымъ образомъ производится составленіе субституцій, при чемъ результатъ получается еще болѣе нагляднымъ способомъ. Если требуется составить субституціи

$$S_a = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & \ldots, & n \\ a_1, & a_2, & a_3, & \ldots, & a_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad S_b = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & \ldots, & n \\ b_1, & b_2, & b_3, & \ldots, & b_n \end{pmatrix},$$

а именно — найти субституцію S_bS_a, то для этого предварительно представляютъ субституцію S_a въ видѣ:

$$S_a = \begin{pmatrix} b_1, & b_2, & \ldots, & b_n \\ a_{b_1}, & a_{b_2}, & \ldots, & a_{b_n} \end{pmatrix},$$

а затѣмъ образуютъ субституцію

$$S_m = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & \ldots, & n \\ a_{b_1}, & a_{b_2}, & a_{b_3}, & \ldots, & a_{b_n} \end{pmatrix},$$

которую и называютъ результатомъ составленія субституцій S_b и S_a, такъ что имѣемъ: $S_m = S_b \cdot S_a$, или

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & n \\ b_1, & b_2, & \ldots, & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1, & b_2, & \ldots, & b_n \\ a_{b_1}, & a_{b_2}, & \ldots, & a_{b_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & n \\ a_{b_1}, & a_{b_2}, & \ldots, & a_{b_n} \end{pmatrix}.$$

Субституція S_m приводитъ, такимъ образомъ, къ перестановкѣ M.

4. Мы только-что познакомились со способомъ получить изъ двухъ данныхъ перестановокъ A и B опредѣленную третью; другими словами, въ области перестановокъ мы установили правило дѣйствія, аналогично правиламъ дѣйствій въ ариѳметикѣ. Для обозначенія этого дѣйствія мы выбрали знакъ умноженія, какъ наиболѣе простой (съ неменьшимъ правомъ можно было бы употреблять знакъ сложенія); однако, чтобы избѣжать недоразумѣній, мы будемъ называть это дѣйствіе не умноженіемъ, но составленіемъ [6]) или соединеніемъ перестановокъ. Важно замѣтить, что это дѣйствіе можно производить лишь надъ такими переста-

---

преобразующая перестановку E въ перестановку A, замѣщаетъ элементы 1, 2, 3 соотвѣтственно элементами 2, 1, 3. Если мы произведемъ это замѣщеніе въ перестановкѣ B, то получимъ перестановку

3, 2, 1.

Эта именно перестановка и выражается въ настоящемъ случаѣ символомъ BA. Въ текстѣ ниже приведенъ еще примѣръ.

[6]) Почти во всей литературѣ принятъ, однако, терминъ „умноженіе перестановокъ“.

новками, которыя состоятъ изъ опредѣленнаго числа элементовъ, при чемъ эти послѣднiе не мѣняются въ предѣлахъ нашего разсужденiя.

Чтобы выяснить процессъ составленiя перестановокъ на простомъ примѣрѣ, возьмемъ $n = 4$:

$$A = 1,\ 3,\ 4,\ 2 \quad \text{и} \quad B = 3,\ 2,\ 1,\ 4.$$

Чтобы получить перестановку BA, нужно выполнить тѣ замѣщенiя въ перестановкѣ B, которыя приводятъ отъ $E = 1, 2, 3, 4$ къ A. Мы получимъ тогда:

$$BA = 4,\ 3,\ 1,\ 2.$$

Точно такъ же найдемъ:

$$AB = 3,\ 1,\ 4,\ 2.$$

Уже изъ этихъ примѣровъ видно, что перемѣстительный законъ не имѣетъ мѣста или, по крайней мѣрѣ, не всегда имѣетъ мѣсто при составленiи перестановокъ.

Составленiе соотвѣтствующихъ субституцiй даетъ:

$$S_a = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4 \\ 1, & 3, & 4, & 2 \end{pmatrix}, \quad S_b = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4 \\ 3, & 2, & 1, & 4 \end{pmatrix},$$

$$S_b S_a = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4 \\ 3, & 2, & 1, & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3, & 2, & 1, & 4 \\ 4, & 3, & 1, & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4 \\ 4, & 3, & 1, & 2 \end{pmatrix},$$

$$S_a S_b = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4 \\ 1, & 3, & 4, & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & 3, & 4, & 2 \\ 3, & 1, & 4, & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4 \\ 3, & 1, & 4, & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Ту же операцiю можно производить не только надъ двумя, но и надъ нѣсколькими перестановками. Если C означаетъ третью перестановку, то можно образовать перестановку $C(BA)$, составленную изъ перестановокъ C и (BA). Покажемъ, что послѣдняя перестановка тождественна съ перестановкой $(CB)A$; другими словами, докажемъ, что при составленiи перестановокъ сочетательный законъ остается справедливымъ.

Чтобы убѣдиться въ этомъ, достаточно выполнить требуемыя операцiи по правилу, указанному въ пунктѣ 3.

Дѣйствительно, пусть

$$A = a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,$$
$$B = b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n,$$
$$C = c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n;$$

тогда

$$BA = a_{b_1},\ a_{b_2},\ \ldots,\ a_{b_n}\ ^{7}). \tag{5}$$

Чтобы получить перестановку $C(BA)$, нужно въ перестановкѣ C выполнить субституцію, ведущую отъ главной перестановки E къ перестановкѣ BA; такъ какъ для этого элементъ 1 нужно замѣнить элементомъ a_{b_1}, элементъ 2 — элементомъ a_{b_2} и т. д., то элементъ c_1 замѣнится элементомъ $a_{b_{c_1}}$ и т. д.; мы получимъ такимъ образомъ:

$$C(BA) = a_{b_{c_1}},\ a_{b_{c_2}},\ \ldots,\ a_{b_{c_n}}. \tag{6}$$

Съ другой стороны найдемъ:

$$CB = b_{c_1},\ b_{c_2},\ \ldots,\ b_{c_n};$$

чтобы образовать перестановку $(CB)A$, слѣдуетъ выполнить въ перестановкѣ CB замѣщенія, которыя ведутъ отъ E къ A; для этого элементъ 1 замѣнится элементомъ a_1, элементъ 2 — элементомъ a_2, и т. д., элементъ b_{c_1} замѣнится элементомъ $a_{b_{c_1}}$ и т. д.; мы получимъ такую же перестановку, какъ и въ формулѣ (6):

$$(CB)A = a_{b_{c_1}},\ a_{b_{c_2}},\ \ldots,\ a_{b_{c_n}} = C(BA).$$

Такимъ образомъ, мы доказали справедливость сочетательнаго закона при составленіи перестановокъ [8]). Поэтому можно не писать скобокъ въ обозначеніяхъ $C(BA)$ и $(CB)A$, а изображать символомъ CBA перестановку, которая получается, какъ результатъ составленія перестановокъ C, B, A (въ этой послѣдовательности).

---

[7]) Нужно помнить, что

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n$$

суть тѣ же числа

$$1,\ 2,\ 3\ \ldots\ n,$$

но только разставленныя въ иномъ порядкѣ. Субституція, ведущая отъ перестановки E къ перестановкѣ A, замѣщаетъ элементъ 1 элементомъ a_1, элементъ 2 элементомъ a_2, ..., вообще, элементъ i элементомъ a_i. Слѣдовательно, она замѣщаетъ элементъ b_1 элементомъ a_{b_1}, элементъ b_2 элементомъ a_{b_2} и т. д. Отсюда вытекаютъ равенства (5) и (3).

[8]) Провѣримъ это на примѣрѣ. Пусть

$$A = 1,\ 3,\ 2,\ 4;\quad B = 3,\ 4,\ 1,\ 2;\quad C = 2,\ 3,\ 1,\ 4.$$

Въ такомъ случаѣ

$$BA = 2,\ 4,\ 1,\ 3$$

$$C(BA) = 4,\ 1\ 2,\ 3.$$

Такимъ же образомъ

$$CB = 4,\ 1,\ 3,\ 2,$$

$$(CB)A = 4,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Точно такъ же можно соединять любое число перестановокъ, при чемъ одна и та же перестановка можетъ повторяться нѣсколько разъ.

6. Всякая перестановка A при соединенiи съ основной перестановкой E остается безъ перемѣны, въ какомъ бы порядкѣ мы ни производили эту операцiю, т. е.

$$EA = AE = A.$$

Это предложенiе слѣдуетъ непосредственно изъ опредѣленiя составленiя перестановокъ: чтобы получить перестановку EA, нужно выполнить замѣщенiя, ведущiя отъ E къ A, непосредственно въ перестановкѣ E, такъ что въ результатѣ получимъ вновь перестановку A; перестановка AE получится, если мы въ перестановкѣ A сдѣлаемъ тѣ замѣщенiя, которыя отъ основной перестановки E приводятъ къ ней же, т. е. нужно оставить перестановку A безъ измѣненiя. Итакъ, перестановка AE, равно какъ и перестановка EA, есть то же, что и A.

Отсюда заключаемъ, что перестановка E имѣетъ при составленiи перестановокъ такое же значенiе, какъ единица при умноженiи чиселъ (или нуль при сложенiи). Въ силу этого, если при составленiи перестановокъ встрѣчается основная перестановка, то она всегда можетъ быть опущена.

7. Одну и ту же перестановку можно взять въ качествѣ составляющей нѣсколько разъ; при этомъ цѣлесообразно обозначать результаты на подобiе степеней чиселъ:

$$A = A^1, \quad AA = A^2, \quad AAA = A^3, \ldots .$$

Такъ же, какъ для степеней чиселъ, и для этихъ своеобразныхъ степеней остается справедливымъ основное равенство

$$A^\mu A^\nu = A^{\mu+\nu}, \tag{7}$$

гдѣ μ и ν суть цѣлыя и положительныя числа и $A^\mu A^\nu$ означаетъ результатъ составленiя перестановокъ A^μ и A^ν [9]). Формула эта остается справедливой и для $\mu = 0$ и $\nu = 0$, если только условимся, что

$$A^0 = E;$$

это обозначенiе напрашивается само собою въ виду аналогiи перестановки E съ числомъ 1.

8. Каждой перестановкѣ A соотвѣтствуетъ одна и только одна перестановка A', удовлетворяющая условiю

$$A'A = E. \tag{8}$$

---

[9]) Теорема эта можетъ быть доказана способомъ математической индукцiи.

Дѣйствительно, если $BA = E$, то по формулѣ (3) имѣемъ:

$$a_{b_1} = 1, \quad a_{b_2} = 2, \; \ldots, \; a_{b_n} = n;$$

такъ какъ элементы $a_1, a_2, \ldots, a_n$, если расположить ихъ въ нѣкоторомъ опредѣленномъ порядкѣ, также совпадаютъ соотвѣтственно съ числами $1, 2, \ldots, n$, то этимъ однозначно опредѣляются значенія элементовъ $b_1, b_2, \ldots, b_n$ [10]).

Перестановка A', удовлетворяющая условію $A'A = E$, называется обратной по отношенію къ перестановкѣ A.

9. Если A' есть перестановка, обратная относительно перестановки A, то A есть перестановка, обратная относительно A', т. е. если $A'A = E$ и $A''A' = E$, то $A'' = A$.

Дѣйствительно, такъ какъ $A'A = E$, то, согласно п. 6, имѣемъ:

$$A'AA' = A'.$$

Если A'' означаетъ перестановку, обратную относительно A', т. е. если $A''A' = E$, то, принимая во вниманіе предыдущее равенство, найдемъ:

$$A''A'AA' = A''A' = E.$$

Если подставимъ E вмѣсто $A''A'$ въ лѣвую часть равенства $A''A'AA' = E$, то получимъ:

$$AA' = E,$$

т. е. перестановка A и есть обратная относительно перестановки A', что и требовалось доказать. Въ виду аналогіи E съ единицей представляется цѣлесообразнымъ разсматривать перестановку A', какъ (-1)-ую степень перестановки A, откуда слѣдуетъ равенство:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E. \tag{9}$$

10. Нетрудно понять, какое значеніе имѣютъ степени перестановокъ съ отрицательными показателями. Положивъ въ формулѣ (7) $\mu = -\nu$, найдемъ:

$$A^{-\nu}A^{\nu} = A^0, \quad \text{или} \quad A^{-\nu}A^{\nu} = E,$$

т. е. $A^{-\nu}$ означаетъ перестановку, обратную относительно перестановки A^{ν}; теперь формула (7) получаетъ смыслъ и для того случая, когда показатель μ или ν есть отрицательное число.

---

[10]) Пояснимъ сказанное примѣромъ. Возьмемъ $n = 4$ и $A = 3, 1, 2, 4$, т. е. $a_1 = 3$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 4$. Ищемъ B такъ, чтобы было $BA = E$. Тогда $a_{b_1} = 1 = a_2$; $a_{b_2} = 2 = a_3$; $a_{b_3} = 3 = a_1$; $a_{b_4} = 4 = a_4$. Слѣдовательно: $b_1 = 2$, $b_2 = 3$, $b_3 = 1$, $b_4 = 4$, $B = 2, 3, 1, 4$. Повѣркой легко убѣдиться, что $BA = 1, 2, 3, 4 = E$.

11. Понятіе объ обратной перестановкѣ даетъ возможность установить въ области перестановокъ дѣйствіе, аналогичное дѣленію.

Дѣйствительно, въ равенствѣ

$$BA = C$$

можно по двумъ даннымъ перестановкамъ C и B или C и A опредѣлить соотвѣтствующую третью: A или B; для этого служатъ формулы:

$$A = B^{-1}C \quad \text{и} \quad B = CA^{-1}.$$

Докажемъ теперь слѣдующее предложеніе:

Если перестановки A, M и N удовлетворяютъ условію $AM = AN$, то перестановки M и N тождественны. Это слѣдуетъ изъ равенства

$$A^{-1}AM = A^{-1}AN.$$

Аналогично этому изъ равенства $MA = NA$ слѣдуетъ что $M = N$.

12. Отъ составленія двухъ четныхъ или двухъ нечетныхъ перестановокъ получается четная перестановка. Отъ составленія же четной перестановки съ нечетной получается нечетная перестановка.

Такъ какъ перестановка E принадлежитъ къ числу четныхъ, то каждая перестановка A принадлежитъ къ тому же классу, что и обратная ей перестановка A'.

§ 55. Изображеніе перестановокъ въ циклахъ.

1. Чтобы получить представленіе обо всей совокупности перестановокъ изъ данныхъ n элементовъ, пользуются изображеніемъ перестановокъ при помощи цикловъ. Эти циклы, къ которымъ мы теперь перейдемъ, весьма облегчаютъ также составленіе перестановокъ [11]).

---

[11]) Слѣдующія за этимъ общія разсужденія будутъ понятнѣе, если читатель уяснитъ себѣ ихъ предварительно на частномъ примѣрѣ.

Перестановка вполнѣ опредѣляется, если указано, какой элементъ стоитъ на каждомъ мѣстѣ; какимъ образомъ это указано — совершенно безразлично. Перестановка можетъ быть непосредственно написана въ той послѣдовательности элементовъ, въ какой они слѣдуютъ другъ за другомъ:

$$4,\ 6,\ 9,\ 7,\ 1,\ 8,\ 5,\ 2,\ 3. \qquad [1]$$

Можетъ быть иначе указано, что на первомъ мѣстѣ стоитъ 4, на второмъ 6, на третьемъ 9 и т. д.

Одинъ изъ наиболѣе важныхъ способовъ обозначенія перестановокъ состоитъ въ распредѣленіи элементовъ въ циклы. Заключается этотъ способъ въ слѣдующемъ.

Въ нашей перестановкѣ [1] на первомъ мѣстѣ стоитъ 4; напишемъ это такъ: 1, 4 — и будемъ понимать это обозначеніе въ томъ смыслѣ, что на 1-омъ мѣстѣ стоитъ 4. Закончивъ элементомъ 4, мы посмотримъ теперь, какой элементъ стоитъ на

Разсмотримъ нѣкоторую опредѣленную перестановку

$$A = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n,$$

и пусть r означаетъ любое число въ ряду 1, 2, ..., n.

Въ перестановкѣ A на r-омъ мѣстѣ находится элементъ a_r,

" " " " a_r-омъ " " элементъ a_{a_r}, который мы обозначимъ черезъ a'_r,

" " " " a'_r-омъ " " элементъ $a_{a'_r}$, который мы обозначимъ черезъ a''_r, и т. д.

Мы получимъ такимъ образомъ рядъ:

$$r, a_r, a'_r, a''_r, \ldots,$$

въ которомъ каждый элементъ опредѣляется однозначно какъ предыдущимъ, такъ и послѣдующимъ элементомъ. Такъ какъ число элементовъ

4-мъ мѣстѣ: оказывается 7; мы выразимъ это такъ: 1, 4, 7. Теперь посмотримъ, какой элементъ стоитъ на 7-мъ мѣстѣ; оказывается 5; пишемъ: 1, 4, 7, 5. Теперь смотримъ, какой элементъ стоитъ на 5-мъ мѣстѣ; оказывается 1. Когда мы вернулись къ элементу, съ котораго начали, то мы говоримъ, что получили **циклъ** (1, 4, 7, 5). Если мы будемъ принимать, что въ этомъ циклѣ за 5 слѣдуетъ 1, то каждое число указываетъ здѣсь элементъ, стоящій на томъ мѣстѣ, которое обозначается предыдущимъ числомъ. Этотъ циклъ можно начать съ какого угодно элемента, — напримѣръ, такъ: (4, 7, 5, 1); и въ этомъ видѣ онъ будетъ по прежнему указывать, что на 4-мъ мѣстѣ стоитъ 7, на 7-мъ—5, на 5-мъ—1 и на 1-мъ—4.

Закончивъ циклъ, беремъ какой-либо изъ элементовъ, въ него не вошедшихъ,— напримѣръ, 2; на 2-мъ мѣстѣ стоитъ 6,— пишемъ: 2, 6; на 6-мъ мѣстѣ стоитъ 8,—пишемъ: 2, 6, 8; на 8-мъ мѣстѣ стоитъ 2; циклъ замкнулся: (2, 6, 8).

Беремъ, наконецъ, одинъ изъ элементовъ, еще не появившихся,— напримѣръ, 3: на третьемъ мѣстѣ стоитъ 9, а на девятомъ 3; мы получаемъ такимъ образомъ третій циклъ (3, 9). Наша перестановка можетъ быть, такимъ образомъ, представлена въ слѣдующемъ видѣ:

$$(1, 4, 7, 5)(2, 6, 8)(3, 9).$$

По этому обозначенію, очевидно, легко возстановить перестановку [1], такъ какъ здѣсь вполнѣ указано, какой элементъ стоитъ на 1-мъ мѣстѣ, какой на второмъ и т. д.

Возможны циклы, состоящіе только изъ одного элемента; это имѣетъ мѣсто, если элементъ выражается тѣмъ же числомъ, что и занимаемое имъ мѣсто; напримѣръ, перестановка

$$1, 3, 5, 4, 2$$

въ циклахъ изображается такъ:

$$(1)(2, 3, 5)(4).$$

Циклъ (1) показываетъ, что 1 стоитъ на 1-мъ мѣстѣ, циклъ (4) показываетъ, что 4 стоитъ на 4-мъ мѣстѣ.

Въ текстѣ изложены общія основанія этой теоріи.

не превышаетъ n, а рядъ можетъ быть продолженъ неопредѣленно, то элементы его будутъ повторяться; первымъ повторится элементъ r, такъ какъ каждый элементъ вполнѣ опредѣляетъ собой предыдущій элементъ[12]). Если $a_r^{(g-1)} = r$, то мы имѣемъ замкнутый циклъ изъ g членовъ, изображаемый такъ:

$$\mathfrak{C}_1 = (r,\ a_r,\ a'_r,\ \ldots,\ a_r^{(g-2)}).$$

Этотъ символъ нужно понимать такъ, что за послѣднимъ элементомъ $a_r^{(g-2)}$ вновь слѣдуетъ первый элементъ r.

Можетъ случиться, что число g элементовъ цикла равно единицѣ; тогда $a_r = r$, и элементъ r находится въ перестановкѣ A на томъ же мѣстѣ, на которомъ онъ стоитъ въ главной перестановкѣ E.

Если за исходный пунктъ возьмемъ не элементъ r, а элементъ a_r или a'_r, то получимъ такіе циклы:

$$(a_r,\ a'_r,\ \ldots,\ a_r^{(g-2)},\ r),$$
$$(a'_r,\ a''_r,\ \ldots,\ a_r^{(g-2)},\ r,\ a_r);$$

такіе циклы разсматриваются, какъ не существенно различные.

2. Если $g < n$, то циклъ $\mathfrak{C}_1$ не исчерпываетъ еще всѣхъ элементовъ перестановки. Въ этомъ случаѣ беремъ какой-либо элементъ s перестановки, не содержащійся въ циклѣ $\mathfrak{C}_1$, и составляемъ новый циклъ изъ k членовъ:

$$\mathfrak{C}_2 = (s,\ a_s,\ a'_s,\ \ldots,\ a_s^{(k-2)}).$$

Будемъ продолжать такъ, пока не исчерпаемъ всѣхъ n элементовъ. Такимъ образомъ перестановка A цѣликомъ разлагается на циклы, а эти послѣдніе вполнѣ опредѣляются перестановкой A. Также и обратно: совокупность полученныхъ цикловъ вполнѣ опредѣляетъ собою перестановку A, ибо въ этихъ циклахъ точно указано, какой элементъ находится на томъ или на другомъ,— напримѣръ, на s-омъ—мѣстѣ. Поэтому перестановка A можетъ быть однозначно выражена при помощи своихъ цикловъ:

$$A = \mathfrak{C}_1 \mathfrak{C}_2,\ \ldots, \tag{1}$$

при чемъ послѣдовательность, въ какой пишутся циклы $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, ..., не имѣетъ значенія. При такомъ выраженіи перестановки A въ

---

[12]) Дѣйствительно, такъ какъ каждый элементъ вполнѣ опредѣляетъ собою предыдущій элементъ, то не можетъ повториться какой-нибудь изъ слѣдующихъ за r элементовъ безъ того, чтобы раньше не повторился элементъ r. Еще яснѣе: если бы, напримѣръ, послѣ $a_r^{(5)}$ повторился элементъ a''_r, то имѣли бы мѣсто равенства: $a_r^{(5)} = a'_r$, $a_r^{(4)} = a_r$, $a'''_r = r$, ибо каждый элементъ опредѣляетъ однозначно предыдущій.

циклахъ каждый изъ ея элементовъ 1, 2, ..., n непремѣнно войдетъ въ составъ какого-либо цикла и притомъ только одинъ разъ.

Одночленные циклы означаютъ элементы, мѣста которыхъ въ перестановкѣ A тѣ же, что и въ перестановкѣ E; въ формулѣ (1) этихъ цикловъ обыкновенно не пишутъ, такъ что въ этой формулѣ обозначены только тѣ элементы, мѣста которыхъ въ перестановкѣ A не таковы, какъ въ перестановкѣ E. Главная перестановка E состоитъ исключительно изъ одночленныхъ цикловъ.

Двучленные циклы представляютъ собою не что иное, какъ транспозиціи, о которыхъ мы говорили въ § 53 [13]).

Примѣръ. Пусть $n = 7$ и

$$A = (5,\ 2,\ 3)(4,\ 1,\ 7,\ 6). \tag{2}$$

Соотвѣтствующая субституція имѣетъ видъ:

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7 \\ 7, & 3, & 5, & 1, & 2, & 4, & 6 \end{pmatrix},$$

а перестановка A:

$$7,\ 3,\ 5,\ 1,\ 2,\ 4,\ 6,$$

ибо формула (2) выражаетъ, что

на 1-омъ мѣстѣ находится элементъ 7 (онъ слѣдуетъ за 1),
„ 2-омъ „ „ „ 3,
„ 3-ьемъ „ „ „ 5 (онъ слѣдуетъ циклически за 3),
„ 4-омъ „ „ „ 1,
„ 5-омъ „ „ „ 2,
„ 6-омъ „ „ „ 4,
„ 7-омъ „ „ „ 6.

3. Составленіе перестановокъ весьма упрощается, если представлять ихъ въ видѣ цикловъ. Даны перестановки

$$A = a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n$$

и

$$B = b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots,\ b_n.$$

---

[13]) Это не совсѣмъ такъ. Въ той системѣ, которой придерживается авторъ, транспозиція есть нѣкоторая субституція (какъ это и опредѣлено въ § 53), а двучленный циклъ есть нѣкоторая перестановка двухъ элементовъ. Двучленный циклъ получается изъ основной перестановки при помощи транспозиціи. Подъ транспозиціей (a, b) слѣдуетъ разумѣть ту транспозицію, посредствомъ которой перестановка (a, b) получается изъ перестановки E.

Нужно найти циклы, на которые разлагается перестановка

$$BA = a_{b_1},\ a_{b_2},\ \ldots,\ a_{b_n}.$$

Если r есть произвольный элементъ, то среди цикловъ, на которые разлагается перестановка B, есть часть: $(r,\ b_r,\ \ldots)$; въ циклахъ же перестановки A найдется часть $(b_r,\ a_{b_r},\ \ldots)$, а въ искомыхъ циклахъ перестановки BA есть часть $(r,\ a_{b_r},\ \ldots)$.

Отсюда слѣдуетъ простое правило: чтобы составить циклы перестановки BA, нужно за любымъ элементомъ r писать тотъ элементъ a_{b_r}, который въ перестановкѣ A слѣдуетъ за элементомъ b_r, т. е. за тѣмъ элементомъ, который въ перестановкѣ B слѣдуетъ за элементомъ r.

4. Мы освоимся съ этимъ правиломъ, разсмотрѣвъ примѣры.

Возьмемъ $n = 7$ и перестановки

$$A = (5,\ 2,\ 3)(4,\ 1,\ 7,\ 6)$$

и

$$B = (1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 3)(5,\ 6).$$

Тогда

$$BA = (1,\ 3,\ 7,\ 5,\ 4,\ 6,\ 2)$$ [14].

Такимъ образомъ, перестановка BA имѣетъ всего одинъ циклъ. Иначе:

$$BA = 3,\ 1,\ 7,\ 6,\ 4,\ 2,\ 5.$$

Соединимъ перестановку BA съ перестановкой $C = (4,\ 7)$, въ которой элементы 1, 2, 3, 5 и 6 занимаютъ тѣ же мѣста, что и въ главной перестановкѣ E. Получимъ:

$$CBA = (1,\ 3,\ 7,\ 6,\ 2)\ (4,\ 5).$$

5. Пользуясь циклами, весьма легко находить степени перестановки.

Для того, чтобы изъ перестановки A получить перестановку A^2, нужно писать циклы перестановки A, постоянно пропуская одинъ элементъ: т. е. за первымъ элементомъ каждаго цикла нужно писать третій, за третьимъ — пятый и т. д. [15]).

---

[14]) Въ B за 1 слѣдуетъ 2, а въ A за 2 слѣдуетъ 3; поэтому въ BA за 1 слѣдуетъ 3; далѣе, въ B за 3 слѣдуетъ 1, а въ A за 1 слѣдуетъ 7; поэтому въ BA за 3 слѣдуетъ 7 и т. д.

[15]) Если намъ нужно найти, скажемъ, 2-ую степень перестановки A, выражающейся цикломъ

$$(1,\ 3,\ 4,\ 2,\ 5),$$

то это значитъ найти перестановку AA:

$$(1,\ 3,\ 4,\ 2,\ 5)\,(1,\ 3,\ 4,\ 2,\ 5).$$

Въ первомъ циклѣ за 1 слѣдуетъ 3, а во второмъ за 3 — 4; въ результатѣ за 1 слѣдуетъ 4. Въ первомъ циклѣ за 4 слѣдуетъ 2, а въ второмъ за 2 — 5; въ

Аналогично получается перестановка A^3, если въ циклахъ A пропускать два элемента, и т. д.

Такъ, для разсмотрѣнной выше перестановки A имѣемъ:

$$A^2 = (5, 3, 2)(4, 7)(1, 6),$$
$$A^3 = (5)(3)(2)(4, 6, 7, 1).$$

Мы видимъ, такимъ образомъ, что при возвышенiи перестановки въ степень циклъ ея можетъ разложиться на два цикла или болѣе. Если мы образуемъ перестановку A^{12}, то получимъ основную перестановку, т. е. въ нашемъ примѣрѣ $A^{12} = E$.

6. Если мы будемъ представлять перестановки въ видѣ цикловъ, опуская при этомъ одночленные циклы, то любой циклъ изъ g членовъ самъ по себѣ представитъ нѣкоторую опредѣленную перестановку. Напримѣръ, при $n = 7$

$$(5, 3, 2) = 1, 5, 2, 4, 3, 6, 7.$$

При такомъ условiи два или нѣсколько рядомъ написанныхъ цикла, не имѣющихъ ни одного общаго элемента, представляютъ результатъ составленiя перестановокъ, представленныхъ отдѣльными циклами [16]).

Если мы соединимъ циклъ $(1, 2, 3, \ldots, g-1)$ съ транспозицiей $(g, g-1)$, то получимъ:

$$(g, g-1)(1, 2, 3, \ldots, g-1) = (1, 2, 3, \ldots, g-1, g).$$

Отсюда слѣдуетъ, что циклъ, содержащiй g членовъ, можетъ быть разложенъ на $g-1$ транспозицiй:

$$(1, 2, 3, \ldots, g) = (g, g-1)(g-1, g-2) \ldots (2, 1).$$

Правую часть этого равенства нужно понимать, какъ перестановку, которая получится въ результатѣ составленiя перестановокъ, представленныхъ отдѣльными двучленными циклами.

Изъ сказаннаго заключаемъ, что всякiй циклъ представляетъ собою **четную** или **нечетную** перестановку, смотря по тому, содержитъ ли онъ нечетное или четное число членовъ.

результатѣ за 4 слѣдуетъ 5 и т. д. Такимъ образомъ получимъ:

$$(1, 3, 4, 2, 5)^2 = (1, 4, 5, 3, 2).$$

Вообще указанное въ текстѣ правило слѣдуетъ изъ того, что изложено въ пунктѣ 3; нужно только принять во вниманiе, что въ данномъ случаѣ $B = A$, такъ что $b_r = a_r$, и потому циклъ перестановки A^2 начнется такъ: $(r, a_{a_r}, \ldots)$.

[16]) Напримѣръ, перестановку $C = 1, 5, 2, 7, 3, 6, 4 = (5, 3, 2)(4, 7)$ можно разсматривать, какъ результатъ составленiя AB (или BA) двухъ перестановокъ $A = (5, 3, 2)$ и $B = (4, 7)$.

Поэтому данная перестановка представляетъ собою четную или нечетную въ зависимости отъ того, имѣется ли среди цикловъ, на которые разлагается данная перестановка, четное или нечетное число такихъ, которые содержатъ четное число членовъ [17]).

§ 56. Группы перестановокъ.

1. Въ § 54 мы вслѣдъ за составленіемъ перестановокъ разсмотрѣли, какой смыслъ имѣютъ степени A^2, A^3, ... какой-либо перестановки A. Такъ какъ изъ n элементовъ можно получить лишь конечное число перестановокъ, то въ ряду

$$A, A^2, A^3, A^4, \ldots$$

какая-нибудь перестановка раньше или позже должна повториться. Если перестановка, представленная степенью A^k, повторится вновь въ видѣ степени A^{k+a}, то изъ равенства

$$A^k = A^{k+a}$$

слѣдуетъ, что

$$A^a = E.$$

Итакъ, каждой перестановкѣ A соотвѣтствуетъ нѣкоторый опредѣленный наименьшій положительный показатель a, при которомъ A^a совпадаетъ съ главной перестановкой.

Этотъ наименьшій положительный показатель называется порядкомъ перестановки A. Рядъ

$$E, A, A^2, A^3, \ldots, A^{a-1}$$

содержитъ лишь отличныя другъ отъ друга перестановки; рядъ этотъ называется періодомъ перестановки A, такъ какъ изъ этого именно періода, повторяющагося безконечное число разъ, составляется рядъ послѣдовательныхъ степеней перестановки A. Если мы возвысимъ перестановку A въ степень, показатель которой есть число, кратное числа a, то всегда получимъ основную перестановку E.

2. Система $\mathfrak{G}$ перестановокъ, выбранныхъ изъ совокупности всѣхъ перестановокъ изъ n элементовъ,

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_g \qquad (\mathfrak{G}')$$

---

[17]) Въ самомъ дѣлѣ, согласно п. 12 § 54-го, отъ составленія четнаго числа нечетныхъ перестановокъ получается четная перестановка; отъ составленія же четныхъ перестановокъ всегда получается четная перестановка, такъ что въ результатѣ дѣло приводится къ составленію двухъ четныхъ перестановокъ, что даетъ четную перестановку. Аналогично этому разсматривается и второй случай.

называется группой, если она удовлетворяетъ слѣдующему условію:

Если A_h и A_k представляютъ собою двѣ различныя или одну и ту же перестановку изъ системы $\mathfrak{G}$, то составленная изъ нихъ перестановка

$$A_h A_k = A_l$$

также заключается въ числѣ перестановокъ системы $\mathfrak{G}$.

Порядкомъ g группы называется число перестановокъ, изъ которыхъ состоитъ система $\mathfrak{G}$.

Согласно этому опредѣленію, совокупность всѣхъ перестановокъ изъ n элементовъ составляетъ группу порядка $n!$

Однако, есть группы съ меньшимъ числомъ членовъ. Разысканіе и изслѣдованіе такихъ группъ составляетъ одну изъ фундаментальнѣйшихъ задачъ алгебры.

Такъ, напримѣръ, періодъ перестановки A есть группа порядка a. Дѣйствительно, какія бы степени перестановки A мы ни соединяли, въ результатѣ мы всегда получимъ нѣкоторую степень этой же перестановки.

Замѣтимъ еще, что совокупность всѣхъ четныхъ перестановокъ изъ n элементовъ составляетъ группу порядка $\frac{1}{2} n!$ [18]).

3. Если въ группѣ $\mathfrak{G}$ встрѣчается перестановка A (порядка a), то по опредѣленію группы послѣдняя содержитъ всѣ степени перестановки A съ положительными показателями, а, слѣдовательно, и степень $A^a = E$.

Итакъ, каждая группа заключаетъ въ себѣ главную перестановку E; эта послѣдняя сама по себѣ образуетъ группу порядка 1.

По опредѣленію степеней съ отрицательными показателями имѣемъ:

$$A^{-k} A^k = E.$$

Съ другой стороны, изъ равенства $A^a = E$ слѣдуетъ, что $A^{-k} = A^{a-k}$; отсюда заключаемъ: если группа содержитъ перестановку A, то она непремѣнно содержитъ и перестановку A^{-1}, т. е. перестановку, обратную перестановкѣ A.

4. Если какая-либо группа $\mathfrak{G}$ порядка g заключаетъ въ себѣ всѣ элементы нѣкоторой другой группы $\mathfrak{H}$ порядка h, то число h есть дѣлитель числа g.

---

[18]) Въ самомъ дѣлѣ, согласно п. 12 § 54-го, перестановка, составленная изъ двухъ четныхъ перестановокъ, также представляетъ собой четную перестановку. Если поэтому S есть совокупность всѣхъ четныхъ перестановокъ, а B и A двѣ принадлежащія ей перестановки, то въ ту же совокупность войдетъ и перестановка BA.

Это важное предложенiе доказывается слѣдующимъ образомъ.

Обозначимъ перестановки группы $\mathfrak{H}$ черезъ

$$B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_h. \qquad (1)$$

По условiю, всѣ эти перестановки заключаются въ группѣ $\mathfrak{G}$; если этими элементами группа $\mathfrak{G}$ не исчерпывается, то назовемъ черезъ A перестановку, входящую въ число элементовъ группы $\mathfrak{G}$, но не содержащуюся въ группѣ $\mathfrak{H}$. Соединяя перестановку A съ перестановками (1). получимъ рядъ перестановокъ

$$AB_1,\ AB_2,\ AB_h. \qquad (2)$$

Эти h перестановокъ всѣ входятъ въ составъ группы $\mathfrak{G}$ и, кромѣ того, всѣ онѣ отличны другъ отъ друга и отъ h перестановокъ (1). Въ самомъ дѣлѣ, если бы, напримѣръ, имѣло мѣсто равенство $AB_r = AB_s$, то, согласно п. 11 § 54-го, мы имѣли бы, что $B_r = B_s$, что невозможно; если бы было $AB_r = B_s$, то отсюда слѣдовало бы, что $A = B_sB_r^{-1}$, т. е. перестановка A заключалась бы въ группѣ $\mathfrak{H}$, что противорѣчитъ нашему условiю.

Въ силу этихъ соображенiй перестановки (1) и (2) составляютъ вмѣстѣ $2h$ перестановокъ группы $\mathfrak{G}$. Если ими еще не исчерпывается группа $\mathfrak{G}$, то, выбравъ изъ этой группы элементъ A', котораго нѣтъ въ числѣ перестановокъ (1) и (2), составимъ рядъ:

$$A'B_1,\ A'B_2,\ \ldots,\ A'B_h. \qquad (3)$$

Всѣ эти перестановки, во-первыхъ, содержатся въ группѣ $\mathfrak{G}$, а, во-вторыхъ, всѣ онѣ отличны другъ отъ друга и отъ перестановокъ (1) и (2). Дѣйствительно, если бы было $A'B_r = AB_s$, то отсюда слѣдовало бы, что $A' = AB_sB_r^{-1}$; а, въ силу того, что перестановка $B_sB_r^{-1}$ есть одна изъ перестановокъ (1), перестановка A', вопреки условiю, оказалась бы въ числѣ перестановокъ (2). Такимъ образомъ, системы (1), (2) и (3) представляютъ собою вмѣстѣ $3h$ перестановокъ группы $\mathfrak{G}$. Такъ какъ число перестановокъ группы $\mathfrak{G}$ конечно, то, продолжая то же разсужденiе, мы исчерпаемъ всѣ элементы этой группы. Если послѣднiй рядъ, который при этомъ получится, будетъ

$$A^{(k-2)}B_1,\ A^{(k-2)}B_2,\ \ldots,\ A^{(k-2)}B_h, \qquad (4)$$

то имѣемъ:

$$g = hk,$$

и, такимъ образомъ, предложенiе наше доказано.

Изъ этого предложенiя слѣдуетъ:

Число $n!$ дѣлится нацѣло на порядокъ любой группы перестановокъ и на порядокъ любой перестановки.

Для каждой перестановки A имѣетъ мѣсто равенство:

$$A^{n!} = E.$$

5. Нетрудно для любого числа n составить нѣкоторыя простыя группы невысокаго порядка,— напримѣръ, періоды отдѣльныхъ перестановокъ. Для алгебры гораздо большее значеніе имѣетъ полученіе группъ болѣе высокихъ порядковъ; мы, однако, еще очень далеки отъ полнаго рѣшенія этой въ высокой степени важной задачи. Сравнительно нетрудно проникнуть въ строеніе группъ для тѣхъ простѣйшихъ случаевъ, когда $n = 3$ и $n = 4$.

Для обозначенія перестановокъ мы будемъ обыкновенно выражать ихъ въ циклахъ, при чемъ для простоты будемъ обозначать главную перестановку E символомъ (1) въ виду того, что при составленіи перестановокъ она играетъ роль единицы.

Для $n = 3$ мы имѣемъ шесть перестановокъ:

$$(1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 3),\ (1,\ 2,\ 3),\ (1,\ 3,\ 2).$$

Здѣсь мы имѣемъ группу четныхъ перестановокъ (1), (1, 2, 3) и (1, 3, 2) порядка 3, которая въ то же время представляетъ собою періодъ перестановки (1, 2, 3) или перестановки (1, 3, 2); далѣе, здѣсь есть еще три группы второго порядка, именно, періоды перестановокъ (1, 2), (1, 3) и (2, 3). Другихъ группъ здѣсь нѣтъ.

6. При $n = 4$ мы имѣемъ 24 перестановки, которыя можно слѣдующимъ образомъ изобразить посредствомъ ихъ цикловъ:

(1) Главная перестановка.

(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4) двучленные циклы,

(1, 2) (3, 4), (1, 3) (2, 4), (1, 4) (2, 3) по два двучленныхъ цикла,

(2, 3, 4), (2, 4, 3), (1, 3, 4), (1, 4, 3)
(1, 2, 4), (1, 4, 2), (1, 2, 3), (1, 3, 2) трехчленные циклы,

(1, 2, 3, 4), (1, 2, 4, 3), (1, 3, 2, 4)
(1, 3, 4, 2), (1, 4, 2, 3), (1, 4, 3, 2) четырехчленные циклы.

Такимъ образомъ, исчерпаны всѣ 24 перестановки изъ 4 элементовъ.

Группа четныхъ перестановокъ содержитъ слѣдующія 12 перестановокъ:

$$\begin{gathered}(1),\ (1,\ 2)(3,\ 4),\ (1,\ 3)(2,\ 4),\ (1,\ 4)(2,\ 3),\\ (2,\ 3,\ 4),\ (2,\ 4,\ 3),\ (1,\ 3,\ 4),\ (1,\ 4,\ 3),\\ (1,\ 2,\ 4),\ (1,\ 4,\ 2),\ (1,\ 2,\ 3),\ (1,\ 3,\ 2).\end{gathered}$$

Въ ней содержится слѣдующая группа четвертаго порядка:

$$(1),\ (1,\ 2)(3,\ 4),\ (1,\ 3)(2,\ 4),\ (1,\ 4)(2,\ 3).$$

Послѣдняя группа имѣетъ особенно важное значеніе для рѣшенія уравненія четвертой степени; аналогичное значеніе имѣютъ три группы 8-го порядка, которыя входятъ въ составъ группы 24-го порядка, состоящей изъ всѣхъ перестановокъ. Одна изъ этихъ трехъ группъ 8-го порядка есть:

$$(1),\ (1,\ 2)(3,\ 4),\ (1,\ 3)(2,\ 4),\ (1,\ 4)(2,\ 3),$$
$$(1,\ 2),\ \ (3,\ 4),\ (1,\ 4,\ 2,\ 3),\ (1,\ 3,\ 2,\ 4).$$

Прочія двѣ группы получаются изъ этой, если замѣнимъ другъ другомъ элементы 1 и 3 и элементы 1 и 4.

7. При $n = 5$ имѣется 120 перестановокъ; въ этой совокупности перестановокъ содержится замѣчательная группа 20-го порядка, которую можно получить слѣдующимъ образомъ.

Мы будемъ обозначать любую изъ цифръ 1, 2, 3, 4, ... черезъ x; но при этомъ условимся, что тѣ элементы, которые обозначены цифрами, различающимися на число, кратное 5-ти, мы будемъ считать одинаковыми. Тогда мы будемъ имѣть только 5 различныхъ элементовъ

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5. \tag{1}$$

Пусть a и b означаютъ два цѣлыхъ числа, при чемъ a не дѣлится на 5; въ такомъ случаѣ выраженіе $ax + b$ воспроизводитъ тѣ же цифры (1), но только въ другомъ порядкѣ; такимъ образомъ, $ax + b$ есть аналитическое выраженіе нѣкоторой перестановки, а символъ

$$\begin{pmatrix} x \\ ax + b \end{pmatrix}$$

выраженіе субституціи. Такъ, напримѣръ, выраженіе $2x + 3$ даетъ перестановку

$$5,\ 2,\ 4,\ 1,\ 3.$$

Если мы составимъ двѣ такія перестановки, то получимъ:

$$\begin{pmatrix} x \\ ax + b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ a'x + b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ aa'x + ab' + b \end{pmatrix},$$

т. е. субституцію того же вида. Напримѣръ:

$$\begin{pmatrix} x \\ 2x + 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 2x + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 4x + 4 \end{pmatrix},$$

или полностью

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix},$$

или въ циклахъ:

$$(1,\ 5,\ 3,\ 4)\,(1,\ 5,\ 3,\ 4) = (1,\ 3)\,(4,\ 5).$$

Такъ какъ число a можетъ принимать каждое изъ четырехъ значеній 1, 2, 3, 4 [19]), а число b — каждое изъ пяти значеній 0, 1, 2, 3, 4, то мы можемъ получить 20 различныхъ перестановокъ, обладающихъ указаннымъ свойствомъ и потому образующихъ группу. Эта группа состоитъ изъ слѣдующихъ перестановокъ, которыя мы представимъ въ видѣ цикловъ:

$$
\begin{aligned}
&(1),\ (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5),\ (1,\ 3,\ 5,\ 2,\ 4),\ (1,\ 4,\ 2,\ 5,\ 3),\ (1,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2),\\
&\quad (1,\ 2,\ 4,\ 3),\quad (1,\ 3,\ 4,\ 2),\quad (1,\ 5)\,(2,\ 3),\\
&\quad (1,\ 3,\ 2,\ 5),\quad (1,\ 5,\ 2,\ 3),\quad (1,\ 2)\,(3,\ 5),\\
&\quad (1,\ 4,\ 5,\ 2),\quad (1,\ 2,\ 5,\ 4),\quad (1,\ 5)\,(4,\ 2),\\
&\quad (1,\ 5,\ 3,\ 4),\quad (1,\ 4,\ 3,\ 5),\quad (1,\ 3)\,(4,\ 5),\\
&\quad (2,\ 3,\ 5,\ 4),\quad (2,\ 4,\ 5,\ 3),\quad (2,\ 5)\,(3,\ 4).
\end{aligned}
$$

§ 57. Сочетанія безъ повтореній.

1. Данъ комплексъ N изъ n элементовъ. Сколькими различными способами можно отобрать m элементовъ этого комплекса? Другими словами, сколько различныхъ комплексовъ M, содержащихъ по m элементовъ каждый, можно получить изъ нѣкотораго комплекса N, содержащаго всего n элементовъ.

Комплексы M называются **сочетаніями** элементовъ комплекса N по m; чтобы указать на то, что одинъ и тотъ же элементъ комплекса N не можетъ дважды встрѣчаться въ одномъ и томъ же комплексѣ M, комплексы M называютъ также **сочетаніями безъ повтореній**.

Опредѣлимъ число сочетаній безъ повтореній изъ n элементовъ по m въ каждомъ. Обозначимъ это число символомъ $B_m^{(n)}$. Вопросъ, который мы поставили, имѣетъ смыслъ лишь въ томъ случаѣ, когда число m не превышаетъ n. Если $n = m$, то можно получить только одинъ комплексъ M, который окажется тождественнымъ съ комплексомъ N; слѣдовательно,

$$B_n^{(n)} = 1. \qquad (1)$$

[19]) Если коэффиціенту a придать два значенія, отличающіяся на число, кратное 5-ти,—напримѣръ 1 и 6,—то мы получимъ ту же перестановку.

Легко также рѣшить нашу задачу и въ томъ случаѣ, когда $m = 1$. Дѣйствительно, тогда искомыя сочетанія сведутся къ элементамъ комплекса N, взятымъ порознь, а потому

$$B_1^{(n)} = n. \tag{2}$$

Предположимъ далѣе, что $n = 3$; изъ элементовъ a, b и c мы получимъ слѣдующія сочетанія:

$$\begin{array}{lllll} m = 1: & a, & b, & c; & B_1^{(3)} = 3, \\ m = 2: & bc, & ca, & ab; & B_2^{(3)} = 3, \\ m = 3: & & abc; & & B_3^{(3)} = 1. \end{array}$$

Подобнымъ образомъ нетрудно найти непосредственно числа $B_m^{(n)}$ для ближайшихъ случаевъ, т. е. когда $n = 4, 5, 6$. Займемся теперь рѣшеніемъ нашей задачи въ общемъ видѣ.

Составимъ всѣ перестановки комплекса N и отберемъ отъ каждой перестановки m первыхъ ея элементовъ [20]); тогда мы получимъ всѣ безъ исключенія комплексы M, но каждый изъ нихъ при этомъ встрѣчается не одинъ разъ, а нѣсколько разъ. Разсмотримъ, сколько разъ получается при этомъ способѣ одинъ и тотъ же комплексъ M. Обозначимъ одну изъ перестановокъ комплекса N черезъ

$$A = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m \mid a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n,$$

при чемъ черта указываетъ на то, что перестановка A раздѣлена на двѣ части A_1 и A_2:

$$A_1 = a_1, a_2, \ldots, a_m, \quad A_2 = a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n.$$

Образуемъ всѣ перестановки A и отдѣлимъ отъ каждой группу элементовъ A_1; эти группы представятъ собою искомые комплексы M.

При этомъ мы будемъ получать отличные другъ отъ друга комплексы M всякій разъ, когда для полученія перестановки A нѣкоторые элементы комплекса A_1 замѣняются элементами комплекса A_2. Изъ тѣхъ же перестановокъ A, которыя образованы перемѣщеніями элементовъ одного и того же комплекса A_1 или A_2, мы будемъ получать одинъ и тотъ же комплексъ M. Поэтому каждый комплексъ M повторится столько разъ, сколькими способами можно скомбинировать какую-либо перестановку элементовъ A_1 съ нѣкоторой перестановкой элементовъ A_2, т. е. всего $m!\,(n-m)!$ разъ. Такъ какъ число перестановокъ A равно $n!$, а число комплексовъ M равно $B_m^{(n)}$, то имѣемъ:

$$m!\,(n-m)!\,B_m^{(n)} = n!$$

[20]) Въ томъ же порядкѣ, въ которомъ они расположены въ перестановкѣ.

Слѣдовательно,

$$B_m^{(n)} = \frac{n!}{m!(n-m)!}\ ^{*)}. \tag{3}$$

Пользуясь формулой (3) § 52-го, это выраженіе можно представить еще въ двухъ слѣдующихъ видахъ:

$$\begin{aligned} B_m^{(n)} &= \frac{n(n-1)\ldots(m+1)}{1.2.3\ldots(n-m)} = \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1.2.3\ldots m}. \end{aligned} \tag{4}$$

Хотя числа $B_m^{(n)}$ представлены нами въ видѣ дробей, но по самому своему значенію это числа цѣлыя, т. е. въ дробяхъ (3) и (4) числитель дѣлится на знаменателя. Поэтому, принимая во вниманіе вторую дробь въ формулѣ (4), мы можемъ высказать слѣдующее предложеніе:

Произведеніе m любыхъ послѣдовательныхъ чиселъ натуральнаго ряда дѣлится нацѣло на первыя m чиселъ этого ряда.

Формула (3) показываетъ, что число $B_m^{(n)}$ остается безъ перемѣны, если замѣнить число m числомъ $n-m$, т. е.

$$B_m^{(n)} = B_{n-m}^{(n)}. \tag{5}$$

При выводѣ формулъ (3) и (5) мы молчаливо предполагали, что $m < n$. Если желаемъ, чтобы эти формулы были справедливы и для случая $n = m$, то нужно принять, какъ опредѣленія, слѣдующія равенства:

$$0! = 1, \quad B_0^{(n)} = 1. \tag{6}$$

При такомъ условіи формула (3) справедлива также при $m = 0$.

2. Мы теперь покажемъ другой способъ нахожденія чиселъ $B_m^{(n)}$; при этомъ мы будемъ имѣть случай познакомиться съ нѣкоторыми новыми свойствами этихъ чиселъ.

Присоединимъ къ элементамъ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ комплекса N еще одинъ элементъ a_{n+1}; тогда получимъ новый комплексъ N', состоящій изъ $n+1$ элементовъ:

$$N' = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}.$$

---

*) Числа $B_m^{(n)}$ изображаются еще знакомъ $\binom{n}{m}$, въ словахъ: „n по m", или знакомъ n_m. Символъ $B_m^{(n)}$ напоминаетъ названіе „биноміальный коэффиціентъ" которое также присваивается числамъ $B_m^{(n)}$. Но объ этомъ рѣчь впереди.

Сочетанія M' этихъ элементовъ по m въ каждомъ можно получить слѣдующимъ образомъ: выписываемъ сперва всѣ сочетанія M комплекса N и затѣмъ присоединяемъ къ нимъ тѣ сочетанія, которыя получатся, если къ каждому сочетанію комплекса N по $m-1$ элементовъ присоединимъ новый элементъ a_{n+1}. Въ силу этихъ соображеній мы получаемъ рекуррентную формулу:

$$B_m^{(n+1)} = B_m^{(n)} + B_{m-1}^{(n)} \text{ *)}. \tag{7}$$

Пользуясь этой формулой, а также формулами $B_0^{(n)} = 1$ и $B_n^{(n)} = 1$. мы можемъ опредѣлить числа $B_m^{(n+1)}$ для любого $m \leqq n+1$, если только найдены числа $B_m^{(n)}$ для всякаго $m \leqq n$. Такимъ образомъ, всѣ числа $B_m^{(n)}$ однозначно опредѣляются равенствомъ (7) и двумя частными случаями:

$$B_0^{(n)} = 1, \quad B_n^{(n)} = 1. \tag{8}$$

Такъ какъ выраженіе (3), какъ въ томъ легко убѣдиться подстановкой, удовлетворяетъ условіямъ (7) и (8), то этимъ снова подтверждается правильность формулы (3).

Равенство (7) даетъ намъ еще непосредственное доказательство того, что $B_m^{(n)}$ суть цѣлыя числа: для наименьшихъ значеній числа n мы убѣдимся въ этомъ непосредственнымъ вычисленіемъ, а затѣмъ, пользуясь формулой (7), мы докажемъ справедливость нашего предложенія при любомъ значеніи n по способу совершенной индукціи.

Формула (7) сравнительно съ общей формулой (3) болѣе удобна для послѣдовательнаго нахожденія чиселъ $B_m^{(n)}$: числа ряда $B_m^{(n+1)}$ получатся изъ чиселъ ряда $B_m^{(n)}$, если складывать каждыя два послѣдовательныхъ числа этого ряда. Такъ, напримѣръ, для $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ имѣемъ:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}$$

---

*) Эта формула получаетъ смыслъ и при $m = 0$ и даже при любомъ отрицательномъ m, если только условиться при отрицательномъ m считать число $B_m^{(n)}$ равнымъ нулю. Точно такъ же, если примемъ $B_m^{(n)} = 0$ при $m > n$, то наша формула будетъ справедлива при любой парѣ цѣлыхъ значеній чиселъ m и n.

3. Найденные результаты мы примѣнимъ къ рѣшенію слѣдующей геометрической задачи:

Дана система N изъ n точекъ и число m, меньшее числа n; сколько m-сторонниковъ можно построить на данныхъ n точкахъ, какъ на вершинахъ?

По § 52 каждая система M, состоящая изъ m точекъ нашего комплекса, дастъ $\frac{1}{2}(m-1)!$ различныхъ m-сторонниковъ; а такъ какъ системъ M имѣется всего $B_m^{(n)}$, то число всѣхъ m-сторонниковъ, которые можно получить изъ системы точекъ N, выразится такъ:

$$\frac{1}{2}(m-1)!\,B_m^{(n)} = \frac{1}{2}\,\frac{n!(m-1)!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1)\,\ldots\,(n-m+1)}{2m}.$$

§ 58. Сочетанія съ повтореніями.

Поставимъ теперь шире вопросъ, которымъ мы занимались въ предыдущемъ параграфѣ.

1. Данъ комплексъ N, содержащій n элементовъ:

$$N = a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n;$$

изъ этихъ элементовъ составлены комплексы M по m элементовъ въ каждомъ, при чемъ одинъ и тотъ же элементъ можетъ встрѣчаться нѣсколько разъ въ одномъ и томъ же комплексѣ M.

Эти комплексы M называются сочетаніями съ повтореніями изъ n элементовъ по m въ каждомъ. — Требуется опредѣлить число этихъ сочетаній, которое обозначимъ черезъ $C_m^{(n)}$.

Замѣтимъ, что здѣсь намъ нѣтъ надобности ограничивать себя условіемъ, что $m < n$; m и n суть любыя цѣлыя положительныя числа.

Если $m = 1$, то намъ для составленія комплекса M придется брать каждый элементъ комплекса N порознь; слѣдовательно,

$$C_1^{(n)} = n. \qquad (1)$$

Если же $n = 1$, то всего получимъ только одинъ комплексъ M, какъ результатъ m-кратнаго повторенія единственнаго элемента даннаго комплекса N, т. е.

$$C_m^{(1)} = 1. \qquad (2)$$

Пусть, далѣе, комплексъ N содержитъ два элемента a и b, т. е. $n = 2$, а m есть произвольное число; условимся для краткости изображать

k-кратное повторенiе одного и того же элемента въ видѣ степени a^k; мы получимъ тогда слѣдующiя сочетанiя:

$$a^m,\ a^{m-1}b,\ a^{m-2}b^2,\ \ldots,\ ab^{m-1},\ b^m,$$

т. е.

$$C_m^{(2)} = m + 1. \tag{3}$$

Непосредственное опредѣленiе числа $C_m^{(n)}$, аналогичное изложенному въ п. 1 § 57-го, сопряжено здѣсь съ большими трудностями; мы легче достигнемъ цѣли, пользуясь рекуррентнымъ методомъ, къ которому мы прибѣгли въ п. 2 § 57-го.

2. Присоединимъ къ группѣ N еще одинъ элементъ a_{n+1}, т. е. составимъ изъ комплекса N новый комплексъ N', содержащiй $n+1$ элементовъ:

$$N' = a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ a_{n+1}.$$

Чтобы составить сочетанiя M' этихъ элементовъ по m въ каждомъ, выписываемъ сначала всѣ комплексы M, число которыхъ равно $C_m^{(n)}$; этимъ самымъ будутъ исчерпаны всѣ тѣ комплексы M', которые не содержатъ элемента a_{n+1}. Чтобы опредѣлить число прочихъ коплексовъ M, содержащихъ одинъ или нѣсколько разъ элементъ a_{n+1}, отнимаемъ отъ каждаго такого комплекса элементъ a_{n+1}; тогда останутся сочетанiя съ повторенiями изъ $n+1$ элементовъ по $m-1$ въ каждомъ и только таковыя; число ихъ равно $C_{m-1}^{(n+1)}$. Такимъ образомъ, получаемъ соотношенiе:

$$C_m^{(n+1)} = C_{m-1}^{(n+1)} + C_m^{(n)}. \tag{4}$$

Замѣняя въ формулѣ (4) число m соотвѣтственно числами $m-1$, $m-2, \ldots, 2$, получимъ равенства:

$$\begin{aligned}
C_m^{(n+1)} &= C_{m-1}^{(n+1)} + C_m^{(n)},\\
C_{m-1}^{(n+1)} &= C_{m-2}^{(n+1)} + C_{m-1}^{(n)},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
C_2^{(n+1)} &= C_1^{(n+1)} + C_2^{(n)}.
\end{aligned}$$

Сложивъ почленно эти равенства и сокративъ обѣ части суммы на числа $C_{m-1}^{(n+1)}, \ldots, C_2^{(n+1)}$, получимъ:

$$C_m^{(n+1)} = C_1^{(n+1)} + C_2^{(n)} + C_3^{(n)} + \cdots + C_m^{(n)}. \tag{5}$$

Такъ какъ $C_1^{(n+1)} = n + 1$ и $C_1^{(n)} = n$ [см. формулу (1)], то формулу (5) можно представить въ такомъ видѣ:

$$C_m^{(n+1)} = 1 + C_1^{(n)} + C_2^{(n)} + C_3^{(n)} + \cdots + C_m^{(n)}. \tag{6}$$

Слѣдовательно, зная для одного числа n всѣ числа $C_m^{(n)}$, можно опредѣлить помощью формулы (6) всѣ числа $C_m^{(n+1)}$. По формулѣ (2) всѣ числа $C_m^{(1)}$ равны единицѣ; такимъ образомъ, числа $C_m^{(n)}$ опредѣляются однозначно формулами (1), (2) и (4).

Легко убѣдиться, что тѣмъ же соотношеніямъ (1), (2) и (4) удовлетворяютъ и числа $B_m^{(m+n-1)}$, т. е. что можно положить

$$C_m^{(n)} = B_m^{(m+n-1)}. \tag{7}$$

Дѣйствительно, сдѣлавъ соотвѣтственныя подстановки въ формулахъ (1), (2) и (4), получимъ:

$$B_1^{(n)} = n, \quad B_m^{(m)} = 1, \quad B_m^{(m+n)} = B_{m-1}^{(m+n-1)} + B_m^{(m+n-1)}$$ [21]),

каковыя соотношенія дѣйствительно имѣютъ мѣсто, какъ это слѣдуетъ изъ формулъ (1), (2) и (7) § 57-го.

Поэтому, по формулѣ (3) § 57-го имѣемъ:

$$C_m^{(n)} = \frac{(m+n-1)!}{m!\,(n-1)!}, \tag{8}$$

или же

$$\begin{aligned} C_m^{(n)} &= \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots(n-1)} = \\ &= \frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{1.2\ldots m}. \end{aligned} \tag{9}$$

---

[21]) Изъ этихъ соотношеній можно сдѣлать слѣдующій выводъ: если мы будемъ подъ $C_m^{(n)}$ разумѣть число $B_m^{(m+n-1)}$, то соотношенія (1), (2) и (4) будутъ удовлетворены; а такъ какъ этими соотношеніями числа $C_m^{(n)}$ опредѣляются однозначно, то отсюда вытекаетъ равенство (7).

ГЛАВА X.

Различныя приложенія.

§ 59. Опредѣлители.

1. Подраздѣленіе перестановокъ на четныя и нечетныя, приведенное въ § 53, составляетъ основу общей теоріи опредѣлителей, которая даетъ общій методъ для рѣшенія системы n уравненій первой степени съ n неизвѣстными $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Такая система содержитъ n^2 коэффиціентовъ; столь же велико число соединеній изъ n цифръ $1, 2, 3, \ldots, n$ по два съ повтореніями, если принимать во вниманіе и порядокъ цифръ. Поэтому коэффиціенты удобнѣе всего обозначать символами вида $a_{i,k}$; всѣ индексы i и k независимо одинъ отъ другого принимаютъ всевозможныя значенія $1, 2, 3, \ldots, n$.

Такимъ образомъ, систему n линейныхъ уравненій можно выразить слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n &= y_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n &= y_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n &= y_1. \end{aligned} \tag{1}$$

2. Мы будемъ предварительно разсматривать систему коэффиціентовъ независимо отъ уравненій (1) и для наглядности напишемъ ее въ видѣ квадрата

$$\left| \begin{matrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \ldots, & a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \ldots, & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & \ldots, & a_{n,n} \end{matrix} \right| . \tag{2}$$

Здѣсь первый индексъ коэффиціента $a_{i,k}$ обозначаетъ горизонталь или строку, въ которой этотъ коэффиціентъ стоитъ, а второй индексъ обозначаетъ соотвѣтствующую вертикаль или колонну.

Изъ этой таблицы коэффиціентовъ мы образуемъ опредѣленную численную величину или функцію коэффиціентовъ $a_{i,k}$, которую мы назовемъ опредѣлителемъ и составимъ по слѣдующему правилу. Составимъ прежде всего произведеніе чиселъ $a_{i,k}$, расположенныхъ въ квадратной таблицѣ по діагонали, — иначе говоря, всѣхъ тѣхъ коэффиціентовъ $a_{i,k}$, въ которыхъ оба индекса имѣютъ одинаковыя значенія:

$$M = a_{1,1}a_{2,2} \dots a_{n,n}.$$

Это произведеніе мы назовемъ главнымъ членомъ опредѣлителя. Затѣмъ въ выраженіи M произведемъ всѣ перестановки $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ вторыхъ индексовъ и каждому полученному такимъ образомъ произведенію

$$M_\alpha = a_{1,\alpha_1}a_{2,\alpha_2} \dots a_{n,\alpha_n} \tag{3}$$

сообщаемъ знакъ $+$ или $-$, смотря по тому, есть ли соотвѣтствующая перестановка α четнаго или нечетнаго порядка. Мы получаемъ такимъ образомъ $n!$ членовъ, сумма которыхъ

$$A = \sum \pm M_\alpha \tag{4}$$

и называется опредѣлителемъ системы (1); самый квадратъ (2), заключенный между двумя вертикальными чертами, служитъ также для обозначенія опредѣлителя; короче пишутъ также:

$$A = \sum \pm a_{1,1}a_{2,2} \dots a_{n,n}. \tag{5}$$

Если, напримѣръ, положимъ $n = 3$, то, согласно § 53, получимъ:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3} \\ a_{3,1}, & a_{3,2}, & a_{3,3} \end{vmatrix} = \begin{aligned} & a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} \\ + & a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} \\ + & a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}. \end{aligned}$$

Это вполнѣ совпадаетъ съ выраженіемъ, приведеннымъ въ § 44, (8), если примемъ во вниманіе нѣкоторое различіе въ обозначеніяхъ.

Каждый изъ членовъ M_α, изъ которыхъ состоитъ опредѣлитель A, представляетъ собой произведеніе n множителей; въ каждомъ членѣ какъ первый индексъ, такъ и второй получаютъ по одному разу каждое изъ значеній 1, 2, 3, . . ., n. Иными словами, въ составъ каждаго члена всегда входитъ одинъ элементъ изъ каждой горизонтали и одинъ элементъ изъ каждой вертикали.

3. Если мы въ одномъ изъ произведенiй M_a переставимъ множителей, то значенiе этого произведенiя не измѣнится; поэтому множителей можно также расположить такимъ образомъ, чтобы вторые индексы 1, 2, 3, . . ., n были расположены въ натуральной послѣдовательности. Тогда первые индексы образуютъ перестановку β, обратную перестановкѣ a [1]). Такъ какъ a и β суть перестановки одного и того же класса [2]), то мы можемъ составить опредѣлитель и такимъ образомъ, что мы всѣми возможными способами переставимъ первые индексы, а затѣмъ при каждомъ членѣ поставимъ знакъ $+$ или $-$, руководствуясь тѣмъ же правиломъ п. 2-го, которое мы примѣняли къ перестановкамъ первыхъ индексовъ. Это мы можемъ выразить слѣдующимъ образомъ:

Опредѣлитель не мѣняется, если мы въ немъ замѣнимъ вертикали горизонталями и обратно.

4. Если мы въ перестановкахъ a замѣнимъ другъ другомъ какiе-либо два индекса, то четныя перестановки перейдутъ въ нечетныя и обратно. Поэтому каждый членъ M_a переходитъ въ другой, который фигурируетъ въ выраженiи A, но съ противоположнымъ знакомъ.

Но такой перестановкѣ двухъ индексовъ отвѣчаетъ перестановка двухъ вертикалей въ таблицѣ (2); такъ какъ, согласно п. 3, то же справедливо и относительно горизонталей, то мы получаемъ теорему:

Опредѣлитель мѣняетъ знакъ, если мы въ немъ замѣстимъ другъ другомъ двѣ вертикали или двѣ горизонтали.

5. Если соотвѣтствующiе элементы двухъ рядовъ, о перестановкѣ которыхъ идетъ рѣчь въ п. 4, имѣютъ одинаковыя численныя значенiя, то отъ перестановки этихъ двухъ рядовъ опредѣлитель вовсе не мѣняется. Между тѣмъ, согласно предыдущей теоремѣ, опредѣлитель долженъ при этомъ перемѣнить знакъ. Такимъ образомъ доказано предложенiе:

Если въ опредѣлителѣ соотвѣтствующiе члены двухъ вертикалей или двухъ горизонталей равны, то опредѣлитель равенъ нулю.

---

[1]) См. § 54, 8. Въ произведенiи M_a вторые индексы образуютъ нѣкоторую перестановку a. Чтобы перейти отъ перестановки a къ натуральной послѣдовательности, нужно сдѣлать субституцiю, обратную той, которая приводитъ отъ натуральной послѣдовательности къ перестановкѣ a. Эту именно субституцiю мы произведемъ надъ первыми индексами, когда будемъ размѣщать множителей такъ, чтобы вторые индексы образовали натуральную послѣдовательность. Вотъ почему послѣ этого первые индексы составятъ перестановку β, обратную перестановкѣ a.

[2]) Если мы отъ натуральной послѣдовательности къ перестановкѣ a приходимъ четнымъ числомъ транспозицiй, то мы и къ перестановкѣ β перейдемъ четнымъ числомъ транспозицiй, такъ какъ для этого достаточно произвести тѣ же транспозицiи, но только въ обратномъ порядкѣ.

6. Повторнымъ примѣненіемъ теоремы 4 докажемъ:

Если мы въ опредѣлителѣ A какимъ-либо образомъ переставимъ его вертикали или его горизонтали, то абсолютная величина опредѣлителя не измѣнится; что касается знака, то онъ сохранится, если произведена четная перестановка; при нечетной же перестановкѣ знакъ мѣняется на обратный.

Формулой это можно выразить слѣдующимъ образомъ: если $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ есть перестановка индексовъ $1, 2, 3, \ldots, n$, то

$$\Sigma \pm a_{1,\alpha_1} a_{2,\alpha_2} \ldots a_{n,\alpha_n} = \pm A, \tag{6}$$

гдѣ въ правой части нужно взять знакъ $+$, если α есть четная перестановка, и знакъ $-$, если это перестановка нечетная.

7. Отсюда легко вывести теорему умноженія опредѣлителей; эта теорема содержитъ въ себѣ правило, согласно которому произведеніе двухъ опредѣлителей одного и того же порядка можетъ быть представлено въ видѣ опредѣлителя того же порядка.

Чтобы вывести эту формулу, мы на время воспользуемся нѣсколько болѣе точнымъ обозначеніемъ.

Положимъ, что ν пробѣгаетъ всѣ перестановки $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$; пусть $(-1)^\nu$ будетъ равно $+1$ или -1, смотря по тому, будетъ ли соотвѣтствующая перестановка четной или нечетной. Тогда мы можемъ представить выраженіе A, согласно опредѣленіямъ (4) или (5), въ видѣ:

$$A = \overset{\nu}{\Sigma}(-1)^\nu a_{\nu_1,1} a_{\nu_2,2} \ldots a_{\nu_n,n}. \tag{7}$$

Если α есть произвольная перестановка вторыхъ индексовъ, то, согласно соотношенію (6),

$$(-1)^\alpha A = \overset{\nu}{\Sigma}(-1)^\nu a_{\nu_1,\alpha_1} a_{\nu_2,\alpha_2} \ldots a_{\nu_n,\alpha_n}. \tag{8}$$

Пусть теперь $b_{i,k}$ будетъ другая система величинъ, подобная системѣ $a_{i,k}$; пусть

$$B = \overset{\alpha}{\Sigma}(-1)^\alpha b_{1,\alpha_1} b_{2,\alpha_2} \ldots b_{n,\alpha_n} \tag{9}$$

будетъ составленный изъ нихъ опредѣлитель.

Если мы помножимъ равенство (8) на $b_{1,\alpha_1} b_{2,\alpha_2} \ldots b_{n,\alpha_n}$ и возьмемъ сумму полученныхъ выраженій, соотвѣтствующихъ всѣмъ возможнымъ перестановкамъ α, то мы получимъ:

$$AB = \overset{\alpha}{\Sigma} b_{1,\alpha_1} b_{2,\alpha_2} \ldots b_{n,\alpha_n} \overset{\nu}{\Sigma}(-1)^\nu a_{\nu_1,\alpha_1} a_{\nu_2,\alpha_2} \ldots a_{\nu_n,\alpha_n}. \tag{10}$$

Здѣсь нужно произвести суммованіе сначала по ν, сохраняя одну и ту же перестановку α, а затѣмъ нужно произвести суммовеніе по α, распространяя его на всѣ возможныя перестановки вторыхъ индексовъ. Такъ какъ α есть перестановка вторыхъ индексовъ, то въ каждомъ членѣ индексы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ имѣютъ всѣ различныя значенія. Съ другой стороны, согласно п. 5, сумма, взятая по ν, была бы равна 0, если бы два индекса α были равны между собой; напримѣръ:

$$\overset{\nu}{\Sigma}(-1)^\nu a_{\nu_1,\alpha_2} a_{\nu_2,\alpha_2} \ldots a_{\nu_n,\alpha_n} = 0.$$

Вслѣдствіе этого соотношеніе (10) останется въ силѣ, если при суммованіи по α будемъ давать двумъ или нѣсколькимъ индексамъ одно и то же значеніе. Мы можемъ поэтому сказать, что въ выраженіи (10) индексы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ независимо одинъ отъ другого пробѣгаютъ всѣ значенія 1, 2, ..., n. Вмѣстѣ съ тѣмъ самое соотношеніе (10) мы можемъ написать въ такомъ видѣ:

$$AB = \overset{\nu}{\Sigma}(-1)^\nu \overset{\alpha_1}{\Sigma} b_{1,\alpha_1} a_{\nu_1,\alpha_1} \overset{\alpha_2}{\Sigma} b_{2,\alpha_2} a_{\nu_2,\alpha_2} \ldots \overset{\alpha_n}{\Sigma} b_{n,\alpha_n} a_{\nu_n,\alpha_n}. \tag{11}$$

Съ другой стороны, если мы введемъ обозначенія:

$$c_{i,k} = b_{i,1} a_{k,1} + b_{i,2} a_{k,2} + \cdots + b_{i,n} a_{k,n}, \tag{12}$$

то правая часть равенства (11) приметъ видъ:

$$\Sigma(-1)^\nu c_{1,\nu_1} c_{2,\nu_2} \ldots c_{n,\nu_n};$$

въ прежнихъ обозначеніяхъ это есть не что иное, какъ опредѣлитель

$$C = \Sigma \pm c_{11} c_{22} \ldots c_{nn},$$

и мы получаемъ такимъ образомъ формулу

$$AB = C, \tag{13}$$

или подробнѣе:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \ldots, & a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \ldots, & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{1,1}, & b_{1,2}, & \ldots, & b_{1,n} \\ b_{2,1}, & b_{2,2}, & \ldots, & b_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n,1}, & b_{n,2}, & \ldots, & b_{n,n} \end{vmatrix} = \tag{14}$$

$$= \begin{vmatrix} \overset{i}{\Sigma} a_{1,i} b_{1,i}, & \overset{i}{\Sigma} a_{1,i} b_{2,i}, & \ldots, & \overset{i}{\Sigma} a_{1,i} b_{n,i} \\ \overset{i}{\Sigma} a_{2,i} b_{1,i}, & \overset{i}{\Sigma} a_{2,i} b_{2,i}, & \ldots, & \overset{i}{\Sigma} a_{2,i} b_{n,i} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \overset{i}{\Sigma} a_{n,i} b_{1,i}, & \overset{i}{\Sigma} a_{n,i} b_{2,i}, & \ldots, & \overset{i}{\Sigma} a_{n,i} b_{n,i} \end{vmatrix}.$$

Здѣсь литера i, по которой производится суммованіе, пробѣгаетъ въ каждой суммѣ черезъ всѣ значенія отъ 1 до n.

Въ словахъ это правило можетъ быть выражено слѣдующимъ образомъ:

Чтобы составить произведеніе двухъ опредѣлителей, состоящихъ каждый изъ n горизонталей, перемножаемъ элементы i-ой горизонтали на соотвѣтствующіе элементы k-ой горизонтали и составляемъ сумму полученныхъ произведеній. Этимъ путемъ мы получимъ элементъ $c_{i,k}$ новаго опредѣлителя.

Такъ какъ въ каждомъ опредѣлителѣ горизонтали могутъ быть сдѣланы вертикалями, то такое произведеніе можно составить четырьмя различными способами.

8. Чтобы выдѣлить тѣ члены развернутаго опредѣлителя

$$A = \Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} \ldots a_{n,n},$$

которые содержатъ элементъ $a_{1,1}$, достаточно оставить на своемъ мѣстѣ второй индексъ 1 и переставить всѣми возможными способами остальные индексы 2, 3, ..., n; совокупность всѣхъ этихъ членовъ можетъ быть, слѣдовательно, представлена въ видѣ $a_{1,1} A_{1,1}$, гдѣ $A_{1,1}$ есть опредѣлитель, составленный изъ $n-1$ горизонталей:

$$A_{1,1} = \Sigma \pm a_{2,2} a_{3,3} \ldots a_{n,n}. \tag{15}$$

Этотъ опредѣлитель можно получить изъ даннаго опредѣлителя, написаннаго въ формѣ квадрата, если зачеркнуть въ немъ горизонталь и вертикаль, скрещивающіяся на элементѣ $a_{1,1}$.

9. Съ другой стороны, при помощи $i-1$ транспозицій можно привести i-тую строку на первое мѣсто; точно такъ же при помощи $k-1$ транспозицій можно k-тую вертикаль сдѣлать первой. При этомъ опредѣлитель пріобрѣтаетъ множителя $(-1)^{i+k}$, а элементъ $a_{i,k}$ оказывается на мѣстѣ, которое занималъ элементъ $a_{1,1}$. Теперь мы можемъ составить совокупность членовъ, содержащихъ элементъ $a_{i,k}$ по формулѣ (15). Вмѣстѣ съ тѣмъ мы получаемъ:

Если мы положимъ совокупность всѣхъ членовъ, содержащихъ элементъ $a_{i,k}$, равной $a_{i,k}A_{i,k}$, то $A_{i,k}$ есть опредѣлитель, составленный изъ $n-1$ горизонталей, который можно получить изъ даннаго опредѣлителя A, вычеркивая въ немъ горизонталь и вертикаль, скрещивающіяся на элементѣ $a_{i,k}$, и умножая полученный опредѣлитель на $(-1)^{i+k}$.

Эти величины $A_{i,k}$ называются минорами опредѣлителя A. Въ выраженіи минора $A_{i,k}$ въ качествѣ перваго индекса не фигурируетъ i, а въ качествѣ второго индекса не фигурируетъ k.

Миноры опредѣлителя изъ 9 элементовъ приведены въ § 44, (3).

10. Если мы составляемъ опредѣлитель A изъ главнаго члена $a_{1,1}a_{2,2}\ldots a_{n,n}$, переставляя первые индексы, то мы видимъ, что въ каждомъ членѣ его фигурируетъ одинъ и только одинъ изъ множителей

$$a_{1,1},\ a_{2,1},\ a_{3,1},\ \ldots,\ a_{n,1}.$$

Сообразно этому, опредѣлитель A можетъ быть представленъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$A = a_{1,1}A_{1,1} + a_{2,1}A_{2,1} + \cdots + a_{n,1}A_{n,1}.$$

Это тождество называется разложеніемъ опредѣлителя по элементамъ первой вертикали. Точно такъ же мы можемъ разложить опредѣлитель по элементамъ любой другой вертикали; вообще, полагая k равнымъ любому изъ чиселъ 1, 2, 3, ..., n, мы можемъ написать опредѣлитель A въ формѣ:

$$A = a_{1,k}A_{1,k} + a_{2,k}A_{2,k} + \cdots + a_{n,k}A_{n,k}. \qquad (16)$$

11. Въ минорахъ $A_{1,k}$, $A_{2,k}$, ..., $A_{n,k}$ элементы k-ой вертикали не фигурируютъ. Съ другой стороны, если мы замѣнимъ элементы $a_{1,k}, a_{2,k}, \ldots, a_{n,k}$ элементами любой другой вертикали $a_{1,i}, a_{2,i}, \ldots, a_{n,i}$, то опредѣлитель, согласно п. 5, обращается въ нуль. Если поэтому i и k суть два различныхъ индекса, то

$$0 = a_{1,i}A_{1,k} + a_{2,i}A_{2,k} + \cdots + a_{n,i}A_{n,k}. \qquad (17)$$

12. Если мы, согласно п. 3, замѣнимъ горизонтали вертикалями, то мы получимъ новый рядъ формулъ вида:

$$A = a_{k,1}A_{k,1} + a_{k,2}A_{k,2} + \cdots + a_{k,n}A_{k,n}, \qquad (18)$$

$$0 = a_{i,1}A_{k,1} + a_{i,2}A_{k,2} + \cdots + a_{i,n}A_{k,n}. \qquad (19)$$

Изъ этихъ тождествъ можно очень легко получить рядъ важныхъ предложенiй, касающихся опредѣлителей. Такъ, изъ разложенiй (16) и (18) мы получаемъ непосредственно:

13. Если всѣ элементы одной горизонтали или одной вертикали имѣютъ общаго множителя, то этотъ общiй множитель можетъ быть вынесенъ за знакъ опредѣлителя.

14. Если мы помножимъ равенство (17) на неопредѣленнаго множителя λ и прибавимъ къ равенству (16), то мы получимъ:

$$A=(a_{1,k}+\lambda a_{1,i})A_{1,k}+(a_{2,k}+\lambda a_{2,i})A_{2,k}+\cdots+(a_{n,k}+\lambda a_{n,i})A_{n,k}. \quad (20)$$

Это тождество выражаетъ предложенiе, которое въ словахъ можно формулировать слѣдующимъ образомъ:

Опредѣлитель не измѣнится, если мы къ элементамъ какой-либо вертикали придадимъ соотвѣтствующiе элементы любой другой вертикали, умноживъ ихъ предварительно на произвольное число λ, или если къ элементамъ какой-либо горизонтали придадимъ соотвѣтствующiе элементы любой другой горизонтали, умноженные на произвольнаго множителя λ.

15. Изложенныя свойства опредѣлителя даютъ очень простое средство для рѣшенiя системы уравненiй первой степени:

$$\left.\begin{array}{l|l}
a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+\cdots+a_{1,n}x_n=y_1, & A_{1,k}\\
a_{2,1}x_1+a_{2,2}x_2+\cdots+a_{2,n}x_n=y_2, & A_{2,k}\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\\
a_{n,1}x_1+a_{n,2}x_2+\cdots+a_{n,n}x_n=y_n. & A_{n,k}.
\end{array}\right. \quad (21)$$

Если мы помножимъ первое уравненiе на $A_{1,k}$, второе на $A_{2,k}$, третье на $A_{3,k}$ и т. д., послѣднее на $A_{n,k}$, какъ это здѣсь указано, и полученныя уравненiя сложимъ, то коэффицiенты всѣхъ неизвѣстныхъ x, кромѣ x_k, обратятся въ нуль. Поэтому мы получимъ:

$$Ax_k=y_1A_{1,k}+y_2A_{2,k}+\cdots+y_nA_{n,k}. \quad (22)$$

Если A отлично отъ 0, то дѣленiемъ на A отсюда легко получить x_k

16. Если количества $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ всѣ равны 0, то мы получаемъ систему однородныхъ линейныхъ уравненiй:

$$\begin{array}{l}
a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+\cdots+a_{1,n}x_n=0,\\
a_{2,1}x_1+a_{2,2}x_2+\cdots+a_{2,n}x_n=0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_{n,1}x_1+a_{n,2}x_2+\cdots+a_{n,n}x_n=0.
\end{array} \quad (23)$$

Равенство (22) показываетъ, что въ томъ случаѣ, когда опредѣлитель A отличенъ отъ 0, всѣ неизвѣстныя $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ должны быть нулями. Система въ этомъ случаѣ собственнаго рѣшенія (§ 45, 1) не имѣетъ.

Необходимое условіе того, чтобы система (23) имѣла собственныя рѣшенія, выражается равенствомъ

$$A = 0. \tag{24}$$

Это равенство представляетъ собой, такимъ образомъ, результатъ исключенія неизвѣстныхъ x изъ уравненій (23).

Если условіе (24) выполнено и, по крайней мѣрѣ, одинъ изъ миноровъ $A_{k,i}$ отличенъ отъ нуля, то мы получимъ собственное рѣшеніе, если положимъ:

$$x_1 = A_{k,1},\ x_2 = A_{k,2},\ \ldots,\ x_n = A_{k,n}. \tag{25}$$

Если же всѣ миноры $A_{k,i}$ равны 0, то система (25) не представляетъ собой собственнаго рѣшенія. Но и въ этомъ случаѣ существуютъ собственныя рѣшенія, которыя выражаются въ минорахъ этихъ миноровъ. Но мы не можемъ здѣсь входить въ разборъ этого случая.

§ 60. Биномъ Ньютона.

1. Сочетанія изъ n элементовъ безъ повтореній находятъ себѣ примѣненіе, когда приходится умножать другъ на друга n двучленныхъ множителей.

Даны произвольныя числа $x, a_1, a_2, \ldots, a_n$; требуется составить произведеніе изъ n множителей:

$$F_n = (x + a_1)(x + a_2)(x + a_3) \ldots (x + a_n). \tag{1}$$

Для $n = 2$ и $n = 3$ получимъ:

$$F_2 = x^2 + x(a_1 + a_2) + a_1 a_2,$$
$$F_3 = x^3 + x^2(a_1 + a_2 + a_3) + x(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3) + a_1 a_2 a_3.$$

Методомъ полной индукціи можно доказать, что вообще

$$F_n = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \cdots + A_{n-1} x + A_n. \tag{2}$$

Въ этой формулѣ коэффиціентъ A_1 означаетъ сумму чиселъ $a_1, a_2, \ldots, a_n$; A_2 означаетъ сумму ихъ произведеній, взятыхъ по два; коэффиціентъ A_3 — сумму ихъ произведеній по три и т. д.; наконецъ, A_n означаетъ произведеніе всѣхъ чиселъ $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Помощью знака Σ (сумма) коэффиціенты A выразятся слѣдующимъ образомъ:

$$A_1 = \Sigma a_1,\ A_2 = \Sigma a_1 a_2,\ A_3 = \Sigma a_1 a_2 a_3,\ \ldots,\ A_n = a_1 a_2 \ldots a_n. \tag{3}$$

Если буквы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ изображаютъ нѣкоторыя опредѣленныя числа, а x будемъ разсматривать, какъ знакъ, выражающій всякое произвольное число, то выраженіе F_n называется тогда **цѣлой функціей** n-**ой степени** отъ x. Числа $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ называются **коэффиціентами** этой функціи.

2. Въ выраженіяхъ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ отдѣльныя слагаемыя представляютъ собою не что иное, какъ **сочетанія безъ повтореній** изъ n элементовъ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ соотвѣтственно по одному, по два, по три и т. д. Поэтому число членовъ каждой суммы соотвѣтственно равно:

$$B_1^{(n)},\ B_2^{(n)},\ B_3^{(n)},\ \ldots,\ B_n^{(n)}.$$

Особенный интересъ представляетъ тотъ случай, когда всѣ числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равны одному и тому же числу, — напримѣръ, a. Тогда имѣемъ:

$$A_1 = B_1^{(n)}a,\ A_2 = B_2^{(n)}a^2,\ A_3 = B_3^{(n)}a^3,\ \ldots,\ A_n = a^n.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ изъ равенствъ (1) и (2) вытекаетъ формула:

$$(x+a)^n = x^n + B_1^{(n)}x^{n-1}a + B_2^{(n)}x^{n-2}a^2 + \cdots + B_{n-1}^{(n)}xa^{n-1} + a^n. \quad (4)$$

Формула (4), извѣстная подъ названіемъ **строки Ньютона**, употребляется весьма часто. При ея помощи можно **расположить** n-**ую степень бинома** $(x+a)$ **по степенямъ чиселъ** x и a. Въ формулѣ (4) многочленъ **расположенъ по убывающимъ степенямъ числа** x и **по возрастающимъ степенямъ числа** a.

Формулу (4) можно представить и въ слѣдующемъ видѣ:

$$(x+a)^n = x^n + nx^{n-1}a + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}a^2 + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}a^3 + \cdots \quad (5)$$

Для простѣйшихъ случаевъ, когда $n = 2, 3, 4, 5$, получимъ:

$$\left.\begin{aligned}(x+a)^2 &= x^2 + 2ax + a^2;\\ (x+a)^3 &= x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3;\\ (x+a)^4 &= x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4;\\ (x+a)^5 &= x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5.\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Подставивъ въ формулу (5) $x = 1$, получимъ:

$$(1+a)^n = 1 + na + \frac{n(n-1)}{1.2}a^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^3 + \cdots + a^n. \quad (7)$$

Обратно, изъ этой формулы легко получить общую, такъ какъ $(x+a)^n = x^n\left(1+\frac{a}{x}\right)^n$.

Теперь ясно, почему числа

$$B_0^{(n)},\ B_1^{(n)},\ B_2^{(n)},\ B_3^{(n)},\ \ldots\ B_{n-1}^{(n)},\ B_n^{(n)}$$

называются биноміальными коэффиціентами *).

3. Если n есть число простое, то всѣ биноміальные коэффиціенты за исключеніемъ перваго и послѣдняго, т. е. числа

$$B_1^{(n)},\ B_2^{(n)},\ \ldots,\ B_{n-1}^{(n)}$$

дѣлятся безъ остатка на n; дѣйствительно, изъ § 57, (3) слѣдуетъ:

$$B_m^{(n)} m!\,(n-m)! = n! \tag{8}$$

Если при этомъ m больше нуля и меньше n, то числа $m!$ и $(n-m)!$ не дѣлятся на число n, тогда какъ число $n!$ кратно n. Слѣдовательно, множитель $B_m^{(n)}$ долженъ дѣлиться безъ остатка на n (см. § 17, п. 1). Принимая во вниманіе формулу (7), мы отсюда заключаемъ, что число

$$[(a+1)^n-(a+1)]-(a^n-a) \tag{9}$$

дѣлится нацѣло на число n, если только a есть цѣлое число [3]). Если положить $a=1$, то отсюда слѣдуетъ, что число 2^n-2 дѣлится на число n; если поэтому считать доказаннымъ, что a^n-a при нѣкоторомъ значеніи числа a дѣлится на число n, то число $(a+1)^n-(a+1)$, какъ это слѣдуетъ изъ формулы (9), также дѣлится на n.

Такимъ образомъ, мы доказали по способу математической индукціи такъ называемую теорему Ферма:

При любомъ цѣломъ значеніи a число a^n-a дѣлится безъ остатка на число n, если только n есть число простое.

---

*) Свѣдѣнія о биноміальныхъ коэффиціентахъ находимъ впервые у Михаила Штифеля (Arithmetica integra, 1544), который далъ таблицу биноміальныхъ коэффиціентовъ для первыхъ 17 степеней бинома. См. Cantor, Gesch. d. Mathem., Bd. 2, S. 430.

[3]) Разлагая $(a+1)^n$ по строкѣ Ньютона, мы получимъ выраженіе, въ которомъ первый членъ есть a^n, а послѣдній есть 1; всѣ остальные члены, какъ мы видѣли, дѣлятся на n. Отсюда слѣдуетъ, что при цѣлыхъ значеніяхъ a

$$(a+1)^n-a^n-1$$

дѣлится на n. Но это выраженіе тождественно съ выраженіемъ (9).

4. Перемножимъ почленно слѣдующія два равенства:

$$(1+a)^m = B_0^{(m)} + B_1^{(m)} a + B_2^{(m)} a^2 + \cdots + B_m^{(m)} a^m,$$
$$(1+a)^n = B_0^{(n)} + B_1^{(n)} a + B_2^{(n)} a^2 + \cdots + B_n^{(n)} a^n,$$

гдѣ m и n означаютъ произвольныя цѣлыя числа. Получимъ:

$$(1+a)^{m+n} = B_0^{(m)} B_0^{(n)} + (B_0^{(m)} B_1^{(n)} + B_1^{(m)} B_0^{(n)})\, a +$$
$$+ (B_0^{(m)} B_2^{(n)} + B_1^{(m)} B_1^{(n)} + B_2^{(m)} B_0^{(n)})\, a^2 + \cdots.$$

Съ другой стороны, по правилу бинома имѣемъ также:

$$(1+a)^{m+n} = B_0^{(m+n)} + B_1^{(m+n)} a + B_2^{(m+n)} a^2 + \cdots$$

Изъ сравненія правыхъ частей послѣднихъ двухъ равенствъ выводимъ слѣдующія соотношенія между биноміальными коэффиціентами:

$$B_0^{(m+n)} = B_0^{(m)} B_0^{(n)}, \quad B_1^{(m+n)} = B_0^{(m)} B_1^{(n)} + B_1^{(m)} B_0^{(n)}, \ \ldots$$

и, вообще, при любомъ значеніи числа ν имѣетъ мѣсто равенство:

$$B_\nu^{(m+n)} = B_0^{(m)} B_\nu^{(n)} + B_1^{(m)} B_{\nu-1}^{(n)} + B_2^{(m)} B_{\nu-2}^{(n)} + \cdots + B_\nu^{(m)} B_0^{(n)}. \quad (10)$$

При $\nu > n$ число $B_\nu^{(n)}$ обращается въ нуль.

Равенствомъ (10) мы воспользуемся впослѣдствіи при доказательствѣ одного весьма важнаго предложенія.

5. Въ формулѣ (3) § 57-го биноміальные коэффиціенты представлены въ формѣ:

$$B_m^{(n)} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}.$$

Если мы поэтому положимъ $m = \alpha$, $n - m = \beta$, $\alpha + \beta = n$ и будемъ писать y вмѣсто a, то формула (4) даетъ:

$$(x+y)^n = \sum \frac{n!}{\alpha!\,\beta!}\, x^\alpha y^\beta; \quad (11)$$

суммованіе должно быть здѣсь распространено на всевозможныя разложенія числа n на два цѣлыхъ слагаемыхъ, изъ которыхъ ни одно не имѣетъ отрицательнаго значенія. Подъ символомъ $0!$ нужно разумѣть число 1.

Въ этой формѣ можно формулу бинома обобщить.

Пустя $x, y, z \ldots$ будутъ неопредѣленныя величины числомъ r, а n — цѣлое положительное число. Разложимъ число n всѣми возможными способами на r цѣлыхъ слагаемыхъ, ни одно изъ которыхъ не имѣетъ отрицательнаго значенія:

$$n = \alpha + \beta + \gamma + \cdots. \tag{12}$$

Тогда можно съ помощью индукціи получить

$$(x + y + z + \cdots)^n = \sum \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!\ldots} x^\alpha y^\beta z^\gamma \ldots, \tag{13}$$

гдѣ суммованіе распространяется на всѣ разложенія (12).

При $r = 2$ формула справедлива. Общее же ея доказательство, какъ уже сказано, можно получить при помощи полной индукціи. Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что она доказана для $r-1$ слагаемыхъ и положимъ

$$u = y + z + \cdots.$$

Тогда, согласно формулѣ (11), получимъ разложеніе

$$(x + u)^n = \sum \frac{n!}{\alpha!\nu!} x^\alpha u^\nu. \qquad (\alpha + \nu = n) \tag{14}$$

Въ виду же того, что формулу (13) мы приняли для $(r-1)$ слагаемыхъ,

$$u^\nu = \sum \frac{\nu!}{\beta!\gamma!\ldots} y^\beta z^\gamma \ldots \qquad (\beta + \gamma + \cdots = \nu).$$

Такимъ образомъ, изъ соотношенія (14) получается формула (13). Ее называютъ **формулой Ньютона для многочлена**.

Напримѣръ, при $r = 3$, $n = 3$

$$\begin{aligned}(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 &+ \\ &+ 3(yz^2 + zy^2 + zx^2 + xz^2 + xy^2 + yx^2) \\ &+ 6xyz.\end{aligned}$$

§ 61. Ариѳметическіе ряды.

1. Расположенный въ опредѣленномъ порядкѣ рядъ чиселъ, изъ которыхъ каждое послѣдующее больше предыдущаго на одно и то же число (положительное или отрицательное) называется **ариѳметической прогрессіей** или **ариѳметическимъ рядомъ** (§ 38, 1).

Ариѳметическую прогрессію можно опредѣлить еще, какъ рядъ чиселъ, въ которомъ **разность двухъ какихъ-либо послѣдовательныхъ чиселъ есть величина постоянная**. Эта постоянная разность называется **разностью ариѳметической прогрессіи**.

Рядъ натуральныхъ чиселъ образуетъ ариѳметическую прогрессію съ разностью 1; рядъ четныхъ чиселъ и рядъ нечетныхъ чиселъ представляютъ собой каждый въ отдѣльности ариѳметическую прогрессію съ разностью 2; рядъ чиселъ 1, 4, 7, 10, 13, . . ., или 2, 5, 8, 11, 14, . . ., или 0, 3, 6, 9, 12, . . . составляютъ каждый ариѳметическую прогрессію съ разностью 3 и т. д. Члены ариѳметической прогрессіи могутъ быть дробными и отрицательными числами; точно такъ же и разность не должна быть непремѣнно цѣлымъ числомъ. Если разность прогрессіи есть число положительное, то прогрессія называется **возрастающей**; если же разность — число отрицательное, то прогрессія называется **убывающей**.

Въ общемъ видѣ ариѳметическая прогрессія можетъ быть представлена такъ:

$$a,\ a+b,\ a+2b,\ a+3b,\ a+4b,\ \ldots,$$

гдѣ a и b суть произвольныя числа. Число b есть **разность** прогрессіи, число a называется **первымъ членомъ** прогрессіи.

Выраженіе $a+bx$ называется **общимъ членомъ** нашей прогрессіи, если x обозначаетъ число, послѣдовательно принимающее значенія: 0, 1, 2, 3, . . .

2. Весьма часто приходится рѣшать такую задачу: опредѣлить **сумму** n **послѣдовательныхъ членовъ** ариѳметической прогрессіи. Рѣшимъ этотъ вопросъ въ общемъ видѣ посредствомъ формулы, выводомъ которой мы сейчасъ займемся. Положимъ, что нужно опредѣлить сумму S первыхъ n членовъ ариѳметической прогрессіи:

$$S = a + (a+b) + (a+2b) + \cdots + (a+(n-1)\,b).$$

Отсюда

$$S = na + (1+2+3+\cdots+(n-1))\,b; \tag{1}$$

такимъ образомъ, наша задача свелась къ рѣшенію частнаго ея случая — къ нахожденію суммы первыхъ $(n-1)$ натуральныхъ чиселъ:

$$s = 1+2+3+\cdots+(n-1). \tag{2}$$

Величину этой послѣдней суммы легко опредѣлить, если примемъ во вниманіе, что каждыя два числа этой суммы, равно отстоящія отъ начала и конца ея, составляютъ вмѣстѣ одно и то же число n; таковы, напримѣръ, числа 1 и $n-1$, 2 и $n-2$, 3 и $n-3$ и т. д. Такимъ образомъ, если число $n-1$ четное, то члены суммы s распадаются на $\frac{1}{2}(n-1)$ паръ, при чемъ сумма чиселъ каждой пары равна n, такъ что

$$s = \frac{(n-1)n}{2}. \tag{3}$$

Если же число $n - 1$ есть число нечетное, то сумма s состоитъ изъ $\frac{1}{2}(n-2)$ такихъ паръ и изолированнаго средняго члена, численная величина котораго равна $n/2$, такъ что

$$s = \frac{n(n-2)}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2};$$

такимъ образомъ, формула (3) остается справедливой и въ этомъ случаѣ.

Теперь, пользуясь формулой (1), легко опредѣлить и сумму S:

$$S = n\left(a + \frac{n-1}{2}b\right). \tag{4}$$

Какъ примѣръ приложенія этой общей формулы, вычислимъ суммы n первыхъ нечетныхъ чиселъ; для этого въ формулу (4) подставимъ $a = 1$, $b = 2$; тогда найдемъ:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

3. Рѣшимъ слѣдующую задачу. Шары расположены рядами въ видѣ треугольника такъ, что первый рядъ содержитъ одинъ шаръ, второй рядъ содержитъ два шара, третій рядъ содержитъ три шара, . . ., наконецъ, n-ый рядъ содержитъ n шаровъ. Сколько шаровъ содержитъ весь треугольникъ? Искомое число S найдемъ изъ формулы (4) подстановкой $a = 1$, $b = 1$:

$$S = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Въ связи съ этой задачей числа вида $\frac{n(n+1)}{2}$ называются *треугольными числами*. Числа эти въ возрастающемъ порядкѣ суть слѣдующія:

$$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21,\ 28,\ \ldots$$

Если шары расположены въ видѣ квадрата, такъ что въ каждомъ ряду находится столько шаровъ, сколько есть всего рядовъ, то мы получимъ такъ называемыя прямоугольныя или квадратныя числа:

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ \ldots$$

Изъ формулы

$$\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2 \tag{5}$$

слѣдуетъ правило: сумма $(n-1)$-го и n-го треугольныхъ чиселъ равна n-ому квадратному числу; это предложеніе нетрудно также вывести изъ геометрическихъ соображеній.

§ 62. Ариѳметическіе ряды высшаго порядка.

1. Разсмотримъ рядъ A чиселъ a, слѣдующихъ другъ за другомъ по — опредѣленному закону:

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$$

Найдемъ разности каждыхъ двухъ послѣдовательныхъ членовъ этого ряда:

$$b_0 = a_1 - a_0,\ b_1 = a_2 - a_1,\ b_2 = a_3 - a_2,\ \ldots.$$

Рядъ B чиселъ b, т. е.

$$b_0,\ b_1,\ b_2,\ \ldots$$

называется рядомъ разностей ряда A.

Вычисливъ и для этого ряда разности:

$$c_0 = b_1 - b_0,\ c_1 = b_2 - b_1,\ c_2 = b_3 - b_2,\ \ldots,$$

получимъ новый рядъ C:

$$c_0,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,$$

который называется рядомъ вторыхъ разностей ряда A; подобнымъ же образомъ мы найдемъ рядъ третьихъ, четвертыхъ, ... разностей.

Складывая члены ряда B, получимъ:

$$a_n - a_0 = b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}.$$

Такимъ образомъ, чтобы получить $(n+1)$-ый членъ ряда A, нужно къ начальному члену a_0 этого ряда прибавить сумму первыхъ n членовъ ряда B.

Рядъ A представляетъ собою ариѳметическую прогрессію, если члены ряда B всѣ равны другъ другу. Если же члены ряда B сами составляютъ ариѳметическую прогрессію, то рядъ A называется ариѳметическимъ рядомъ второго порядка. Вообще, данный рядъ называютъ ариѳметическимъ рядомъ k-го порядка, если рядъ его первыхъ разностей есть ариѳметическій рядъ $(k-1)$-го порядка; отсюда слѣдуетъ, что въ ариѳметическомъ ряду k-го порядка члены k-го ряда разностей его всѣ равны между собой.

Суммы S_n первыхъ n членовъ ариѳметическаго ряда k-го порядка образуютъ ариѳметическій рядъ $(k+1)$-го порядка, ибо разности $S_{n+1} - S_n = a_n$ образуютъ ариѳметическій рядъ k-аго порядка. Слѣдовательно, рядъ треугольныхъ чиселъ представляетъ собою ариѳметическій рядъ второго порядка.

2. Пользуясь биноміальными коэффиціентами, можно представить въ общемъ видѣ члены ариѳметическаго ряда k-го порядка. Именно, $(n+1)$-ый членъ a_n ариѳметическаго ряда k-го порядка можетъ быть представленъ слѣдующимъ выраженіемъ;

$$a_n = \alpha_0 + \alpha_1 B_1^{(n)} + \alpha_2 B_2^{(n)} + \cdots + \alpha_k B_k^{(n)}, \tag{1}$$

гдѣ коэффиціенты α_0, α_1, α_2, ..., α_k не зависятъ отъ числа n; величины α различны для различныхъ рядовъ k-го порядка.

Это предложеніе легко доказывается по способу совершенной индукціи. Въ самомъ дѣлѣ, формула наша, очевидно, справедлива въ случаѣ, когда $k=1$; ибо члены ариѳметической прогрессіи перваго порядка всѣ имѣютъ форму: $a_n = \alpha_0 + \alpha_1 n$.

Примемъ теперь, какъ это дѣлается при этомъ способѣ доказательства, что наше предложеніе справедливо въ случаѣ ариѳметическаго ряда $(k-1)$-го порядка. Пусть будетъ A данный ариѳметическій рядъ k-го порядка, а B — рядъ первыхъ разностей ряда A; тогда B есть рядъ $(k-1)$-го порядка. Согласно нашему условію, n-ый членъ ряда B можно представить такъ:

$$b_{n-1} = \alpha_1 B_0^{(n-1)} + \alpha_2 B_1^{(n-1)} + \cdots + \alpha_k B_{k-1}^{(n-1)}. \tag{2}$$

Но если $(n+1)$-ый членъ нѣкотораго ряда имѣетъ форму (1), то въ ряду его первыхъ разностей n-ый членъ имѣетъ видъ:

$$\alpha_1(B_1^{(n)} - B_1^{(n-1)}) + \alpha_2(B_2^{(n)} - B_2^{(n-1)}) + \cdots + \alpha_k(B_k^{(n)} - B_k^{(n-1)}).$$

Выраженіе это, по формулѣ (7) § 57-го, совпадаетъ съ выраженіемъ (2).

Такъ какъ члены ряда опредѣляются однозначно начальнымъ членомъ ряда и рядомъ его первыхъ разностей, то при надлежащемъ выборѣ начальнаго члена a_0 рядъ чиселъ a_n совпадаетъ съ рядомъ A, что и требовалось доказать.

Полагая въ формулѣ (1) послѣдовательно $n = 0, 1, 2, \ldots, k$, получимъ:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \alpha_0,\\
a_1 &= \alpha_0 + \alpha_1,\\
a_2 &= \alpha_0 + B_1^{(2)}\alpha_1 + \alpha_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_k &= \alpha_0 + B_1^{(k)}\alpha_1 + B_2^{(k)}\alpha_2 + \cdots + \alpha_k;
\end{aligned}$$

изъ этихъ равенствъ можно опредѣлить коэффиціенты α посредствомъ $k+1$ первыхъ членовъ ряда A.

3. Биноміальные коэффиціенты $B_k^{(n)}$ суть цѣлыя функціи k-той степени отъ перемѣннаго n; и обратно: степень n^k можетъ выразить линейной функціей отъ коэффиціентовъ $B_k^{(n)}, B_{k-1}^{(n)}, \ldots, B_1^{(n)}$. Поэтому, имѣя въ виду равенство (1), мы приходимъ къ выводу:

$(n+1)$-ый членъ a_n ариѳметическаго ряда k-таго порядка есть цѣлая функція k-той степени отъ n; обратно: всякій рядъ, въ которомъ $(n+1)$-ый членъ имѣетъ видъ

$$a_n = c_0 + c_1 n + c_2 n^2 + \cdots + c_k n^k, \tag{3}$$

есть ариѳметическій рядъ k-таго порядка.

Но опредѣлить коэффиціенты въ равенствѣ (1) легче, чѣмъ въ равенствѣ (3).

4. Обозначимъ черезъ a_n сумму n первыхъ треугольныхъ чиселъ:

$$a_n = 1 + 3 + 6 + \cdots + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Если положить $a_0 = 0$, то числа $a_0, a_1, a_2, \ldots$ составляютъ ариѳметическую прогрессію третьяго порядка; слѣдовательно, согласно предложенію предыдущаго параграфа, имѣемъ:

$$a_n = \alpha_0 + \alpha_1 n + \alpha_2 \frac{n(n-1)}{2} + \alpha_3 \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

Чтобы найти значенія чиселъ $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ и α_3, нужно въ полученной формулѣ положить послѣдовательно $n = 0, n = 1, n = 2$ и $n = 3$. Замѣчая, кромѣ того, что

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 4; \; a_3 = 10,$$

получимъ:

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_0 + \alpha_1 = 1, \quad \alpha_0 + 2\alpha_1 + \alpha_2 = 4,$$
$$\alpha_0 + 3\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 10;$$

отсюда

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 2, \; \alpha_3 = 1;$$

слѣдовательно,

$$a_n = n + n(n-1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Число это называется n-ымъ тетраэдрическимъ числомъ; оно выражаетъ, напримѣръ, число шаровъ, расположенныхъ въ видѣ правильнаго тетраэдра. Первые члены ряда тетраэдрическихъ чиселъ таковы:

$$1, \; 4, \; 10, \; 20, \; 35, \; 56, \; \ldots$$

Чтобы опредѣлить сумму n первыхъ членовъ ряда квадратныхъ чиселъ:

$$c_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2,$$

нужно въ выраженіи

$$c_n = a_0 + a_1 n + a_2 \frac{n(n-1)}{2} + a_3 \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

положить $n = 0, 1, 2, 3$; тогда получимъ $a_0 = 0$; $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 2$; слѣдовательно,

$$c_n = n + 3\frac{n(n-1)}{2} + 2\frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Для опредѣленія суммы n первыхъ членовъ ряда кубическихъ чиселъ

$$s_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$$

напишемъ равенство:

$$s_n = a_1 n + a_2 \frac{n(n-1)}{2} + a_3 \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + a_4 \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}.$$

Поступая подобно предыдущему, найдемъ: $a_1 = 1$, $a_2 = 7$, $a_3 = 12$, $a_4 = 6$, а потому s_n представится въ видѣ:

$$s_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

§ 63. Геометрическіе ряды.

1. Числа ряда a, a_1, a_2, a_3, ... образуютъ геометрическую прогрессію или геометрическій рядъ, если каждое число этого ряда получается изъ предыдущаго числа умноженіемъ его на одного и того же множителя q,—иными словами, если частное a_n/a_{n-1} отъ дѣленія какого-нибудь члена на предыдущій равно постоянному числу q. Число a называется первымъ членомъ, а число q — знаменателемъ геометрической прогрессіи. Такимъ образомъ, члены геометрической прогрессіи выражаются слѣдующимъ образомъ:

$$a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3,\ \ldots;$$

n-ый членъ есть aq^{n-1}. Если знаменатель прогрессіи q есть положительное число, то всѣ члены прогрессіи имѣютъ одинъ и тотъ же знакъ; напримѣръ, всѣ они положительные, если a есть положительное число. Если же знаменатель q есть отрицательное число, то члены прогрессіи имѣютъ поперемѣнно различные знаки.

Если число q по абсолютной величинѣ превышаетъ единицу, то каждый членъ прогрессіи по абсолютной величинѣ превосходитъ предыдущій; въ этомъ случаѣ прогрессія называется **возрастающей**.

Если знаменатель q есть правильная дробь, то члены прогрессіи послѣдовательно убываютъ по абсолютной величинѣ; такая прогрессія называется **убывающей**.

Если, наконецъ, $q = \pm 1$, то всѣ члены прогрессіи равны $\pm a$.

2. Здѣсь, какъ и въ случаѣ ариѳметической прогрессіи, важно умѣть находить сумму первыхъ n членовъ ряда. Имѣемъ:

$$S = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = a(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}). \quad (1)$$

Задача наша такимъ образомъ сводится къ опредѣленію суммы

$$s = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}. \quad (2)$$

Сумму s легко опредѣлить, если замѣтимъ, что, умножая любой членъ ея на число q, получимъ слѣдующій членъ; слѣдовательно,

$$sq = q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n. \quad (3)$$

Вычитывая почленно равенство (3) изъ равенства (2), получимъ:

$$s(1 - q) = 1 - q^n;$$

отсюда вычисляемъ сумму s во всѣхъ случаяхъ, за исключеніемъ того только, когда $q = 1$:

$$s = \frac{1 - q^n}{1 - q}. \quad (4)$$

При $q = 1$ всѣ члены нашей суммы равны 1, и мы получаемъ непосредственно $s = n$.

Если $q > 1$, то сумму s представляютъ такъ:

$$s = \frac{q^n - 1}{q - 1},$$

чтобы получить какъ въ числителѣ, такъ и въ знаменателѣ положительныя числа. Изъ формулы (1) слѣдуетъ:

$$S = \frac{aq^n - a}{q - 1}.$$

Въ словахъ эта формула выражается такъ:

Чтобы получить сумму n первыхъ членовъ геометрической прогрессіи, нужно разность между $(n+1)$-ымъ членомъ прогрессіи и первымъ членомъ ея раздѣлить на разность между знаменателемъ прогрессіи и единицей.

3. Мы нѣсколько видоизмѣнимъ формулу (4), если положимъ $q = b/a$ и сдѣлаемъ простое преобразованіе. Тогда найдемъ:

$$s = \frac{a^n - b^n}{a^{n-1}(a-b)}.$$

Изъ формулы же (2) имѣемъ:

$$s = 1 + \frac{b}{a} + \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}.$$

Подставивъ это значеніе суммы s въ предыдущее равенство и умноживъ обѣ части полученнаго такимъ образомъ равенства на a^{n-1}, найдемъ:

$$a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1} = \frac{a^n - b^n}{a-b},$$

или иначе:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Формулу эту можно провѣрить непосредственнымъ умноженіемъ.

Примѣры: положивъ $n = 2$ и $n = 3$, получимъ:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b),$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$$

Первая формула выражается словами такъ:

Разность квадратовъ двухъ чиселъ равна произведенію суммы этихъ чиселъ на ихъ разность.

Положивъ въ этой же формулѣ $a = \alpha + \beta$, $b = \alpha - \beta$, получимъ формулу, которая встрѣчается весьма часто:

$$(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta.$$

§ 64. Вычисленіе процентовъ и ренты.

1. Теорія геометрическихъ рядовъ находитъ себѣ важное практическое примѣненіе при вычисленіи процентовъ и ренты.

Мы здѣсь дадимъ лишь самыя общія основныя формулы; за подробностями и примѣрами отсылаемъ читателя къ спеціальнымъ сочиненіямъ: особенно можно рекомендовать небольшую книжку М. Кантора (M. Cantor) „Politische Arithmetik“ (Leipzig, Teubner 1898, 2. Auflage 1903).

Если капиталъ въ c рублей отданъ въ ростъ, то это значитъ, что должникъ въ концѣ каждаго года долженъ уплачивать кредитору опредѣленную сумму, — скажемъ, p рублей, — за каждые 100 занятыхъ рублей

(p процентовъ, пишется $p^0/_0$). Число p называется процентной таксой. Часто проценты уплачиваются по полугодіямъ или четвертямъ, но процентная такса всегда относится къ году. При современномъ состояніи денежнаго рынка обычной процентной таксой является $3^0/_0$, $3^1/_2{}^0/_0$, $4^0/_0$ или $4^1/_2{}^0/_0$. Размѣръ процентной таксы зависитъ, главнымъ образомъ, отъ того, въ какой степени кредиторъ можетъ быть увѣренъ, что должникъ выполнитъ свои обязательства.

На 100 рублей приходится p рублей процентныхъ денегъ, на 1 рубль — $p/100$ рублей; слѣдовательно, число процентныхъ денегъ съ капитала въ c рублей составитъ $cp/100$ рублей. Поэтому, по истеченіи одного года капиталъ вмѣстѣ съ наросшими на него процентными деньгами выразится суммою въ $c + cp/100$ рублей, и такимъ образомъ первоначальный капиталъ c превратится въ капиталъ:

$$c' = c\left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Часто процентныя деньги не уплачиваются по истеченіи года, но причисляются къ капиталу и вмѣстѣ съ послѣднимъ идутъ въ ростъ; такимъ путемъ возникаютъ проценты на проценты или такъ называемые сложные проценты. За второй годъ капиталъ увеличивается въ той же степени, что и за первый годъ. Капиталъ c' превращается въ капиталъ

$$c'' = c'\left(1 + \frac{p}{100}\right) = c\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2;$$

по истеченіи n лѣтъ наращенный капиталъ выразится суммой:

$$C = c\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n. \tag{1}$$

Такимъ образомъ при указанныхъ условіяхъ капиталъ ежегодно возрастаетъ въ геометрической прогрессіи.

Если процентныя деньги причисляются къ капиталу не ежегодно, но каждое полугодіе, или каждую четверть года, или, вообще, по истеченіи каждой m-ой части года, при чемъ процентная такса p по прежнему относится къ цѣлому году, то по формулѣ (1) черезъ n лѣтъ наращенный капиталъ выразится суммой:

$$C = c\left(1 + \frac{p}{100m}\right)^{nm}\text{ *)}. \tag{2}$$

*) При равныхъ прочихъ условіяхъ сдѣлка тѣмъ выгоднѣе для кредитора, чѣмъ короче промежутки, по истеченіи которыхъ проценты причисляются къ капи-

Если спрашивается, какой капиталъ черезъ n лѣтъ превратится въ капиталъ C, то найдемъ либо по формулѣ (1):

$$c = C\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{-n}, \tag{3}$$

либо по формулѣ (2):

$$c = C\left(1 + \frac{p}{100\,m}\right)^{-nm}. \tag{4}$$

2. Вычисленіе ренты. Рентой называютъ сумму, которая имѣетъ быть уплачиваема [4]) въ равные промежутки времени — напримѣръ, ежегодно — либо вѣчно, либо въ теченіе ограниченнаго періода времени. Положимъ, что по истеченіи каждаго года имѣетъ быть уплачиваема рента въ r рублей. Если рента не уплачивается, но накопляется и наращается процентами, считая по $p^0/_0$, то какая сумма нарастетъ по истеченіи n лѣтъ?

Чтобы отвѣтить на этотъ вопросъ, замѣтимъ, что первый взносъ нарастаетъ въ теченіе $n-1$ лѣтъ, второй — въ теченіе $n-2$ лѣтъ и т. д., предпослѣдній взносъ приноситъ проценты всего за 1 годъ, послѣдній взносъ вовсе не успѣетъ нарасти. Такимъ образомъ,

первый взносъ превратится въ $r\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n-1}$,

второй „ „ „ $r\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n-2}$,

. . . .

предпослѣдній „ „ „ $r\left(1 + \frac{p}{100}\right)$,

послѣдній „ „ „ r.

Введя для сокращенія обозначеніе

$$1 + \frac{p}{100} = q, \tag{5}$$

получимъ для наращеннаго (окончательнаго) капитала такое выраженіе:

$$E = r(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}).$$

талу, т. е. чѣмъ больше число m. Однако, какъ мы увидимъ впослѣдствіи, съ возрастаніемъ числа m капиталъ C не возрастаетъ безпредѣльно, но для каждаго даннаго числа лѣтъ n онъ остается меньше нѣкотораго опредѣленнаго предѣла.

[4]) Обыкновенно банкомъ, кредитнымъ учрежденіемъ, государствомъ или частнымъ лицомъ.

или, согласно § 63,

$$E = \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Подставивъ сюда вмѣсто q выраженіе изъ формулы (5), получимъ:

$$E = \frac{100r}{p}\left[\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - 1\right]. \qquad (6)$$

Вычислимъ, какой капиталъ A нужно отдать въ ростъ по p сложныхъ процентовъ, чтобы по истеченіи n лѣтъ получить ту же сумму E. По формулѣ (1) имѣемъ:

$$E = A\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

Отсюда

$$A = \frac{100r}{p}\left[1 - \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{-n}\right]. \qquad (7)$$

Сумма эта называется наличной стоимостью ренты. Ее нужно уплатить, если желаютъ выкупить ренту [5]). Чѣмъ больше число n, тѣмъ меньше число $\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{-n}$ и тѣмъ менѣе отличается капиталъ A отъ суммы $100r/p$, т. е. отъ того капитала, который приноситъ ежегодно r процентныхъ денегъ, считая по p простыхъ процентовъ.

---

[5]) Это значитъ: если нѣкоторое учрежденіе обязано уплачивать какому-либо лицу ежегодную ренту въ r рублей въ теченіе n лѣтъ, то оно можетъ освободиться отъ этого обязательства, т. е. погасить или выкупить ренту, уплативъ немедленно сумму A. Наоборотъ, получивъ ссуду въ A рублей, можно ее выплачивать, производя по истеченіи каждаго года срочную уплату въ r рублей.

Книга II.

АЛГЕБРА.

ГЛАВА XI.

Алгебраическія уравненія.

§ 65. Цѣлыя функціи и ихъ корни.

1. Въ области, содержащей всю совокупность введенныхъ нами чиселъ, заключаются нѣкоторыя особенныя числовыя системы, обладающія замѣчательными свойствами. Сюда относятся такъ называемыя алгебраическія числа. Первыя, съ которыми мы встрѣтились, и вмѣстѣ съ тѣмъ простѣйшія алгебраическія числа суть квадратные корни. Точно такъ же, какъ эти послѣдніе получаются при рѣшеніи квадратныхъ уравненій, всѣ другія алгебраическія числа суть результаты рѣшенія уравненій высшихъ степеней. Прежде, чѣмъ перейти къ ближайшему разсмотрѣнію задачи о рѣшеніи уравненій высшихъ степеней, необходимо сдѣлать общій обзоръ свойствъ цѣлыхъ функцій.

2. Подъ названіемъ цѣлой функціи или просто функціи мы разумѣемъ выраженіе вида:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n, \qquad (1)$$

гдѣ $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ суть опредѣленныя данныя числа, которыя называются коэффиціентами функціи $f(x)$; n означаетъ цѣлое положительное число, а x есть знакъ, которому можно придать любое численное значеніе. При такихъ условіяхъ мы называемъ x перемѣннымъ, а $f(x)$ есть не что иное, какъ сокращенное обозначеніе всего выраженія (1). Если коэффиціентъ a_0 отличенъ отъ нуля, то число n называется степенью функціи $f(x)$.

Нѣтъ необходимости, чтобы коэффиціенты были раціональными числами. Они могутъ имѣть ирраціональныя и даже комплексныя значенія.

Вмѣсто знаковъ a, x, f, конечно, можно употреблять и другія буквы; однако, для обозначенія коэффиціентовъ мы будемъ предпочтительно употреблять первыя строчныя буквы латинскаго алфавита: a, b, c, для перемѣнныхъ — послѣднія буквы x, y, z, t; для обозначенія функцій мы будемъ пользоваться буквами f, φ, ψ, а также буквами F, Φ, Ψ.

3. Цѣлыя функціи можно складывать, вычитывать и умножать по тѣмъ же правиламъ, по которымъ эти дѣйствія совершаются надъ полиномами. Результатами этихъ операцій будутъ также цѣлыя функціи. При этомъ члены съ одинаковыми степенями x собираютъ въ одинъ членъ, складывая коэффиціенты, затѣмъ всѣ вновь полученные члены располагаютъ въ рядъ по восходящимъ или нисходящимъ степенямъ x, начиная справа или слѣва. Такъ, напримѣръ:

$$\begin{aligned}(a_0x^2+a_1x+a_2)(b_0x^3+b_1x^2+b_2x+b_3) &= \\ = a_0b_0x^5+(a_0b_1+a_1b_0)x^4+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^3 &+ \\ +(a_0b_3+a_1b_2+a_2b_1)x^2+(a_1b_3+a_2b_2)x+a_2b_3&.\end{aligned}$$

Если перемножимъ двѣ функціи n-той и m-той степени $f(x) = a_0x^n+\cdots$ и $\varphi(x)=b_0x^m+\cdots$, то произведеніе $f(x)\varphi(x)$, будучи расположено соотвѣтствующимъ образомъ, начнется съ члена $a_0b_0x^{m+n}$. Это замѣчаніе даетъ право сказать, что степень произведенія двухъ цѣлыхъ функцій равна суммѣ $m+n$ степеней сомножителей.

4. Двѣ функціи $f(x)$ и $\varphi(x)$ называются равными (точнѣе: тождественно равными) только въ томъ случаѣ, если онѣ одной и той же степени и если коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ въ одной и въ другой имѣютъ одинаковыя значенія. При этихъ условіяхъ для любого численнаго значенія перемѣннаго x обѣ функціи имѣютъ одинаковыя численныя значенія. Согласно съ этимъ опредѣленіемъ, функція $f(x)$ только тогда тождественно равна нулю, когда всѣ ея коэффиціенты a_0, a_1, ..., a_n суть нули. Поэтому тождественно исчезающая функція не имѣетъ опредѣленной степени.

Совершенно другое значеніе имѣетъ равенство двухъ функцій $f(x)=\varphi(x)$, если оно справедливо только при нѣкоторыхъ отдѣльныхъ значеніяхъ x.

Въ то время, какъ, съ одной стороны, равенство $f(x)=0$, если мы его понимаемъ въ первомъ смыслѣ, требуетъ, чтобы коэффиціенты a_0, a_1, ..., a_n всѣ были равны нулю,— можно, съ другой стороны, искать такія значенія $x=x_1$, которыя обращаютъ $f(x)$ въ нуль, несмотря на то, что не всѣ коэффиціенты a_0, a_1, ..., a_n суть нули. Такое значеніе x_1 называется корнемъ функціи $f(x)$ или, иначе, корнемъ уравненія $f(x)=0$. При такой постановкѣ вопроса x въ уравненіи $f(x)=0$ называется неизвѣстнымъ, для котораго мы ищемъ опредѣленное значеніе x_1.

5. Если коэффиціенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$ суть вещественныя числа, то $f(x)$ называется **вещественной функціей**. Если вещественная функція имѣетъ мнимый корень $x_1 = \alpha + \beta i$, то

$$a_0(\alpha+\beta i)^n + a_1(\alpha+\beta i)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(\alpha+\beta i) + a_n = 0. \quad (2)$$

Отсюда слѣдуетъ (§ 48, 6), что, если мы вездѣ замѣнимъ i черезъ $-i$, то равенство не нарушится; поэтому

$$a_0(\alpha-\beta i)^n + a_1(\alpha-\beta i)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(\alpha-\beta i) + a_n = 0, \quad (3)$$

т. е. $x_1' = \alpha - \beta i$ также есть корень функціи $f(x)$. Этотъ важный выводъ мы формулируемъ въ видѣ слѣдующей теоремы:

Каждая вещественная функція можетъ имѣть только парные мнимые корни, при чемъ каждая пара состоитъ изъ двухъ сопряженныхъ мнимыхъ чиселъ.

§ 66. Дѣленіе цѣлыхъ функцій.

1. Дѣйствія надъ цѣлыми функціями представляютъ большое сходство съ дѣйствіями въ области раціональныхъ чиселъ. Особенно важное значеніе имѣютъ въ этомъ случаѣ правила дѣленія.

Пусть будутъ

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n, \\ \varphi(x) &= b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m \end{aligned} \quad (1)$$

двѣ функціи степеней n и m, такъ что a_0 и b_0 не нули; предположимъ что $n \geqq m$.

Говорятъ, что функція $f(x)$ **дѣлится** на $\varphi(x)$, если существуетъ цѣлая функція $Q(x)$, удовлетворяющая соотношенію $f(x) = \varphi(x)\,Q(x)$.

Согласно п. 3 § 65-го функція $Q(x)$ должна быть $(n-m)$-ой степени; чтобы не исключать того случая, когда $m = n$, мы будемъ подъ названіемъ цѣлой функціи нулевой степени разумѣть число, отличное отъ нуля (не зависящее, слѣдовательно, отъ x).

Чтобы ближе разсмотрѣть вопросъ о дѣлимости цѣлыхъ функцій, положимъ:

$$Q(x) = q_0x^{n-m} + q_1x^{n-m-1} + \cdots + q_{n-m-1}x + q_{n-m}. \quad (2)$$

Приравняемъ коэффиціенты произведенія $\varphi(x)\,Q(x)$ соотвѣтствующимъ коэффиціентамъ функціи $f(x)$, начиная съ a_0. Это дастъ слѣдующія равенства:

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0 q_0, \\ a_1 &= b_0 q_1 + b_1 q_0, \\ a_2 &= b_0 q_2 + b_1 q_1 + b_2 q_0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_\nu &= b_0 q_\nu + b_1 q_{\nu-1} + b_2 q_{\nu-2} + \cdots, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n-m} &= b_0 q_{n-m} + b_1 q_{n-m-1} + \cdots. \end{aligned} \tag{3}$$

Составить эти равенства очень легко: нужно обратить вниманіе только на то, чтобы въ выраженіи a_ν сумма индексовъ въ каждомъ членѣ $b_i q_k$, т. е. $i+k$, была равна ν, но прибавлять слагаемыя только до тѣхъ поръ, пока значекъ i при b не превыситъ m.

Мы получили систему $n-m+1$ уравненій первой степени, изъ которыхъ могутъ быть опредѣлены $n-m+1$ неизвѣстныхъ $q_0, q_1, \ldots, q_{n-m}$. Простота конструкціи этой системы дѣлаетъ очень удобнымъ ея разрѣшеніе. Изъ перваго уравненія находимъ $q_0 = a_0/b_0$; зная q_0, изъ второго уравненія легко находимъ $q_1 = (a_1 - b_1 q_0)/b_0 = (a_1 b_0 - a_0 b_1)/b_0^2$ и т. д. до q_{n-m}. Въ знаменателѣ будутъ всегда степени числа b_0, которое, по предположенію, отлично отъ нуля.

Если числа $q_0, q_1, \ldots, q_{n-m}$ опредѣлены изъ равенствъ (3), то коэффиціенты при $x^n, x^{n-1}, \ldots, x^m$ въ произведеніи $\varphi(x)\,Q(x)$ совпадаютъ съ соотвѣтствующими коэффиціентами функціи $f(x)$: Разность $f(x) - \varphi(x)\,Q(x)$ есть цѣлая функція

$$R(x) = r_0 x^{m-1} + r_1 x^{m-2} + \cdots + r_{m-2} x + r_{m-1}, \tag{4}$$

степень которой не выше $(m-1)$-ой. $R(x)$ можетъ быть и низшей степени, если $r_0 = 0$ или r_0 и r_1 равны 0 и т. д. Итакъ:

$$f(x) = \varphi(x)\,Q(x) + R(x). \tag{5}$$

Операція эта (т. е. нахожденіе функцій $Q(x)$ и $R(x)$) называется дѣленіемъ функціи $f(x)$ на $\varphi(x)$; $f(x)$ называется дѣлимымъ, $\varphi(x)$ — дѣлителемъ, $Q(x)$ — частнымъ и $R(x)$ — остаткомъ. Если функціи $f(x)$ и $\varphi(x)$ даны, то $Q(x)$ и $R(x)$ однозначно опредѣляются тѣмъ, что степень функціи $R(x)$ должна быть ниже степени $\varphi(x)$.

Вопросъ ставится совершенно такъ же, какъ при дѣленіи цѣлыхъ чиселъ (§ 15, 2), съ тою лишь разницей, что не численная величина остатка должна быть меньше дѣлителя, а степень остатка должна быть ниже степени дѣлителя. Вычисленіе можно расположить совершенно такъ же, какъ при дѣленіи десятичныхъ чиселъ. Покажемъ это на примѣрѣ. Пусть

$$f(x) = 3x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 2x - 8,$$
$$\varphi(x) = x^2 + 2x - 5.$$

Тогда получимъ:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
3x^4 + & 3x^3 - & 5x^2 + & 2x - & 8 & x^2 + 2x - 5 = 3x^2 - 3x + 16 \\
3x^4 + & 6x^3 - & 15x^2 & & & \\
\hline
- & 3x^3 + & 10x^2 + & 2x & & \\
- & 3x^3 - & 6x^2 + & 15x & & \\
\hline
& & 16x^2 - & 13x - & 8 & \\
& & 16x^2 + & 32x - & 80 & \\
\hline
& & & -45x + & 72. &
\end{array}$$

Въ данномъ случаѣ $Q(x) = 3x^2 - 3x + 16$, а $R(x) = -45x + 72$.

2. Функція $f(x)$ дѣлится на $\varphi(x)$ въ томъ и только въ томъ случаѣ, если остатокъ $R(x)$ тождественно равенъ 0, т. е. если

$$r_0 = 0,\ r_1 = 0,\ \ldots,\ r_{m-1} = 0.$$

Чтобы пояснить это на примѣрѣ, положимъ:

$$f(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - x + 1,$$
$$\varphi(x) = x^2 - x - 1.$$

Тогда получимъ:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 + & x^3 - & 4x^2 - & x + & 1 & x^2 - x - 1 = x^2 + 2x - 1 \\
x^4 - & x^3 - & x^2 & & & \\
\hline
& 2x^3 - & 3x^2 - & x & & \\
& 2x^3 - & 2x^2 - & 2x & & \\
\hline
& & - x^2 + & x + & 1 & \\
& & - x^2 + & x + & 1 & \\
\hline
& & - & - & - &
\end{array}$$

3. Дѣленіе совершается особенно просто, если дѣлитель представляетъ собой функцію первой степени или, какъ таковую часто называютъ, **линейную функцію**. Возьмемъ дѣлителя $\varphi(x)$ въ формѣ $x - a$; въ такомъ случаѣ въ равенствахъ (3) нужно положить $b_0 = 1$, $b_1 = -a$. Для опредѣленія коэффиціентовъ q получаемъ равенства:

$$\begin{aligned}
a_0 &= q_0, \\
a_1 &= q_1 - aq_0, \\
a_2 &= q_2 - aq_1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{n-1} &= q_{n-1} - aq_{n-2};
\end{aligned}$$

отсюда находимъ:

$$
\begin{aligned}
q_0 &= a_0, \\
q_1 &= a_0 a + a_1, \\
q_2 &= a_0 a^2 + a_1 a + a_2, \\
&\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \\
q_{n-1} &= a_0 a^{n-1} + a_1 a^{n-2} + a_2 a^{n-3} + \cdots + a_{n-1}.
\end{aligned} \tag{6}
$$

Остатокъ будетъ нулевой степени, т. е. не будетъ зависѣть отъ x. Можно легко опредѣлить его значенiе; для этого достаточно въ равенство $f(x)=(x-a)\,Q(x)+R$ подставить a вмѣсто x; но тогда $(x-a)\,Q(x)=0$, и, слѣдовательно, $R=f(a)$. Итакъ,

$$f(x)=(x-a)\,Q(x)+f(a). \tag{7}$$

Если $f(a)=0$, то $f(x)$ дѣлится на $x-a$; мы получаемъ такимъ образомъ теорему:

Функцiя $f(x)$ тогда и только тогда дѣлится на $x-a$, если a есть корень функцiи $f(x)$.

4. Если не только $f(x)$, но и $Q(x)$ дѣлится на $x-a$, такъ что $Q(a)=0$, то $f(x)$ дѣлится на $(x-a)^2$. Согласно формуламъ (6),

$$Q(a)=q_0 a^{n-1}+q_1 a^{n-2}+\cdots+q_{n-1}=$$
$$=n a_0 a^{n-1}+(n-1)\,a_1 a^{n-2}+(n-2)\,a_2 a^{n-3}+\cdots+2a_{n-2}a+a_{n-1}\text{ [1]}.$$

Функцiю

$$f'(x)=n a_0 x^{n-1}+(n-1)\,a_1 x^{n-2}+\cdots+2a_{n-2}x+a_{n-1} \tag{8}$$

называютъ производной отъ функцiи $f(x)$. Мы видимъ, такимъ образомъ, что

$$Q(a)=f'(a). \tag{9}$$

Итакъ, необходимое и достаточное условiе дѣлимости функцiи $f(x)$ на $(x-a)^2$ выражается двумя равенствами: $f(a)=0$ и $f'(a)=0$, или въ словахъ:

Функцiя $f(x)$ въ томъ и только въ томъ случаѣ дѣлится на $(x-a)^2$, если a есть общiй корень функцiи $f(x)$ и ея производной $f'(x)$.

---

[1]) Чтобы это получить, мы умножаемъ обѣ части перваго изъ равенствъ (6) на a^{n-1}, второе равенство на a^{n-2} и т. д., а затѣмъ складываемъ всѣ равенства.

5. Если мы положимъ $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, то, основываясь на формулѣ (8), легко найдемъ, что

$$f'(x) = f_1'(x) + f_2'(x). \tag{10}$$

Чтобы въ этомъ убѣдиться, стоитъ только представить коэффиціенты функціи $f(x)$ въ видѣ суммы соотвѣтствующихъ коэффиціентовъ функцій $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Итакъ:

Производная суммы равна суммѣ производныхъ слагаемыхъ.

6. Для того, чтобы найти производную функціи $f(x)$, нужно, какъ это слѣдуетъ изъ равенствъ (7), (8) и (9), найти частное

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = Q(x)$$

въ развернутомъ видѣ, положить въ немъ $x = a$ и затѣмъ въ результатѣ этой подстановки опять замѣнить a черезъ x; это можно сдѣлать, ибо a такъ же, какъ и x, есть перемѣнная величина. Согласно этому для нахожденія производной функціи $f(x) = (x - c)^n$ слѣдуетъ въ формулѣ (5) § 63-го

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1}$$

подставить $x - c$ вмѣсто a и $a - c$ вмѣсто b. Въ результатѣ этой подстановки слѣдуетъ замѣнить a черезъ x, но это равносильно тому, что мы сразу положимъ $a = b = x - c$; но тогда мы получимъ:

$$f'(x) = n(x - c)^{n-1}; \tag{11}$$

это и есть производная функціи $f(x) = (x - c)^n$.

7. Чтобы получить производную произведенія двухъ функцій

$$f(x) = f_1(x) f_2(x),$$

положимъ:

$$f_1(x) = (x - a)\, Q_1(x) + f_1(a),$$
$$f_2(x) = (x - a)\, Q_2(x) + f_2(a);$$

отсюда найдемъ:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = (x - a)\, Q_1(x)\, Q_2(x) + f_1(a)\, Q_2(x) + f_2(a)\, Q_1(x).$$

Положивъ въ правой части этого равенства $x = a$ и принимая во вниманіе, что $Q_1(a) = f_1'(a)$, $Q_2(a) = f_2'(a)$, $(x - a)\, Q_1(x)\, Q_2(x) = 0$, найдемъ:

$$f'(x) = f_1(x) f_2'(x) + f_2(x) f_1'(x); \tag{12}$$

такъ именно выражается производная произведенія.

8. Съ помощью вышеизложеннаго можно дополнить теорему, изложенную въ п. 4. А именно: пусть

$$f(x) = (x - a)^m f_1(x),$$

при чемъ функція $f_1(x)$ уже больше не дѣлится на $x - a$, такъ что a есть, слѣдовательно, m-кратный корень функціи $f(x)$; тогда съ помощью равенствъ (11) и (12) находимъ:

$$f'(x) = (x - a)^{m-1}\left\{(x - a)f_1'(x) + mf_1(x)\right\},$$

а отсюда слѣдуетъ:

Если $x - a$ есть m-кратный множитель функціи $f(x)$, то въ функцію $f'(x)$ этотъ же множитель $x - a$ входитъ только $(m - 1)$ разъ.

9. Если x_1 есть корень функціи $f(x)$, то можно положить $f(x) = (x - x_1)f_1(x)$, гдѣ $f_1(x)$ есть функція $(n - 1)$-ой степени; изъ соотношенія (3) слѣдуетъ, что высшій членъ функціи $f_1(x)$, т. е. x^{n-1}, имѣетъ тотъ же коэффиціентъ, что и x^n въ функціи $f(x)$. Если $f_1(x)$ имѣетъ корень x_2, то мы можемъ положить $f_1(x) = (x - x_2)f_2(x)$ и т. д. Если всѣ полученныя такимъ образомъ функціи $f_1, f_2, f_3, \ldots$ имѣютъ корни, а послѣдняя изъ нихъ $f_{n-1}(x) = a_0(x - x_n)$, то

$$f(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n). \tag{13}$$

Отсюда слѣдуетъ, что функція n-ой степени никогда не имѣетъ больше n корней.

Дѣйствительно, если $f(x)$ имѣетъ n корней $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то число x_2 должно быть корнемъ функціи $f_1(x)$, x_3—корнемъ функціи $f_2(x)$ и т. д.; при этомъ, какъ мы видѣли, имѣетъ мѣсто разложеніе (13). Если поэтому a есть какой-нибудь корень функціи $f(x)$, то должно имѣть мѣсто равенство:

$$(a - x_1)(a - x_2)\ldots(a - x_n) = 0,$$

что возможно только въ томъ случаѣ, если a есть одно изъ чиселъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Если въ какомъ-нибудь частномъ случаѣ окажется, что нѣкоторая функція n-той степени

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$$

имѣетъ болѣе, чѣмъ n, различныхъ корней, то остается только заключить, что всѣ коэффиціенты $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ суть нули и что, слѣдовательно, функція $f(x)$ тождественно (при всякомъ значеніи x) равна нулю. Нашъ выводъ мы можемъ выразить такъ:

Если число значенiй независимаго перемѣннаго x, при которыхъ функцiя n-той степени отъ x обращается въ нуль, превышаетъ n, то эта функцiя тождественно сводится къ нулю.

Въ этой формулировкѣ только-что высказанная теорема часто будетъ служить основанiемъ при доказательствѣ дальнѣйшихъ теоремъ.

10. Въ ряду чиселъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$, входящихъ въ разложенiе (13), одно и то же число можетъ повторяться нѣсколько разъ. Функцiя $f(x)$ и въ этомъ случаѣ разлагается на n линейныхъ множителей, но число ея корней меньше n. Однако, чтобы установить единообразiе въ способѣ выраженiя, и въ этихъ случаяхъ говорятъ, что функцiя $f(x)$ имѣетъ n корней; мы получимъ эти n корней, если будемъ считать нѣкоторые корни нѣсколько разъ; именно: каждый корень x_i мы будемъ считать столько разъ, сколько разъ соотвѣтствующiй множитель $(x - x_i)$ входитъ въ разложенiе (13). Мы имѣемъ тогда дѣло съ такъ называемыми кратными корнями; согласно п. 4, x_i есть кратный корень функцiи $f(x)$, если онъ представляетъ собой общiй корень функцiй $f(x)$ и $f'(x)$.

§ 67. Общiй наибольшiй дѣлитель.

1. Если двѣ цѣлыя функцiи $f(x)$ и $f_1(x)$, которыя мы иногда будемъ обозначать короче черезъ f и f_1, имѣютъ общiе корни, то онѣ имѣютъ также общаго дѣлителя. Въ самомъ дѣлѣ, если обѣ функцiи имѣютъ общiй корень x_1, то обѣ онѣ дѣлятся на линейную функцiю $x - x_1$. Функцiи $f(x)$ и $f_1(x)$ могутъ имѣть общихъ дѣлителей и болѣе высокихъ степеней. Если функцiи $f(x)$ и $f_1(x)$ не имѣютъ общаго дѣлителя, а, слѣдовательно, и общихъ корней, то такiя двѣ функцiи называются взаимно простыми или первыми между собой.

Такъ какъ дѣленiе цѣлыхъ функцiй совершается по тѣмъ же правиламъ, что и дѣленiе цѣлыхъ чиселъ, то мы можемъ для опредѣленiя общихъ дѣлителей двухъ функцiй примѣнить Евклидовъ алгориѳмъ (§ 16).

Пусть f и f_1 будутъ двѣ данныя функцiи степеней n и n_1, и пусть $n \geqq n_1$. Посредствомъ дѣленiя (§ 66, 1) можно составить рядъ функцiй $f_2, f_3, \ldots$, степени которыхъ $n_2, n_3, \ldots$ убываютъ, и рядъ частныхъ $Q, Q_1, Q_2, \ldots$ такимъ образомъ, чтобы имѣли мѣсто равенства:

$$\begin{aligned} f &= Q f_1 + f_2, \\ f_1 &= Q_1 f_2 + f_3, \\ f_2 &= Q_2 f_3 + f_4, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{1}$$

Этотъ рядъ равенствъ можно продолжать до тѣхъ поръ, пока можно дѣлить f_{n-1} на f_n. Такъ какъ степени функцiй $f_2, f_3, \ldots$ постоянно убываютъ, то, въ концѣ концовъ, одно изъ дѣленій должно совершиться безъ остатка. Пусть послѣднія два равенства въ ряду (1) будутъ:

$$\begin{aligned} f_{\nu-2} &= Q_{\nu-2} f_{\nu-1} + f_\nu, \\ f_{\nu-1} &= Q_{\nu-1} f_\nu. \end{aligned} \tag{2}$$

Точно такъ же, какъ при цѣлыхъ числахъ, можно заключить, что f_ν есть дѣлитель всѣхъ предыдущихъ функцій $f_{\nu-1}, f_{\nu-2}, f_{\nu-3}, \ldots, f_1, f$, и что каждый общій дѣлитель функцій f и f_1 долженъ быть также дѣлителемъ функцій $f_2, f_3, \ldots, f_\nu$. Поэтому f_ν называется **общимъ наибольшимъ дѣлителемъ** функцій f и f_1 (при этомъ слова „больше", „меньше" относятся, собственно, къ степени дѣлителя).

Общій наибольшій дѣлитель f_ν можетъ оказаться функціей нулевой степени, т. е. можетъ представлять собой число, отличное отъ нуля и не зависящее отъ x; въ этомъ случаѣ f и f_1 суть функціи **первыя между собой**, такъ какъ на постоянное число дѣлится всякая функція.

2. Итакъ, **общій наибольшій дѣлитель двухъ функцій можетъ быть найденъ съ помощью четырехъ дѣйствій** (т. е. съ помощью раціональныхъ операцій) **надъ коэффиціентами данныхъ функцій**.

3. Съ помощью раціональныхъ операцій мы можемъ также рѣшить, имѣетъ ли функція кратные корни; для этого нужно найти общаго наибольшаго дѣлителя функціи $f(x)$ и ея производной $f'(x)$.

Возьмемъ примѣръ:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^6 - 2x^5 + 2x + 1, \\ f'(x) &= 6x^5 - 10x^4 + 2. \end{aligned}$$

Вмѣсто $f'(x) = 2(3x^5 - 5x^4 + 1)$ мы можемъ взять за перваго дѣлителя функцію $f_1(x) = 3x^5 - 5x^4 + 1$, которая отличается отъ $f'(x)$ только численнымъ множителемъ.

Первое дѣленіе даетъ:

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}\right) f_1(x) - \frac{5}{9}(x^4 - 3x - 2).$$

За второго дѣлителя f_2 мы можемъ взять $x^4 - 3x - 2$; мы получимъ:

$$f_1(x) = (3x - 5) f_2(x) + 9(x^2 - x - 1).$$

Третье дѣленіе на $f_3 = x^2 - x - 1$ заканчиваетъ вычисленіе:

$$f_2 = (x^2 + x + 2) f_3.$$

Итакъ, $x^2 - x - 1$ есть общій наибольшій дѣлитель функцій $f(x)$ и $f'(x)$. Легко обнаружить, что

$$f(x) = (x^2 + 1)(x^2 - x - 1)^2,$$

если произвести умноженіе въ правой части.

4. Если мы соединимъ всѣхъ однократныхъ множителей функціи $f(x)$ въ одну группу P_1, двукратныхъ множителей — въ группу P_2, трехкратныхъ множителей — въ группу P_3, ..., то функція $f(x)$ представится въ видѣ

$$f(x) = P_1 P_2^2 P_3^3 P_4^4 \dots, \tag{3}$$

при чемъ P_1, P_2, P_3, ... будутъ цѣлыя функціи, изъ которыхъ каждая разлагается только на различныхъ множителей и никакія двѣ не имѣютъ общаго дѣлителя. При этомъ не лишено возможности, чтобы нѣкоторыя изъ функцій P вовсе отсутствовали; въ этихъ случаяхъ слѣдуетъ въ разложеніи (3) отсутствующія функціи P считать тождественно равными 1 [2]). Функціи P могутъ быть получены съ помощью алгориѳма Евклида, т. е. путемъ раціональныхъ операцій надъ коэффиціентами функціи $f(x)$. Въ самомъ дѣлѣ, согласно п. 8 § 66-го, функція

$$f_1(x) = P_2 P_3^2 P_4^3 \dots$$

есть общій наибольшій дѣлитель функцій $f(x)$ и $f'(x)$, а отсюда вытекаетъ, что

$$\frac{f(x)}{f_1(x)} = F(x) = P_1 P_2 P_3 P_4 \dots$$

Общимъ наибольшимъ дѣлителемъ функцій $F(x)$ и $f_1(x)$ будетъ поэтому функція

$$Q = P_2 P_3 P_4 \dots,$$

и, слѣдовательно,

$$P_1 = \frac{f}{f_1 Q}.$$

Поступая съ функціей $f_1(x)$ такъ же, какъ съ функціей $f(x)$, мы найдемъ функцію P_2 и т. д.

При этомъ слѣдуетъ замѣтить, что только при выводѣ указаннаго пріема мы предполагали, что функція $f(x)$ разлагается на линейныхъ множителей. Самое же примѣненіе этого пріема вовсе не предполагаетъ знанія множителей функціи $f(x)$. Впослѣдствіи мы докажемъ, что всякая

---

[2]) Только при этомъ условіи всегда будетъ имѣть мѣсто приведенное выше разложеніе функціи.

функція $f(x)$ можетъ быть разложена на линейныхъ множителей; въ виду этого указанный пріемъ можно считать вполнѣ оправданнымъ. Обосновать же этотъ пріемъ, не предполагая, что функція $f(x)$ можетъ быть разложена на множителей, значительно труднѣе; это не можетъ быть даже выполнено элементарными средствами *).

5. При помощи Евклидова алгориѳма можно получить рѣшеніе слѣдующей задачи.

Даны двѣ цѣлыя взаимно простыя функціи $f(x)$ и $f_1(x)$; требуется опредѣлить двѣ другія цѣлыя функціи $F(x)$ и $F_1(x)$ такимъ образомъ, чтобы выполнялось равенство:

$$F(x)f(x) + F_1(x)f_1(x) = 1. \tag{4}$$

Замѣтимъ сначала, что задача не мѣняется существенно, если въ правой части равенства (4) вмѣсто 1 будетъ стоять другое число c, отличное отъ нуля, такъ какъ въ этомъ случаѣ, чтобы получить равенство (4), достаточно было бы коэффиціенты функцій $F(x)$ и $F_1(x)$ раздѣлить на c.

Чтобы найти F и F_1, воспользуемся формулами (1) и (2), въ которыхъ, при взаимно простыхъ f и f_1, функція f_ν будетъ числомъ, отличнымъ отъ нуля. Если теперь первое изъ равенствъ (1) разрѣшить относительно f_2 и подставить полученное для f_2 выраженіе во второе и третье равенства, затѣмъ второе разрѣшить относительно f_3 и полученное для f_3 выраженіе подставить въ два слѣдующія равенства и такъ продолжать до конца, то предпослѣднее изъ равенствъ (2) дастъ требуемое соотношеніе вида (4).

Чтобы показать это на простомъ примѣрѣ, положимъ:

$$f(x) = x^2 - x - 1; \quad f_1(x) = x^2 + 1.$$

Тогда будемъ имѣть:

$$x^2 - x - 1 = (x^2 + 1) - (x + 2);$$
$$x^2 + 1 = (x + 2)(x - 2) + 5.$$

Помножимъ первое равенство на $x - 2$ и сложимъ со вторымъ; тогда получимъ:

$$(x^2 - x - 1)(x - 2) + (x^2 + 1)(3 - x) = 5.$$

Отсюда $F(x) = x - 2$, а $F_1(x) = 3 - x$.

Сохраняя предположеніе, что f и f_1 суть функціи взаимно простыя, можно всегда удовлетворить равенству

$$F(x)f(x) + F_1(x)f_1(x) = \Phi(x), \tag{5}$$

*) Ср. Weber, „Lehrbuch der Algebra", 2 Aufl., Bd. I, § 20.

гдѣ $\Phi(x)$ есть любая цѣлая функція. Для этого достаточно умножить равенство (4) на $\Phi(x)$ и затѣмъ вмѣсто $F(x)\Phi(x)$ и $F_1(x)\Phi(x)$ опять написать $F(x)$ и $F_1(x)$.

§ 68. Приводимыя и неприводимыя функціи.

1. Положимъ теперь, что въ цѣлой функціи n-той степени

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n \tag{1}$$

коэффиціенты $a_0, \ldots, a_n$ суть цѣлыя числа.

Если a_0 не нуль, то разысканіе корней функціи (1) можно привести къ случаю, когда $a_0 = 1$. Дѣйствительно, помножая функцію (1) на a_0^{n-1}, получимъ:

$$a_0^{n-1} f(x) = (a_0 x)^n + a_1 (a_0 x)^{n-1} + a_2 a_0 (a_0 x)^{n-2} + \cdots + a_n a_0^{n-1}.$$

Если далѣе положимъ:

$$a_0 x = y, \quad a_1 = b_1, \quad a_2 a_0 = b_2, \quad a_3 a_0^2 = b_3, \ldots, a_n a_0^{n-1} = b_n,$$

$$a_0^{n-1} f(x) = \varphi(y),$$

то получимъ:

$$\varphi(y) = y^n + b_1 y^{n-1} + b_2 y^{n-2} + \cdots + b_n, \tag{2}$$

гдѣ $b_1, b_2, \ldots, b_n$ суть цѣлыя числа.

Корни функціи $f(x)$ получатся, если корни функціи $\varphi(y)$ раздѣлимъ на a_0.

Мы займемся прежде всего вопросомъ о томъ, какіе **раціональные** корни можетъ имѣть функція $\varphi(y)$. Если p/q есть корень функціи $\varphi(y)$, гдѣ p и q суть цѣлыя числа, которыя мы можемъ считать взаимно простыми, при чемъ $q > 0$, то должно имѣть мѣсто соотношеніе:

$$p^n + b_1 p^{n-1} q + b_2 p^{n-2} q^2 + \cdots + b_n q^n = 0;$$

отсюда слѣдуетъ, что p^n должно дѣлиться на q, а это возможно только при $q = 1$, такъ какъ p и q суть числа взаимно простыя.

Итакъ, раціональный корень функціи $\varphi(y)$ необходимо долженъ быть цѣлымъ числомъ.

Если p есть такой корень, то

$$p^n + b_1 p^{n-1} + b_2 p^{n-2} + \cdots + b_{n-1} p + b_n = 0,$$

откуда слѣдуетъ, что b_n должно дѣлиться на p.

Итакъ, чтобы рѣшить, имѣетъ ли функція $\varphi(y)$ раціональные корни, нужно найти всѣхъ дѣлителей числа b_n и каждый

изъ нихъ съ положительнымъ и отрицательнымъ знакомъ подставить для испытанія въ функцію $\varphi(y)$ вмѣсто y. Если p есть одинъ изъ этихъ дѣлителей и $\varphi(p) = 0$, то p есть раціональный корень функціи $\varphi(y)$, а p/a_0 — раціональный корень функціи $f(x)$.

При этомъ $\varphi(y)$ дѣлится на $y - p$, и результатъ дѣленія, опредѣляемый равенствомъ $\varphi(y) = (y - p)\varphi_1(y)$, есть функція $\varphi_1(y)$, коэффиціенты которой также представляютъ собою цѣлыя числа.

Такъ, напримѣръ, функція

$$y^4 - 4y^3 + 2y + 1$$

имѣетъ дѣлителя $y - 1$; производя дѣленіе, получимъ:

$$y^4 - 4y^3 + 2y + 1 = (y - 1)(y^3 - 3y^2 - 3y - 1).$$

2. Функція $f(x)$ называется цѣлочисленной, если ея коэффиціенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$ суть цѣлыя числа. Функція съ раціональными, но не цѣлыми коэффиціентами обращается въ цѣлочисленную функцію, если ее умножить на общаго знаменателя ея коэффиціентовъ. Общій наибольшій дѣлитель всѣхъ коэффиціентовъ $a_0, a_1, \ldots, a_n$ цѣлочисленной функціи $f(x)$ называется дѣлителемъ функціи. Функція, дѣлитель которой равенъ 1, называется первообразной. Любая функція $f(x)$ съ раціональными — цѣлыми или дробными — коэффиціентами можетъ быть представлена въ видѣ $\mu f_1(x)$, гдѣ $f_1(x)$ есть первообразная цѣлочисленная функція, а μ — раціональное (цѣлое или дробное) число. Если мы еще потребуемъ, чтобы коэффиціентъ высшаго члена функціи $f_1(x)$ былъ числомъ положительнымъ, то будетъ существовать только одна функція $f_1(x)$, удовлетворяющая условію $f(x) = \mu f_1(x)$.

3. Функція $f(x)$ съ раціональными коэффиціентами называется приводимой или разложимой, если ее можно разложить на два множителя $f_1(x)$ и $f_2(x)$, изъ которыхъ каждый дѣйствительно содержитъ x и коэффиціенты которыхъ также раціональны. Если такое разложеніе невозможно, то функція $f(x)$ называется неприводимой или неразложимой.

Общій наибольшій дѣлитель двухъ функцій $f(x)$ и $F(x)$ съ раціональными коэффиціентами, какъ видно изъ алгориѳма § 67-го, также имѣетъ раціональные коэффиціенты. Поэтому, если функція $f(x)$ неприводима, то могутъ быть два случая: либо $F(x)$ дѣлится на $f(x)$, либо $F(x)$ и $f(x)$ суть функціи взаимно-простыя [3]). Въ послѣднемъ случаѣ

---

[3]) Это вполнѣ аналогично слѣдующему свойству цѣлыхъ чиселъ: если f есть простое цѣлое число, а F есть другое цѣлое число, то либо F дѣлится на f, либо F и f суть числа взаимно-простыя.

онѣ не имѣютъ общихъ корней. Эти соображенія приводятъ къ теоремѣ, особенно важной въ теоріи уравненій.

Теорема. Если неприводимая функція $f(x)$ имѣетъ общій корень съ функціей $F(x)$, то послѣдняя дѣлится на $f(x)$, и всѣ корни функціи $f(x)$ представляютъ собой въ то же время корни функціи $F(x)$.

4. Если цѣлочисленная функція

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n \tag{1}$$

приводима, то, согласно п. 2, можно выбрать два цѣлыхъ числа h и m, удовлетворяющія равенству

$$hf(x) = m\,\varphi(x)\,\psi(x), \tag{2}$$

гдѣ $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ суть первообразныя цѣлочисленныя функціи. Кромѣ того, мы можемъ принять, что h есть число положительное и простое относительно m. Докажемъ, что при этихъ условіяхъ $h = 1$. Съ этою цѣлью положимъ:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x) &= b_0 x^\mu + b_1 x^{\mu-1} + b_2 x^{\mu-2} + \cdots + b_{\mu-1} x + b_\mu,\\ \psi(x) &= c_0 x^\nu + c_1 x^{\nu-1} + c_2 x^{\nu-2} + \cdots + c_{\nu-1} x + c_\nu,\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

гдѣ $\mu + \nu = n$. Перемножая два послѣднія равенства и принимая во вниманіе равенство (2), получаемъ:

$$\left.\begin{aligned} ha_0 &= mb_0c_0,\\ ha_1 &= m(b_0c_1 + b_1c_0),\\ ha_2 &= m(b_0c_2 + b_1c_1 + b_2c_0),\\ ha_3 &= m(b_0c_3 + b_1c_2 + b_2c_1 + b_3c_0),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Законъ составленія этихъ равенствъ очень простъ. Именно: сумма индексовъ при b и c въ каждомъ членѣ правой части равна индексу при a въ лѣвой части. Понятно, что въ правой части исчезаютъ всѣ тѣ члены, въ которыхъ индексъ при b больше, чѣмъ μ, или индексъ при c больше, чѣмъ ν.

Пусть теперь p будетъ любой простой дѣлитель числа h; въ такомъ случаѣ онъ не можетъ быть дѣлителемъ всѣхъ коэффиціентовъ b или всѣхъ коэффиціентовъ c, такъ какъ φ и ψ, по условію, суть функціи первообразныя. Положимъ, что b_r есть первый изъ коэффиціентовъ b, а c_s первый изъ коэффиціентовъ c, которые не дѣлятся на p. Тогда

$$\left.\begin{array}{l}\text{числа } b_0, b_1, b_2 \ldots b_{r-1} \text{ дѣлятся на } p, \text{ а } b_r \text{ не дѣлится на } p,\\ \quad\text{»}\quad c_0, c_1, c_2 \ldots c_{s-1} \quad\text{»}\quad\text{»}\quad p, \text{ » } c_s \text{ » » » } p.\end{array}\right\} \tag{5}$$

Можетъ случиться, что уже b_0 или c_0 дѣлится на p; тогда r или s слѣдуетъ считать равнымъ нулю.

Выдѣлимъ теперь изъ равенствъ (4) то, которое занимаетъ $(r+s+1)$-ое мѣсто и напишемъ его въ такомъ видѣ:

$$ba_{r+s} = m(b_r c_s + b_{r-1} c_{s+1} + b_{r-2} c_{s+2} + \cdots + b_{r+1} c_{s-1} + b_{r+2} c_{s-2} + \cdots). \quad (6)$$

Но, согласно равенству (5), членъ $b_r c_s$ не дѣлится на p, между тѣмъ какъ всѣ остальные члены выраженія, заключеннаго въ скобки, дѣлятся на p; поэтому все число, заключенное въ скобки, не дѣлится на p. Но такъ какъ число b, а вмѣстѣ съ нимъ и вся лѣвая часть равенства (6), дѣлится на p, то m дѣлится на p, а это противно предположенію, что b и m суть числа взаимно простыя.

Такимъ образомъ, число b не дѣлится ни на одно простое число; т. е. $b = 1$; изъ соотношенія (2) поэтому мы получаемъ:

$$f(x) = m\varphi(x)\psi(x). \quad (7)$$

5. Если въ формулахъ (4) положить $b=1$, то изъ нихъ легко заключить, что m есть дѣлитель всѣхъ коэффиціентовъ a и, слѣдовательно, дѣлитель дѣлителя функціи $f(x)$. Но, если mk есть дѣлитель функціи $f(x)$, то мы можемъ тѣмъ же путемъ, что и выше — въ п. 4, изъ равенства (6) убѣдиться, что $k = 1$; стало-быть, число m должно быть дѣлителемъ функціи $f(x)$. Если $f(x)$ есть функція первообразная, то $m = 1$, и мы получаемъ теорему:

Всякая приводимая первообразная цѣлочисленная функція можетъ быть разложена на первообразныхъ же цѣлочисленныхъ множителей.

6. Если функціи $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, въ свою очередь, приводимы, то, согласно той же теоремѣ, онѣ могутъ быть, въ свою очередь, разложены на множителей. При этомъ степень каждаго множителя всегда ниже степени произведенія, и потому разложеніе необходимо должно окончиться. Мы пришли, такимъ образомъ, къ теоремѣ:

Всякая приводимая первообразная цѣлочисленная функція можетъ быть разложена на конечное число неприводимыхъ первообразныхъ же функцій:

$$f(x) = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) \ldots \varphi_m(x). \quad (8)$$

Степень n функціи $f(x)$ равна суммѣ степеней множителей $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$, и потому число m, по большей мѣрѣ, равно n, при чемъ это наибольшее значеніе n число m имѣетъ только въ томъ случаѣ, когда всѣ φ суть функціи первой степени.

7. Неприводимые множители аналогичны простымъ числамъ въ области цѣлыхъ чиселъ; подобно тому, какъ и тамъ, относительно неприводимыхъ множителей имѣетъ мѣсто теорема:

Разложенiе (8) приводимой функцiи $f(x)$ можетъ быть выполнено только однимъ способомъ, если не принимать во вниманiе знаковъ множителей φ.

Въ самомъ дѣлѣ, согласно алгориѳму Евклида (§ 67, 1), общiй наибольшiй дѣлитель двухъ функцiй съ рацiональными коэффицiентами имѣетъ также рацiональные коэффицiенты. Отсюда слѣдуетъ, что, если функцiя $f(x)$ съ рацiональными коэффицiентами не дѣлится на неприводимую функцiю $\varphi(x)$, то $f(x)$ и $\varphi(x)$ суть функцiи взаимно-простыя; изъ этого мы заключаемъ такъ же, какъ и въ области чиселъ (§ 17), что произведенiе двухъ или нѣсколькихъ функцiй только въ томъ случаѣ дѣлится на неприводимую функцiю φ, если одинъ, по крайней мѣрѣ, изъ сомножителей дѣлится на φ. Итакъ, если ψ есть неприводимый множитель, входящiй при какомъ-либо иномъ разложенiи въ составъ произведенiя $f(x)$ въ равенствѣ (8), то этотъ множитель ψ долженъ входить въ составъ какой-либо изъ функцiй φ — напримѣръ, въ φ_1 — и можетъ поэтому отличаться отъ функцiи φ_1 только постояннымъ множителемъ. Въ случаѣ, когда φ_1 и ψ суть функцiи цѣлочисленныя и первообразныя, этотъ постоянный множитель сводится къ ± 1.

8. Допустимъ, что въ цѣлочисленной функцiи $f(x)$ коэффицiентъ $a_0 = 1$, и что эта функцiя разлагается на два множителя φ_1 и ψ_1, коэффицiенты которыхъ суть цѣлыя или дробныя рацiональныя числа и въ которыхъ коэффицiенты высшихъ членовъ также равны 1. При этихъ условiяхъ мы можемъ опредѣлить два натуральныхъ числа h_1 и h_2 такъ, чтобы произведенiя $h_1\varphi_1 = \varphi$ и $h_2\psi_1 = \psi$ были цѣлочисленными первообразными функцiями. Но тогда $h_1 h_2 f = \varphi\psi$, и, какъ въ п. 4, мы найдемъ, что $h_1 h_2 = 1$, откуда будетъ слѣдовать, что $h_1 = 1$, $h_2 = 1$.

Мы пришли къ теоремѣ, которую доказалъ Гауссъ въ п. 42 своего сочиненiя „Disquisitiones arithmeticae":

Если цѣлочисленная функцiя

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n$$

разлагается на множителей:

$$\varphi(x) = x^\mu + b_1 x^{\mu-1} + b_2 x^{\mu-2} + \cdots + b_\mu,$$
$$\psi(x) = x^\nu + c_1 x^{\nu-1} + c_2 x^{\nu-2} + \cdots + c_\nu,$$

при чемъ числа $b_1, \ldots, b_\mu$ и $c_1, \ldots, c_\nu$ рацiональны, то какъ коэффицiенты b_i, такъ и коэффицiенты c_i должны быть цѣлыми числами.

§ 69. Разложенie приводимыхъ функцiй на множителей.

1. Функцiя n-ой степени

$$\varphi(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n \tag{1}$$

имѣетъ $n+1$ коэффицiентовъ $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$. Эти коэффицiенты можно выбрать такимъ образомъ, чтобы функцiя при $n+1$ значенiяхъ $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ независимаго перемѣннаго принимала заданныя значенiя $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$. Для опредѣленiя коэффицiентовъ a_i мы получимъ систему линейныхъ относительно этихъ коэффицiентовъ уравненiй:

$$\varphi(\alpha_0) = A_0, \ \varphi(\alpha_1) = A_1, \ \ldots, \ \varphi(\alpha_n) = A_n; \tag{2}$$

Если опредѣлитель системы отличенъ отъ нуля, то изъ этихъ уравненiй коэффицiенты a_i могутъ быть однозначно опредѣлены. Функцiи, степень которыхъ ниже n-ой, мы можемъ разсматривать, какъ частные случаи функцiи n-ой степени: мы ихъ получимъ, если изъ уравненiй (2) будетъ слѣдовать, что $a_0 = 0$. Можно безъ труда показать, что опредѣлитель этой системы уравненiй представляетъ собой не что иное, какъ произведенiе всѣхъ разностей вида $\alpha_i - \alpha_k$ и потому не можетъ быть равенъ нулю, если всѣ значенiя α_i, какъ это, естественно, подразумѣвается, различны между собой. Мы можемъ, однако, обойти вычисленiе опредѣлителя, если намъ удастся, во-первыхъ, доказать, что двухъ функцiй n-ой или болѣе низкой степени, удовлетворяющихъ поставленнымъ требованiямъ, не существуетъ, и, во-вторыхъ,—непосредственно составить одну такую функцiю.

Чтобы доказать первое утвержденiе, допустимъ, что существуютъ двѣ функцiи $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, удовлетворяющiя условiямъ (2) при данныхъ значенiяхъ количествъ A_i и α_i. Въ такомъ случаѣ разность $\varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ представляетъ собою функцiю степени не выше n-той, которая имѣетъ $n+1$ различныхъ корней: $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Согласно п. 9 § 66-го, функцiи $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ должны быть поэтому тождественны.

2. Чтобы составить функцiю $\varphi(x)$, удовлетворяющую требованiямъ (2), положимъ:

$$f(x) = (x - \alpha_0)(x - \alpha_1) \ \ldots \ (x - \alpha_n); \tag{3}$$

такимъ образомъ, $f(x)$ будетъ функцiей $(n+1)$-ой степени; положимъ, далѣе,

$$\frac{f(x)}{x - \alpha_0} = f_0(x), \ \frac{f(x)}{x - \alpha_1} = f_1(x), \ \ldots, \ \frac{f(x)}{x - \alpha_n} = f_n(x). \tag{4}$$

Въ такомъ случаѣ $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_n(x)$ будутъ функціи n-той степени, при чемъ

$$f_i(a_k) = 0, \qquad \text{если } i \gtrless k,$$
$$f_i(a_i) = f'(a_i) \qquad (\S\ 66,\ (7),\ (9)\ ^1).$$

Если поэтому положимъ:

$$g_i(x) = \frac{f_i(x)}{f'(a_i)}, \quad \text{гдѣ } i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{5}$$

то

$$g_i(a_k) = 0, \text{ если } i \gtrless k, \text{ а } g_i(a_i) = 1. \tag{6}$$

Если теперь возьмемъ функцію

$$\varphi(x) = A_0 g_0(x) + A_1 g_1(x) + \cdots + A_n g_n(x), \tag{7}$$

то функція $\varphi(x)$ будетъ удовлетворять требованіямъ (2).

Если мы опредѣлимъ функцію $g_i(x)$ изъ равенствъ (4) и (5) и вставимъ полученное выраженіе

$$g_i(x) = \frac{f(x)}{f'(a_i)(x - a_i)}$$

въ равенство (7), а вмѣсто A_i напишемъ $\varphi(a_i)$, то равенство (7) можно будетъ представить въ видѣ:

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{\varphi(a_i)}{(x - a_i) f'(a_i)}; \tag{8}$$

эта формула представляетъ изъ себя тождество для любой функціи $\varphi(x)$ n-той или низшей степени.

Формула (7) извѣстна подъ названіемъ интерполяціонной формулы Лагранжа. Она имѣетъ цѣлью представить функцію, извѣстную намъ только по отдѣльнымъ своимъ значеніямъ, полученнымъ, напримѣръ, изъ наблюденій, въ видѣ цѣлой функціи отъ независимой перемѣнной. Съ извѣстнымъ приближеніемъ это можно сдѣлать и въ томъ случаѣ, когда законъ, которому явленія дѣйствительно слѣдуютъ, не такъ простъ *).

3. Мы воспользуемся здѣсь этой формулой для другой цѣли; именно, мы сдѣлаемъ изъ нея слѣдующій выводъ:

---

[1]) Въ п. п. 3 и 4 § 66-го показано, что значеніе $f'(a)$ есть $Q(a)$, гдѣ $Q(x)$ есть частное отъ дѣленія функціи $f(x)$ на $(x - a)$. Въ данномъ случаѣ это частное есть не что иное, какъ $f_i(x)$.

*) См. статью „Интерполяція" въ „Энциклопедіи математическихъ наукъ", т. I, ч. II.

Если мы выберемъ произвольно $n+1$ различныхъ чиселъ a_i, а затѣмъ составимъ $(n+1)$ функцій $g_i(x)$ по формулѣ (5), то каждая цѣлая функція $\varphi(x)$ n-той или болѣе низкой степени можетъ быть выражена линейно черезъ функціи $g_i(x)$ въ формѣ (7) [5]).

4. Если за a_i мы примемъ цѣлыя числа, то коэффиціенты A_i функцій $g_i(x)$ будутъ раціональными числами, которыя, однако, вообще говоря, не будутъ цѣлыми. Формулой (7) выражаются, конечно, и всѣ цѣлочисленныя функціи $\varphi(x)$; для нихъ коэффиціенты $A_i = \varphi(a_i)$ будутъ цѣлыми числами. Но обратнаго утверждать нельзя: не всегда формула (7) при цѣлыхъ значеніяхъ коэффиціентовъ A_i воспроизводитъ функцію $\varphi(x)$ съ цѣлыми же коэффиціентами.

5. На изображеніи (7) цѣлыхъ функцій Кронекеръ построилъ методъ, посредствомъ котораго конечнымъ числомъ испытаній всегда возможно найти множителей, на которыхъ разлагается цѣлочисленная функція $F(x)$, или установить ея неприводимость. Этотъ методъ представляетъ собой лишь обобщеніе изложеннаго въ п. 1 § 68-го пріема для разысканія раціональныхъ корней цѣлой функціи. Согласно этому методу, если нужно изслѣдовать, разлагается ли цѣлочисленная функція на множителей, то прежде всего слѣдуетъ помощью Евклидова алгориѳма найти общаго наибольшаго дѣлителя всѣхъ коэффиціентовъ и удалить его. Мы можемъ поэтому принять, что $F(x)$ есть функція первообразная. Если первообразная функція приводима, то, согласно п. 5 § 68-го, она разлагается на первообразныхъ же цѣлочисленныхъ множителей:

$$F(x) = \varphi(x)\,\psi(x). \tag{9}$$

Такъ какъ сумма степеней функцій $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ равна степени функціи $F(x)$, то степень одной изъ двухъ функцій φ и ψ не превышаетъ половины степени функціи $F(x)$. Если поэтому $F(x)$ есть функція степени $2n$ или $2n+1$, то одна изъ составляющихъ функцій, — скажемъ, $\varphi(x)$, — будетъ степени не выше n-той; мы можемъ, слѣдовательно, представить ее формулой (7). Выберемъ за a_i произвольныя цѣлыя числа. Въ такомъ случаѣ, въ виду соотношенія (9),

$$F(a_i) = \varphi(a_i)\,\psi(a_i) = A_i\,\psi(a_i),$$

гдѣ A_i, $F(a_i)$ и $\psi(a_i)$ суть цѣлыя числа. Число A_i представляетъ собой поэтому дѣлителя числа $F(a_i)$.

---

[5]) Это выраженіе дастъ формула (7), если за коэффиціенты A_i при функціяхъ $g_i(x)$ въ выраженіи (7) мы примемъ значенія $\varphi(a_i)$ функціи $\varphi(x)$.

Но, когда функція F задана и числа a_i выбраны, то $F(a_i)$ суть извѣстныя цѣлыя числа, которыя имѣютъ каждое только конечное число дѣлителей. Такимъ образомъ, за $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ могутъ быть приняты только комбинаціи дѣлителей чиселъ $F(a_1), F(a_2), \ldots, F(a_n)$; нужно только имѣть въ виду, что каждый дѣлитель можетъ быть взятъ какъ съ однимъ знакомъ, такъ и съ противоположнымъ. Мы получимъ, такимъ образомъ, по формулѣ (7) конечное число функцій $\varphi(x)$, на которыя и нужно дѣлить функцію $F(x)$. Если ни одно изъ этихъ дѣленій не совершится нацѣло, то $F(x)$ есть несомнѣнно неприводимая функція [6]).

Не всѣ комбинаціи дѣлителей чиселъ $F(a_1), F(a_2), \ldots, F(a_n)$, будучи взяты въ качествѣ системы коэффиціентовъ A_i, дадутъ цѣлочисленную функцію $\varphi(x)$; поэтому нѣкоторыя комбинаціи дѣлителей могутъ быть напередъ исключены, и число испытаній можетъ быть такимъ образомъ уменьшено. Рунге (Runge) указалъ пріемъ, дающій возможность исключить этихъ непригодныхъ дѣлителей, и, такимъ образомъ, методъ Кронекера получилъ не только теоретическое, но и практическое значеніе *).

6. Если требуется установить неприводимость функціи въ общемъ случаѣ, то этотъ методъ, понятно, непримѣнимъ. Въ этомъ отношеніи имѣетъ важное значеніе теорема Айзенштейна (Eisenstein), заключающаяся въ слѣдующемъ:

Если коэффиціенты $a_1, \ldots, a_n$ цѣлочисленной функціи n-ой степени $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ всѣ дѣлятся на простое число p, а послѣдній изъ этихъ коэффиціентовъ a_n не дѣлится на p^2, то функція $f(x)$ неприводима; при этомъ число 0 мы считаемъ дѣлящимся на всякое простое число.

Чтобы доказать эту теорему, положимъ, что функція

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

---

[6]) Поясним это нѣсколько подробнѣе. Намъ нужно найти дѣлителя $\varphi(x)$ функціи $F(x)$. Мы выбираемъ произвольныя цѣлыя числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Тогда, какъ выяснено въ текстѣ, $\varphi(a_1) = A_1$ есть дѣлитель числа $F(a_1)$, $\varphi(a_2) = A_2$ есть дѣлитель числа $F(a_2), \ldots, \varphi(a_n) = A_n$ есть дѣлитель числа $F(a_n)$. Мы тогда принимаемъ за A_1 произвольнаго дѣлителя числа $F(a_1)$, за A_2 — произвольнаго дѣлителя числа $F(a_2)$ и т. д. Затѣмъ по формулѣ Лагранжа мы составляемъ функцію $\varphi(x)$, соотвѣтствующую этимъ значеніямъ $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Если $F(x)$ дѣлится на $\varphi(x)$, то нами найденъ дѣлитель функціи $F(x)$. Въ противномъ случаѣ мы беремъ другую комбинацію дѣлителей чиселъ $F(a_1), F(a_2), \ldots, F(a_n)$. Если ни одна изъ этихъ комбинацій не дастъ функціи $\varphi(x)$, на которую $F(x)$ дѣлится безъ остатка, то послѣдняя неприводима.

*) Kronecker, „Crelles Journal", Bd. 94, S. 347. Runge, ibidem, Bd. 99, S. 90.

разлагается на двѣ функціи:

$$\varphi(x) = x^\mu + b_1 x^{\mu-1} + b_2 x^{\mu-2} + \cdots + b_{\mu-1} x + b_\mu,$$
$$\psi(x) = x^\nu + c_1 x^{\nu-1} + c_2 x^{\nu-2} + \cdots + c_{\nu-1} x + c_\nu.$$

Такъ какъ коэффиціенты $b_1, \ldots, b_\mu, c_1, \ldots, c_\nu$ раціональны, то, согласно п. 8 § 68-го, они представляютъ собой цѣлыя числа. Произведя умноженіе, получимъ рядъ равенствъ, которыя располагаемъ теперь въ обратномъ порядкѣ:

$$\begin{aligned} a_n &= b_\mu c_\nu, \\ a_{n-1} &= b_\mu c_{\nu-1} + b_{\mu-1} c_\nu, \\ a_{n-2} &= b_\mu c_{\nu-2} + b_{\mu-1} c_{\nu-1} + b_{\mu-2} c_\nu, \qquad (10) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_\nu &= b_\mu c_{\nu-\mu} + b_{\mu-1} c_{\nu-\mu+1} + \cdots + b_1 c_{\nu-1} + c_\nu. \end{aligned}$$

Непосредственно эти равенства имѣютъ мѣсто лишь въ предположеніи, что $\nu > \mu$; чтобы распространить ихъ и на случай $\nu \leqq \mu$, достаточно положить $c_0 = 1$, а всѣ c съ отрицательными индексами — равными нулю.

Такъ какъ a_n дѣлится на p, но не дѣлится на p^2, то изъ равенства $a_n = b_\mu c_\nu$ слѣдуетъ, что одинъ изъ сомножителей — скажемъ, b_μ — дѣлится на p, а другой c_ν не дѣлится. Но такъ какъ числа $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_\nu$ дѣлятся на p, то изъ соотношеній (10) слѣдуетъ, что и числа $b_{\mu-1}$, $b_{\mu-2}, \ldots, b_1$ дѣлятся на p; въ такомъ случаѣ послѣднее равенство, опредѣляющее a_ν, находится въ противорѣчіи съ нашимъ предположеніемъ, такъ какъ изъ этого равенства слѣдуетъ, что c_ν тоже дѣлится на p. Теорема, стало-быть, доказана.

Изъ этой теоремы вытекаетъ, напримѣръ, неприводимость функціи 5-ой степени:

$$f(x) = x^5 - 4x - 2. \qquad (11)$$

7. Весьма плодотворнымъ оказалось примѣненіе теоремы Айзенштейна къ задачѣ о дѣленіи окружности на равныя части (§ 106).

Функція $x^n - 1$ имѣетъ дѣлителя $x - 1$ и, стало-быть, приводима. Если мы выполнимъ дѣленіе, то, согласно соотношеніямъ (2) и (4) § 63-го, получимъ:

$$X = \frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1.$$

Уравненіе

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 = 0$$

называютъ „уравненіемъ дѣленія окружности“ (Kreisteilungsgleichung); въ тѣхъ случаяхъ, когда n есть число простое, X есть функція неприводимая. Эта теорема, играющая весьма важную роль въ ученіи о дѣленіи окружности, была доказана различными способами сперва Гауссомъ, а впослѣдствіи и нѣкоторыми другими математиками *). Но наиболѣе простое доказательство безспорно принадлежитъ Айзенштейну. Вотъ это доказательство:

Положимъ

$$x = z + 1;$$

тогда съ помощью строки Ньютона найдемъ:

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = z^{n-1} + B_1^{(n)} z^{n-2} + B_2^{(n)} z^{n-3} + \cdots + B_{n-1}^{(n)}.$$

Согласно п. 3 § 60-го, биноміальные коэффиціенты

$$B_1^{(n)},\ B_2^{(n)},\ \ldots,\ B_{n-1}^{(n)}$$

въ случаѣ, когда n есть число простое, какъ мы это здѣсь и предполагаемъ, дѣлятся на n; послѣдній же коэффиціентъ $B_{n-1}^{(n)} = n$ не дѣлится на n^2. Слѣдовательно, X есть неприводимая функція перемѣнной z, а, стало быть, и перемѣнной x.

8. Понятіемъ о приводимости и неприводимости пользуются, однако, и въ болѣе широкомъ смыслѣ.

Неприводимая функція можетъ разлагаться на множителей, которые въ своихъ коэффиціентахъ, кромѣ раціональныхъ чиселъ, содержатъ опредѣленныя ирраціональныя числа, напримѣръ, $\sqrt{-1}$, или $\sqrt{2}$, или, вообще, какой-нибудь квадратный корень; другія функціи могутъ оставаться неразложимыми и при допущеніи такого ирраціональнаго числа. Введеніемъ такого рода ирраціональностей образуется числовой комплексъ (числовой корпусъ), въ которомъ могутъ быть выполнены всѣ раціональныя дѣйствія, кромѣ дѣленія на нуль. Отсюда видно, что этотъ комплексъ въ нашемъ вопросѣ будетъ играть такую же роль, какую до введенія этихъ ирраціональностей играла область раціональныхъ чиселъ; мы назовемъ его поэтому областью раціональности. Присоединеніе ирраціональнаго числа къ раціональнымъ мы будемъ называть пріобщеніемъ ирраціональности [7]).

---

*) M. Ruthinger. „Die Irreduzibilitätsbeweise der Kreisteilungsgleichung". Strassburger Dissertation v. 1907.

[7]) Понятіе объ области раціональности играетъ такую важную роль и въ такой мѣрѣ необходимо для пониманія главы XIX, что мы считаемъ необходимымъ остановиться на этомъ понятіи значительно подробнѣе.

Подъ областью раціональности (Rationalitätsbereich, по Кронекеру) или числовымъ корпусомъ (Zahlkörper, по Дедекинду) разумѣютъ числовой комплексъ, обладающій тѣмъ свойствомъ, что выполненіе каждаго изъ четырехъ ариеметическихъ дѣйствій надъ любыми двумя числами этого комплекса (конечно, кромѣ

Такъ, функція x^2+1 неприводима въ области раціональныхъ чиселъ, но, напротивъ, приводима при пріобщеніи числа $i=\sqrt{-1}$, такъ какъ $x^2+1=(x+i)(x-i)$.

Функція x^4-8x^3-8x-8 дѣлается приводимой по пріобщеніи радикала $\sqrt{3}$; дѣйствительно:

$$x^4-8x^3-8x-8=$$
$$=[x^2-4x-2+2\sqrt{3}(x+1)][x^2-4x-2-2\sqrt{3}(x+1)].$$

дѣленія на нуль) приводитъ къ числу того же комплекса. Этимъ свойствомъ обладаютъ: комплексъ R всѣхъ раціональныхъ чиселъ, комплексъ всѣхъ вещественныхъ чиселъ, комплексъ всѣхъ вещественныхъ и мнимыхъ чиселъ. Но и помимо этого существуетъ множество числовыхъ комплексовъ, обладающихъ тѣмъ же свойствомъ. Такъ, напримѣръ, совокупность всѣхъ чиселъ вида $a+b\sqrt{2}$, гдѣ a и b суть любыя раціональныя числа, обладаетъ указаннымъ свойствомъ и потому образуетъ область раціональности; дѣйствительно, сумма, разность, произведеніе и частное двухъ чиселъ этого комплекса есть число того же комплекса:

$$(a+b\sqrt{2})\pm(a'+b'\sqrt{2})=(a\pm a')+(b\pm b')\sqrt{2},$$
$$(a+b\sqrt{2})(a'+b'\sqrt{2})=(aa'+2bb')+(ab'+ba')\sqrt{2},$$
$$\frac{a+b\sqrt{2}}{a'+b'\sqrt{2}}=\frac{aa'-2bb'}{a'^2-2b'^2}+\frac{(a'b-ab')}{a'^2-2b'^2}\sqrt{2};$$

(такъ какъ a' и b' суть раціональныя числа, то знаменатель $a'^2-2b'^2$ не можетъ быть нулемъ, если a' и b' не обращаются совмѣстно въ нуль).

Замѣтимъ, что въ составъ каждой области раціональности входитъ область R всѣхъ раціональныхъ чиселъ. Дѣйствительно, если въ составъ нѣкоторой области раціональности входитъ число a, то въ составъ ея, согласно опредѣленію, входитъ также число $\frac{a}{a}=1$; а потому въ составъ этой области входятъ также числа: $1+1=2$, $2+1=3$ и т. д., т. е. всѣ цѣлыя числа; отсюда, въ свою очередь, слѣдуетъ, что въ составъ той же области входятъ и всѣ дроби.

Положимъ теперь, что мы имѣемъ нѣкоторую область раціональности P. Пусть ε будетъ число, этой области не принадлежащее. Присоединимъ теперь къ области P всѣ числа, которыя мы можемъ получить путемъ выполненія раціональныхъ дѣйствій надъ числами области P и числомъ ε. Ясно, что этимъ путемъ мы получимъ новую область раціональности, которую мы будемъ обозначать черезъ $P(\varepsilon)$. Этотъ процессъ образованія области $P(\varepsilon)$ изъ области P и называется пріобщеніемъ ирраціональности ε къ области P.

Такъ, напримѣръ, выполненіе раціональныхъ дѣйствій надъ раціональными числами и числомъ $\sqrt{2}$ всегда приводитъ къ числу вида $a+b\sqrt{2}$, гдѣ a и b суть раціональныя числа. Поэтому область, содержащая всѣ числа вида $a+b\sqrt{2}$, гдѣ a и b суть раціональныя числа, представляетъ собой результатъ пріобщенія числа $\sqrt{2}$ къ области R. Точно такъ же совокупность всѣхъ комплексныхъ чиселъ есть результатъ пріобщенія числа i къ области вещественныхъ чиселъ.

Положимъ теперь, что P есть нѣкоторая область раціональности, а $f(x)$ есть цѣлая функція, коэффиціенты которой принадлежатъ этой области; въ такомъ

Часто намъ придется пріобщать не одну ирраціональность, а нѣсколько. Такъ, функція x^4-2x^2+2 остается неприводимой по пріобщеніи радикала $\sqrt{2}$, но дѣлается приводимой, если мы пріобщимъ еще ирраціональность $\sqrt{2+2\sqrt{2}}$:

$$x^4-2x^2+2=\left(x^2-\sqrt{2+2\sqrt{2}}\,x+\sqrt{2}\right)\left(x^2+\sqrt{2+2\sqrt{2}}\,x+\sqrt{2}\right).$$

Теорема 3 § 68-го справедлива и при обобщенномъ понятіи о приводимости:

Если коэффиціенты функцій $F(x)$ и $f(x)$ принадлежатъ какой-нибудь расширенной области раціональности, а функція $f(x)$, неприводимая въ этой области, имѣетъ общій корень съ функціей $F(x)$, то $F(x)$ дѣлится на $f(x)$.

случаѣ говорятъ, что функція $f(x)$ принадлежитъ этой области. Такъ, функція x^2-2x+5 принадлежитъ области R, функція $x^2-2x\sqrt{2}+3-\sqrt{2}$ принадлежитъ области $R(\sqrt{2})$.

Функція, принадлежащая нѣкоторой области раціональности, называется приводимой въ этой области, если она разлагается на множителей, принадлежащихъ той же области. Въ противномъ случаѣ она называется неприводимой въ этой области.

Функція, неприводимая въ нѣкоторой области, можетъ сдѣлаться приводимой, если мы расширимъ область путемъ пріобщенія нѣкоторой ирраціональности. Такъ, функція x^2-2, принадлежащая области R, неприводима въ этой области; но, если мы пріобщимъ къ этой области $\sqrt{2}$, то въ области $R(\sqrt{2})$ функція разлагается на множителей $x-\sqrt{2}$ и $x+\sqrt{2}$. Эта идея выясняется въ текстѣ на другихъ примѣрахъ.

ГЛАВА XII.

Основныя теоремы алгебры.

---

§ 70. Симметрическія функціи.

1. Условимся разумѣть подъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ совершенно произвольныя (неопредѣленныя, перемѣнныя) величины. Какъ мы видѣли въ § 66, можно составить функцію n-той степени $f(x)$, корнями которой будутъ эти n величинъ; а именно:

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) \tag{1}$$

и есть требуемая функція; коэффиціентъ при x^n здѣсь равенъ 1. Располагая $f(x)$ по степенямъ x, получимъ:

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n, \tag{2}$$

гдѣ

$$\begin{aligned} -a_1 &= \Sigma x_1, \\ a_2 &= \Sigma x_1 x_2, \\ -a_3 &= \Sigma x_1 x_2 x_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm a_n &= x_1 x_2 x_3 \ldots x_n, \end{aligned} \tag{3}$$

т. е. $-a_1$ есть сумма всѣхъ величинъ x_i, a_2 — сумма произведеній этихъ величинъ по двѣ, $-a_3$ — сумма произведеній тѣхъ же величинъ по три и т. д., наконецъ, $\pm a_n$ есть произведеніе всѣхъ x_i (ср. § 60, 1).

Итакъ, коэффиціенты функціи $f(x)$ можно выразить раціонально черезъ ея корни.

Суммы, стоящія въ правыхъ частяхъ равенствъ (3), т. е. сумма всѣхъ x_i, сумма произведеній этихъ величинъ по двѣ, по три и т. д., суть симметрическія функціи отъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$; это значитъ, что эти функціи не мѣняются, если какимъ-либо образомъ переставить величины

$x_1, x_2, \ldots, x_n$. Эти функціи $-a_1$, a_2, $-a_3$, ..., $\pm a_n$ мы назовемъ основными симметрическими функціями.

2. Опредѣлимъ теперь, что мы будемъ, вообще, разумѣть подъ симметрическими функціями.

Выраженіе $S(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, составленное посредствомъ дѣйствій сложенія, вычитанія и умноженія надъ n величинами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и какими-нибудь другими числами, называется симметрической функціей отъ этихъ величинъ, если оно не мѣняется при произвольной перестановкѣ величинъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

3. Относительно симметрическихъ функцій имѣетъ мѣсто теорема, важная для всей алгебры. Эта теорема заключается въ слѣдующемъ:

Каждая симметрическая функція $S(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можетъ быть выражена въ видѣ раціональной и цѣлой функціи отъ основныхъ симметрическихъ функцій.

Иначе говоря, при помощи сложенія, вычитанія и умноженія можно образовать такое выраженіе $F(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, что равенство

$$S(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(a_1, a_2, \ldots, a_n) \tag{4}$$

при замѣнѣ величинъ $a_1, \ldots, a_n$ ихъ выраженіями (3) обращается въ тождество.

Мы приведемъ очень простое и изящное доказательство этой теоремы, данное Коши.

Ясно, что теорема справедлива для $n = 1$; въ этомъ случаѣ мы имѣемъ только одну основную симметрическую функцію $-a_1 = x_1$. Мы докажемъ нашу теорему для всякаго n, если, пользуясь совершенной индукціей, допустимъ, что она справедлива для $n-1$ перемѣнныхъ величинъ, и въ этомъ предположеніи докажемъ, что она справедлива и для функцій, содержащихъ n перемѣнныхъ.

4. Чтобы получить основныя симметрическія функціи $n-1$ величинъ $x_2, x_3, \ldots, x_n$, составимъ частное

$$\varphi(x) = f(x)/(x - x_1),$$

которое равно $(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)$; слѣдовательно,

$$(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n) = x^{n-1} + q_1 x^{n-2} + q_2 x^{n-3} + \cdots + q_{n-1},$$

гдѣ (§ 66, (6)):

$$\begin{aligned} q_1 &= x_1 + a_1, \\ q_2 &= x_1^2 + a_1 x_1 + a_2, \\ q_3 &= x_1^3 + a_1 x_1^2 + a_2 x_1 + a_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_{n-1} &= x_1^{n-1} + a_1 x_1^{n-2} + \cdots + a_{n-1}. \end{aligned} \tag{5}$$

Итакъ, основныя симметрическія функціи величинъ $x_2, x_3, \ldots, x_n$ суть цѣлыя функціи величинъ x_1 и $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Предполагая же, что наша теорема справедлива для $n-1$ величинъ, мы можемъ утверждать, что всякая симметрическая функція отъ величинъ $x_2, \ldots, x_n$ выражается раціональной и цѣлой функціей отъ $x_1, a_1, \ldots, a_{n-1}$.

Представимъ себѣ, что данная намъ симметрическая функція

$$S = S(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

расположена по степенямъ x_1; тогда коэффиціенты отдѣльныхъ степеней будутъ симметрическими функціями отъ $x_2, \ldots, x_n$ и, слѣдовательно, будутъ выражаться цѣлыми функціями отъ величинъ $x_1, a_1, \ldots, a_{n-1}$ Итакъ:

Предполагая теорему 3 справедливой для симметрическихъ функцій отъ $n-1$ величинъ, мы получили, что функція S можетъ быть представлена въ видѣ цѣлой функціи отъ величинъ $x_1, a_1, \ldots, a_{n-1}$.

Полученное такимъ образомъ выраженіе для S обозначимъ черезъ $F(x_1, a_1, \ldots, a_{n-1})$. Если теперь цѣлую функцію $F(x, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ мы раздѣлимъ на $f(x)$, то, согласно § 66, (5), получимъ частное Q и остатокъ R, степень котораго относительно x не превышаетъ $n-1$:

$$F(x) = Qf(x) + R(x), \tag{6}$$

гдѣ Q и R суть цѣлыя функціи отъ $a_1, a_2, \ldots, a_n$, при чемъ послѣдняя, кромѣ $x, a_1, \ldots, a_{n-1}$, содержитъ также и a_n. Положимъ въ послѣдней формулѣ $x = x_1$; тогда $f(x_1) = 0$ и $F = S$; слѣдовательно:

$$S = R(x_1) = R(x_1, a_1, \ldots, a_n),$$

гдѣ R есть цѣлая функція отъ $x_1, a_1, \ldots, a_n$, степень которой относительно x_1 не превышаетъ $n-1$.

По предположенію, S есть симметрическая функція отъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Она не мѣняется, если, напримѣръ, замѣстить другъ другомъ x_1 и x_2; не мѣняются при этомъ и $a_1, a_2, \ldots, a_n$; слѣдовательно, S равно также $R(x_2)$. Вообще

$$S = R(x_1) = R(x_2) = R(x_3) = \cdots = R(x_n).$$

Цѣлая функція $R(x) - S$, степень которой не превышаетъ $n-1$, обращается въ нуль для n значеній перемѣннаго x: $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$. Согласно § 66, 9, она должна сводиться къ нулю тождественно. Положимъ:

$$R(x) = A_0 x^{n-1} + A_1 x^{n-2} + \cdots + A_{n-1};$$

тогда всѣ коэффиціенты A_0, A_1, A_2, ..., $(A_{n-1}-S)$ должны быть равны нулю. Слѣдовательно,

$$S=A_{n-1},$$

т. е. S равно нѣкоторой цѣлой функціи отъ a_1, a_2, a_3, ..., a_n, что и требовалось доказать [1]).

5. Если функція $S(x_1\ x_2, \ldots, x_n)$ въ своемъ первоначальномъ видѣ имѣетъ только цѣлыя коэффиціенты, то и функція $F(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ также имѣетъ только цѣлые коэффиціенты.

Въ самомъ дѣлѣ, если мы примемъ это предложеніе для функцій отъ $n-1$ перемѣнныхъ, то справедливость его для функцій отъ n перемѣнныхъ будетъ вытекать изъ того, что при дѣленіи, приводящемъ къ тождеству (6), мы ни разу не получимъ дробныхъ коэффиціентовъ, какъ это слѣдуетъ изъ § 66.

6. Приведенное доказательство теоремы о симметрическихъ функціяхъ даетъ способъ вычисленія ихъ. Правда, большей частью дѣло не обходится безъ продолжительныхъ вычисленій. Разсмотримъ, напримѣръ, функцію ($n=3$)

$$D=(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2,$$

которая, очевидно, есть симметрическая функція отъ x_1, x_2, x_3. Пусть

$$-a_1=x_1+x_2+x_3,\ a_2=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3,\ -a_3=x_1x_2x_3$$

будутъ основныя симметрическія функціи; тогда количества x_1, x_2 и x_3 будутъ служить корнями функціи третьей степени:

$$f(x)=x^3+a_1x^2+a_2x+a_3,$$

а x_2, x_3 — корнями функціи второй степени:

$$\frac{f(x)}{x-x_1}=x^2+(x_1+a_1)x+(x_1^2+a_1x_1+a_2).$$

---

[1]) Полезно выяснить себѣ тождества (5) на частномъ примѣрѣ: положимъ что мы имѣемъ четыре перемѣнныхъ; тогда

$$\begin{aligned}-q_1&=x_2+x_3+x_4,\\ q_2&=x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4,\\ -q_3&=x_2x_3x_4;\end{aligned}$$

съ другой стороны,

$$\begin{aligned}-a_1&=x_1+x_2+x_3+x_4,\\ a_2&=x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4,\\ -a_3&=x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4,\\ a_4&=x_1x_2x_3x_4.\end{aligned}$$

Отсюда вытекаютъ равенства:

$$x_2+x_3=-(x_1+a_1),\quad x_2x_3=x_1^2+a_1x_1+a_2,$$
$$(x_1-x_2)(x_1-x_3)=3x_1^2+2a_1x_1+a_2,$$
$$(x_2-x_3)^2=(x_2+x_3)^2-4x_2x_3=-3x_1^2-2a_1x_1-(4a_2-a_1^2).$$

Слѣдовательно:

$$-D=(3x_1^2+2a_1x_1+a_2)^2(3x_1^2+2a_1x_1+4a_2-a_1^2).$$

Если здѣсь вмѣсто x_1 напишемъ x и полученное выраженіе раздѣлимъ на $f(x)$, то остатокъ, который не долженъ зависѣть отъ x, и будетъ представлять собой требуемое выраженіе для D.

Можно, впрочемъ, упростить вычисленіе, если возвысить въ квадратъ выраженіе $3x_1^2+2a_1x+a_2$ и понизить его степень при помощи уравненія $f(x_1)=0$; этимъ путемъ получимъ:

$$(3x_1^2+2a_1x_1+a_2)^2=(a_1^2-3a_2)x_1^2+(a_1a_2-9a_3)x_1+(a_2^2-3a_1a_3).$$

Помножимъ это выраженіе на $3x_1^2+2a_1x_1+4a_2-a_1^2$ и, замѣнивъ въ результатѣ x_1 на x, раздѣлимъ его на $f(x)$. Такимъ путемъ вычисленія идутъ быстро и въ конечномъ результатѣ даютъ:

$$D=a_1^2a_2^2+18a_1a_2a_3-4a_1^3a_3-4a_2^3-27a_3^2.$$

Это выраженіе носитъ названіе *дискриминанта* функціи третьей степени. *Если* $D=0$, *то это значитъ, что изъ трехъ корней* x_1, x_2, x_3 *два равны между собой.*

§ 71. Суммы одинаковыхъ степеней.

1. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ можно выразить симметрическую функцію еще болѣе простымъ способомъ черезъ основныя. Разсмотримъ особенно важный изъ случаевъ этого рода.

Пусть

$$\frac{f(x)}{x-x_1}=\varphi_1(x),\quad \frac{f(x)}{x-x_2}=\varphi_2(x),\ \ldots,\ \frac{f(x)}{x-x_n}=\varphi_n(x)$$

и

$$f'(x)=nx^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+(n-2)a_2x^{n-3}+\cdots+2a_{n-2}x+a_{n-1},\quad (1)$$

Равенства (5) выражаютъ, такимъ образомъ, слѣдующія тождества:

$$-(x_2+x_3+x_4)=x_1-(x_1+x_2+x_3+x_4);$$
$$x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=x_1^2-(x_1+x_2+x_3+x_4)x_1+$$
$$+(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4);$$
$$-x_2x_3x_4=x_1^3-(x_1+x_2+x_3+x_4)x_1^2+$$
$$+(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)x_1-(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4).$$

при чемъ, согласно § 66,

$$\varphi_1(x_1) = f'(x_1),\ \varphi_1(x_2) = 0,\ \ldots,\ \varphi_1(x_n) = 0;$$

такія же равенства имѣютъ мѣсто и для $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$.

Сумма этихъ функцій

$$F(x) = \frac{f(x)}{x - x_1} + \frac{f(x)}{x - x_2} + \cdots + \frac{f(x)}{x - x_n},$$

или

$$F(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \cdots + \varphi_n(x),$$

есть цѣлая функція $(n - 1)$-ой степени; при этомъ

$$F(x_1) = f'(x_1),\ F(x_2) = f'(x_2),\ \ldots,\ F(x_n) = f'(x_n).$$

Разность $F(x) - f'(x)$ точно такъ же есть цѣлая функція, степень которой не превосходитъ $n - 1$. Эта разность обращается въ нуль для $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$, т. е. для n значеній x; слѣдовательно, по теоремѣ, изложенной въ п. 9 § 67-го, она сводится къ нулю тождественно. Итакъ, мы имѣемъ слѣдующее тождество, т. е. равенство, справедливое для всѣхъ значеній x:

$$\frac{f(x)}{x - x_1} + \frac{f(x)}{x - x_2} + \cdots + \frac{f(x)}{x - x_n} = f'(x). \tag{2}$$

Легко видѣть, что это тождество есть частный случай формулы (8) § 69-го, а именно тотъ случай, когда $\varphi(x) = f'(x)$.

2. Положимъ

$$\frac{f(x)}{x - x_1} = x^{n-1} + q_1 x^{n-2} + q_2 x^{n-3} + \cdots + q_{n-1}.$$

Тогда, согласно § 66, (6),

$$\begin{aligned}
q_1 &= x_1 + a_1,\\
q_2 &= x_1^2 + a_1 x_1 + a_2,\\
q_3 &= x_1^3 + a_1 x_1^2 + a_2 x_1 + a_3,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
q_{n-1} &= x_1^{n-1} + a_1 x_1^{n-2} + a_2 x_1^{n-3} + \cdots + a_{n-1}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Замѣняя здѣсь x_1 послѣдовательно черезъ $x_2, x_3, \ldots, x_n$, мы получимъ всѣ члены суммы (2).

Если обозначимъ черезъ Σq_1, Σq_2, Σq_3, ..., Σq_{n-1} суммы составленныхъ такимъ образомъ выраженій q, то равенство (2) приметъ видъ:

$$nx^{n-1} + x^{n-2}\Sigma q_1 + x^{n-3}\Sigma q_2 + \cdots + \Sigma q_{n-1} = f'(x)\ {}^{2)};$$

сравнивая это выраженіе $f'(x)$ съ (1), получимъ:

$$(n-1)a_1 = \Sigma q_1,\ (n-2)a_2 = \Sigma q_2,\ \ldots,\ a_{n-1} = \Sigma q_{n-1}. \qquad (4)$$

Введемъ теперь симметрическія функціи, представляющія собой **суммы одинаковыхъ степеней** перемѣнныхъ, и примемъ для нихъ обозначенія:

$$\begin{aligned} s_1 &= x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n, \\ s_2 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ s_k &= x_1^k + x_2^k + x_3^k + \cdots + x_n^k. \end{aligned} \qquad (5)$$

Если мы по формуламъ (3) образуемъ Σq_i, то найдемъ: [3])

$$\begin{aligned} \Sigma q_1 &= s_1 + na_1, \\ \Sigma q_2 &= s_2 + a_1 s_1 + na_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Sigma q_{n-1} &= s_{n-1} + a_1 s_{n-2} + a_2 s_{n-3} + \cdots + na_{n-1}. \end{aligned}$$

---

[2]) Это получается изъ соотношенія (2) путемъ почленнаго сложенія равенствъ:

$$\frac{f(x)}{x-x_1} = x^{n-1} + q_1' x^{n-2} + q_2' x^{n-3} + \cdots + q_{n-1}',$$

$$\frac{f(x)}{x-x_2} = x^{n-1} + q_1'' x^{n-2} + q_2'' x^{n-3} + \cdots + q_{n-1}'',$$

$$\frac{f(x)}{x-x_3} = x^{n-1} + q_1''' x^{n-2} + q_2''' x^{n-3} + \cdots + q_{n-1}''',$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

При этомъ

$$\begin{aligned} &q_1' = x_1 + a_1, \quad q_2' = x_1^2 + a_1 x_1 + a_2, \quad q_3' = x_1^3 + a_1 x_1^2 + a_2 x_1 + a_3, \ldots \\ &q_1'' = x_2 + a_1, \quad q_2'' = x_2^2 + a_1 x_2 + a_2, \quad q_3'' = x_2^3 + a_1 x_2^2 + a_2 x_2 + a_3, \ldots \\ &q_1''' = x_3 + a_1, \quad q_2''' = x_3^2 + a_1 x_3 + a_2, \quad q_3''' = x_3^3 + a_1 x_3^2 + a_2 x_3 + a_3, \ldots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

[3]) См. предыдущее примѣчаніе:

$$\begin{aligned} \Sigma q_1 &= q_1' + q_1'' + q_1''' + \cdots + q_1^{(n)}, \\ \Sigma q_2 &= q_2' + q_2'' + q_2''' + \cdots + q_2^{(n)}. \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Подставляя эти выраженія въ равенства (4), получимъ:

$$
\begin{aligned}
0 &= s_1 + a_1, \\
0 &= s_2 + a_1 s_1 + 2a_2, \\
0 &= s_3 + a_1 s_2 + a_2 s_1 + 3a_3, \\
0 &= s_4 + a_1 s_3 + a_2 s_2 + a_3 s_1 + 4a_4, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
0 &= s_{n-1} + a_1 s_{n-2} + a_2 s_{n-3} + a_3 s_{n-4} + \cdots + (n-1)a_{n-1}.
\end{aligned} \tag{6}
$$

Эти уравненія легко разрѣшаются послѣдовательно относительно суммъ $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$. Мы получимъ эти суммы въ функціяхъ отъ $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$.

$$
\begin{aligned}
s_1 &= -a_1, \\
s_2 &= a_1^2 - 2a_2, \\
s_3 &= -a_1^3 + 3a_1 a_2 - 3a_3, \\
s_4 &= a_1^4 - 4a_1^2 a_2 + 4a_1 a_3 + 2a_2^2 - 4a_4, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{7}
$$

Съ помощью суммъ одинаковыхъ степеней легче, чѣмъ другимъ путемъ, вычисляются многія другія симметрическія функціи.

3. Основныя симметрическія функціи можно также выразить черезъ суммы $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$; напримѣръ:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= -s_1, \\
2a_2 &= s_1^2 - s_2, \\
2.3a_3 &= -s_1^3 + 3s_1 s_2 - 2s_3, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{8}
$$

4. Съ помощью равенствъ (6) можно находить суммы s_k, пока $k < n$. Очень легко, впрочемъ, получить равенства для нахожденія $s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, \ldots$, составляя суммы [4]):

$$\Sigma f(x_1) = 0, \quad \Sigma x_1 f(x_1) = 0, \quad \Sigma x_1^2 f(x_1) = 0, \; \ldots,$$

[4]) Такъ какъ

$$
\begin{aligned}
f(x_1) &= x_1^n + a_1 x_1^{n-1} + a_2 x_1^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x_1 + a_n = 0, \\
f(x_2) &= x_2^n + a_1 x_2^{n-1} + a_2 x_2^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x_2 + a_n = 0, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
f(x_n) &= x_n^n + a_1 x_n^{n-1} + a_2 x_n^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x_n + a_n = 0,
\end{aligned}
$$

а именно:

$$
\begin{aligned}
0 &= s_n + a_1 s_{n-1} + a_2 s_{n-2} + \cdots + n a_n,\\
0 &= s_{n+1} + a_1 s_n + a_2 s_{n-1} + \cdots + a_n s_1,\\
0 &= s_{n+2} + a_1 s_{n+1} + a_2 s_n + \cdots + a_n s_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Тѣмъ же путемъ можно вычислить $s_{-1}, s_{-2}, \ldots$; составимъ для этого суммы:

$$\Sigma x_1^{-1} f(x_1) = 0, \quad \Sigma x_1^{-2} f(x_1) = 0, \ldots,$$

т. е.

$$
\begin{aligned}
0 &= s_{n-1} + a_1 s_{n-2} + a_2 s_{n-3} + \cdots + a_n s_{-1},\\
0 &= s_{n-2} + a_1 s_{n-3} + a_2 s_{n-4} + \cdots + a_n s_{-2},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

при чемъ сумму s_0 нужно полагать равной n. Замѣтимъ, что въ выраженія суммъ $s_{-1}, s_{-2}, \ldots$ черезъ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ послѣднія будутъ входить также въ составъ знаменателей.

Съ помощью равенствъ (8) и (9) можно выразить также и a_n черезъ суммы $s_1, s_2, \ldots, s_n$.

Въ виду этого мы можемъ сказать, что функція $f(x)$ вполнѣ опредѣляется, если извѣстно, что $a_0 = 1$, и если даны суммы одинаковыхъ степеней ея корней; кромѣ того, любая симметрическая функція корней функціи $f(x)$ можетъ быть выражена черезъ $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$.

Выраженія функцій s черезъ a, какъ видно изъ предыдущихъ формулъ, имѣютъ коэффиціентами только цѣлыя числа; выраженія же функцій a черезъ суммы s содержатъ и дробные коэффиціенты *).

то и сумма этихъ выраженій равна нулю; это и выражено въ текстѣ равенствомъ $\Sigma f(x_1) = 0$. Производя же сложеніе въ дѣйствительности, мы получимъ первое изъ равенствъ (9). Точно такъ же, произведенія $x_1 f(x_1)$, $x_2 f(x_2) \ldots x_n f(x_n)$ равны нулю, а потому и сумма ихъ равна нулю: это и выраженно въ текстѣ равенствомъ $\Sigma x_1 f(x_1) = 0$. Раскрывая произведенія и складывая ихъ, получимъ второе изъ равенствъ (9) и т. д.

*) Первыя выраженія для суммъ одинаковыхъ степеней далъ Альбертъ Жираръ (Albert Girard) въ сочиненіи „Invention nouvelle en l'algèbre" (1629). Эти выраженія были обобщены Ньютономъ („Arithmetica universalis", 1707) Поэтому формулы (6) носятъ названіе Ньютоновыхъ формулъ.

5. Разсмотримъ нѣсколько примѣровъ. Положимъ, что нужно вычислить симметрическую функцію $\Sigma x_1^2 x_2^2$, т. е. сумму произведеній квадратовъ перемѣнныхъ x_i, взятыхъ попарно. Обратимся для этого къ равенству

$$(\Sigma x_1^2)^2 = 2\Sigma x_1^2 x_2^2 + \Sigma x_1^4,$$

или

$$\begin{aligned}\Sigma x_1^2 x_2^2 &= \tfrac{1}{2}(s_2^2 - s_4) = \\ &= a_2^2 - 2a_1 a_3 + 2a_4.\end{aligned}$$

Вотъ еще задача, которая рѣшается съ помощью суммъ одинаковыхъ степеней. Пусть

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n$$

будетъ данная функція n-той степени отъ x; нужно найти функцію

$$F(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \cdots + A_n,$$

корни которой равны квадратамъ корней функціи $f(x)$.

Если $s_1, s_2, s_3, \ldots$ суть суммы одинаковыхъ степеней корней функціи $f(x)$, то $s_2, s_4, s_6, \ldots$ суть суммы соотвѣтствующихъ степеней корней функціи $F(x)$; формулы п. п. 3-го и 4-го дадутъ для коэффиціентовъ $A_1, A_2, \ldots$ выраженія:

$$\begin{aligned}A_1 &= -s_2,\\ 2A_2 &= s_2^2 - s_4,\\ 6A_3 &= -s_2^3 + 3s_2 s_4 - 2s_6,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Отсюда съ помощью формулъ (7) можно выразить $A_1, A_2, \ldots$ черезъ $a_1, a_2, \ldots$; напримѣръ:

$$\begin{aligned}A_1 &= 2a_2 - a_1^2,\\ A_2 &= a_2^2 - 2a_1 a_3 + 2a_4.\end{aligned}$$

Какъ и слѣдовало ожидать, выраженіе A_2 тождественно съ выраженіемъ, найденнымъ выше для $\Sigma x_1^2 x_2^2$.

Этотъ способъ примѣнимъ и въ томъ случаѣ, если по данной функціи $f(x)$ нужно опредѣлить другую, корни которой суть любыя — скажемъ, k-тыя — степени корней функціи $f(x)$. Суммы одинаковыхъ степеней корней функціи $F(x)$ будутъ тогда $s_k, s_{2k}, s_{3k}, \ldots$. Коэффиціенты A опредѣляются по тѣмъ же формуламъ п. п. 3-го и 4-го.

6. Можно еще другимъ путемъ опредѣлить коэффиціенты функціи $F(x)$, корни которой суть квадраты корней функціи $f(x)$. Сь этой цѣлью положимъ $x^2 = y$; если вмѣсто y подставимъ одинъ изъ корней функціи $F(x)$, то либо $f(\sqrt{y})$, либо $f(-\sqrt{y})$ обратится въ нуль. Такимъ образомъ,

$$F(y) = \pm f(\sqrt{y}) f(-\sqrt{y}), \tag{10}$$

при чемъ верхній знакъ имѣетъ мѣсто при четномъ, нижній при нечетномъ n [5]).

Разложимъ $f(x)$ на два слагаемыхъ $f_1(x) + x f_2(x)$, изъ которыхъ первое содержитъ всѣ четныя, а второе — нечетныя степени x; тогда:

$$F(y) = \pm \left(f_1(\sqrt{y}) + \sqrt{y} f_2(\sqrt{y})\right)\left(f_1(\sqrt{y}) - \sqrt{y} f_2(\sqrt{y})\right) =$$

$$= \pm \left[\left(f_1(\sqrt{y})\right)^2 - y\left(f_2(\sqrt{y})\right)^2\right].$$

Въ послѣднюю формулу совершенно не входятъ нечетныя степени $\sqrt{y}$. Пусть, напримѣръ, n есть число четное; тогда:

$$f_1(x) = x^n + a_2 x^{n-2} + a_4 x^{n-4} + \cdots,$$
$$f_2(x) = \qquad a_1 x^{n-2} + a_3 x^{n-4} + \cdots,$$

и потому

$$F(y) = \left(y^{\frac{n}{2}} + a_2 y^{\frac{n-2}{2}} + a_4 y^{\frac{n-4}{2}} + \cdots\right)^2 - y\left(a_1 y^{\frac{n-2}{2}} + a_3 y^{\frac{n-4}{2}} + \cdots\right)^2 =$$

$$= y^n + (2a_2 - a_1^2) y^{n-1} + (a_2^2 - 2a_1 a_3 + 2a_4) y^{n-2} + \cdots$$

Вычисленія при этомъ пріемѣ еще проще, чѣмъ при пользованіи суммами одинаковыхъ степеней; вмѣстѣ съ тѣмъ совершенно ясно, что численные коэффиціенты получаются въ видѣ цѣлыхъ чиселъ; при употребленіи же перваго метода это непосредственно не очевидно.

§ 72. Основная теорема о существованіи корня алгебраическаго уравненія.

1. Выше мы видѣли, что всегда можно опредѣлить n коэффиціентовъ цѣлой функціи $f(x)$ такъ, что эта функція будетъ имѣть корнями n произвольно заданныхъ величинъ; въ извѣстномъ смыслѣ можно сказать,

---

[5]) Правая часть равенства (10), какъ обнаруживаютъ послѣдующія вычисленія, есть цѣлая функція n-ой степени отъ y; такъ какъ она имѣетъ тѣ же корни, что и $F(y)$, а старшіе коэффиціенты при указанномъ соотвѣтствіи знаковъ равны, то обѣ функціи тождественны, что и выражается равенствомъ (10).

что многообразіе функцій съ n корнями при различныхъ значеніяхъ n столь же велико, какъ и многообразіе всѣхъ функцій n-той степени $f(x)$, которыя вообще можно составить. Этимъ еще не доказывается, конечно, что оба эти многообразія совершенно покрываютъ другъ друга; другими словами: еще не доказано, что функція n-той степени всегда имѣетъ n корней.

Достаточно, впрочемъ, доказать, что при всякомъ n каждая функція n-той степени имѣетъ, по меньшей мѣрѣ, одинъ корень (вещественный или мнимый). Въ самомъ дѣлѣ, пусть α есть корень функціи $f(x)$; функція $(n-1)$-ой степени $\frac{f(x)}{x-\alpha}$ точно такъ же имѣетъ корень β и т. д.; такимъ путемъ мы заключимъ, что функція $f(x)$ разлагается на n линейныхъ множителей [6].

Въ этой теоріи нѣтъ необходимости ограничиваться разсмотрѣніемъ функцій съ вещественными коэффиціентами; если мы докажемъ, что каждая функція съ вещественными коэффиціентами имѣетъ корень, то распространить это на случай мнимыхъ коэффиціентовъ не составитъ труда. Чтобы убѣдиться въ этомъ, возьмемъ двѣ функціи $f_1(x)$ и $f_2(x)$ съ сопряженными мнимыми коэффиціентами; тогда $f(x) = f_1(x) f_2(x)$ есть функція съ вещественными коэффиціентами. Если $f(x)$ имѣетъ корень α_1, то либо $f_1(\alpha_1) = 0$, либо $f_2(\alpha_1) = 0$. Пусть $f_1(\alpha_1) = 0$; тогда, если α_2 есть число, сопряженное съ α_1, то $f_2(\alpha_2) = 0$ (§ 48, 6). Итакъ, каждая изъ функцій $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имѣетъ корень.

Слѣдовательно, намъ достаточно доказать слѣдующую теорему:

Каждая цѣлая функція $f(x)$ съ вещественными коэффиціентами имѣетъ, по крайней мѣрѣ, одинъ вещественный или мнимый корень.

Эта теорема настолько важна, что ее называютъ основной теоремой алгебры. Впервые ее доказалъ Гауссъ. Онъ далъ этой теоремѣ три доказательства, построенныхъ на совершенно различныхъ основаніяхъ.

Второе и третье изъ этихъ доказательствъ не могутъ быть проведены элементарно. Первое же, опубликованное Гауссомъ въ докторской диссертаціи (1799 г.) и 50 годами позже существенно имъ упрощенное и усовершенствованное, такъ несложно и ясно, что его легко понять, обладая только элементарными знаніями. Желая изложить это доказательство именно въ такой удобопонятной формѣ, мы будемъ слѣдовать второй редакціи.

Въ дальнѣйшемъ мы ограничимся случаемъ, когда функція $f(x)$ имѣетъ вещественные коэффиціенты. По сдѣланному выше замѣчанію,

---

[6]) И, слѣдовательно, имѣетъ n корней.

мы не внесемъ этимъ существеннаго ограниченія, а между тѣмъ это даетъ значительное упрощеніе.

2. Итакъ, пусть

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_n \tag{1}$$

будетъ цѣлая функція n-той степени, а коэффиціенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — данныя вещественныя числа. Нужно доказать, что существуетъ вещественное или мнимое число, которое, будучи подставлено вмѣсто z, обращаетъ функцію $f(z)$ въ нуль. Положимъ

$$z = x + iy$$

и будемъ изображать z точкой на плоскости, какъ это изложено въ § 51. Тогда x и y будутъ координатами точки, которую мы для краткости будемъ называть точкой z.

Функція $f(z)$ въ каждой точкѣ этой плоскости имѣетъ опредѣленное значеніе; нужно доказать, что существуетъ, по крайней мѣрѣ, одна точка, въ которой $f(z)$ имѣетъ значеніе, равное нулю. Такую точку можно назвать корневой точкой функціи $f(z)$. Отдѣлимъ въ функціи $f(z)$ вещественную часть отъ мнимой:

$$f(z) = X + iY. \tag{2}$$

Составныя части X и Y легко найти, примѣняя къ степенямъ числа $(x + iy)$ формулу бинома. Впрочемъ, мы получимъ съ помощью теоремы Муавра болѣе простыя формулы, если будемъ пользоваться полярными координатами.

Итакъ, положимъ:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

$$(x+iy)^k = r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi);$$

согласно п. 8 § 51-го, получимъ:

$$\begin{aligned} X &= r^n\cos n\varphi + a_1 r^{n-1}\cos(n-1)\varphi + a_2 r^{n-2}\cos(n-2)\varphi + \cdots + a_n, \\ Y &= r^n\sin n\varphi + a_1 r^{n-1}\sin(n-1)\varphi + a_2 r^{n-2}\sin(n-2)\varphi + \cdots + a_{n-1} r\sin\varphi. \end{aligned} \tag{3}$$

3. Мы дадимъ сейчасъ другія выраженія для X и Y, которыми воспользуемся для вывода, очень важнаго для послѣдующаго изложенія.

Положимъ (см. томъ II, § 29, 4)

$$t = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi, \quad \cos\varphi = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin\varphi = \frac{2t}{1+t^2}.$$

тогда

$$\zeta = r\frac{(1+it)^2}{1+t^2}.$$

Отсюда слѣдуетъ:

$$(1+t^2)^n(X+iY) = r^n(1+it)^{2n} + a_1 r^{n-1}(1+it)^{2n-2}(1+t^2) + \cdots + a_n(1+t^2)^n;$$

примѣняя формулу бинома къ отдѣльнымъ членамъ и располагая ихъ по степенямъ t, получимъ:

$$X = \frac{F(t)}{(1+t^2)^n}, \quad Y = \frac{\Phi(t)}{(1+t^2)^n}, \tag{4}$$

гдѣ $F(t)$ и $\Phi(t)$ суть цѣлыя функціи отъ t, степеней не выше $2n$ и $2n-1$. Помимо того $F(t)$ и $\Phi(t)$ суть цѣлыя функціи n-той степени отъ r, которыя могутъ обращаться въ нуль тождественно относительно перемѣнной t, въ лучшемъ случаѣ, для конечнаго числа значеній r.

4. Всѣ точки плоскости xy, которымъ соотвѣтствуетъ постоянное значеніе модуля r, лежатъ на окружности радіуса r съ центромъ въ началѣ координатъ. Будемъ обозначать эту окружность черезъ (r). Если мы захотимъ найти точки, въ которыхъ X или Y обращаются въ нуль и которыя лежатъ на этой окружности, то нужно при постоянномъ r рѣшить уравненія: $F(t)=0$ и $\Phi(t)=0$, имѣя въ виду, что каждому значенію t соотвѣтствуетъ по одному значенію $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$, а, слѣдовательно, и одна точка на окружности.

Нужно замѣтить, что, кромѣ корней уравненія $\Phi(t)=0$, функція Y имѣетъ корень при $t=\infty$, т. е. при $\varphi=\pi$, и то же самое справедливо относительно функціи X, если степень функціи X ниже $2n$ [7]). Зная степени функцій X и Y, мы можемъ сдѣлать слѣдующій выводъ.

Каждая изъ двухъ функцій X и Y на окружности (r), на которой она не исчезаетъ тождественно, не можетъ обращаться въ нуль больше $2n$ разъ.

Отсюда слѣдуетъ, что ни одна изъ функцій X, Y не можетъ быть равна нулю во всѣхъ точкахъ нѣкоторой площади.

---

[7]) Въ выраженіи для X степень перемѣннаго t въ числителѣ и знаменателѣ одна и та же, въ выраженіи же Y степень t въ числителѣ ниже, нежели въ знаменателѣ. Поэтому, когда t возрастаетъ неограниченно по абсолютной величинѣ, то X стремится къ предѣлу, отличному отъ нуля, а Y — къ нулю. Поэтому X обращается въ нуль не болѣе $2n$ разъ, т. е. при тѣхъ значеніяхъ t, которыя обращаютъ въ нуль числителя; Y же обращается въ нуль не болѣе $2n-1$ разъ вслѣдствіе того, что обращается въ нуль числитель, и одинъ разъ при $t=\infty$, т. е. при $\varphi=\pi$; всего, слѣдовательно, каждая изъ функцій X и Y можетъ обратиться въ нуль не болѣе $2n$ разъ.

Въ самомъ дѣлѣ, черезъ такую площадь всегда можно было бы провести безчисленное множество дугъ окружностей съ общимъ центромъ въ началѣ координатъ; на этихъ окружностяхъ X или Y обращались бы въ нуль безчисленное множество разъ.

5. Корневыми точками функцій $f(z)$ служатъ точки, въ которыхъ одновременно

$$X = 0 \quad \text{и} \quad Y = 0.$$

При доказательствѣ существованія такихъ точекъ мы будемъ опираться на непрерывность функцій X и Y. Это свойство функцій можно выразить такъ:

Пусть c_1 и c_2 будутъ двѣ точки, въ которыхъ функція X имѣетъ разные знаки. На каждой линіи (прямой или кривой), соединяющей эти двѣ точки c_1 и c_2, есть, по крайней мѣрѣ, одна точка, въ которой функція X обращается въ нуль [8]).

То же справедливо относительно функціи Y.

6. Сначала займемся функціей Y и докажемъ слѣдующее предложеніе.

Можно r взять столь большимъ, что функція Y на окружности (r) будетъ имѣть тотъ же знакъ, что и $\sin n\varphi$, — по крайней мѣрѣ, во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда $\sin n\varphi$ по абсолютной величинѣ превосходитъ напередъ заданное произвольно малое положительное число ϑ.

Въ этомъ мы убѣждаемся, представляя Y въ видѣ:

$$Y = r^n \left(\sin n\varphi + \frac{a_1}{r} \sin (n-1)\varphi + \frac{a_2}{r^2} \sin (n-2)\varphi + \cdots \right).$$

Дѣйствительно, всегда можно положить r настолько большимъ, что сумма всѣхъ членовъ, слѣдующихъ за первымъ, по своему модулю станетъ меньше любой величины, а, слѣдовательно, и меньше ϑ; тогда знакъ опредѣляется первымъ членомъ.

Отсюда вытекаетъ слѣдующее.

Отмѣтимъ на окружности (r) точки, въ которыхъ

$$\varphi = 0, \quad \frac{\pi}{n}, \quad \frac{2\pi}{n}, \quad \frac{3\pi}{n}, \quad \ldots, \quad \frac{(2n-1)\pi}{n}$$

и обозначимъ эти точки цифрами:

$$0, \ 1, \ 2, \ 3, \ \ldots, \ 2n-1.$$

---

[8]) Это утвержденіе нуждается, конечно, въ доказательствѣ, которое, однако, требуетъ пространныхъ разсужденій.

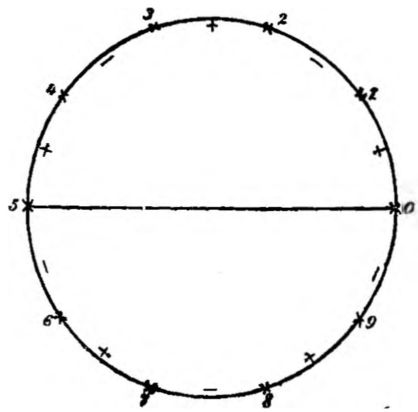
Благодаря этому, мы получимъ на окружности $2n$ интерваловъ:

$$(0,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 3),\ \ldots,\ (2n-1,\ 0),$$

въ которыхъ $\sin n\varphi$ попеременно имѣетъ положительное и отрицательное значеніе.

(Фиг. 14 даетъ это дѣленіе для случая $n = 5$).

Если мы выдѣлимъ ближайшія окрестности точекъ дѣленія [*]) и положимъ r достаточно большимъ, то и Y будетъ имѣть въ этихъ интервалахъ поперемѣнно положительныя и отрицательныя значенія [9]).



Фиг. 14.

Согласно п. 5, функція Y должна обращаться въ нуль въ окрестности каждой изъ точекъ дѣленія; изъ предложенія же п. 4-го слѣдуетъ, что она не можетъ обращаться въ нуль ни въ какой другой точкѣ окружности (r).

Съ другой стороны, такъ какъ знакъ X при достаточно большомъ r зависитъ отъ знака перваго члена $r^n \cos n\varphi$, то X въ окрестностяхъ четныхъ точекъ $0,\ 2,\ 4,\ \ldots,\ 2n-2$ и въ самихъ этихъ точкахъ имѣетъ положительное значеніе, а въ нечетныхъ точкахъ $1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ 2n-1$ — отрицательное.

---

*) Окрестностями точекъ дѣленія мы будемъ называть такіе отрѣзки на окружности (r), въ предѣлахъ которыхъ

$$\frac{k\pi}{n} - \frac{\eta}{n} < \varphi < \frac{k\pi}{n} + \frac{\eta}{n},$$

если положить $\vartheta = \sin\eta$. Длина выдѣленной такимъ образомъ на окружности (r) дуги есть $2\eta r/n$, при чемъ эта дуга должна быть меньше, чѣмъ $\pi r/n$, и, слѣдовательно, $\eta < \frac{1}{2}\pi$.

9) Если мы положимъ, напримѣръ, $\varphi = \frac{\pi}{n}$, то $\sin n\varphi = 0$; но если мы выдѣлимъ достаточно малую дугу $\frac{\eta}{n}$, какъ указано въ примѣчаніи автора, то въ интервалѣ отъ $\frac{\pi}{n} - \frac{\eta}{n}$ до $\frac{\pi}{n}$ $\sin n\varphi > 0$, а въ интервалѣ отъ $\frac{\pi}{n}$ до $\frac{\pi}{n} + \frac{\eta}{n}$ $\sin n\varphi < 0$: слѣдовательно, при достататочно большомъ r и Y мѣняетъ знакъ въ интервалѣ отъ $\frac{k\pi}{n} - \frac{\eta}{n}$ до $\frac{k\pi}{n} + \frac{\eta}{n}$.

7. Какъ мы видѣли въ п. 4, функція Y не можетъ обращаться въ нуль для всѣхъ точекъ какой-нибудь площади. Слѣдовательно, вся плоскость раздѣляется на области, въ которыхъ Y имѣетъ положительное или отрицательное значеніе; эти области отдѣлены другъ отъ друга линіями, на которыхъ Y обращается въ нуль.

Отъ нѣкотораго участка $(2g, 2g+1)$ окружности (r) внѣ круга (r) расположена область, въ которой Y имѣетъ положительное значеніе; эта область тѣмъ больше приближается краями къ сектору, заключенному между $\varphi = 2g\pi/n$ и $\varphi = (2g+1)\pi/n$, чѣмъ больше она удаляется отъ центра [10]). Эта полоса должна продолжаться и внутрь круга (r) [11]). Часть этой области, лежащую внутри круга (r), обозначимъ черезъ G; эта часть можетъ быть очень разнообразной по своему контуру; два контура, касающіеся другъ друга только въ отдѣльныхъ точкахъ, мы не будемъ, однако, считать связанными.

Площадь G либо оканчивается внутри круга (r) и, кромѣ интервала $(2g, 2g+1)$, не ограничивается болѣе никакой частью окружности, либо достигаетъ другого интервала $(2k, 2k+1)$, либо, наконецъ, раздѣляется на двѣ вѣтви и больше, изъ которыхъ каждая оканчивается на какомъ-нибудь участкѣ $(2l, 2l+1)$ [12]).

Примѣромъ перваго случая на фиг. 15 можетъ служить область (0, 1, 10) или (2, 3, 12); примѣромъ второго случая служитъ область (8, 9, 10, 11, 6, 7). Дѣленіе на многія вѣтви не имѣетъ мѣста въ этомъ простомъ примѣрѣ.

Можно было бы предположить, что внутри площади G лежитъ, какъ островъ, маленькая площадка, въ которой Y опять имѣетъ отрицательное значеніе; и такого рода контуръ (впрочемъ, этотъ случай, замѣтимъ мимоходомъ, въ дѣйствительности не можетъ представиться) не помѣшалъ бы нашимъ заключеніямъ.

---

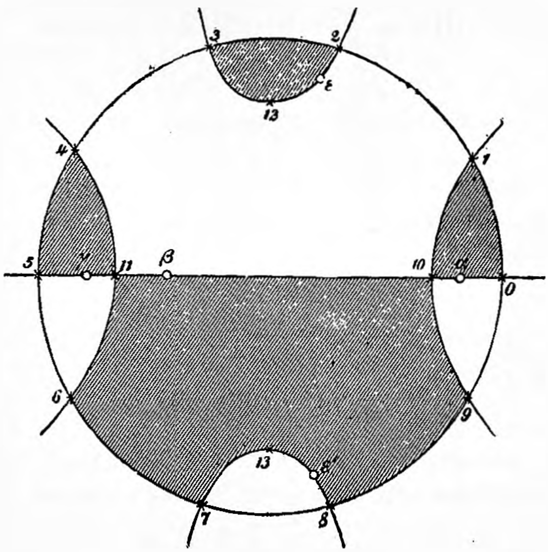
[10]) Когда φ становится больше, чѣмъ $\frac{2g\pi}{n}$, то $\sin n\varphi$ получаетъ положительное значеніе, которое мѣняетъ знакъ лишь послѣ того какъ φ пройдетъ черезъ $\frac{(2g+1)\pi}{n}$. Итакъ, въ интервалѣ отъ $\frac{2g\pi}{n}+\eta$ до $\frac{(2g+1)\pi}{n}-\eta$ функція Y имѣетъ положительное значеніе; къ ней примыкаетъ, такимъ образомъ, положительная область, которая съ увеличеніемъ r расширяется, такъ какъ ея границы приближаются къ радіусамъ, ограничивающимъ секторъ $\left(\frac{2g\pi}{n}, \frac{(2g+1)\pi}{n}\right)$.

[11]) Это слѣдуетъ изъ того свойства непрерывной функціи двухъ перемѣнныхъ, въ силу котораго таковая, имѣя положительное значеніе въ нѣкоторой точкѣ, сохраняетъ положительное значеніе внутри нѣкотораго кружка, окружающаго эту точку; а такой кружокъ, описанный вокругъ точки на периферіи круга (r), необходимо войдетъ внутрь его.

[12]) Ибо положительная область можетъ примыкать только къ положительному участку, т. е. къ участку вида $(2l, 2l+1)$.

8. Представимъ себѣ, что мы обходимъ контуръ области G такимъ образомъ, что самая область остается всегда слѣва. Тогда каждый интервалъ окружности, входящій въ составъ контура, въ которомъ Y имѣетъ положительное значеніе, направленъ такъ, что внутренняя часть круга лежитъ влѣво, т. е. мы проходимъ дугу отъ четной точки къ ближайшей нечетной. Стало-быть, контуръ G покидаетъ окружность (r) на нечетной точкѣ дѣленія и встрѣчаетъ ее снова въ четной.

Разсмотримъ часть S контура, которая отъ точки $2g+1$ черезъ внутреннюю часть круга (r) ведетъ къ точкѣ $2k$; по всей длинѣ кон-



Фиг. 15.

тура S $Y=0$. Въ точкѣ $2g+1$ функція X имѣетъ отрицательное значеніе, а въ точкѣ $2k$ — положительное. Слѣдовательно, на контурѣ S функція X должна, по крайней мѣрѣ, одинъ разъ обратиться въ нуль. Точка, въ которой X обращается въ нуль, и будетъ **корневой точкой** функціи $f(z)$, существованіе которой, такимъ образомъ, доказано. Для лучшаго уясненія см. фигуру 15; въ предположеніи, что

$$f(z) = z^5 - 4z - 2,$$

она приблизительно соотвѣтствуетъ дѣйствительному положенію дѣла.

На контурѣ (1, 10, 0) лежитъ корневая точка α,
„ „ (3, 12, 2) „ „ „ ε,
„ „ (5, 11, 4) „ „ „ γ,
„ „ (9, 10, 11, 6) „ „ „ β,
„ „ (8, 13, 7) „ „ „ ε'.

ГЛАВА XIII.

Неопредѣленныя уравненія первой степени.

§ 73. Сравненія.

1. Какъ мы видѣли выше (§ 15), по двумъ произвольно взятымъ натуральнымъ числамъ m и n всегда можно опредѣлить два такихъ числа q и r, что

$$m = qn + r; \tag{1}$$

при этомъ q можетъ быть нулемъ или положительнымъ числомъ, а r удовлетворяетъ условію

$$0 \leqq r < n.$$

Число r называется **остаткомъ** или **вычетомъ** числа m по n. Остатокъ при данномъ n можетъ имѣть только одно изъ n значеній:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n-1. \tag{2}$$

Два числа m и m', которыя при дѣленіи на n имѣютъ одинъ и тотъ же остатокъ, называются **равноостаточными** или **сравнимыми по модулю** n *). Въ этомъ случаѣ

$$m' = q'n + r$$

и, слѣдовательно,

$$m - m' = (q - q')\,n,$$

т. е. $m - m'$ дѣлится на n.

Обратное предложеніе также имѣетъ мѣсто; именно: если разность двухъ чиселъ дѣлится на n, то эти числа равноостаточны.

Въ самомъ дѣлѣ, полагая:

$$m = qn + r, \quad m' = q'n + r',$$

*) По Гауссу „numeri congrui“.

получимъ:

$$m - m' = (q - q')\,n + r - r'.$$

Такъ какъ $m - m'$ дѣлится на n, то и разность $r - r'$ должна въ данномъ случаѣ дѣлиться на n (или сводиться къ нулю). Но оба числа r и r' принадлежатъ ряду чиселъ (2); слѣдовательно, ихъ разность по абсолютной величинѣ не можетъ быть больше $n - 1$ и потому, будучи отличной отъ нуля, не можетъ дѣлиться на n. Слѣдовательно, $r = r'$.

2. Сравнимость двухъ чиселъ, слѣдуя Гауссу, обозначаютъ такъ:

$$m \equiv m' \quad (\mathrm{mod.}\ n)$$

(словами: m сравнимо съ m' по модулю n или, короче, по n). Такое соотношенie называется **сравненiемъ**.

Каждое число сравнимо со своимъ остаткомъ, если за модуль взять дѣлителя:

$$m \equiv r \quad (\mathrm{mod.}\ n).$$

Если при вычисленiи модуль не мѣняется, то его часто можно опустить, не опасаясь недоразумѣнiй; въ этомъ именно смыслѣ и нужно понимать дальнѣйшiя сравненiя.

3. При вычисленiяхъ со сравнимыми числами важны слѣдующiя теоремы:

Если

$$a \equiv \alpha \quad \text{и} \quad b \equiv \beta,$$

то и

$$a + b \equiv \alpha + \beta,$$
$$a - b \equiv \alpha - \beta,$$
$$ab \equiv \alpha\beta.$$

Въ справедливости этихъ теоремъ легко убѣдиться изъ равенствъ:

$$(a + b) - (\alpha + \beta) = (a - \alpha) + (b - \beta),$$
$$(a - b) - (\alpha - \beta) = (a - \alpha) - (b - \beta),$$
$$ab - \alpha\beta = (a - \alpha + \alpha)(b - \beta + \beta) - \alpha\beta =$$
$$= (a - \alpha)(b - \beta) + \beta(a - \alpha) + \alpha(b - \beta).$$

Изъ этихъ равенствъ слѣдуетъ, что, если разности $a - \alpha$ и $b - \beta$ дѣлятся на n, то и разности $(a \pm b) - (\alpha \pm \beta)$, $ab - \alpha\beta$ тоже дѣлятся на n, какъ того требуютъ доказываемыя теоремы.

На этихъ теоремахъ основанъ прiемъ, дающiй возможность производить повѣрку сложныхъ вычисленiй, состоящихъ изъ сложенiй, вычитаній и умноженій. Пріемъ этотъ заключается въ слѣдующемъ. Выбравъ произвольный модуль n, замѣняютъ всѣ числа, фигурирующія въ вычисленіи, ихъ вычетами по модулю n. Затѣмъ надъ этими вычетами производятъ всѣ тѣ дѣйствія, которыя произведены надъ данными числами. Тогда первоначальный результатъ и новый должны дать одинаковые вычеты по модулю n. Лучше всего брать модули $n=9$ и $n=11$, такъ какъ въ этихъ случаяхъ весьма легко находить вычеты всѣхъ данныхъ чиселъ (§ 17, 4). (Повѣрка при помощи девятки и при помощи числа 11).

4. Если

$$a \equiv \alpha,\ ab \equiv \alpha\beta$$

а вмѣстѣ съ тѣмъ a и α суть числа, простыя относительно n, то и

$$b \equiv \beta.$$

Въ самомъ дѣлѣ,

$$ab - \alpha\beta = a(b-\beta) + \beta(a-\alpha),$$

а такъ какъ разности $ab - \alpha\beta$ и $a - \alpha$ дѣлятся на n, то и разность $a(b-\beta)$ дѣлится на n; но a есть число, простое относительно n; слѣдовательно, $b - \beta$ дѣлится на n (§ 16, 6).

5. Примѣняя нѣсколько разъ теорему о сравнимости произведеній (п. 3), получимъ теорему:

Если

$$a \equiv \alpha,$$

то и

$$a^k \equiv \alpha^k,$$

гдѣ k есть любое цѣлое положительное число.

6. Такъ какъ при модулѣ n число различныхъ остатковъ есть n, то, взявши больше, чѣмъ n, различныхъ чиселъ, мы найдемъ среди нихъ, по крайней мѣрѣ, два сравнимыхъ между собой. Вмѣстѣ съ тѣмъ можно многообразно составить n чиселъ

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n, \tag{3}$$

среди которыхъ нѣтъ двухъ сравнимыхъ; для этого стоитъ только къ каждому изъ чиселъ ряда (2) прибавить любое кратное числа n.

Числа (3) такой системы даютъ при дѣленіи на n всѣ возможные остатки (2), при чемъ каждый остатокъ появляется только одинъ разъ. Поэтому каждая такая система называется **полной системой остатковъ или вычетовъ по модулю** n. Если вмѣсто неопредѣленнаго символа x подставлять одно за другимъ всѣ числа системы (3), то говорятъ, что x пробѣгаетъ полную систему вычетовъ.

7. Если m и n въ равенствѣ (1) суть числа взаимно-простыя, то r должно быть числомъ простымъ относительно n, ибо общій дѣлитель чиселъ n и r былъ бы также дѣлителемъ числа $m = qn + r$. Въ этомъ случаѣ изъ ряда возможныхъ остатковъ (2) нѣкоторые отпадаютъ, такъ какъ остаются только остатки, простые относительно n, во всякомъ случаѣ не будетъ остатка 0.

Обозначимъ черезъ ν число содержащихся въ ряду (2) чиселъ, простыхъ относительно n, и положимъ, чтобы лучше отмѣтить зависимость числа ν отъ n,

$$\nu = \varphi(n).$$

Пусть числа, простыя относительно n, содержащіяся въ ряду (2), суть:

$$r_1, r_2, r_3, \ldots, r_\nu; \tag{4}$$

между ними, конечно, всегда есть 1.

Знакъ $\varphi(n)$ такимъ образомъ обозначаетъ число положительныхъ чиселъ, меньшихъ n и вмѣстѣ съ тѣмъ простыхъ относительно n.

Дадимъ нѣсколько примѣровъ для ряда (4):

$n = 7.$	1, 2, 3, 4, 5, 6.	$\varphi(7) = 6.$
$n = 13.$	1, 2, 3, 4, 5, 6,	
	7, 8, 9, 10, 11, 12.	$\varphi(13) = 12.$
$n = 21.$	1, 2, 4, 5, 8, 10,	
	11, 13, 16, 17, 19, 20.	$\varphi(21) = 12.$

8. Если n есть простое число, то всѣ числа $1, 2, 3, 4, \ldots, n-1$ суть числа простыя относительно n, и, слѣдовательно, въ этомъ случаѣ

$$\varphi(n) = n - 1.$$

Если же n есть степень простого числа p, то, чтобы получить соотвѣтствующій рядъ (4), нужно изъ ряда $0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n-1$ вычеркнуть всѣ числа, дѣлящіяся на p, т. е.

$$0,\ p,\ 2p,\ \ldots,\ \left(\frac{n}{p} - 1\right)p,$$

которыхъ всего n/p. Итакъ, для этого случая

$$\varphi(n) = n - \frac{n}{p} = n\left(1 - \frac{1}{p}\right). \tag{5}$$

9. Положимъ, что число n разлагается на два взаимно-простыхъ множителя a и b.

Положимъ:

$$z = ay - bx, \tag{6}$$

где x обозначаетъ любое изъ чиселъ $0, 1, 2, \ldots, a-1$,
а y „ „ „ „ $0, 1, 2, \ldots, b-1$.

Въ такомъ случаѣ z получаетъ $ab = n$ значеній, между которыми нѣтъ двухъ равноостаточныхъ по n. Въ самомъ дѣлѣ, если бы разность

$$z - z' = a(y - y') - b(x - x')$$

дѣлилась на n, то произведеніе $b(x - x')$ должно было бы дѣлиться на a; но такъ какъ b и a суть числа взаимно-простыя, то $(x - x')$ должно было бы дѣлиться на a; но x и x' оба меньше a; слѣдовательно, должно было бы быть $x = x'$; такимъ же образомъ можно было бы придти къ выводу, будто $y = y'$. Мы получаемъ, такимъ образомъ, въ результатѣ, что при дѣленіи числа z на n мы получимъ въ качествѣ остатковъ каждое изъ чиселъ:

$$0, 1, 2, \ldots, n-1, \tag{7}$$

и при томъ каждое только одинъ разъ.

Далѣе, z есть число простое относительно n въ томъ и только въ томъ случаѣ, если x есть число простое относительно a, а y есть число простое относительно b. Дѣйствительно, простой множитель, входящій въ z и a долженъ входить и въ x, а входящій въ z и b долженъ входить и въ y [1]). Если мы поэтому захотимъ изъ ряда (7) вычеркнуть числа, имѣющія съ n общихъ множителей, то изъ ряда значеній x нужно вычеркнуть тѣ, которыя имѣютъ общихъ множителей съ a, а изъ ряда значеній y тѣ, которыя имѣютъ общихъ множителей съ b. Остаются $\varphi(a)$ значеній x и $\varphi(b)$ значеній y, которымъ соотвѣтствуютъ $\varphi(n)$ значеній z; такъ какъ каждое изъ этихъ значеній x можно соединить съ каждымъ значеніемъ y, то

$$\varphi(n) = \varphi(a)\,\varphi(b).$$

---

[1]) Это вытекаетъ изъ равенства (6). Если z и a дѣлятся на простое число p, то и bx должно дѣлиться на p; но b не дѣлится на p, такъ какъ a и b суть числа взаимно-простыя; поэтому x дѣлится на p.

Положимъ, напримѣръ, что n содержитъ только двухъ простыхъ множителей p, q. Въ какой бы степени p и q ни входили въ n

$$\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)\text{ [2]}.$$

Съ помощью математической индукціи эту формулу можно обобщить такъ:

Если p, q, r, ... суть различные простые множители числа n, то

$$\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)\left(1-\frac{1}{r}\right)\cdots$$

Напримѣръ:

$$\varphi(60) = 60\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right) = 16,$$

$$\varphi(63) = 63\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right) = 36.$$

§ 74. Степенные вычеты.

1. Пусть n и g суть два числа, не имѣющія общихъ дѣлителей (g есть сокращеніе слова „Grundzahl" — „основное число"; въ примѣненіи къ десятичной системѣ счисленія $g=10$). Составимъ рядъ степеней числа g:

$$g^0,\ g^1,\ g^2,\ g^3,\ \ldots \tag{1}$$

($g^0 = 1$) и найдемъ вычеты его членовъ по модулю n:

$$\varrho_0,\ \varrho_1,\ \varrho_2,\ \varrho_3,\ \ldots \tag{2}$$

Такъ какъ g и всѣ его степени суть числа простыя относительно n, то и всѣ ϱ_0, ϱ_1, ϱ_2, ... тоже представляютъ собой числа простыя отно-

---

[1]) Если $n=p^{\pi}q^{\varkappa}$, то, согласно равенству (5) п. 8-го,

$$\varphi(p^{\pi}) = p^{\pi}\left(1-\frac{1}{p}\right),\quad \varphi(q^{\varkappa}) = q^{\varkappa}\left(1-\frac{1}{q}\right),$$

а потому

$$\varphi(n) = p^{\pi}q^{\varkappa}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right) = n\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right).$$

сительно n; а такъ какъ всѣ они меньше n, то между ними различныхъ ни въ коемъ случаѣ не болѣе $\nu = \varphi(n)$.

Если же $\varrho_k = \varrho_{k+f}$, гдѣ f есть положительное число, то разность

$$g^{k+f} - g^k = g^k(g^f - 1)$$

дѣлится на n, т. е. $g^f - 1$ дѣлится на n. Слѣдовательно, существуетъ такой положительный показатель f, для котораго

$$g^f \equiv 1 \pmod{n}; \qquad (3)$$

впредь мы подъ f будемъ разумѣть наименьшій изъ такихъ показателей.

2. Изъ соотношенія (3) слѣдуетъ, что

$$g^{qf} \equiv 1,$$

гдѣ q есть любое положительное цѣлое число (§ 73, 5); но и обратно:

Если для какого-нибудь показателя k

$$g^k \equiv 1,$$

то k кратно f. Въ самомъ дѣлѣ, если k не кратно f, то

$$k = qf + f',$$

гдѣ $0 < f' < f$. Слѣдовательно, въ такомъ случаѣ

$$g^{qf} g^{f'} \equiv 1,$$

а потому (§ 73, 4) $g^{f'} \equiv 1$. Это противорѣчитъ предположенію, что есть наименьшее положительное число, для котораго выполняется сравненіе (3).

3. Среди f степеней:

$$g^0,\ g^1,\ g^2,\ \ldots,\ g^{f-1} \qquad (4)$$

не можетъ быть двухъ равноостаточныхъ по n, ибо тогда существовало бы число f', меньшее f, для котораго было бы $g^{f'} \equiv 1$ [3]). Мы получаемъ,

---

[3]) Дѣйствительно, если бы было

$$g^{f_1} \equiv g^{f_2},$$

гдѣ $f_2 < f_1$, то, сокращая это сравненіе на g^{f_2} (§ 73, 4), получимъ:

$$g^{f_1 - f_2} \equiv 1,$$

гдѣ $f_1 - f_2 = f'$, конечно, меньше f.

слѣдовательно, здѣсь f различныхъ вычетовъ:

$$\varrho_0,\ \varrho_1,\ \varrho_2,\ \ldots,\ \varrho_{f-1} \tag{5}$$

(гдѣ $\varrho_0 = 1$). Переходя къ высшимъ степенямъ g^f, g^{f+1}, g^{f+2}, ..., мы получимъ тѣ же вычеты и въ той же послѣдовательности; возводя такимъ образомъ g въ степени, мы никогда не выйдемъ изъ системы вычетовъ (5). Числа ϱ_0, ϱ_1, ϱ_2, ..., ϱ_{f-1} называются степенными вычетами числа g; всѣ они суть числа простыя относительно n.

Если f меньше $\varphi(n)$, то въ ряду вычетовъ по модулю n существуетъ, по крайней мѣрѣ, еще одинъ вычетъ r_1 [4]), который не содержится среди степенныхъ вычетовъ; тогда вычеты чиселъ

$$r_1 g^0,\ r_1 g^1,\ r_1 g^2,\ \ldots,\ r_1 g^{f-1} \tag{6}$$

всѣ различны между собой и отличны отъ вычетовъ степеней (4). Ибо, если бы было

$$r_1 g^h \equiv g^k,$$

то мы имѣли бы

$$r_1 \equiv g^{k-h} \text{ (или, при } k < h,\ r_1 \equiv g^{f-h+k}) \text{ [5])},$$

а это противорѣчитъ предположенію, что r_1 не содержится въ числѣ вычетовъ (5).

Поэтому и рядъ (6) даетъ только различные вычеты, такъ что $2f \leqq \varphi(n)$. Если $2f < \varphi(n)$, то существуетъ еще вычетъ r_2, который не фигурируетъ ни въ ряду вычетовъ чиселъ (4), ни въ ряду вычетовъ чиселъ (6). Числа

$$r_2 g^0,\ r_2 g^1,\ \ldots,\ r_2 g^{f-1}$$

даютъ опять только различные вычеты, которые отличны отъ вычетовъ чиселъ (4) и (6). Въ самомъ дѣлѣ, если бы было

$$r_1 g^h \equiv r_2 g^k,$$

то должно было бы быть

$$r_2 \equiv r_1 g^{h-k} \text{ (или } r_2 \equiv r_1 g^{f-k+h}),$$

т. е. число r_2 находилось бы въ ряду вычетовъ чиселъ (6); а это противно условію. Слѣдовательно, $3f \leqq \varphi(n)$.

---

[4]) Подъ буквою r съ различными индексами авторъ здѣсь разумѣетъ, какъ въ предыдущемъ параграфѣ (п. 7), только вычеты простые относительно модуля n.

[5]) Это сравненіе получается такъ: сравненіе $r_1 g^h \equiv g^k$ можно написать въ формѣ $r_1 g^h \equiv g^{k+f}$, ибо $g^f \equiv 1$; дѣля обѣ части на g^h, получимъ требуемое.

Ясно, какъ продолжать это разсужденіе: такъ какъ произведенія f, $2f$, $3f$, ... не могутъ безъ конца оставаться меньше $\varphi(n)$, то слѣдуетъ заключить, что $\varphi(n)$ кратно f, т. е. что f есть дѣлитель числа $\varphi(n)$ *). Положимъ:

$$\varphi(n) = ef;$$

тогда, въ силу соотношенія (3), получимъ такъ называемую обобщенную теорему Фермата

$$g^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n$$

или въ словахъ:

$\varphi(n)$-тая степень каждаго числа, простого относительно n, сравнима съ 1 по модулю n.

4. Если n есть простое число, то $\varphi(n) = n - 1$; для этого случая теорема гласитъ:

Для каждаго простого числа n $(n-1)$-ая степень любого числа, не дѣлящагося на n, сравнима съ 1 по модулю n.

Теорема, доказанная въ п. 3 § 60-го, согласно которой, если n есть простое, а a любое цѣлое число, то $a^n - a = a(a^{n-1} - 1)$ дѣлится на n, какъ мы видимъ, содержится въ предложеніи 4, такъ какъ либо a, либо $a^{n-1} - 1$ дѣлится на n [6]).

Будетъ ли n число простое или составное, какъ мы видѣли въ п. 3, вычеты, простые относительно n, распадаются на e рядовъ, каждый изъ которыхъ содержитъ f вычетовъ; эти ряды мы назовемъ періодами вычетовъ. Мы получимъ одинъ изъ этихъ періодовъ, если въ произведеніи rg^k подставимъ вмѣсто показателя k числа: 0, 1, 2, 3, ..., $f-1$. Нахожденіе этихъ вычетовъ, кажущееся на первый взглядъ кропотливымъ, существенно упрощается тѣмъ, что вычетъ числа rg^k получается, если умножить на g не самое число rg^{k-1}, а его вычетъ по модулю n и взять вычетъ произведенія [7]).

5. Если мы возьмемъ, напримѣръ, $n = 17$, $g = 2$, то получимъ:

$$2^0 \equiv 1,\quad 2^1 \equiv 2,\quad 2^2 \equiv 4,\quad 2^3 \equiv 8,$$
$$2^4 \equiv 16,\quad 2^5 \equiv 15,\quad 2^6 \equiv 13,\quad 2^7 \equiv 9,\quad 2^8 \equiv 1;$$

---

*) Заслуживаетъ вниманія сходство этой теоремы съ теоремою § 56, 4 о группахъ перестановокъ.

[6]) Если a кратно n, то $a^n - a$, конечно, дѣлится на n; если a не кратно n, то, въ силу предложенія 4, $a^{n-1} - 1$ дѣлится на n. Такимъ образомъ, теорема п. 3 § 60-го вытекаетъ изъ предложенія 4.

[7]) Ибо изъ сравненія $rg^{k-1} \equiv \varrho_{k-1}$ вытекаетъ, съ помощью умноженія на g, сравненіе $rg^k \equiv \varrho_{k-1} g$.

здѣсь $f = 8$, $\varphi(17) = 16$, и мы получаемъ два періода вычетовъ по 17.

Если мы возьмемъ $n = 17$, $g = 10$, то получимъ одинъ только періодъ, такъ какъ $f = 16$. Въ слѣдующей табличкѣ въ первомъ ряду стоятъ показатели степеней числа 10, а подъ ними соотвѣтствующіе вычеты по модулю 17:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	10	15	14	4	6	9	5	16	7	2	3	13	11	8	12

Для $n = 21$, $g = 10$ получимъ:

$$10^0 \equiv 1,\quad 10^1 \equiv 10,\quad 10^2 \equiv 16,\quad 10^3 \equiv 13,\quad 10^4 \equiv 4,\quad 10^5 \equiv 19,\quad 10^6 \equiv 1;$$

здѣсь $f = 6$, $\varphi(n) = 12$, т. е. здѣсь имѣются два періода.

Возьмемъ теперь $n = 13$, $g = 2$; получимъ такую же табличку, какъ выше, при $n = 17$:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	2	4	8	3	6	12	11	9	5	10	7

такъ что $f = 12$.

6. Если нѣкоторой парѣ значеній g и n соотвѣтствуетъ только одинъ періодъ, т. е. $f = \varphi(n)$, то g называется **первообразнымъ корнемъ модуля** n или, проще, **числа** n. Такимъ образомъ, 10 есть первообразный корень числа 17; напротивъ, 10 не есть первообразный корень чиселъ 13 и 21; въ свою очередь, 2 есть первообразный корень числа 13, но не числа 17. Существуетъ теорема, которую мы ниже докажемъ, по крайней мѣрѣ, въ нѣкоторыхъ частяхъ, гласящая, что всѣ нечетныя простыя числа, всѣ степени простыхъ чиселъ и также степени нечетныхъ простыхъ чиселъ, умноженныя на 2, имѣютъ первообразные корни. Напротивъ, другія составныя числа не имѣютъ первообразныхъ корней,— напримѣръ, 21. Дѣйствительно, если g есть число простое относительно 21, то, по теоремѣ Фермата, $g^6 - 1$ дѣлится на 3 и на 7, а, слѣдовательно, и на 21 ($\varphi(21) = 12$) [8]).

Если g есть первообразный корень числа n и $g^\alpha \equiv a \pmod{n}$, то α называется **индексомъ** числа a. Въ вышеприведенныхъ табличкахъ въ первомъ ряду стоятъ индексы чиселъ, расположенныхъ подъ ними. Такая табличка называется поэтому **таблицей индексовъ**.

---

[8]) По теоремѣ Фермата, если g не дѣлится на 3, то $g^2 \equiv 1 \pmod 3$, а потому и $g^6 \equiv 1 \pmod 3$. По той же теоремѣ, если g не дѣлится на 7, то $g^6 \equiv 1 \pmod 7$; такимъ образомъ, если g есть число простое относительно 21, то $g^6 - 1$ дѣлится на 21; поэтому оно не можетъ служить первообразнымъ корнемъ по модулю 21.

§ 75. Періодическія десятичныя дроби.

1. Степенные вычеты находятъ себѣ приложеніе въ теоріи десятичныхъ дробей, посредствомъ которыхъ можетъ быть выражена простая дробь.

Пусть m и n будутъ два взаимно простыхъ числа, изъ которыхъ n не дѣлится ни на 2, ни на 5, т. е. есть число простое относительно 10. Разсмотримъ простую дробь

$$\gamma = \frac{m}{n}\cdot$$

Такая дробь, какъ мы видѣли въ § 28, можетъ быть обращена въ безконечную десятичную дробь, мантисса которой обозначается символомъ:

$$Z(m) = \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4 \cdots$$

Двѣ дроби $\gamma = m/n$ и $\gamma' = m'/n$ съ одинаковыми знаменателями имѣютъ общую мантиссу только въ томъ случаѣ, если ихъ разность есть цѣлое число, т. е. если m и m' отличаются между собою на число, кратное n. Выражая это при помощи знаковъ, мы скажемъ:

Если

$$m \equiv m' \pmod n,$$

то

$$Z(m) = Z(m')$$

и обратно. Дѣйствительно, если $\gamma - \gamma'$ есть цѣлое число, то мантисса десятичной дроби, представляющей это число, состоитъ только изъ нулей; и обратно, если $Z(m) = Z(m')$, то мантисса $Z(m - m')$ состоитъ только изъ нулей, т. е. числа m и m' отличаются другъ отъ друга только на цѣлое число.

Такъ какъ существуетъ $\varphi(n)$ различныхъ вычетовъ, простыхъ относительно n, то существуетъ и $\varphi(n)$ различныхъ мантиссъ $Z(m)$ для одного и того же знаменателя n. Здѣсь φ имѣетъ то же значеніе, что и въ п. 7 § 73-го [9]).

2. Изъ мантиссы дроби γ получается мантисса числа 10γ, если отбросить первую цифру $Z(m)$ и начинать съ ζ_2; повторяя эту операцію нѣсколько разъ, получимъ для любого показателя k:

$$Z(10^k m) = \zeta_{k+1} \zeta_{k+2} \zeta_{k+3} \cdots$$

[9]) Какъ было показано, цѣлое число не вліяетъ на мантиссу; чтобы опредѣлить, какія возможны мантиссы, можно ограничиться правильными дробями, т. е. нужно собственно опредѣлить, сколько имѣется различныхъ правильныхъ дробей со знаменателемъ n; такъ какъ числителемъ должно быть число, меньшее, нежели n, и простое относительно n, то такихъ дробей имѣется $\varphi(n)$.

Если же

$$10^f \equiv 1 \pmod{n},$$

то, согласно п. 1,

$$Z(10^f m) = Z(m)$$ [10],

т. е.

$$z_{f+1} = z_1,\quad z_{f+2} = z_2,\quad z_{f+3} = z_3, \ldots .$$

Цифры мантиссы повторяются съ $f+1$-го мѣста въ той же послѣдовательности, какъ съ перваго.

Эти цифры распадаются на группы по f цифръ въ каждой; обозначимъ каждую изъ этихъ группъ такъ:

$$P(m) = z_1 z_2 z_3 \ldots z_f.$$

Эта группа повторяется въ $Z(m)$ въ одной и той же послѣдовательности и называется **періодомъ** мантиссы. Мантиссу $Z(m)$ и десятичную дробь, въ которую обращается γ, называютъ періодическими, а число f называютъ **длиной періода** для знаменателя n. Мы доказали, такимъ образомъ, слѣдующую теорему:

Простая дробь, знаменатель которой не имѣетъ общихъ дѣлителей съ 10, обращается въ періодическую десятичную дробь.

3. Чтобы распространить нашу теорему и на остальные случаи, замѣтимъ, что каждая дробь β посредствомъ умноженія на надлежащую степень 10, т. е. на 10^k, можетъ быть приведена къ знаменателю, не содержащему множителей 2 и 5; получаемая такимъ образомъ дробь $10^k\beta$ обращается въ періодическую десятичную. Чтобы отъ $10^k\beta$ перейти къ β, нужно въ десятичной дроби переставить запятую на k знаковъ влѣво. При этомъ передъ цифрой z_1, т. е. передъ началомъ новаго періода, появятся цифры, не подчиняющіяся періодичности. Періодъ начинается въ послѣднемъ случаѣ послѣ k-аго знака мантиссы. Такія десятичныя дроби называются **смѣшанными періодическими дробями**; тѣ же дроби, у которыхъ періодъ начинается непосредственно послѣ запятой, называются **чистыми періодическими дробями**.

4. Если f есть наименьшій изъ положительныхъ показателей, удовлетворяющихъ соотношенію $10^f \equiv 1 \pmod{n}$, то періодъ мантиссы $Z(m)$ не можетъ содержать меньше f членовъ. Въ самомъ дѣлѣ, полагая, что

[10]) Потому что дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{10^f m}{n}$ отличаются другъ отъ друга на цѣлое число.

$Z(10^k m) = Z(m)$, согласно предложенію 1, получимъ, что $10^k m \equiv m$, а такъ какъ m есть число простое относительно n, то $10^k \equiv 1$ (§ 73, 4); отсюда заключаемъ, что k есть число, кратное f (§ 74, 2).

5. Перенося запятую въ десятичной дроби вправо на одинъ знакъ, мы увеличиваемъ дробь въ 10 разъ; принимая это во вниманіе, мы можемъ написать слѣдующую таблицу періодовъ:

$$
\begin{aligned}
P(m) &= z_1 z_2 z_3 z_4 \ldots z_f,\\
P(10m) &= z_2 z_3 z_4 z_5 \ldots z_f z_1,\\
P(10^2 m) &= z_3 z_4 z_5 z_6 \ldots z_1 z_2, \qquad (1)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
P(10^{f-1} m) &= z_f z_1 z_2 z_3 \ldots z_{f-1}.
\end{aligned}
$$

Если $\varphi(n) = ef$, то для того, чтобы получить мантиссы всѣхъ дробей со знаменателями n, достаточно образовать періоды для e различныхъ значеній m [11]). Если $e = 1$, т. е. $f = \varphi(n)$, и, слѣдовательно, 10 есть первообразный корень модуля n, то достаточно взять одно значеніе m, напримѣръ, $m = 1$, чтобы обратить въ десятичныя всѣ правильныя дроби m/n. Для такихъ значеній n нужно, стало быть, вычислить только одинъ періодъ, который будетъ содержать $\varphi(n)$ членовъ. Если $e > 1$, то нужно вычислить большее число періодовъ; при этомъ, чѣмъ больше будетъ число e, тѣмъ меньше цифръ будутъ содержать періоды.

6. Для перваго примѣра возьмемъ $n = 7$. По обычному пріему произведемъ дѣленіе 1 на 7:

$$
\begin{array}{l}
10 : 7 = 142\,857\\
\underline{\ 7\ }\\
\ \ 30\\
\ \ \underline{28}\\
\ \ \ \ 20\\
\ \ \ \ \underline{14}\\
\ \ \ \ \ \ 60\\
\ \ \ \ \ \ \underline{56}\\
\ \ \ \ \ \ \ \ 40\\
\ \ \ \ \ \ \ \ \underline{35}\\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 50\\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \underline{49}\\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 1.
\end{array}
$$

[11]) Ибо для каждаго значенія m таблица (1) даетъ f мантиссъ; такимъ образомъ, мы получимъ всѣ возможныя ef мантиссъ.

Въ данномъ случаѣ періодъ есть 142857; подчеркнутыя числа суть вычеты степеней 10. Поэтому получаемъ [12]):

$$\tfrac{1}{7} = 0{,}142\,857\ \ldots,$$
$$\tfrac{3}{7} = 0{,}428\,571\ \ldots,$$
$$\tfrac{2}{7} = 0{,}285\,714\ \ldots,$$
$$\tfrac{6}{7} = 0{,}857\,142\ \ldots,$$
$$\tfrac{4}{7} = 0{,}571\,428\ \ldots,$$
$$\tfrac{5}{7} = 0{,}714\,285\ \ldots.$$

На мѣстѣ точекъ повторяются дальнѣйшіе періоды. Такимъ образомъ, мы сразу превратили въ десятичныя дроби всѣ правильныя дроби съ знаменателемъ 7. Эти дроби могутъ быть выражены съ любой степенью точности.

7. Для $n = 13$ получимъ:

```
10 : 13 = 076923
00
100
 91
  90
  78
   120
   117
     30
     26
      40
      39
       1.
```

---

[12]) Первая мантисса принадлежитъ дроби $\frac{1}{7}$; поэтому, какъ мы видѣли выше, вторая мантисса принадлежитъ дроби $\frac{10}{7}$, или, отбрасывая цѣлую часть, дроби $\frac{3}{7}$; третья мантисса принадлежитъ дроби $\frac{100}{7}$, или дроби $\frac{2}{7}$ и т. д. Послѣдовательные числители 3, 2, 6 и т. д. суть не что иное, какъ остатки, послѣдовательно получаемые при дѣленіи чиселъ 10, 100, 1000 и т. д. на 7.

Періодъ содержитъ тутъ только шесть членовъ. Далѣе получимъ:

$$\frac{1}{13} = 0{,}076923\ \ldots,$$
$$\frac{10}{13} = 0{,}769230\ \ldots,$$
$$\frac{9}{13} = 0{,}692307\ \ldots,$$
$$\frac{12}{13} = 0{,}923076\ \ldots,$$
$$\frac{3}{13} = 0{,}230769\ \ldots,$$
$$\frac{4}{13} = 0{,}307692\ \ldots.$$

Чтобы получить всѣ дроби со знаменателемъ 13, нужно воспользоваться еще однимъ періодомъ, который найдемъ, взявши любой изъ недостающихъ числителей. Возьмемъ, напримѣръ, дробь $\frac{2}{13}$:

```
20 : 13 = 153 846
13
 70
 65
  50
  39
  110
  104
    60
    52
     80
     78
      2.
```

Отсюда получимъ:

$$\frac{2}{13} = 0{,}153846\ \ldots,$$
$$\frac{7}{13} = 0{,}538461\ \ldots,$$
$$\frac{5}{13} = 0{,}384615\ \ldots,$$
$$\frac{11}{13} = 0{,}846153\ \ldots,$$
$$\frac{6}{13} = 0{,}461538\ \ldots,$$
$$\frac{8}{13} = 0{,}615384\ \ldots.$$

Мы исчерпали всѣ дроби со знаменателемъ 13. Изложенное представляетъ неограниченный матеріалъ для упражненій, весьма интересныхъ въ виду того, что результаты легко поддаются провѣркѣ.

8. Гауссъ подробно изслѣдовалъ этотъ вопросъ въ „Disquisitiones arithmeticae", (art. 313 — 318). Въ этомъ сочиненіи Гауссъ даетъ таблицу, которая содержитъ всѣ періоды первоначальныхъ чиселъ и ихъ степеней до 100. Такая же таблица, продолженная для первоначальныхъ чиселъ и ихъ степеней до 1000, была найдена среди рукописей, составленныхъ Гауссомъ, и въ настоящее время опубликована. Въ указанномъ выше мѣстѣ своего сочиненія Гауссъ показываетъ, какъ съ помощью этой таблицы производить обращеніе дробей, знаменатели которыхъ содержатъ нѣсколько различныхъ простыхъ множителей, даже при очень большихъ знаменателяхъ. Мы приведемъ только одинъ примѣръ:

$$\tfrac{22}{21} = \tfrac{1}{3} + \tfrac{5}{7}.$$

Но такъ какъ

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{3} &= 0{,}333\,333\,3\ \ldots \\ \tfrac{5}{7} &= 0{,}714\,285\,7\ \ldots, \\ \hline \end{aligned}$$

то

$$\tfrac{22}{21} = 1{,}047\,619\,0\ \ldots$$

Чтобы получить правильно послѣднюю цифру періода, нужно въ обоихъ слагаемыхъ взять послѣ періода еще одинъ или нѣсколько (смотря по обстоятельствамъ) знаковъ.

Упомянемъ еще о трудѣ Г. Борка (H. Bork) о „періодическихъ десятичныхъ дробяхъ" *), содержащемъ, кромѣ основныхъ теоремъ о періодическихъ десятичныхъ дробяхъ, таблицу (по вычисленіямъ Ф. Кесслера (F. Kessler)), въ которой приведены не самые періоды, а ихъ длины для первоначальныхъ чиселъ до 100 000.

9. Если число n разлагается на два взаимно-простыхъ множителя n' и n'', а f' и f'' суть наименьшіе положительные показатели, для которыхъ $10^{f'} - 1$ и $10^{f''} - 1$ дѣлятся соотвѣтственно на n' и n'', то $10^f - 1$ только въ томъ случаѣ дѣлится на n, если f одновременно кратно показателей f' и f''. Наименьшее значеніе f есть общее наименьшее кратное показателей f' и f''. Отсюда получаемъ теорему:

Длина періода для составного знаменателя n равна общему наименьшему кратному длинъ періодовъ всѣхъ дробей, знаменатели которыхъ суть дѣлители числа n.

Если 10 есть первообразный корень по модулю n, то длина періода, какъ мы видѣли, равна $\varphi(n)$, и намъ достаточно знать одинъ періодъ.

---

*) H. Bork, „Periodische Dezimalbrüche". Programm des Prinz Heinrichs-Gymnasiums in Berlin, 1895.

По таблицѣ Гаусса находимъ, что это въ предѣлахъ первой сотни имѣетъ мѣсто для чиселъ:

$$n = 7,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ 47,\ 49,\ 59,\ 61,\ 97.$$

Наибольшее число различныхъ періодовъ приходится на долю числа 73; именно $\varphi(n)/f = 9$, $f = 8$.

10. Если f есть длина періода для знаменателя n, то $10^f - 1$ должно дѣлиться на n; слѣдовательно, всякій знаменатель n, имѣющій данную длину періода f, содержится среди дѣлителей числа $10^f - 1$. Обратно, если знаменатель есть дѣлитель числа $10^f - 1$, то длина періода для этого знаменателя есть f или дѣлитель числа f.

Такимъ образомъ, существуетъ опредѣленное число знаменателей такихъ дробей, которыя имѣютъ данную длину періода f.

Напримѣръ, одночленные періоды имѣютъ только знаменатели 3 и 9:

$$\tfrac{1}{3} = 0{,}333\ \ldots,\quad \tfrac{1}{9} = 0{,}111\ \ldots$$

Длину періода, равную 2, имѣютъ только тѣ дроби, знаменатели которыхъ суть дѣлители числа 99, именно при $n = 11,\ 33,\ 99$; трехчленные періоды имѣютъ дроби, знаменатели которыхъ дѣлятъ число $999 = 27 . 37$ и т. д. При болѣе длинныхъ періодахъ разложеніе числа $10^f - 1$ на первоначальныхъ множителей представляетъ трудности, преодолѣть которыя можно съ помощью упомянутыхъ таблицъ или съ помощью особыхъ пріемовъ. Напримѣръ, какъ легко убѣдиться при помощи перемноженія:

$$10^4 - 1 = 9 . 11 . 101,$$
$$10^5 - 1 = 9 . 41 . 271,$$
$$10^6 - 1 = 27 . 7 . 11 . 13 . 37,$$
$$10^7 - 1 = 9 . 239 . 4649,$$
$$10^8 - 1 = 9 . 11 . 73 . 101 . 137.$$

Всѣ приведенные здѣсь множители даютъ сравнительно короткіе періоды.

11. Заключимъ разсмотрѣніе теоріи десятичныхъ дробей слѣдующей теоремой:

Пусть

$$m = z_1 z_2 z_3 \ldots z_f$$

будетъ какое-нибудь цѣлое положительное число, изображающееся цифрами $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_f$, и пусть

$$n = 10^f - 1$$

будетъ число, изображающееся f девятками; тогда по десятичной системѣ

$$10m = z_1 z_2 z_3 \ldots z_f 0,$$

и

$$z_1 n = z_1 000 \ldots 0 - z_1,$$

гдѣ справа за z_1 стоятъ f нулей.

Отсюда

$$10m = z_1 n + m_1, \tag{2}$$

гдѣ m_1 есть f-значное число, именно:

$$m_1 = z_2 z_3 \ldots z_f z_1 \text{ [13]}.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ

$$\left.\begin{aligned} 10m_1 &= z_2 n + m_2, \\ m_2 &= z_3 z_4 \ldots z_f z_1 z_2. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Мы можемъ продолжать такъ сколько угодно. Въ результатѣ мы получимъ обращеніе обыкновенной дроби m/n въ десятичную, которая, какъ мы видѣли, имѣетъ періодомъ $z_1 z_2 z_3 \ldots z_f$ [14]). Этотъ періодъ можетъ распадаться на болѣе короткіе періоды, длины которыхъ суть дѣлители числа f [15]). Обыкновенная правильная дробь m/n можетъ сокращаться; она можетъ также сводиться къ 1, если $m = n$, т. е. если и m состоитъ изъ девятокъ. Нами доказана такимъ образомъ теорема:

Каждая періодическая десятичная дробь можетъ быть разсматриваема, какъ результатъ обращенія нѣкоторой обыкновенной дроби. Десятичная дробь, имѣющая одночленный періодъ, равный 9, получается отъ обращенія несобственной дроби, равной 1.

---

[13]) Ибо

$$z_1 n + m_1 = z_1 0 \cdots 0 - z_1 + z_2 z_3 \cdots z_f z_1 = z_1 0 \cdots 0 + z_2 z_3 \cdots z_f z_1 - z_1 =$$
$$= z_1 z_2 z_3 \cdots z_f z_1 - z_1 = z_1 z_2 \cdots z_f 0 = 10m.$$

[14]) Равенство (2) показываетъ, что при дѣленіи $10m$ на n мы получимъ въ частномъ z_1 и въ остаткѣ m_1; далѣе, равенство (3) показываетъ, что при дѣленіи $10m_1$ на n мы получимъ въ частномъ z_2 и въ остаткѣ m_2 и т. д. Эти именно дѣленія намъ и нужно производить для обращенія дроби m/n въ десятичную; слѣдовательно, періодъ $z_1 z_2 z_3 \ldots z_f$ получается при обращеніи обыкновенной дроби m/n въ десятичную.

[15]) Напримѣръ, періодъ 2323 разбивается на два періода вида 23.

§ 76. Уравненія Діофанта.

1. При рѣшеніи уравненій Діофанта или неопредѣленныхъ уравненій требуется найти неизвѣстныя цѣлыя числа, удовлетворяющія нѣкоторымъ условіямъ, которыя могутъ быть выражены уравненіями. Простѣйшая задача этого рода состоитъ въ слѣдующемъ.

Пусть a, b, c будутъ данныя цѣлыя числа. Нужно найти два другихъ цѣлыхъ числа, удовлетворяющихъ равенству:

$$ay - bx = c. \tag{1}$$

Сначала сдѣлаемъ нѣкоторыя общія замѣчанія.

Равенство (1) не измѣнится, если одновременно замѣнить a на $-a$ и y на $-y$. То же имѣетъ мѣсто, если одновременно совершить такія замѣны: b на $-b$ и x на $-x$ или c на $-c$, x на $-x$, y на $-y$. Поэтому, не нарушая общности, мы можемъ считать числа a, b и c положительными. Если одно изъ чиселъ a, b, — напримѣръ, b, — равно нулю, то задача сводится къ дѣленію c на a. Мы можемъ поэтому исключить этотъ случай [16]).

2. Если числа a и b имѣютъ общаго множителя d, то уравненіе (1) можетъ имѣть цѣлыя рѣшенія только въ томъ случаѣ, когда и c дѣлится на d. Если это имѣетъ мѣсто, то всѣ члены уравненія (1) можно раздѣлить на d. Мы будемъ предполагать эту операцію выполненной; это послѣднее предположеніе, очевидно, равносильно требованію, чтобы a и b были числами взаимно-простыми.

При этомъ условіи мы легко докажемъ на основаніи предыдущаго, что наша задача всегда имѣетъ рѣшеніе. Дѣйствительно, въ п. 9 § 73-го мы видѣли, что выраженіе

$$z = ay - bx$$

получаетъ всѣ значенія полной системы вычетовъ по модулю ab, если x и y пробѣгаютъ полныя системы вычетовъ соотвѣтственно по модулямъ a и b. Между этими значеніями должно быть число, которое по модулю ab даетъ тотъ же остатокъ, что и c; это число, очевидно, имѣетъ видъ

---

[16]) Если бы, напримѣръ, нужно было рѣшить уравненіе

$$5y + 2x = 10,$$

то мы рѣшили бы уравненіе

$$5y' - 2x' = 10.$$

Каждому рѣшенію (y', x') второго уравненія соотвѣтствуетъ рѣшеніе $y = y'$, $x = -x'$ даннаго уравненія.

$c+kab$, гдѣ k есть цѣлое число. Итакъ, существуютъ три такихъ цѣлыхъ числа x_0, y_0, k, которыя удовлетворяютъ уравненію

$$ay - bx = c + kab,$$

т. е. имѣетъ мѣсто тождество:

$$a(y_0 - kb) - bx_0 = c.$$

Сравнивая это тождество съ уравненіемъ (1), мы видимъ, что послѣднее удовлетворяется рѣшеніями $x = x_0$ и $y = y_0 - kb$.

3. Положимъ, что мы нашли одно рѣшеніе x_0, y_0 уравненія (1), т. е.

$$ay_0 - bx_0 = c. \tag{2}$$

Изъ этого одного рѣшенія легко найти всѣ остальныя. Въ самомъ дѣлѣ, вычтя изъ уравненія (1) равенство (2), получимъ:

$$a(y - y_0) = b(x - x_0). \tag{3}$$

Произведеніе $b(x - x_0)$ должно дѣлиться на a; а такъ какъ a и b, по предположенію, суть числа взаимно простыя, то числа $x - x_0$ должно дѣлиться на a. Обозначимъ частное этого дѣленія черезъ λ, гдѣ λ есть цѣлое число; т. е. положимъ $x - x_0 = \lambda a$. Если подставимъ это значеніе для $x - x_0$ въ уравненіе (3) и раздѣлимъ на a, то получимъ: $y - y_0 = \lambda b$.

Итакъ,

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda a, \\ y &= y_0 + \lambda b. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Обратно, каково бы ни было λ, изъ соотношеній (4) вытекаетъ:

$$ay - bx = ay_0 - bx_0,$$

и, если только x_0, y_0 удовлетворяютъ уравненію (1), то y и x также удовлетворяютъ уравненію (1). Если, такимъ образомъ, уравненіе (1) вообще имѣетъ рѣшеніе, то оно имѣетъ ихъ безконечное множество, и всѣ они выводятся изъ одного по формуламъ (4).

4. Наконецъ, можно получить еще упрощеніе, сводя общую задачу, изложенную въ п. 1, къ частному случаю.

Если числа x_0, y_0 удовлетворяютъ уравненію

$$ay_0 - bx_0 = 1, \tag{5}$$

то числа

$$x = cx_0 \quad \text{и} \quad y = cy_0$$

дадутъ рѣшеніе уравненія (1), въ чемъ убѣждаемся, умножая обѣ части равенства (5) на c.

Наша общая задача свелась, такимъ образомъ, къ слѣдующей болѣе простой:

5. Пусть a и b будутъ два цѣлыхъ положительныхъ числа, не имѣющія общихъ множителей; нужно найти какую-нибудь пару цѣлыхъ чиселъ, удовлетворяющихъ равенству:

$$ay - bx = 1. \tag{6}$$

По формуламъ (4) изъ одного рѣшенія этого уравненія найдемъ всѣ остальныя. Мы можемъ поэтому всегда получить положительныя рѣшенія [17]).

6. Если $a = 1$, то можно дать неизвѣстному x произвольное значеніе; для неизвѣстнаго y получаемъ: $y = bx + 1$; если $b = 1$, то $x = ay - 1$. Но если a и b больше 1, то въ формулахъ (4) можно за λ принять частное отъ дѣленія x на a, а за x_0—остатокъ отъ этого дѣленія, такъ что

$$0 < x_0 < a.$$

Тогда

$$0 < ay_0 = 1 + bx_0 < ab + 1.$$

Такъ какъ y_0 не равно b, ибо въ противномъ случаѣ 1 должна была бы дѣлиться на b, то

$$0 < y_0 < b.$$

Итакъ, существуетъ одно и только одно рѣшеніе уравненія (6), для котораго x и y суть числа положительныя и соотвѣтственно меньшія, чѣмъ a и b; такое рѣшеніе называется наименьшимъ положительнымъ рѣшеніемъ.

7. Вѣрнымъ и сравнительно легко выполнимымъ средствомъ для дѣйствительнаго нахожденія рѣшеній уравненія Діофанта является способъ, основанный на Евклидовомъ алгориѳмѣ общаго наибольшаго дѣлителя (§ 16).

Пусть въ уравненіи (6) a и b будутъ данныя цѣлыя положительныя числа, не имѣющія общихъ множителей; положимъ, что оба они больше 1 и что $a > b$. Если бы послѣднее условіе не выполнялось, то достаточно

---

[17]) Такъ какъ a и b, по условію, положительныя числа, то можно всегда дать числу λ настолько большое значеніе, чтобы получить положительныя же значенія для чиселъ x и y.

было бы переставить коэффиціенты a и b и замѣнить x и y черезъ $-y$ и $-x$. Въ видахъ удобства обозначеній положимъ:

$$b = a_1$$

и составимъ алгориѳмъ (1) § 16-го, который долженъ закончиться числомъ $a_n = 1$, такъ какъ a и a_1 суть числа взаимно-простыя:

$$\begin{aligned} a &= q\, a_1 + a_2, \\ a_1 &= q_1 a_2 + a_3, \\ a_2 &= q_2 a_3 + a_4, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ a_{n-2} &= q_{n-2} a_{n-1} + 1, \\ a_{n-1} &= q_{n-1}. \end{aligned} \tag{7}$$

Если мы опять поставимъ b вмѣсто a_1, то изъ перваго равенства получимъ:

$$a_2 = a - bq;$$

подставивъ это значеніе для a_2 во второе равенство, получимъ:

$$-a_3 = aq_1 - b(qq_1 + 1);$$

продолжая тотъ же процессъ дальше, мы увидимъ, что каждое изъ чиселъ a_1, a_2, a_3, ..., a_n выражается линейно черезъ a и b.

8. Предположимъ, что для нѣкотораго a_ν найдена формула:

$$(-1)^\nu a_\nu = aQ_{\nu-1} - bP_{\nu-1}. \tag{8}$$

Сравнивая эту формулу съ тѣми, которыя получены нами для $\nu = 2$ и $\nu = 3$, найдемъ:

$$\begin{aligned} Q_1 &= 1, \quad P_1 = q, \\ Q_2 &= q_1, \quad P_2 = qq_1 + 1. \end{aligned} \tag{9}$$

Теперь въ формулу

$$a_\nu = q_\nu a_{\nu+1} + a_{\nu+2}$$

подставимъ вмѣсто a_ν выраженіе (8), а вмѣсто $a_{\nu+1}$ соотвѣтственно:

$$(-1)^{\nu+1} a_{\nu+1} = aQ_\nu - bP_\nu; \tag{10}$$

тогда получимъ:

$$(-1)^{\nu+2} a_{\nu+2} = a(Q_\nu q_\nu + Q_{\nu-1}) - b(P_\nu q_\nu + P_{\nu-1}).$$

Итакъ, если имѣютъ мѣсто формулы (8) и (10), то имѣетъ мѣсто и соотношеніе:

$$(-1)^{\nu+2} a_{\nu+2} = aQ_{\nu+1} - bP_{\nu+1},$$

при чемъ

$$\begin{aligned} P_{\nu+1} &= P_\nu q_\nu + P_{\nu-1}, \\ Q_{\nu+1} &= Q_\nu q_\nu + Q_{\nu-1}. \end{aligned} \tag{11}$$

По рекуррентнымъ формуламъ (11) легко найти числа P_ν и Q_ν.

Получимъ, напримѣръ:

$$\begin{aligned} P_3 &= qq_1q_2 + q_2 + q, \\ Q_3 &= q_1q_2 + 1, \\ P_4 &= qq_1q_2q_3 + qq_3 + q_2q_3 + qq_1 + 1, \\ Q_4 &= q_1q_2q_3 + q_3 + q_1, \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

Очевидно, что для вычисленія чиселъ P и Q нужно только знать частныя q, q_1, q_2, ... Кромѣ того, всѣ P и Q суть числа положительныя и

$$P_{\nu+1} > P_\nu, \; Q_{\nu+1} > Q_\nu \tag{12}$$

(только, если $q_1 = 1$, то $Q_2 = Q_1$).

9. Примѣнимъ уравненія (8) къ случаю $\nu = n$ и примемъ въ соображеніе, что $a_n = 1$; тогда получимъ:

$$aQ_{n-1} - bP_{n-1} = (-1)^n. \tag{13}$$

Отсюда рѣшенія уравненія (6) представляются въ видѣ:

$$\begin{aligned} x &= (-1)^n P_{n-1}, \\ y &= (-1)^n Q_{n-1}. \end{aligned} \tag{14}$$

Если мы помножимъ первое изъ уравненій (11) на Q_ν, а второе — на P_ν, затѣмъ вычтемъ одно изъ другого и, наконецъ, помножимъ обѣ части полученнаго уравненія на $(-1)^{\nu+1}$, то найдемъ:

$$(-1)^{\nu+1}(P_{\nu+1}Q_\nu - Q_{\nu+1}P_\nu) = (-1)^\nu(P_\nu Q_{\nu-1} - Q_\nu P_{\nu-1}).$$

Слѣдовательно, выраженіе

$$(-1)^{\nu}(P_{\nu}Q_{\nu-1}-Q_{\nu}P_{\nu-1})$$

не мѣняетъ своего значенія съ измѣненіемъ индекса ν; если положимъ въ немъ $\nu=2$, то, принимая во вниманіе соотношеніе (9), найдемъ, что

$$P_{\nu}Q_{\nu-1}-Q_{\nu}P_{\nu-1}=(-1)^{\nu}. \tag{15}$$

Эта формула показываетъ, что числа P_{ν} и Q_{ν} при любомъ ν не имѣютъ общихъ дѣлителей, такъ какъ такой дѣлитель былъ бы дѣлителемъ числа ± 1.

10. Примѣнимъ формулу (10) къ случаю $\nu=n$; принимая здѣсь во вниманіе, что $a_{n+1}=0$, получимъ:

$$aQ_n=bP_n.$$

Какъ a и b, такъ P и Q суть числа взаимно-простыя; поэтому

$$P_n=a,\quad Q_n=b;$$

а изъ неравенствъ (12) слѣдуетъ, что

$$P_{n-1}<a,\quad Q_{n-1}<b.$$

Изъ предыдущаго ясно, что формулы (14) при четномъ n даютъ наименьшія положительныя рѣшенія уравненія (6); при нечетномъ n наименьшія положительныя рѣшенія будутъ:

$$x=a-P_{n-1},\quad y=b-Q_{n-1}.$$

11. Возьмемъ численный примѣръ; положимъ

$$a=1000,\quad b=221.$$

Образуемъ алгориѳмъ (7):

$$\begin{aligned}
1000&=4\,.\,221+116,\\
221&=1\,.\,116+105,\\
116&=1\,.\,105+11,\\
105&=9\,.\,11\quad+6,\\
11&=1\,.\,6\quad+5,\\
6&=1\,.\,5\quad+1,\\
5&=5\,.\,1.
\end{aligned}$$

Мы находимъ, такимъ образомъ, что $n = 7$. Для чиселъ же q получается рядъ:

$$q, \; q_1, \; q_2, \; q_3, \; q_4, \; q_5, \; q_6$$
$$= 4, \; 1, \; 1, \; 9, \; 1, \; 1, \; 5.$$

Отсюда:

$$\begin{aligned} P_1 &= 4, & Q_1 &= 1, \\ P_2 &= 5, & Q_2 &= 1, \\ P_3 &= 9, & Q_3 &= 2, \\ P_4 &= 86, & Q_4 &= 19, \\ P_5 &= 95, & Q_5 &= 21, \\ P_6 &= 181, & Q_6 &= 40, \\ P_7 &= 1000, & Q_7 &= 221. \end{aligned}$$

Стало быть,

$$x = 1000 - 181 = 819, \quad y = 221 - 40 = 181$$

суть наименьшія положительныя рѣшенія уравненія

$$1000 y - 221 x = 1.$$

§ 77. Сравненія высшихъ степеней.

1. Изъ уравненія (1) § 76-го слѣдуетъ, что $ay - c$ дѣлится на b, или, согласно обозначенію, принятому въ § 73,

$$ay \equiv c \pmod{b}. \tag{1}$$

Обратно, если мы удовлетворимъ этому сравненію, то мы найдемъ также значеніе x, удовлетворяющее уравненію $ay - bx = c$. Такимъ образомъ, сравненіе (1) даетъ для y одно и только одно рѣшеніе изъ ряда чиселъ $0, 1, 2, \ldots, b - 1$, если a и b суть числа взаимно-простыя. Всѣ другія рѣшенія этого сравненія, согласно п. 3 § 76-го, сравнимы съ этими основными рѣшеніями по модулю b. Это сравненіе называется *сравненіемъ первой степени* или *линейнымъ*. Мы видимъ, такимъ образомъ, что здѣсь имѣетъ мѣсто полная аналогія съ предложеніемъ, согласно которому линейное *уравненіе* съ однимъ неизвѣстнымъ имѣетъ только одно рѣшеніе, если подъ рѣшеніемъ сравненія разумѣть *не одно число*, а *совокупность всѣхъ сравнимыхъ между собою чиселъ, удовлетворяющихъ сравненію*.

2. Аналогія между сравненіями высшихъ степеней и алгебраическими уравненіями не сохраняется, однако, во всей полнотѣ. Пусть

$$f(x) = A_0 x_n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \cdots + A_{n-1} x + A_n \qquad (2)$$

будетъ цѣлая функція n-той степени, коэффиціенты которой A_0, $A_1, \ldots, A_n$ суть цѣлыя числа. Если при $x = a$ функція $f(x)$ принимаетъ значеніе $f(a)$, которое дѣлится на простое число p, то говорятъ, что a есть корень сравненія n-той степени

$$f(x) \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p).$$

Если a удовлетворяетъ этому условію, то и каждое число, сравнимое съ a по модулю p, также удовлетворяетъ этому условію; это вытекаетъ изъ предложеній, доказанныхъ въ п. п. 3—5 § 73-го. Совокупность всѣхъ этихъ сравнимыхъ между собою чиселъ разсматривается, какъ одинъ корень нашего сравненія.

Что имѣются сравненія этого рода, которыя не имѣютъ ни одного корня, въ этомъ легко убѣдиться на простомъ примѣрѣ. Возьмемъ, напримѣръ, сравненіе:

$$f(x) = x^2 + 1 \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ 3).$$

Это сравненіе не имѣетъ рѣшеній, потому что $x^2 + 1$ ни при какомъ цѣломъ значеніи x не можетъ дѣлиться на 3. Здѣсь, такимъ образомъ, теорема, соотвѣтствующая основному предложенію алгебры, не имѣетъ мѣста. Справедливымъ остается только слѣдующее предложеніе:

Сравненіе n-той степени при простомъ модулѣ p не можетъ имѣть болѣе, нежели n различныхъ корней.

Это предложеніе справедливо при $n = 1$. Оно будетъ, слѣдовательно, доказано во всей его общности, если мы докажемъ его для функціи n-той степени въ предположеніи, что оно уже установлено для функціи $(n-1)$-ой степени. Это доказательство можно провести слѣдующимъ образомъ. Согласно п. 3 § 66-го, если x и a суть два неопредѣленныхъ количества, мы можемъ положить:

$$f(x) = (x - a)\,Q(x) + f(a),$$

гдѣ $Q(x)$ есть цѣлая функція $(n-1)$-ой степени съ цѣлыми коэффиціентами. Если, поэтому, $f(a)$ и $f(x)$ дѣлятся на p, то и произведеніе $(x-a)\,Q(x)$ должно дѣлиться на p; если при этомъ x не сравнимо съ a, т. е. разность $x - a$ не дѣлится на p, то функція $Q(x)$ должна дѣлиться на p.

Если мы, поэтому, примемъ, что доказываемое предложеніе справедливо для функціи $(n-1)$-ой степени, то имѣется не болѣе $n-1$

несравнимыхъ между собой значенiй перемѣннаго x, при которыхъ $Q(x)$ дѣлится на p, а, слѣдовательно, не болѣе n значенiй [18]), при которыхъ $f(x)\equiv 0$.

§ 78. Существованie первообразныхъ корней по простому модулю.

1. Въ § 74 доказана теорема Ферма, согласно которой

$$a^{p-1}\equiv 1 \qquad (\text{mod } p),$$

если p есть простое число и если a не дѣлится на p. Если f есть наименьшее положительное число, при которомъ

$$a^f\equiv 1 \qquad (\text{mod } p),$$

то говорятъ, что a принадлежитъ показателю f по модулю p. Если при какомъ-либо значенiи h

$$a^h\equiv 1 \qquad (\text{mod } p),$$

то h есть число, кратное f. Въ частности, f всегда представляетъ собою дѣлителя числа $p-1$.

Число g, которое принадлежитъ показателю $p-1$, называется первообразнымъ корнемъ простого числа p.

Мы имѣли случай встрѣчать отдѣльные примѣры такихъ первообразныхъ корней, но мы не дали общаго доказательства предложенiя, что для каждаго простого числа p существуютъ первообразные корни. Это доказательство мы теперь дадимъ *).

2. Случай $p=2$ не представляетъ никакого интереса, ибо при $p=2$ число 1 есть первообразный корень. Предположимъ, поэтому, что p есть нечетное простое число, такъ что $p-1$ есть число четное. Разложимъ $p-1$ на простыхъ множителей и положимъ

$$p-1=a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots,$$

гдѣ a, b, c суть различныя между собою простыя числа, а a^α, b^β, c^γ — наивысшiя степени, въ которыхъ эти простыя числа входятъ въ составъ числа $p-1$. Прежде всего мы докажемъ:

1) Существуетъ цѣлое число A, которое принадлежитъ показателю a^α по модулю p.

---

[18]) Т. е. $(n-1)$ корней сравненiя $Q(x)\equiv 0 \pmod p$ и число a.

*) Въ своей книгѣ „Disquisitiones arithmeticae" Гауссъ далъ два доказательства этого предложенiя. Мы слѣдуемъ здѣсь 2-му доказательству Гаусса.

Въ самомъ дѣлѣ, степень сравненія

$$x^{\frac{p-1}{a}} \equiv 1 \quad (\text{mod } p)$$

ниже, нежели $p-1$; поэтому, согласно предыдущему параграфу, между числами $1, 2, \ldots, p-1$ найдется такое, которое этому сравненію не удовлетворяетъ[19]). Пусть y будетъ такое число. Если мы положимъ поэтому

$$A \equiv y^{b^\beta c^\gamma} \ldots,$$

то

$$A^{a^\alpha} \equiv 1 \quad (\text{mod } p).$$

Если A принадлежитъ показателю f, то число f должно быть дѣлителемъ числа a^α, т. е. нѣкоторой степенью числа a. Если бы f было меньше числа a^α, то оно должно было бы быть дѣлителемъ числа $a^{\alpha-1}$, а потому было бы

$$A^{a^{\alpha-1}} \equiv 1,$$

т. е.

$$y^{a^{\alpha-1} b^\beta c^\gamma} \cdots = y^{\frac{p-1}{a}} \equiv 1 \quad (\text{mod } p),$$

что противно условію. Такимъ образомъ, число A принадлежитъ показателю a^α.

Такимъ же образомъ можно найти числа $B, C, \ldots,$ которыя принадлежатъ соотвѣтственно показателямъ $b^\beta, c^\gamma \ldots$.

2) Произведеніе $g = ABC \ldots$ принадлежитъ показателю $p-1$ по модулю p.

Если мы примемъ, что g принадлежитъ не показателю $p-1$, а меньшему показателю h, то $(p-1):h$ есть цѣлое число, большее 1; въ составъ этого числа могутъ входить только простыя числа $a, b, c, \ldots$; такъ какъ, съ другой стороны, это число больше 1, то оно должно дѣлиться, по крайней мѣрѣ, на одно изъ простыхъ чиселъ $a, b, c, \ldots,$ скажемъ, на a. Если мы поэтому положимъ $p-1 = hk$, то k есть цѣлое число, кратное a, а h есть дѣлитель числа $(p-1):a$. Поэтому изъ сравненія $g^h \equiv 1 \ (\text{mod } p)$ слѣдуетъ:

$$g^{\frac{p-1}{a}} \equiv 1 \quad (\text{mod } p),$$

[19]) Но удовлетворяетъ сравненію $x^{p-1} \equiv 1 \ (\text{mod } p)$.

т. е.

$$A^{\frac{p-1}{a}} B^{\frac{p-1}{a}} C^{\frac{p-1}{a}} \dots \equiv 1.$$

Такъ какъ, съ другой стороны, $(p-1):a$ дѣлится на b^β, c^γ ..., то

$$B^{\frac{p-1}{a}} \equiv 1, \quad C^{\frac{p-1}{a}} \equiv 1, \dots,$$

а потому

$$A^{\frac{p-1}{a}} \equiv 1.$$

Показатель, которому принадлежитъ число A по модулю p, долженъ былъ бы, такимъ образомъ, быть дѣлителемъ числа $(p-1):a$. Между тѣмъ, этимъ показателемъ служитъ число a^α, которое не входитъ въ составъ числа $(p-1):a$.

3. Этимъ доказано существованіе первообразнаго корня g для каждаго простого числа p. Каждое число, сравнимое съ g по модулю p, также будетъ первообразнымъ корнемъ по тому же модулю. Совокупность всѣхъ этихъ сравнимыхъ между собою чиселъ мы будемъ опять разсматривать, какъ один ъ первообразный корень.

Числа

$$1, g, g^2, g^3, \dots, g^{p-2}$$

всѣ несравнимы между собою, а такъ какъ ни одно изъ нихъ не дѣлится на p и число ихъ равно $p-1$, то между ихъ вычетами фигурируетъ каждое изъ чиселъ

$$k = 1, 2, 3, \dots, p-1$$

одинъ и только одинъ разъ.

4. Можно безъ труда опредѣлить показателя f, которому принадлежитъ любое изъ этихъ чиселъ, — скажемъ, g^k. Именно, если e есть общій наибольшій дѣлитель чиселъ k и $p-1$ и $k = ek'$, $p-1 = ef$, то $k' < f$ и представляетъ собой число простое относительно f. Вмѣстѣ съ тѣмъ $g^{hk} = g^{hek'} \equiv 1$ только въ томъ случаѣ, если h дѣлится на f [20]).

---

[20]) Въ самомъ дѣлѣ, для выполненія сравненія $g^{hek'} \equiv 1$ необходимо, чтобы число hek' было кратно числа $p-1$, т. е. чтобы было $hek' = m(p-1) = mef$, гдѣ m есть натуральное число, откуда $hk' = mf$. Въ виду же того, что k' и f суть числа взаимно-простыя, h должно дѣлиться на f.

Обратно: если h дѣлится на f, т. е. если $h = nf$, гдѣ n есть натуральное число, то $g^{hk} = g^{nfek'} = g^{(p-1)nk'} = (g^{p-1})^{nk'} \equiv 1$, ибо $g^{p-1} \equiv 1$.

Сообразно этому g^k принадлежитъ показателю f, а такъ какъ число значенiй, которое можетъ имѣть число k', есть $\varphi(f)$ (§ 73, 7), то имѣется $\varphi(f)$ несравнимыхъ между собою чиселъ, которыя принадлежатъ показателю f [21]). Если мы положимъ $f = p - 1$, то придемъ къ заключенiю, что существуетъ $\varphi(p-1)$ несравнимыхъ между собою первообразныхъ корней простого числа p.

---

[21]) Это значитъ, что для каждаго опредѣленнаго показателя f и опредѣленнаго простого модуля p, обладающаго тѣмъ свойствомъ, что $p-1$ дѣлится на f существуютъ $\varphi(f)$ значенiй показателя k, при которыхъ степень g^k принадлежитъ показателю f по модулю p. Эти $\varphi(f)$ значенiй показателя k получатся, если мы, найдя частное $e = (p-1)/f$, составимъ произведенiе $k = ek'$ и заставимъ k' принять всѣ $\varphi(f)$ значенiй, меньшихъ, чѣмъ f, и простыхъ относительно f.

ГЛАВА XIV.

Неопредѣленныя уравненія второй степени.

---

§ 79. Теорема Вильсона.

1. Въ п. 1 § 77-го мы доказали теорему:

Если a и b суть числа взаимно-простыя, то сравненіе

$$ay \equiv c \pmod{b}$$

имѣетъ одно и только одно рѣшеніе въ ряду чиселъ

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ b-1.$$

Возьмемъ за модуль нечетное простое число и соотвѣтственно этому обозначимъ его черезъ p. Изъ нашей теоремы вытекаетъ слѣдующій частный случай.

Если a не дѣлится на p, то въ ряду чиселъ $1, 2, \ldots, p-1$ всегда есть число a', удовлетворяющее сравненію:

$$aa' \equiv 1 \pmod{p}.$$

Это число a' только въ томъ случаѣ можетъ быть равно a, если $a \equiv 1$ или $a \equiv -1$ [или, что то же, $a \equiv p-1$] $(\mathrm{mod}\ p)$. Ибо, полагая $a' = a$, получимъ: $aa' - 1 = a^2 - 1 = (a+1)(a-1)$. Послѣднее выраженіе дѣлится на p только въ томъ случаѣ, если на p дѣлится $a-1$ или $a+1$.

Числа $2, 3, \ldots, (p-2)$ при этомъ распадаются на $\frac{1}{2}(p-3)$ паръ чиселъ a и a', произведеніе которыхъ aa' сравнимо съ 1, а произведеніе остальныхъ двухъ, $1.(p-1)$, сравнимо съ -1 [1]). Слѣдовательно,

---

[1]) Если $a = 1$ или $a = p-1$, то a' соотвѣтственно равно 1 или $p-1$, какъ это было показано въ текстѣ. Поэтому мы опускаемъ эти два числа. Если a есть одно изъ $(p-3)$ остальныхъ чиселъ $2, 3, \ldots, p-2$, то a' не равно a; поэтому эти послѣднія числа и распадаются на такія пары, которыя даютъ произведенія, равнимыя съ 1 по модулю p.

произведенiе

$$1 . 2 . 3 \ldots (p-1) \equiv -1 \pmod{p};$$

это справедливо и для $p = 2$, такъ какъ $+1 \equiv -1 \pmod{2}$.

Въ словахъ это выражается такъ:

Если p есть простое число, то число $(p-1)!+1$ дѣлится на p.

2. Это важное предложенiе называется теоремой Вильсона (Wilson) *). Обратная теорема также справедлива:

Если p есть натуральное число и $(p-1)!+1$ дѣлится на p, то p есть простое число.

Если бы p содержало простого множителя q, меньшаго, чѣмъ p, то $(p-1)!$ дѣлилось бы на q, а $(p-1)!+1$ не дѣлилось бы на q, а потому не дѣлилось бы и на p. Теорема Вильсона даетъ, такимъ образомъ, признакъ для распознаванiя простыхъ чиселъ.

3. Мы сдѣлаемъ очень важное примѣненiе теоремы Вильсона.

Если p по прежнему есть нечетное простое число, то каждому числу a въ ряду 1, 2, 3, ..., $(p-1)$ отвѣчаетъ число a'', удовлетворяющее сравненiю

$$aa'' \equiv -1 \pmod{p} \text{ [3]}.$$

Если при этомъ сравненiе

$$x^2 \equiv -1 \pmod{p} \tag{1}$$

не имѣетъ рѣшенiя, то a'' ни въ какомъ случаѣ не равно a, и числа 1, 2, 3, ..., $(p-1)$ распадаются на $\frac{1}{2}(p-1)$ паръ чиселъ, произведе-

---

*) Первое упоминанiе объ этой теоремѣ встрѣчается у Варинга (Waring) въ „Meditationes algebraicae", первое изданiе которыхъ вышло въ 1870 году: „Hanc maxime elegantem numerorum primorum proprietatem invenit vir clarissimus, rerumque mathemeticarum peritissimus Iohannes Wilson Armiger" [2]). Этотъ Iohannes Wilson Armiger, безъ сомнѣнiя, есть не кто иной, какъ Sir John Wilson, жившiй отъ 1741 до 1793 г., о которомъ въ „National Biography", LXII, 107 (London, 1900), сказано: „While still an undergraduate he is said to have made an able reply to de attack on Edward Warings Miscellanea analytica by William Samuel Powell" (письменное сообщенiе М. Кантора).

[2]) Переводъ латинской цитаты:

„Это въ высшей степени изящное свойство простыхъ чиселъ открылъ знаменитый и весьма свѣдущiй въ математикѣ Iоаннъ Вильсонъ Армигеръ".

Переводъ англiйской цитаты:

„Хотя этотъ скромный человѣкъ и не имѣлъ ученыхъ степеней, тѣмъ не менѣе онъ сумѣлъ, говорятъ, отразить нападенiя, сдѣланныя на книгу Варинга „Miscellanea analytica" Самуиломъ Пауэлемъ.

[3]) Случай, когда $b = p$ и $c = -1$ (п. 1).

ніе которыхъ по модулю p сравнимо съ -1. Поэтому

$$(p-1)! \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \qquad (\mathrm{mod}\ p),$$

но въ то же время по теоремѣ Вильсона

$$(p-1)! \equiv -1 \qquad (\mathrm{mod}\ p).$$

Слѣдовательно, при этихъ условіяхъ [4]) $\frac{1}{2}(p-1)$ есть нечетное число, такъ какъ $+1$ и -1 не могутъ быть сравнимы по нечетному модулю.

4. Если сравненіе (1) имѣетъ рѣшеніе и $x = a$ есть одно изъ его рѣшеній, а x другое, то $x^2 \equiv a^2$, т. е. $(x-a)(x+a)$ дѣлится на p, откуда либо $x \equiv +a$, либо $x \equiv -a$. Въ ряду чиселъ $1, 2, 3, \ldots, p-1$ существуютъ поэтому два и только два рѣшенія, при чемъ произведеніе ихъ $a(p-a) \equiv -a^2 \equiv +1\ (\mathrm{mod}\ p)$ [5]). Числа $1, 2, 3, \ldots, (p-1)$ распадаются теперь на $\frac{1}{2}(p-3)$ паръ a, a'', произведеніе которыхъ сравнимо съ -1, а остальныя два числа a, $p-a$ даютъ произведеніе $a(p-a)$, сравнимое съ 1. Принимая въ соображеніе теорему Вильсона, получимъ:

$$(p-1)! \equiv (-1)^{\frac{p-3}{2}} \equiv -(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \quad (\mathrm{mod}\ p),$$

откуда слѣдуетъ, что въ этомъ случаѣ $\frac{1}{2}(p-1)$ представляетъ собою четное число.

Всѣ нечетныя числа p (простыя и составныя) распадаются на два класса, смотря по тому, есть ли $\frac{1}{2}(p-1)$ четное или нечетное число. Первыя могутъ быть представлены въ видѣ $4n+1$, вторыя въ видѣ $4n+3$ или $4n-1$, гдѣ n обозначаетъ цѣлое число.

Для простыхъ чиселъ, принадлежащихъ къ первому классу, сравненіе (1) имѣетъ рѣшеніе, а для простыхъ чиселъ второго класса оно не имѣетъ рѣшеній [6]).

Это предложеніе, впервые доказанное Эйлеромъ, мы выразимъ такъ:

---

[4]) Т. е. когда сравненіе (1) не имѣетъ рѣшенія.

[5]) Если a есть одно рѣшеніе, то остальныя, какъ показано въ текстѣ, содержатся въ формулахъ

$$a + p\lambda \quad \text{и} \quad -a + p\lambda.$$

Каждое изъ нихъ даетъ только одно рѣшеніе, содержащееся въ ряду $1, 2, \ldots, (p-1)$. Если a и есть то рѣшеніе, которое содержится въ этомъ ряду, то вторая формула даетъ рѣшеніе $(p-a)$, содержащееся въ томъ же ряду.

[6]) Въ текстѣ доказаны собственно обратныя предложенія: если сравненіе (1) имѣетъ рѣшеніе, то p имѣетъ видъ $4n+1$; если же оно не имѣетъ рѣшенія, то p есть число вида $4n+3$ или $4n-1$.

5. Если p есть простое число вида $4n+1$, то вмѣсто x можно подставить такое число, что x^2+1 раздѣлится на p; если же p есть простое число вида $4n+3$, то это невозможно.

Къ простымъ числамъ перваго класса принадлежатъ, напримѣръ:

5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, 89, 97;

ко второму классу;

3, 7, 11, 19, 23, 31, 43, 47, 59, 67, 71, 79, 83.

6. Для простыхъ чиселъ перваго класса легко найти рѣшенія сравненія (1), основываясь на теоремѣ Вильсона.

Дѣйствительно:

$$\left.\begin{array}{r} 1 \equiv -(p-1) \\ 2 \equiv -(p-2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{p-1}{2} \equiv -\left(p-\dfrac{p-1}{2}\right) \end{array}\right| \pmod p \qquad (2)$$

Если $p=4n+1$, то всѣ числа произведенія $(p-1)!$ распадаются на двѣ группы: $1, 2, \ldots, 2n$ и $(2n+1), (2n+2), \ldots, (p-1)$; произведеніе чиселъ первой группы сравнимо съ произведеніемъ чиселъ второй по модулю p [7]). Въ виду же теоремы Вильсона

$$(p-1)! \equiv \left(\frac{p-1}{2}!\right)^2 \equiv -1 \pmod p \text{ [8]}).$$

Такимъ образомъ, мы получаемъ рѣшеніе сравненія (1) въ видѣ:

$$x \equiv \left(\frac{p-1}{2}\right)! \pmod p.$$

Если, напримѣръ, $p=13$, то $x \equiv 6! \equiv 720 \equiv 5 \pmod{13}$; дѣйствительно, $5^2+1=26$ дѣлится на 13.

При большихъ значеніяхъ p, конечно, на практикѣ нельзя примѣнять этого способа для вычисленія x. Гауссъ далъ средство, основанное на высшей ариѳметикѣ, для быстраго вычисленія x при большихъ значеніяхъ

---

[7]) Это получается перемноженіемъ сравненій (2), такъ какъ число этихъ сравненій есть $2n$.

[8]) Ибо $(p-1)! = [1 \cdot 2 \ldots 2n]\,[(2n+1)(2n+2)\ldots(p-1)] \equiv -1$, а $\left(\frac{p-1}{2}\right)! = 1 \cdot 2 \ldots 2n \equiv (2n+1)(2n+2)\ldots(p-1)$.

числа p. Мы не можемъ изложить способа Гаусса по всей его полнотѣ, но на примѣрѣ мы настолько его уяснимъ, что его можно будетъ примѣнять въ любомъ аналогичномъ случаѣ. Для этого требуются слѣдующія предварительныя соображенія.

§ 80. Квадратичные вычеты.

1. Пусть m будетъ любое натуральное число, а x одинъ изъ вычетовъ $0, 1, 2, 3, \ldots, m-1$ по модулю m.

Два числа

$$x^2 \text{ и } (m-x)^2 = m^2 - 2mx + x^2$$

при дѣленіи на m даютъ одинаковые вычеты; кромѣ того, отъ дѣленія квадратовъ какихъ бы то ни было натуральныхъ чиселъ на m не могутъ получиться вычеты, отличные отъ тѣхъ, которые получаются отъ дѣленія на m чиселъ x^2 [9]). Поэтому мы получимъ всѣ вычеты полныхъ квадратовъ, если будемъ дѣлить на m числа x^2, при чемъ достаточно дать буквѣ x всѣ значенія, не превышающія $\frac{1}{2}m$.

Полученные такимъ образомъ вычеты называются квадратичными вычетами числа m. Число ихъ не превышаетъ $(\frac{1}{2}m+1)$ [10]).

Остальные вычеты по модулю m, которые ни въ какомъ случаѣ не могутъ быть вычетами квадратовъ натуральныхъ чиселъ, называются неквадратичными вычетами. Число ихъ не меньше $(\frac{1}{2}m-1)$.

2. Если m есть нечетное простое число, то квадраты x^2 и y^2 двухъ различныхъ чиселъ x и y изъ ряда $1, 2, 3, \ldots, \frac{1}{2}(m-1)$, никогда не имѣютъ одинаковыхъ вычетовъ по модулю m. Въ самомъ дѣлѣ, если бы $x^2 - y^2$ имѣли одинъ и тотъ же вычетъ по модулю m, то разность

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$$

дѣлилась бы на m; но это невозможно, ибо какъ $x-y$, такъ и $x+y$ меньше, нежели m. Въ виду этого мы получаемъ теорему:

---

[9]) Въ самомъ дѣлѣ, всякое натуральное число a, большее m, можетъ быть представлено въ видѣ $a = \alpha + mt$, гдѣ α есть наименьшій положительный вычетъ числа a по модулю m, а t — нѣкоторое число; но отсюда слѣдуетъ, что

$$a^2 = \alpha^2 + 2\alpha mt + m^2t^2 = \alpha^2 + m(2\alpha t + mt^2) = \alpha^2 \pmod{m}.$$

[10]) Если m есть четное число, то въ ряду $0, 1, 2, \ldots, m-1$ имѣется $\frac{1}{2}m+1$ чиселъ, не превосходящихъ $\frac{1}{2}m$; если же m есть нечетное число, то ихъ имѣется только $\frac{1}{2}(m+1)$.

Если исключить число 0, очевидно представляющее собой квадратичный вычетъ, то всякое нечетное простое число m имѣетъ въ точности $\frac{1}{2}(m-1)$ квадратичныхъ вычетовъ и столько же неквадратичныхъ вычетовъ.

3. Примѣры:

		$m=3$:
Квадратичные вычеты:		0, 1,
неквадратичные	„	2.
		$m=4$:
Квадратичные	„	0, 1,
неквадратичные	„	2, 3.
		$m=5$:
Квадратичные	„	0, 1, 4,
неквадратичные	„	2, 3.
		$m=6$:
Квадратичные	„	0, 1, 3, 4,
неквадратичные	„	2, 5.
		$m=7$:
Квадратичные	„	0, 1, 2, 4,
неквадратичные	„	3, 5, 6.
		$m=8$:
Квадратичные	„	0, 1, 4,
неквадратичные	„	2, 3, 5, 6, 7.
		$m=9$:
Квадратичные	„	0, 1, 4, 7,
неквадратичные	„	2, 3, 5, 6, 8.
		$m=11$:
Квадратичные	„	0, 1, 3, 4, 5, 9,
неквадратичные	„	2, 6, 7, 8, 10.
		$m=13$:
Квадратичные	„	0, 1, 3, 4, 9, 10, 12,
неквадратичные	„	2, 5, 6, 7, 8, 11.

4. Обратимъ вниманіе на особую теорему, вытекающую изъ примѣра $m=8$: квадратъ нечетнаго числа всегда имѣетъ видъ $8n+1$ (а, слѣдовательно, и видъ $4n+1$).

5. Считая, что x^2+1 дѣлится на простое число p, положимъ:

$$x^2+1=py; \tag{1}$$

мы разсматриваемъ здѣсь x и y, какъ неизвѣстныя цѣлыя числа. Вмѣсто того, чтобы прямо искать x, можно искать сначала y; значенія послѣдняго должны удовлетворять условію, что $py-1$ есть квадратъ натуральнаго числа.

Такъ какъ мы можемъ брать $x < \frac{1}{2}p$, то изъ равенства (1) слѣдуетъ, что $py < \frac{1}{4}p^2$, или $y < \frac{1}{4}p$. Итакъ, вмѣсто y достаточно подставить только четвертую часть чиселъ $1, 2, \ldots, p-1$ и при этомъ слѣдить, будетъ ли $py-1$ полнымъ квадратомъ или нѣтъ. Для того, чтобы рѣшить, будетъ ли данное число квадратомъ, мы имѣемъ простое и вѣрное средство (§ 23).

6. Можно еще уменьшить число значеній, которыя нужно подставлять вмѣсто y. Для этой цѣли возьмемъ какое-нибудь число e, которое называютъ эксклюдентомъ (сначала беремъ небольшія числа 3, 4, 5, 7, 8, ... и т. д.; числа 6 не стоитъ брать, такъ какъ оно даетъ то же. что и эксклюдентъ 3). Если β есть неквадратичный вычетъ по модулю e, то, согласно равенству (1), сравненіе:

$$py \equiv \beta + 1 \pmod{e}. \qquad (2)$$

никогда не можетъ имѣть мѣста [11]). Можно, поэтому, исключить всѣ значенія y, удовлетворяющія какому-нибудь сравненію вида (2).

7. Для примѣра возьмемъ $p = 97$. Вмѣсто y намъ предстоитъ подставлять числа $1, 2, 3, \ldots, 24$.

Возьмемъ за эксклюдентъ e число 3; 2 есть неквадратичный вычетъ по модулю e. Полагая въ сравненіи (2) $\beta = 2$, получимъ, что нужно исключить всѣ числа, дѣлящіяся на 3; остаются числа:

$$y = 1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 10,\ 11,\ 13,\ 14,\ 16,\ 17,\ 19,\ 20,\ 22,\ 23.$$

Возьмемъ $e = 8$, $\beta = 2, 3, 5, 6, 7$. Пользуясь этимъ, находимъ, что нужно вычеркнуть всѣ числа видовъ:

$$8n+3,\quad 8n+4,\quad 8n+6,\quad 8n+7,\quad 8n.$$

Остаются

$$y = 1,\ 2,\ 5,\ 10,\ 13,\ 17.$$

Положимъ далѣе $e = 5$, $\beta = 2, 3$; это даетъ право вычеркнуть рѣшенія сравненія

$$2y \equiv 3,\ 4, \text{ т. е. } y \equiv 4,\ 2 \pmod{5}.$$

Эти рѣшенія суть: 2 и 17.

---

[11]) Если y есть такое число, при которомъ можетъ быть удовлетворено равенство (1), то сравненіе (2) не можетъ имѣть мѣста, ибо иначе мы имѣли бы, что $\beta \equiv x^2$, т. е. β было бы квадратичнымъ вычетомъ.

Взявши еще число $e = 7$, мы вычеркнемъ всѣ числа, кромѣ 5 и 13. Полагая $y = 5$, находимъ:

$$97 \cdot 5 - 1 = 484 = 22^2.$$

Итакъ, сравненію $x^2 \equiv -1 \pmod{97}$ удовлетворяютъ числа $x \equiv 22$ и $x \equiv 75$.

Изложенный пріемъ можно примѣнять и къ большимъ простымъ числамъ, если перебрать еще больше эксклюдентовъ; вычисленія при этомъ, конечно, увеличиваются. Такъ, напримѣръ, при $p = 1901$ получаемъ для y значеніе 25, послѣ чего легко провѣрить сравненіе:

$$218^2 \equiv -1 \pmod{1901}.$$

Дадимъ еще нѣсколько примѣровъ, наудачу взятыхъ изъ таблицы, вычисленной Эйлеромъ *).

$$\begin{array}{llll}
114^2 \equiv -1 & \pmod{317}, & 78^2 \equiv -1 & \pmod{1217}; \\
208^2 \equiv -1 & \pmod{509}, & 51^2 \equiv -1 & \pmod{1301}; \\
26^2 \equiv -1 & \pmod{677}, & 225^2 \equiv -1 & \pmod{1489}; \\
317^2 \equiv -1 & \pmod{773}, & 61^2 \equiv -1 & \pmod{1861}; \\
469^2 \equiv -1 & \pmod{1009}, & 412^2 \equiv -1 & \pmod{1997}.
\end{array}$$

§ 81. Квадратичные вычеты простыхъ чиселъ.

1. Мы уже видѣли въ предыдущемъ параграфѣ, что простому нечетному числу p всегда отвѣчаетъ $\frac{1}{2}(p-1)$ квадратичныхъ вычетовъ и столько же неквадратичныхъ вычетовъ, если мы число нуль разъ навсегда выключимъ.

Квадратичные вычеты можно получить, какъ вычеты чиселъ

$$1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ \ldots,\ \left(\frac{p-1}{2}\right)^2.$$

Числа, которыя этимъ путемъ не получаются, суть неквадратичные вычеты. Для сокращенія рѣчи мы будемъ теперь разсматривать всѣ числа, имѣющія одинъ и тотъ же вычетъ по модулю p, какъ одинъ индивидуумъ, одинъ числовой классъ. Сообразно этому, мы будемъ вообще разумѣть подъ квадратичными вычетами всѣ числа a, при которыхъ сравненіе $x^2 \equiv a \pmod{p}$ имѣетъ рѣшенія. Въ настоящемъ параграфѣ для сокращенія рѣчи мы будемъ также говорить просто вычеты вмѣсто квадратичные вычеты и

*) „Commentationes arithmeticae", т. I, стр. 362.

невычеты вмѣсто неквадратичные вычеты. Мы получимъ слѣдующія предложенія.

2. Произведеніе двухъ вычетовъ есть вычетъ.

Въ самомъ дѣлѣ, если

$$x^2 \equiv a, \quad x'^2 \equiv a' \pmod p,$$

то

$$(xx')^2 \equiv aa' \pmod p,$$

т. е. aa' также есть вычетъ.

3. Произведеніе вычета на невычетъ есть невычетъ.

Въ самомъ дѣлѣ, если a и aa' суть вычеты, то существуютъ два такихъ числа x и y, которыя удовлетворяютъ сравненіямъ:

$$x^2 \equiv a, \quad y^2 \equiv aa' \pmod p;$$

съ другой стороны, согласно п. 1 § 79-го, существуетъ такое число x', для котораго $xx' \equiv 1$. Въ такомъ случаѣ:

$$y^2 \equiv x^2 a', \quad (yx')^2 \equiv a',$$

а потому a' также представляетъ собою вычетъ. Отсюда вытекаетъ, что произведеніе ab есть невычетъ, если a есть вычетъ, а b невычетъ. Въ самомъ дѣлѣ, если бы ab было вычетомъ, то и b, какъ мы только-что доказали, было бы вычетомъ.

4. Произведеніе двухъ невычетовъ есть вычетъ.

Въ самомъ дѣлѣ, если b есть какое-либо число, не дѣлящееся на p, то произведеніе $b\varrho$ пробѣгаетъ полную систему вычетовъ по модулю p,, когда множитель ϱ пробѣгаетъ полную систему вычетовъ. Эта полная система вычетовъ состоитъ изъ квадратичныхъ вычетовъ α и неквадратичныхъ вычетовъ β. Если b есть невычетъ, то произведеніе $b\alpha$, согласно предыдущей теоремѣ, проходитъ черезъ всѣ невычеты. Слѣдовательно, произведеніе $b\beta$ должно пройти черезъ всѣ вычеты.

Полезно провѣрить эти теоремы на произвольно взятомъ примѣрѣ например, при $p = 13$:

$$\alpha = 1,\ 3,\ 4,\ 9,\ 10,\ 12,$$

$$\beta = 2,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 11.$$

5. Критерій Эйлера.

Если x означаетъ число, не дѣлящееся на p, то, по теоремѣ Фермата

$$x^{p-1} - 1 = \left(x^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)\left(x^{\frac{p-1}{2}} + 1\right) \equiv 0 \pmod p.$$

Поэтому одинъ изъ множителей

$$x^{\frac{p-1}{2}} - 1, \quad x^{\frac{p-1}{2}} + 1$$

долженъ дѣлиться на p. Но оба множителя совмѣстно не могутъ дѣлиться на p, ибо въ такомъ случаѣ ихъ разность 2 тоже дѣлилась бы на p. Положимъ теперь, что a есть квадратичный вычетъ числа p. Въ такомъ случаѣ существуетъ число c, удовлетворяющее сравенію

$$c^2 \equiv a.$$

Примѣняя вновь теорему Фермата, получимъ:

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv c^{p-1} \equiv 1 \pmod{p},$$

а потому каждый квадратичный вычетъ удовлетворяетъ сравненію

$$x^{\frac{p-1}{2}} - 1 \equiv 0.$$

Этому сравненію удовлетворяютъ всѣ $\frac{1}{2}(p-1)$ квадратичныхъ вычетовъ. Согласно же теоремѣ, доказанной въ § 77, ему не можетъ удовлетворять ни одинъ изъ невычетовъ. Слѣдовательно, квадратичные невычеты удовлетворяютъ сравненію

$$x^{\frac{p-1}{2}} + 1 \equiv 0.$$

Мы получаемъ, такимъ образомъ, теорему:

Число c представляетъ собой квадратичный вычетъ или невычетъ, смотря по тому, какое изъ двухъ сравненій имѣетъ мѣсто:

$$c^{\frac{p-1}{2}} \equiv +1 \quad \text{или} \quad c^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}. \tag{1}$$

6. Критерій Гаусса.

Пусть c будетъ число, не дѣлящееся на p. Разсмотримъ $\frac{1}{2}(p-1)$ чиселъ, кратныхъ c:

$$c,\ 2c,\ 3c,\ \ldots,\ \frac{p-1}{2}c, \tag{2}$$

а также произведеніе этихъ чиселъ

$$P = c \cdot 2c \cdot 3c \cdots \frac{p-1}{2}c = c^{\frac{p-1}{2}} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \frac{p-1}{2} \cdot \tag{3}$$

Абсолютно наименьшіе вычеты чиселъ (2) по модулю p содержатся въ ряду чиселъ

$$\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,\ \pm \frac{p-1}{2}.$$

Съ другой стороны, между этими абсолютно наименьшими вычетами не можетъ быть двухъ, имѣющихъ одну и ту же абсолютную величину. Въ самомъ дѣлѣ, если бы было $rc \equiv \pm r'c$, то $r \pm r'$ должно было бы дѣлиться на p; между тѣмъ это невозможно, если r и r' суть различныя положительныя числа, оба меньшія $\frac{1}{2}p$. Поэтому, абсолютныя величины абсолютно наименьшихъ вычетовъ чиселъ (2) совпадаютъ съ числами

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \frac{p-1}{2}\ [12]).$$

Если, поэтому, среди абсолютно наименьшихъ вычетовъ чиселъ (2) имѣется μ отрицательныхъ, то

$$P \equiv (-1)^{\mu} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \frac{p-1}{2} \pmod{p}. \tag{4}$$

Сопоставляя соотношенія (3) и (4), получаемъ:

$$c^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\mu} \pmod{p}.$$

Въ связи съ предыдущей теоремой это приводитъ къ слѣдующему выводу.

Число c, не дѣлящееся на p, представляетъ собой квадратичный вычетъ или невычетъ по модулю p, смотря по тому, имѣется ли между абсолютно наименьшими вычетами чиселъ (2) четное или нечетное число отрицательныхъ чиселъ.

7. Если мы примѣнимъ эту теорему къ числу $c = -1$, то числа ряда (2) сами представляютъ собою свои абсолютно наименьшіе вычеты; всѣ они отрицательны. Такимъ образомъ, -1 есть квадратичный вычетъ, если $\frac{1}{2}(p-1)$ есть четное число, и невычетъ, если $\frac{1}{2}(p-1)$ есть число нечетное. Это совпадаетъ съ предложеніемъ, доказаннымъ выше инымъ путемъ:

Число -1 представляетъ собой квадратичный вычетъ всѣхъ простыхъ чиселъ вида $4m+1$ и невычетъ простыхъ чиселъ вида $4m+3$.

---

[12]) Абсолютныя величины абсолютно наименьшихъ вычетовъ чиселъ (2) могутъ отличаться отъ чиселъ этого ряда только порядкомъ.

8. Обратимся теперь къ числу $c = -2$. Въ такомъ случаѣ рядъ (2) совпадаетъ съ рядомъ четныхъ отрицательныхъ чиселъ

$$-2,\ -4,\ -6,\ \ldots,\ -(p-1).$$

Если $2r < \frac{1}{2}p$, то $-2r$ представляетъ само свой абсолютно наименьшій вычетъ, который будетъ, поэтому, отрицательнымъ. Если же $2r > \frac{1}{2}p$, то абсолютно наименьшимъ вычетомъ числа $-2r$ будетъ $p-2r$; онъ имѣетъ, слѣдовательно, положительное значеніе. Такимъ образомъ, μ есть число четныхъ положительныхъ чиселъ, которыя меньше $\frac{1}{2}p$, или, что сводится къ тому же, число всѣхъ цѣлыхъ положительныхъ чиселъ, которыя меньше $\frac{1}{4}p$. Число p всегда приводится къ одному изъ четырехъ видовъ: $8m+1$, $8m+3$, $8m+5$, $8m+7$. Въ каждомъ изъ этихъ четырехъ случаевъ μ есть число положительныхъ чиселъ r, которыя удовлетворяютъ слѣдующимъ условіямъ:

$$r < 2m + \tfrac{1}{4},\ \mu = 2m,$$
$$r < 2m + \tfrac{3}{4},\ \mu = 2m,$$
$$r < 2m + \tfrac{5}{4},\ \mu = 2m+1,$$
$$r < 2m + \tfrac{7}{4},\ \mu = 2m+1.$$

Отсюда вытекаетъ слѣдующее предложеніе:

Число -2 есть квадратичный вычетъ всѣхъ простыхъ чиселъ вида

$$8m+1,\quad 8m+3,$$

и невычетъ всѣхъ простыхъ чиселъ вида

$$8m+5,\quad 8m+7.$$

9. Сопоставляя это предложеніе съ предыдущимъ, мы приходимъ, согласно п. п. 2, 3, 4, къ слѣдующей теоремѣ [13]):

Число $+2$ есть квадратичный вычетъ простыхъ чиселъ вида

$$8m+1,\quad 8m+7,$$

и невычетъ простыхъ чиселъ вида

$$8m+3,\quad 8m+5.$$

10. Историческія свѣдѣнія о квадратичныхъ вычетахъ.

Если c есть квадратичный вычетъ числа p, то существуютъ цѣлыя числа x, для которыхъ квадратная функція

$$f(x) = x^2 - c \tag{5}$$

[13]) Для вывода этой теоремы слѣдуетъ разсмотрѣть теорему п. 7-го при $m = 2k$ и при $m = 2k+1$ и сопоставить послѣднюю съ теоремой п. 8-го.

дѣлится на p. Поэтому старые авторы по теорiи чиселъ Эйлеръ, Лежандръ и другiе называютъ простыя числа, для которыхъ c есть квадратичный вычетъ, **простыми дѣлителями** функцiи $f(x)$. Задача, которую мы здѣсь рѣшили для случаевъ $c = -1, \pm 2$, устанавливаетъ простыхъ дѣлителей функцiй $x^2 + 1$ и $x^2 \pm 2$. Фермату эти результаты были уже извѣстны. Но, повидимому, онъ пришелъ къ нимъ только путемъ индукцiи. Доказательство для случая $c = -1$ было дано Эйлеромъ, а для случая $c = \pm 2$ — Лагранжемъ. Общiй законъ для любого c былъ высказанъ впервые Эйлеромъ (1783), но не былъ имъ доказанъ. Этотъ общiй законъ, который Лежандръ называетъ **закономъ взаимности квадратичныхъ вычетовъ**, а Гауссъ — „Theorema fundamentale in doctrina de residuis quadraticis", играетъ въ исторiи новой теорiи чиселъ очень важную роль. Кромѣ Эйлера и, повидимому, совершенно независимо отъ него къ этому закону индуктивнымъ путемъ пришелъ Лежандръ (1785), но доказательство было дано впервые Гауссомъ въ 1786 году.

Гауссъ много разъ возвращался къ этому предложенiю и до 1818 года далъ 6 доказательствъ этого предложенiя, основанныхъ на совершенно различныхъ принципахъ. Еще два доказательства были найдены въ его посмертныхъ бумагахъ.

Другiя доказательства даны Коши, Якоби, Эйзенштейномъ, Куммеромъ, Кронекеромъ и другими. Особенно простое доказательство принадлежитъ пастору Целлеру *).

Содержанiе этого общаго закона можетъ быть выражено слѣдующимъ образомъ.

Если изъ двухъ нечетныхъ простыхъ чиселъ p и q, по крайней мѣрѣ, одно имѣетъ видъ $4m+1$, то p есть квадратичный вычетъ или невычетъ по модулю q, смотря по тому, есть ли q вычетъ или невычетъ по модулю p. Если же оба числа p и q имѣютъ видъ $4m+3$, то p есть вычетъ по модулю q, когда q есть невычетъ по модулю p, и обратно.

Случаи $c = -1$ и $c = \pm 2$, которые мы разсмотрѣли выше, не содержатся непосредственно въ общемъ законѣ и носятъ названiе **дополнительныхъ предложенiй къ закону взаимности квадратичныхъ вычетовъ**. Подробныя свѣдѣнiя о доказательствахъ закона взаимности можно найти въ спецiальномъ сочиненiи О. Баумгарта **).

---

*) „Monatsberichte der Berliner Akademie", 1872.

**) Oswald Baumgart, „Ueber das quadratische Reziprozitätsgesetz". Leipzig, Teubner, 1885.

§ 82. Пиѳагоровы треугольники.

1. Еще въ глубокой древности знали, что треугольникъ, стороны котораго, измѣренныя одной и той же единицей мѣры, выражаются числами 3, 4, 5, имѣетъ прямой уголъ; эти три числа обладаютъ тѣмъ замѣчательнымъ свойствомъ, что квадратъ большаго изъ нихъ равенъ суммѣ квадратовъ двухъ другихъ ($5^2 = 3^2 + 4^2$); послѣднее соотношенiе выражаетъ теорему Пиѳагора. Историки полагаютъ, что это ариѳметическое соображенiе послужило началомъ, источникомъ геометрической теоремы (Канторъ, „Исторiя математики", томъ I, стр. 168).

Прямоугольный треугольникъ называется Пиѳагоровымъ, если его стороны, измѣренныя одной и той же единицей мѣры, выражаются цѣлыми числами. Чтобы найти всѣ Пиѳагоровы треугольники, нужно рѣшить, стало быть, ариѳметическую задачу: найти всѣ натуральныя числа x, y, z, удовлетворяющiя условiю:

$$z^2 = x^2 + y^2. \tag{1}$$

2. Чтобы рѣшить эту задачу, замѣтимъ сначала, что изъ одного рѣшенiя уравненiя (1) можно вывести сколько угодно другихъ, умножая полученныя значенiя x, y, z на одно и то же число. Точно такъ же мы можемъ сократить обѣ части уравненiя (1) на g^2, если g есть общiй наибольшiй дѣлитель чиселъ x, y и z, и тогда мы получимъ рѣшенiя уравненiя (1), не имѣющiя дѣлителей, общихъ всѣмъ тремъ числамъ. Поэтому мы можемъ ограничиться предположенiемъ, что x, y, z не имѣютъ общихъ дѣлителей. Но тогда эти числа и попарно не могутъ имѣть общихъ дѣлителей; въ самомъ дѣлѣ, если два изъ этихъ чиселъ дѣлятся на простое число q, то, въ виду равенства (1), и третье число должно дѣлиться на q.

Итакъ, изъ трехъ чиселъ x, y, z ни одна пара не можетъ имѣть общаго дѣлителя.

Въ виду этого между этими числами не можетъ быть двухъ четныхъ. Съ другой стороны, числа x и y не могутъ быть одновременно нечетными. Ибо, если $x = 2g + 1$, $y = 2k + 1$, то число

$$x^2 + y^2 = 4(g^2 + k^2) + 4(g + k) + 2$$

дѣлится на 2, но не дѣлится на 4 и потому не можетъ быть полнымъ квадратомъ, такъ какъ каждый четный квадратъ дѣлится на 4. Мы не нарушимъ, такимъ образомъ, общности, если будемъ считать x нечетнымъ, y четнымъ, а z нечетнымъ числомъ. Напишемъ уравненiе (1) въ видѣ:

$$x^2 = z^2 - y^2 = (z - y)(z + y). \tag{2}$$

Положимъ:

$$z + y = m,$$
$$z - y = n,$$

гдѣ, въ виду нашихъ предположеній, m и n суть числа нечетныя; отсюда

$$z = \frac{m+n}{2}, \quad y = \frac{m-n}{2};$$

изъ этихъ формулъ заключаемъ, что $m > n$, и что m и n не могутъ имѣть общаго множителя, ибо таковой могъ бы быть только нечетнымъ числомъ, а потому содержался бы также въ y и въ z. Изъ уравненія (2) слѣдуетъ:

$$x^2 = mn, \tag{3}$$

откуда вытекаетъ, что числа m и n должны быть полными квадратами.

Дѣйствительно, если бы число m содержало какого нибудь простого множителя въ нечетной степени, то онъ долженъ былъ бы, по крайней мѣрѣ, одинъ разъ входить въ n; но это не можетъ имѣть мѣста, такъ какъ m и n суть числа взаимно простыя.

Итакъ, $m = a^2$ и $n = b^2$, гдѣ a и b суть нечетныя числа, не имѣющія общихъ множителей; вмѣстѣ съ тѣмъ

$$x = ab, \quad y = \frac{a^2 - b^2}{2}, \quad z = \frac{a^2 + b^2}{2}. \tag{4}$$

3. Обратно, если a и b суть нечетныя цѣлыя числа, при чемъ $a > b$, то выраженія (4) удовлетворяютъ уравненію (1). Дѣйствительно,

$$(ab)^2 + \left(\frac{a^2 - b^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^2.$$

Сообразно съ этимъ формула (4) даетъ всѣ возможные Пиѳагоровы треугольники. Мы получаемъ, напримѣръ:

$$a = 3, \quad b = 1, \quad x = 3, \quad y = 4, \quad z = 5,$$
$$a = 5, \quad b = 1, \quad x = 5, \quad y = 12, \quad z = 13,$$
$$a = 5, \quad b = 3, \quad x = 15, \quad y = 8, \quad z = 17,$$

и т. д.

§ 83. Великая теорема Фермата.

1. Задача о нахожденіи цѣлыхъ положительныхъ чиселъ, удовлетворяющихъ уравненію

$$x^n + y^n = z^n,$$

есть обобщенiе задачи, рѣшенной въ предыдущемъ параграфѣ. Ферматъ безъ доказательства высказалъ положенiе, что это уравненiе не имѣетъ цѣлыхъ рѣшенiй, если $n > 2$. До сихъ поръ не существуетъ доказательства этой теоремы въ общемъ видѣ, хотя справедливость ея не подвергается сомнѣнiю. Кронекеръ далъ ей названiе великой теоремы Фермата. Эйлеръ далъ доказательство для случаевъ $n = 3$ и $n = 4$; Дирихле (Dirichlet) — для случая $n = 5$; наконецъ, Куммеръ (Kummer) при помощи высшей теорiи чиселъ далъ доказательство, непримѣнимое только для нѣкоторыхъ отдѣльныхъ значенiй n, число которыхъ — по крайней мѣрѣ, среди небольшихъ значенiй n — очень невелико. Ниже 100 нѣтъ ни одного такого показателя n, для котораго доказательство Куммера было бы непримѣнимо. Благодаря учрежденiю премiи Вольфскеля вниманiе широкихъ круговъ съ новой силой сосредоточилось на этой задачѣ; уже сдѣланы многочисленныя попытки доказать ее, но мы можемъ только предостеречь отъ всякаго къ нимъ довѣрiя. См. по этому поводу сообщенiе редакцiи журнала „Mathematische Annalen" въ т. 66-омъ. Доказательство для случая $n = 4$ выполняется съ помощью элементарныхъ прiемовъ и можетъ быть здѣсь изложено.

2. Если предположить, что уравненiе

$$x^4 + y^4 = z^4 \tag{1}$$

имѣетъ рѣшенiе въ цѣлыхъ числахъ x, y и z, изъ которыхъ ни одно не равно нулю, то и уравненiе

$$x^4 + y^4 = z^2 \tag{2}$$

будетъ имѣть такое рѣшенiе. Нужно только въ уравненiи (2) положить z равнымъ квадрату того значенiя, которое z имѣетъ въ первомъ уравненiи.

Если мы поэтому обнаружимъ, что уравненiе (2) не имѣетъ рѣшенiя, то мы докажемъ даже больше того, что собственно требуется. Если же уравненiе (2), вообще, имѣетъ рѣшенiя, то между ними будетъ одно (а, можетъ быть, и нѣсколько), при которыхъ z^2 имѣетъ наименьшее значенiе. Эти именно рѣшенiя, соотвѣтствующiя наименьшему значенiю z, мы и будемъ теперь понимать подъ x, y и z. Но тогда x и y не могутъ имѣть общихъ множителей: если бы x и y имѣли общаго дѣлителя d, то z должно бы дѣлиться на d^2; раздѣляя тогда уравненiе (2) на d^4, получимъ уравненiе того же вида, въ которомъ z имѣетъ меньшее значенiе.

3. Если мы удовлетворимъ уравненiю (2), то x^2, y^2 и z суть стороны Пиѳагорова треугольника, а потому, согласно п. 2 § 82-го, мы можемъ положить:

$$x^2 = ab, \quad y^2 = \frac{a^2 - b^2}{2}, \quad z = \frac{a^2 + b^2}{2}, \tag{3}$$

гдѣ a и b суть нечетныя числа безъ общихъ дѣлителей ($a > b$). Изъ перваго изъ равенствъ (3) мы заключаемъ точно такъ же, какъ въ п. 2 § 82-го изъ равенства (3), что числа a и b сами также должны быть полными квадратами; положимъ поэтому

$$a = \alpha^2, \quad b = \beta^2,$$

гдѣ α и β суть опять нечетныя числа, не имѣющія общихъ дѣлителей.

Пусть теперь

$$\alpha + \beta = 2t, \quad \alpha - \beta = 2u,$$

и, слѣдовательно,

$$\alpha = t + u, \quad \beta = t - u,$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = 4tu, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 2(t^2 + u^2).$$

Ясно, что t и u также представляютъ собою цѣлыя числа, не имѣющія общихъ дѣлителей. Изъ уравненій (3) вытекаетъ:

$$y^2 = \frac{\alpha^4 - \beta^4}{2} = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 + \beta^2)}{2} = 4tu(t^2 + u^2),$$

откуда

$$\left(\frac{y}{2}\right)^2 = tu(t^2 + u^2). \tag{4}$$

Такъ какъ числа t и u не имѣютъ общихъ дѣлителей, то выраженіе $t^2 + u^2$ не можетъ имѣть общихъ дѣлителей ни съ t, ни съ u. Отсюда, на основаніи тѣхъ же соображеній, которыми мы воспользовались выше, мы заключаемъ, что три числа u, t и $u^2 + t^2$ суть полные квадраты. Положимъ:

$$t = x_1^2, \quad u = y_1^2, \quad t^2 + u^2 = z_1^2;$$

тогда

$$x_1^4 + y_1^4 = z_1^2. \tag{5}$$

Теперь

$$z_1^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} = \frac{a + b}{2} = \frac{y^2}{a - b};$$

но, такъ какъ $a - b$ есть цѣлое положительное число, равное, по крайней мѣрѣ, 2, то

$$z_1^2 < y^2;$$

съ другой стороны, $y^4 = z^2 - x^4 < z^2$ и, слѣдовательно,

$$z_1^2 < z;$$

итакъ, z_1^2 меньше z и тѣмъ болѣе меньше z^2; но это противорѣчитъ предположенію, что z^2 есть наименьшее число, которое удовлетворяетъ уравненію (2). Итакъ, не существуетъ цѣлыхъ положительныхъ чиселъ x, y, z, удовлетворяющихъ уравненію (2), какъ того и требуетъ теорема Ферміата.

§ 84. Разложеніе чиселъ на сумму двухъ квадратовъ.

1. Каждое простое число вида $4n+1$ есть сумма двухъ квадратовъ *). Доказательство этой теоремы изложено ниже:

2. Если x и y суть цѣлыя числа и

$$m = x^2 + y^2 \tag{1}$$

есть сумма ихъ квадратовъ, то m можетъ быть нечетнымъ числомъ только въ томъ случаѣ, если одно изъ чиселъ x, y четное, а другое нечетное, такъ какъ сумма двухъ нечетныхъ или двухъ четныхъ чиселъ есть всегда четное число. Квадратъ четнаго числа дѣлится на 4, квадратъ нечетнаго числа даетъ по модулю 4 вычетъ 1 (§ 80, 4); если поэтому въ формулѣ (1) m есть число нечетное, то оно имѣетъ видъ $4n+1$. Итакъ, если простое число (кромѣ $2 = 1^2 + 1^2$) есть сумма двухъ квадратовъ, то оно непремѣнно имѣетъ видъ $4n+1$. Гораздо труднѣе было доказать обратное, что каждое простое число вида $4n+1$ всегда представляетъ собою сумму двухъ квадратовъ.

Если $m = x^2 + y^2$, гдѣ x и y суть цѣлыя числа, то говорятъ, что m разложено на два квадрата, или что m представлено въ видѣ суммы двухъ квадратовъ. Если при этомъ x и y суть числа взаимно-простыя, то разложеніе называется правильнымъ (или собственнымъ); если же x и y имѣютъ общаго множителя, то разложеніе называется неправильнымъ (или несобственнымъ).

Если x и y имѣютъ общаго множителя, то, въ силу равенства (1), въ составъ числа m долженъ входить квадратъ этого множителя; если поэтому m есть простое число, то x и y суть числа взаимно-простыя.

3. Предположимъ теперь, что нѣкоторое нечетное простое число p не разлагается на два квадрата, но входитъ множителемъ въ сумму двухъ квадратовъ. Иными словами, допустимъ, что имѣетъ мѣсто равенство

$$x^2 + y^2 = np, \tag{2}$$

*) Теорема эта дана Ферматомъ безъ доказательства. Доказательство принадлежитъ Эйлеру („Commentationes arithmeticae", т. I, 1754). Въ настоящее время теорема эта является частнымъ случаемъ теоріи квадратичныхъ формъ.

гдѣ x, y и n суть цѣлыя числа, при чемъ числа x и y не дѣлятся на p. Мы покажемъ, что въ такомъ случаѣ можно найти отсюда другія числа, удовлетворяющія равенству вида (2), но только съ меньшимъ множителемъ n, такъ что послѣдовательно мы непремѣнно придемъ къ разложенію числа p на два квадрата.

4. Раздѣляя x и y на p, мы получимъ:

$$x = pa + x_1,$$
$$y = pb + y_1,$$

гдѣ a и b суть частныя, а x_1 и y_1 отличные отъ нуля остатки дѣленія. Мы возьмемъ при этомъ не наименьшіе положительные, а абсолютно наименьшіе остатки (§ 16, 3). Поэтому x_1 и y_1 могутъ быть и положительными и отрицательными числами, но по абсолютной величинѣ

$$x_1 < \frac{1}{2}p \quad \text{и} \quad y_1 < \frac{1}{2}p;$$

слѣдовательно:

$$x_1{}^2 + y_1{}^2 < \frac{1}{2}p^2. \tag{3}$$

Съ другой стороны, такъ какъ число $x^2 + y^2$, согласно предположенію (2), дѣлится на p, то и число

$$x_1{}^2 + y_1{}^2 = p^2(a^2 + b^2) - 2p(ax + by) + (x^2 + y^2)$$

должно дѣлиться на p; если поэтому n_1 есть частное отъ этого дѣленія, то

$$x_1{}^2 + y_1{}^2 = n_1 p. \tag{4}$$

Въ виду же неравенства (3)

$$n_1 < \frac{1}{2}p.$$

Здѣсь x_1 и y_1 не дѣлятся на p, такъ какъ въ противномъ случаѣ $n_1 p$ дѣлилось бы на p^2, т. е. n_1 дѣлилось бы на p, чего не можетъ быть, такъ какъ число n_1 меньше, чѣмъ $\frac{1}{2}p$, но отлично отъ нуля.

5. Теперь повторимъ тотъ же пріемъ съ тою только разницей, что за дѣлителя возьмемъ не p, а n_1. Пусть

$$\begin{aligned} x_1 &= n_1 a_1 + \alpha, \\ y_1 &= n_1 b_1 + \beta; \end{aligned} \tag{5}$$

опредѣлимъ числа a_1 и b_1 такъ, чтобы остатки α и β были по абсолютной величинѣ равны или меньше $\frac{1}{2}n_1$; тогда

$$\alpha^2+\beta^2 \leqq \frac{1}{2} n_1^2.$$

Изъ равенства (4), какъ и выше, выводимъ снова, что $\alpha^2+\beta^2$ дѣлится на n_1, и потому получимъ:

$$\alpha^2+\beta^2=n_1 n_2; \tag{6}$$

при этомъ, въ виду предыдущаго неравенства,

$$n_2 \leqq \frac{1}{2} n_1 < \frac{1}{4} p.$$

Оба числа α и β могли бы быть равны нулю только въ томъ случаѣ, если бы x_1 и y_1 дѣлились на n_1. Въ послѣднемъ случаѣ $n_1 p$ должно было бы, въ виду равенствъ (4) и (5), дѣлиться на n_1^2, а потому p дѣлилось бы на n_1; но такъ какъ p есть простое число, то либо n_1 равнялось бы p, — а этого быть не можетъ, такъ какъ $n_1 < \frac{1}{2}p$, — либо n_1 сводилось бы къ 1. Если же $n_1=1$, то равенство (4) даетъ требуемое разложенiе числа p на два квадрата.

Если же n_1 больше 1, то α и β не равны одновременно нулю, и, слѣдовательно, частное n_2 также отлично отъ нуля.

Изъ равенства (5), принимая во вниманiе равенство (4), выводимъ, что

$$\alpha x_1+\beta y_1 = x_1^2+y_1^2-n_1(a_1 x_1+b_1 y_1)=n_1(p-a_1 x_1-b_1 y_1),$$
$$\alpha y_1-\beta x_1 = -n_1(a_1 y_1-b_1 x_1),$$

и, слѣдовательно, числа $\alpha x_1+\beta y_1$ и $\alpha y_1-\beta x_1$ дѣлятся на n_1. Въ виду этого мы можемъ опредѣлить два такихъ числа x_2 и y_2, чтобы имѣли мѣсто равенства:

$$\left.\begin{aligned}\alpha x_1+\beta y_1&=n_1 x_2,\\ \alpha y_1-\beta x_1&=n_1 y_2.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Возводя эти равенства въ квадратъ и складывая, получимъ:

$$n_1^2(x_2^2+y_2^2)=(\alpha^2+\beta^2)(x_1^2+y_1^2),$$

и, слѣдовательно, въ виду соотношенiй (4) и (6),

$$x_2^2+y_2^2=n_2 p. \tag{8}$$

Если бы числа x_2 и y_2 дѣлились на p, то n_2 также дѣлилось бы на p, что невозможно, такъ какъ n_2 меньше p; поэтому числа x_2 и y_2 не дѣлятся на p.

Формула (8) имѣетъ тотъ же видъ, что и (4), но только на мѣстѣ числа n_1 стоитъ меньшее число n_2. Если n_2 еще не равно 1, то мы можемъ повторить нашъ пріемъ, и такимъ образомъ мы необходимо придемъ, въ концѣ концовъ, къ разложенію числа p на два квадрата.

6. Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что каждое простое число p, которое служитъ дѣлителемъ суммы квадратовъ x^2+y^2 двухъ взаимно-простыхъ чиселъ x и y, само можетъ быть представлено въ видѣ суммы двухъ квадратовъ, а потому имѣетъ видъ $4n+1$.

7. Если p есть простое число вида $4n+1$, то сравненіе

$$x^2+1\equiv 0 \pmod{p},$$

какъ было показано въ § 79, 5, всегда имѣетъ рѣшеніе. Это значитъ, что мы можемъ найти такое число n, которое удовлетворяетъ равенству

$$x^2+1=np. \tag{2'}$$

Это равенство совпадаетъ съ равенствомъ (2), если въ послѣднемъ положимъ $y=1$. Итакъ, уравненію (2) можно всегда удовлетворить, если p есть простое число вида $4n+1$; этимъ доказана теорема, высказанная въ п. 1-омъ. Ходъ доказательства даетъ вмѣстѣ съ тѣмъ и самый способъ разложенія числа p на два квадрата, если только извѣстно хотя бы одно рѣшеніе сравненія $x^2\equiv -1 \pmod{p}$ [14]).

8. Для примѣра возьмемъ $p=1901$. Такъ какъ въ формулѣ

$$218^2+1=25\,.\,1901$$

множитель 25 уже меньше $\frac{1}{2}p$, то мы можемъ исходить прямо изъ формулы (4), т. е. положить $x_1=218$, $y_1=1$, $n_1=25$. Изъ равенства (5) получаемъ:

$$218=25\,.\,9-7,\quad 1=25\,.\,0+1,$$

---

[14]) Сдѣлаемъ еще разъ краткій обзоръ этого довольно сложнаго доказательства.

Нужно доказать, что простое число p вида $4n+1$ разлагается на два квадрата. Мы допускаемъ сначала, что число p есть дѣлитель суммы двухъ квадратовъ, т. е. что имѣетъ мѣсто равенство (2′). Далѣе доказывается, что равенство (2′) можетъ быть замѣнено равенствомъ того же вида, съ тою разницей, однако, что частное n имѣетъ меньшее значеніе. Именно, отъ равенства (2′) мы переходимъ къ равенству (4) (п. 4); далѣе, продолжая тотъ же пріемъ, мы показываемъ, что, если только $n_1>1$, то мы отъ равенства (4) можемъ перейти къ равенству (8), причемъ $n_2<n_1$. Такимъ образомъ, мы постепенно должны довести частное до единицы и, слѣдовательно, p разлагается на 2 квадрата. Но доказательство основано на допущеніи, что p есть дѣлитель суммы двухъ квадратовъ; надо, слѣдовательно, доказать, что допущеніе всегда соотвѣтствуетъ дѣйствительности; этому и посвященъ п. 7.

т. е. $\alpha = -7$, $\beta = 1$. Для опредѣленія чиселъ x_2, y_2 и n_2 получаемъ изъ равенствъ (7) и (6):

$$-7.218 + 1 = -25.61,$$
$$-7 - 218 = -25.9,$$
$$7^2 + 1^2 = 2.25,$$

т. е. $x_2 = 61$, $y_2 = 9$, $n_2 = 2$. Итакъ, согласно равенству (8),

$$61^2 + 9^2 = 2.1901.$$

Повторяя ту же операцію для чиселъ: $n_1 = 2$, $x_1 = 61$, $y_1 = 9$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $2x_2 = 61 + 9$, $2y_2 = 61 - 9$, получимъ:

$$35^2 + 26^2 = 1901.$$

9. Изъ разсужденій предыдущаго параграфа вытекаютъ попутно слѣдующія теоремы:

Если x и y суть числа взаимно-простыя и $m = x^2 + y^2$, то m есть либо нечетное число, либо удвоенное нечетное число; каждый нечетный простой дѣлитель числа m имѣетъ видъ $4n+1$.

Дѣйствительно, если x и y суть оба нечетныя числа, то ихъ квадраты имѣютъ видъ $8n + 1$ (§ 80, 4), а сумма послѣднихъ есть число вида $8n + 2$, т. е. число, кратное 2, но не кратное 4.

Съ другой стороны, какъ доказано въ пунктѣ 6, каждое простое число, входящее множителемъ въ m, само по себѣ есть сумма двухъ квадратовъ, т. е. число вида $4n + 1$.

10. Если число m допускаетъ правильное разложеніе на два квадрата, а p есть простой множитель числа m (не исключая и $p = 2$), такъ что $m = pn$, то n тоже допускаетъ правильное разложеніе на два квадрата.

Дѣйствительно, въ п. п. 9 и 3 мы показали, что и p есть сумма двухъ квадратовъ:

$$p = a^2 + b^2; \tag{9}$$

здѣсь a и b суть непремѣнно взаимно-простыя числа, такъ какъ p есть простое число.

Если теперь

$$m = pn = x^2 + y^2, \tag{10}$$

то и

$$x^2(a^2 + b^2) - b^2(x^2 + y^2) = a^2x^2 - b^2y^2 = (ax - by)(ax + by)$$

дѣлится на p, такъ какъ и $a^2 + b^2$ и $x^2 + y^2$ дѣлятся на p. Но p есть простое число; поэтому оно должно быть дѣлителемъ одного изъ множителей $ax+by$ или $ax-by$. Мы можемъ предположить, что p дѣлитъ именно множителя $ax+by$, такъ какъ въ противномъ случаѣ можно замѣнить y на $-y$.

Далѣе:

$$(ax+by)^2+(ay-bx)^2=(a^2+b^2)(x^2+y^2)=pm;$$

слѣдовательно, и $ay-bx$ дѣлится на p, такъ какъ правая часть дѣлится на p. Вслѣдствіе этого существуютъ два числа α и β, удовлетворяющія равенствамъ:

$$\begin{array}{r|rr} ax+by=\alpha p, & a & b \\ bx-ay=\beta p, & b & -a. \end{array}$$

Помножая эти равенства на приписанныхъ справа множителей, складывая результаты и сокращая на p, получимъ:

$$x=\alpha a+\beta b,$$
$$y=\alpha b-\beta a.$$

Отсюда заключаемъ, что α и β не имѣютъ общихъ множителей, такъ какъ каждый ихъ общій множитель входилъ бы въ числа x и y, которыя мы предположили взаимно-простыми.

Если мы возведемъ наши уравненія въ квадратъ и сложимъ, то получимъ:

$$x^2+y^2=(a^2+b^2)(\alpha^2+\beta^2),$$

что въ силу равенствъ (9) и (10) даетъ:

$$n=\alpha^2+\beta^2,$$

что и требовалось доказать.

Примѣняя достаточное число разъ предложеніе 10, получимъ теорему:

11. Если число m разлагается правильно на два квадрата, то и каждый множитель числа m также допускаетъ правильное разложеніе на два квадрата.

Далѣе:

12. Простое число p вида $4n+1$ можетъ быть разложено на два квадрата только однимъ способомъ.

Допустимъ, что нѣкоторое число m вида $4n+1$ разлагается на два квадрата двумя способами (правильно или неправильно):

$$m=x^2+y^2=x_1{}^2+y_1{}^2. \tag{11}$$

Предположимъ, что числа x, y, x_1, y_1 положительны; оба разложенія не будутъ отличаться одно отъ другого какъ въ томъ случаѣ, если $x = x_1$, $y = y_1$, такъ и въ томъ случаѣ, если $x = y_1$, $y = x_1$. Предположимъ поэтому, что число $x > x_1$; тогда $y < y_1$.

Обозначимъ черезъ δ общаго наибольшаго дѣлителя чиселъ $x - x_1$ и $y_1 - y$ и положимъ:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \delta\alpha, \\ y_1 &= y + \delta\beta, \end{aligned} \tag{12}$$

гдѣ α и β суть положительныя числа, не имѣющія общихъ дѣлителей. Изъ равенствъ (11) получимъ:

$$(x_1 + \delta\alpha)^2 + y^2 = (y + \delta\beta)^2 + x_1^2,$$

или, сокращая на δ:

$$2\alpha x_1 + \delta\alpha^2 = 2\beta y + \delta\beta^2;$$

общее значеніе этихъ двухъ выраженій есть число, дѣлящееся и на α и на β; такъ какъ α и β суть числа взаимно-простыя, то это число дѣлится на $\alpha\beta$ (§ 16, 6); положимъ его поэтому равнымъ $\alpha\beta\gamma$, гдѣ γ, во всякомъ случаѣ, есть цѣлое положительное число. Тогда

$$\begin{aligned} 2x_1 &= \beta\gamma - \delta\alpha, \\ 2y &= \alpha\gamma - \delta\beta; \end{aligned} \tag{13}$$

а изъ уравненій (12) получимъ:

$$\begin{aligned} 2x &= \beta\gamma + \delta\alpha, \\ 2y_1 &= \alpha\gamma + \delta\beta. \end{aligned} \tag{14}$$

Здѣсь α, β, γ, δ суть четыре положительныхъ числа, изъ которыхъ ни одно не равно 0. Изъ равенствъ (13) и (14) легко получить:

$$4(x^2 + y^2) = \alpha^2\gamma^2 + \delta^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \delta^2\alpha^2,$$

или, въ виду равенства (11),

$$m = \frac{(\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2)}{4}. \tag{15}$$

Мы не погрѣшимъ противъ общности, если будемъ считать числа x и x_1 четными, а, слѣдовательно, y и y_1 — нечетными. Тогда равенства (12) обнаруживаютъ, что δ дѣлится на 2, такъ какъ α и β суть числа взаимно-простыя и не могутъ быть одновременно четными; равенства же (13) обнаруживаютъ, что γ также представляетъ собой четное число.

Слѣдовательно, $\frac{1}{4}(\gamma^2+\delta^2)$ есть цѣлое число, во всякомъ случаѣ, большее, чѣмъ 1 [15]). Точно такъ же $\alpha^2+\beta^2>1$; такимъ образомъ, m представляется формулой (15) въ видѣ произведенія двухъ множителей и поэтому не можетъ быть простымъ числомъ, что и требовалось доказать.

13. Если x и y суть числа взаимно-простыя и $m=x^2+y^2$ есть нечетное составное число, то существуетъ еще одно разложеніе числа m на два квадрата.

Дѣйствительно, пусть $m=m_1m_2$ и пусть при этомъ оба числа m_1 и m_2 будутъ больше 2. По теоремѣ 11 каждое изъ чиселъ m_1 и m_2 допускаетъ правильное разложеніе на два квадрата. Пусть

$$m_1={x_1}^2+{y_1}^2,\quad m_2={x_2}^2+{y_2}^2; \tag{16}$$

положимъ далѣе:

$$\begin{aligned} x'&=x_1x_2+y_1y_2, & x''&=x_1x_2-y_1y_2,\\ y'&=x_1y_2-y_1x_2, & y''&=x_1y_2+y_1x_2. \end{aligned}$$

Возведя эти равенства въ квадратъ и сложивъ ихъ, получимъ:

$$\begin{aligned} x'^2+y'^2&=({x_1}^2+{y_1}^2)({x_2}^2+{y_2}^2)=m_1m_2=m,\\ x''^2+y''^2&=({x_1}^2+{y_1}^2)({x_2}^2+{y_2}^2)=m_1m_2=m; \end{aligned} \tag{17}$$

оба эти разложенія числа m тождественны только въ томъ случаѣ, когда $x'=\pm x''$ или $x'=\pm y''$. Первое соотношеніе было бы возможно только въ томъ случаѣ, если бы одно изъ чиселъ x_1, x_2, y_1, y_2 равнялось нулю; но тогда разложенія (16), вопреки предположенію, не были бы правильными [16]). Изъ соотношенія же $x'=\pm y''$ слѣдовало бы, что

$$(x_1\pm y_1)(x_2\pm y_2)=0,$$

т. е. что либо $x_1=\pm y_1$, либо $x_2=\pm y_2$. Но это опять невозможно, такъ какъ разложенія (16) и въ этомъ случаѣ не были бы правильными. Такимъ образомъ, оба разложенія (17) отличны другъ отъ друга, и вмѣстѣ съ тѣмъ теорема 13 доказана. Нужно замѣтить, что разложенія (17) могутъ и не быть оба правильными.

---

[15]) Это число могло бы быть равно 1 только въ томъ случаѣ, если бы $\gamma=\delta=2$. Но тогда равенства (13) дали бы: $x_1=-y$, что невозможно, такъ какъ, по предположенію, x_1 и y суть положительныя числа.

[16]) Если, напримѣръ, $y_1=0$, то x_1 и y_1 не представляютъ собой взаимно-простыхъ чиселъ.

§ 85. Разложенiе большихъ чиселъ на простыхъ множителей.

1. На основанiи того, что теоремы 12 и 13 § 84-го рѣзко различаютъ простыя и составныя числа вида $4n+1$, можно построить прiемъ для рѣшенiя вопроса, представляетъ ли собой данное число вида $4n+1$ простое или составное число.

Пусть m будетъ число вида $4n+1$, относительно котораго не установлено еще, простое оно или составное. Если m есть число простое, то оно единственнымъ способомъ разлагается на два квадрата:

$$m = x^2 + y^2; \tag{1}$$

если же m есть число составное, то оно либо совсѣмъ не разлагается на два квадрата, либо его можно представить въ этой формѣ нѣсколькими способами. Въ томъ случаѣ, когда такое разложенiе возможно, мы можемъ положить:

$$x^2 \leqq y^2,$$

и тогда

$$x^2 \leqq \tfrac{1}{2}m; \tag{2}$$

далѣе, изъ равенства (1) слѣдуетъ:

$$m - x^2 = y^2. \tag{3}$$

Остается подставить вмѣсто x всѣ числа, удовлетворяющiя неравенству (2), и посмотрѣть, есть ли между ними такiя, которыя дѣлаютъ разность $m-x^2$ квадратомъ, и сколько имѣется такихъ чиселъ. Если имѣется только одно такое число x, то m есть простое число; если же ихъ нѣтъ вовсе или если есть нѣсколько, то m есть составное число; въ послѣднемъ случаѣ, пользуясь разсужденiями п. 13 § 84-го, мы тотчасъ получимъ разложенiе числа m на двухъ множителей. Эйлеръ, которому мы обязаны этимъ прiемомъ, даетъ очень удобное правило для расположенiя этихъ вычисленiй. При этомъ полезно имѣть таблицу квадратовъ въ томъ видѣ, какъ она дана въ упомянутомъ уже выше „Собранiи математическихъ таблицъ“ Вега-Гюльзе (стр. 148). И въ этомъ случаѣ съ помощью метода эксклюдентовъ (§ 80, 6) можно значительно уменьшить число значенiй x, подлежащихъ испытанiю. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ какое-нибудь число e за эксклюдентъ и любой его неквадратичный вычетъ β; всѣ числа, удовлетворяющiя сравненiю

$$m - x^2 \equiv \beta \pmod{e},$$

подлежатъ исключенiю [17]).

---

[17]) Дѣйствительно, если при $x = a$

$$m - a^2 \equiv \beta \pmod{e},$$

то разность $m - a^2$ не только не можетъ быть полнымъ квадратомъ, но не можетъ даже быть сравнима съ полнымъ квадратомъ по модулю e.

2. Для примѣра возьмемъ число $m = 19\,109$. Здѣсь x нужно брать не больше 97, такъ какъ $2 \cdot 98^2 = 19\,208$, т. е. больше m.

Число m имѣетъ видъ $8n+5$. Если x дѣлится на 4, то $m - x^2$ имѣетъ видъ $8n+5$ и не можетъ быть квадратомъ, такъ какъ 5 есть неквадратичный вычетъ по модулю 8. Поэтому всѣ четныя числа, дѣлящіяся на 4, можно выбросить изъ ряда значеній x.

Если x дѣлится на 3, то $m - x^2$ имѣетъ видъ $3n+2$ [18]), а такъ какъ 2 есть неквадратичный вычетъ по модулю 3, то нужно выбросить всѣ числа, дѣлящіяся на 3.

Эксклюдентъ 5 приводитъ къ исключенію чиселъ $x \equiv 1, 4 \pmod 5$. Если тѣмъ же способомъ использовать эксклюденты 7, 11, 13, то окажется, что исключенію подлежатъ также числа:

$$\begin{aligned} x &\equiv 0, \pm 1 && \pmod{7} \\ x &\equiv 0, \pm 4, \pm 5 && \pmod{11} \\ x &\equiv \pm 1, \pm 2, \pm 6 && \pmod{13}; \end{aligned}$$

испытанію подлежатъ, такимъ образомъ, только числа 10, 23, 47, 65.

Составимъ для этого табличку:

x	x^2	$m - x^2$
10	100	19 009
23	529	18 580
47	2209	16 900
65	4225	14 884.

Въ послѣдней колоннѣ нужно найти полные квадраты. Съ перваго взгляда мы видимъ, что нужно еще выбросить число 18 580, которое дѣлится на 5, но не дѣлится на 25 и потому не можетъ быть полнымъ квадратомъ. Между остальными содержатся квадраты:

$$16\,900 = 130^2, \quad 14\,884 = 122^2.$$

Соотвѣтствующія разложенія даютъ:

$$19\,109 = 47^2 + 130^2 = 65^2 + 122^2.$$

Итакъ, 19 109 не есть простое число.

Чтобы найти его разложеніе на множителей по § 84, 12, положимъ:

[18]) Ибо такой видъ имѣетъ само число $m = 19\,109$.

$$x = 65, \quad y = 122, \quad x_1 = 47, \quad y_1 = 130, \quad \delta = 2,$$

$$x = x_1 + 2 \,.\, 9,$$

$$y_1 = y + 2 \,.\, 4,$$

$$\alpha = 9, \quad \beta = 4;$$

одинъ изъ множителей есть:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 81 + 16 = 97.$$

Другой находимъ дѣленіемъ:

$$19\,109 = 97 \,.\, 197.$$

Тѣмъ же путемъ можно показать, напримѣръ, что

$$2^{16} + 1 = 65\,537$$

есть простое число, такъ какъ оно можетъ быть разложено на два квадрата только однимъ способомъ:

$$256^2 + 1^2.$$

3. Къ послѣднему результату можно придти еще другимъ путемъ.

Число вида $2^n + 1$ навѣрное не представляетъ собой простого числа, если показатель n не есть степень числа 2. Въ самомъ дѣлѣ, пусть $n = 2^\lambda m$, гдѣ m есть уже нечетное число. При всякомъ x мы имѣемъ (§ 63):

$$1 - x^m = (1 - x)(x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + 1).$$

Если мы здѣсь положимъ $x = -2^{2^\lambda}$, то мы получимъ, что $1 + 2^n$ дѣлится на $1 + 2^{2^\lambda}$; но это число меньше, чѣмъ $1 + 2^n$, если $m > 1$.

Итакъ, положимъ, что $n = 2^\lambda$, и изслѣдуемъ, представляетъ ли собой $1 + 2^n$ простое число или составное.

Чтобы найти простыя числа p, которыя входятъ въ составъ числа $2^n + 1$, достаточно производить испытанія посредствомъ дѣленія вплоть до наибольшаго простого числа, которое меньше, чѣмъ $2^{\frac{1}{2}n}$. Если $2^n + 1$ дѣлится на p, то

$$2^n \equiv -1 \pmod{p}, \tag{4}$$

$$2^{2n} \equiv 1 \pmod{p}. \tag{5}$$

Пусть f будетъ наименьшій положительный показатель, при которомъ $2^f \equiv 1$; если тогда $2^g \equiv 1$, то g должно дѣлиться на f (§ 74, 2).

Въ нашемъ случаѣ, слѣдовательно, $2n$ должно дѣлиться на f, а потому f должно быть степенью числа 2. Но сравненіе (4) обнаруживаетъ, что f не можетъ быть меньше $2n$ [19]), а потому $f = 2n$.

Съ другой стороны, по теоремѣ Фермата, $2^{p-1} \equiv 1$, а потому $p-1$ должно дѣлиться на $2n$.

Мы получаемъ, такимъ образомъ, слѣдующую теорему:

Каждый простой дѣлитель числа 2^n+1 имѣетъ видъ $p = 2nx + 1$, гдѣ x есть цѣлое число.

4. Для числа $2^{16}+1 = 65\,537$ испытанію подлежатъ только простыя числа, которыя меньше $2^8 = 256$. Но между послѣдними имѣются только два, а именно 97 и 193, которыя имѣютъ видъ $32x+1$; такъ какъ число $2^{16}+1$ ни на одно изъ этихъ двухъ чиселъ не дѣлится, то оно представляетъ собой простое число.

5. Для числа $2^{32}+1$ нужно испытать въ качествѣ дѣлителей простыя числа вида $64x+1$, которыя меньше 65 536. Первыя 5 изъ этихъ простыхъ чиселъ суть:

$$193,\ 257,\ 449,\ 577,\ 641;$$

такъ какъ дѣленіе на 641 совершается нацѣло, то вопросъ рѣшенъ. Этимъ путемъ Эйлеръ нашелъ разложеніе:

$$2^{32}+1 = 4\,294\,967\,297 = 641 \,.\, 6\,700\,417$$

и такимъ образомъ опровергъ предложеніе Фермата, что всякое число вида $2^{2^\lambda}+1$ есть простое число.

§ 86. Совершенныя числа.

1. Если извѣстно разложеніе какого-нибудь числа m на простыхъ множителей, то легко найти всѣхъ возможныхъ дѣлителей этого числа. Чтобы это показать, положимъ, что $a, b, c, \ldots$ суть всѣ различные простые множители числа m, а $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ показатели наивысшихъ степеней, въ которыхъ эти простые множители входятъ въ составъ числа m. Итакъ:

$$m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots,$$

---

[19]) Ибо, если бы, напримѣръ, было $2^{2^k} \equiv 1$, гдѣ k есть натуральное число, меньшее λ, то отсюда слѣдовало бы, что и $\left(2^{2^k}\right)^{2^{\lambda-k}} \equiv 1$, т. е. $2^{2^\lambda} = 2^n \equiv 1$, что противно сравненію (4).

гдѣ α, β, γ, ... суть цѣлыя положительныя числа. Каждый дѣлитель числа m содержитъ только тѣхъ простыхъ множителей, которые входятъ въ составъ m, и при томъ въ степеняхъ, соотвѣтственно не выше α, β, γ, ... Всѣ дѣлители d числа m содержатся, такимъ образомъ, въ формулѣ:

$$d = a^{\alpha'} b^{\beta'} c^{\gamma'} \ldots,$$

гдѣ числа α', β', γ', ... могутъ быть и нулями, но во всякомъ случаѣ не превосходятъ α, β, γ, ... Такъ, напримѣръ, α' можетъ имѣть одно изъ значенiй: 0, 1, 2, 3, ..., α. Обратно, всякое число такого вида есть дѣлитель числа m. Среди этихъ дѣлителей нужно считать 1, получающуюся изъ нашей формулы при $\alpha' = 0$, $\beta' = 0$, $\gamma' = 0$, ..., и самое число m, получающееся при $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$, $\gamma' = \gamma$, ...

Число всѣхъ значенiй, которыя можетъ принимать α', есть $\alpha + 1$, число значенiй β' есть $\beta + 1$ и т. д. Такъ какъ всѣ эти значенiя могутъ комбинироваться между собой, то число всѣхъ дѣлителей числа m есть

$$(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) \ldots;$$

это число не зависитъ, слѣдовательно, отъ простыхъ множителей a, b, c, ..., а только отъ показателей α, β, γ, ...

Такъ, напримѣръ, число дѣлителей числа $360 = 8 \cdot 9 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ равно $(3 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 24$. Такъ же велико число дѣлителей числа $5^3 \cdot 7^2 \cdot 2 = 12250$.

2. Въ тѣсной связи съ предыдущей задачей стоитъ задача объ опредѣленiи суммы всѣхъ дѣлителей числа m. Мы рѣшимъ ее рекуррентнымъ способомъ. Пусть

$$m = a^\alpha m',$$

гдѣ $m' = b^\beta \gamma^\gamma \ldots$ есть частное, полученное при дѣленiи m на a^α. Среди дѣлителей d числа m находятся непремѣнно всѣ дѣлители d' числа m' и, кромѣ того, всѣ произведенiя: ad', $a^2 d'$, $a^3 d'$, ..., $a^\alpha d'$. Этимъ исчерпываются всѣ дѣлители числа m. Обозначимъ черезъ $S(m)$ сумму всѣхъ дѣлителей числа m. Тогда

$$S(m) = (1 + a + a^2 + \cdots + a^\alpha) S(m').$$

Съ другой стороны, какъ мы видѣли выше (§ 63),

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^\alpha = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1};$$

слѣдовательно,

$$S(m) = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1} S(m').$$

Примѣнимъ эту формулу къ $S(m')$; полагая $m' = b^{\beta} m''$, получимъ:

$$S(m') = \frac{b^{\beta+1} - 1}{b - 1} S(m'').$$

Это разсужденіе мы можемъ продолжать, пока не исчерпаемъ всѣхъ простыхъ множителей числа m. Въ результатѣ, такъ какъ $S(1) = 1$, мы получимъ:

$$S(m) = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1} \cdot \frac{b^{\beta+1} - 1}{b - 1} \cdot \frac{c^{\gamma+1} - 1}{c - 1} \cdots$$

Съ правой стороны будетъ столько множителей, сколько простыхъ множителей a, b, c, ... входитъ въ число m. Эти множители правой части только по виду представляются дробями; на самомъ же дѣлѣ

$$\frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1} = 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{\alpha}$$

есть цѣлое число.

Примѣръ:

$$S(360) = \frac{2^4 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3 - 1} \cdot \frac{5^2 - 1}{5 - 1} = 15 \cdot 13 \cdot 6 = 1170.$$

3. Всѣхъ дѣлителей числа m, которые отличны отъ самого числа m, называютъ правильными дѣлителями его. Сумма такихъ дѣлителей, очевидно, равна $S(m) - m$. Число, равное суммѣ своихъ правильныхъ дѣлителей, называется совершеннымъ *). Таковы, напримѣръ, числа:

$$6 = 1 + 2 + 3, \quad 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14.$$

---

*) Совершенными числами (τέλειοι ἀριθμοί) много занимались въ древности, особенно Пиѳагорейцы. У Евклида („Elementa", книга IX, 36) есть теорема, которая содержитъ почти все, что мы и теперь знаемъ объ этихъ числахъ. Самая постановка вопроса представляется нѣсколько произвольной. Интересъ заключается только въ трудности нахожденія такихъ чиселъ и въ связи этихъ чиселъ съ нѣкоторыми большими простыми числами. То же можно сказать о такъ называемыхъ союзныхъ числахъ (numeri amicabiles); подъ этимъ названіемъ разумѣютъ пары чиселъ, каждое изъ которыхъ равно суммѣ правильныхъ дѣлителей другого, — напримѣръ, 220 и 284). Изслѣдованіемъ такихъ чиселъ занимался Эйлеръ („Commentationes arithmeticae", томъ I, стр. 102).

Совершенное число опредѣляется условіемъ $S(m) - m = m$, или

$$S(m) = 2m. \tag{1}$$

Разсмотримъ сначала четныя совершенныя числа и положимъ для этого

$$m = 2^{n-1}a,$$

гдѣ a есть нечетное цѣлое число и $n > 1$. Принимая въ соображеніе п. 2, мы представимъ уравненіе (1) въ видѣ:

$$(2^n - 1)\,S(a) = 2^n a;$$

такъ какъ $2^n - 1$ есть число нечетное, то $S(a)$ должно дѣлиться на 2^n. Въ виду этого положимъ

$$S(a) = 2^n\theta, \tag{2}$$

гдѣ θ есть цѣлое число; тогда

$$a = \theta(2^n - 1), \quad 2^n\theta = a + \theta; \tag{3}$$

слѣдовательно, θ должно быть дѣлителемъ числа a. Но изъ соотношеній (2) и (3) слѣдуетъ:

$$S(a) = a + \theta.$$

Итакъ, a и θ суть дѣлители числа a, сумма же всѣхъ дѣлителей числа a равна $a + \theta$; слѣдовательно, a имѣетъ только двухъ дѣлителей a и θ. Но каждое число имѣетъ, по крайней мѣрѣ, двухъ дѣлителей 1 и самого себя. Значитъ, $\theta = 1$, а a есть простое число, которое, въ виду равенства (3), имѣетъ видъ:

$$a = 2^n - 1.$$

Обратно, если выполняются эти условія, то число $m = 2^{n-1}(2^n - 1)$ удовлетворяетъ равенству (1), т. е. m есть совершенное число. Мы получаемъ, такимъ образомъ, слѣдующую теорему:

4. Четное число m въ томъ и только въ томъ случаѣ представляетъ собою совершенное число, если оно имѣетъ видъ:

$$m = 2^{n-1}(2^n - 1),$$

и если при этомъ $2^n - 1$ есть число простое.

Нечетнаго совершеннаго числа мы не знаемъ ни одного; но до сихъ поръ не доказано, что ихъ не существуетъ.

5. Для нахожденія совершенныхъ чиселъ остается найти показателей n, при которыхъ 2^n-1 представляетъ собой простое число. Для этого прежде всего требуется, чтобы само n было простымъ числомъ. Въ самомъ дѣлѣ, если бы было $n=ab$, гдѣ a и b больше 1, то тождество

$$2^{ab}-1=(2^b-1)(1+2^b+2^{2b}+\cdots+2^{(a-1)b})$$

(по формулѣ суммы геометрической прогрессіи) показывало бы, что $2^{ab}-1$ не простое число, такъ какъ оба множителя правой части больше 1.

6. Если n есть нечетное простое число, а p — любой простой дѣлитель числа 2^n-1, то имѣетъ мѣсто сравненіе

$$2^n\equiv 1 \pmod{p};$$

при этомъ n есть наименьшій положительный показатель, для котораго справедливо это сравненіе, ибо число n не имѣетъ меньшихъ дѣлителей. Поэтому, согласно теоремѣ Ферма, число $p-1$ должно дѣлиться на n; но такъ какъ $p-1$ есть къ тому же число четное, то оно дѣлится на $2n$. Стало быть, число p имѣетъ видъ $2nx+1$.

Далѣе, изъ сравненія $2^{n+1}\equiv 2 \pmod{p}$, въ виду четности числа $n+1$, вытекаетъ, что 2 есть квадратичный вычетъ по модулю p; поэтому $p\equiv\pm 1 \pmod{8}$ (§ 81, 9); стало быть, должно имѣть мѣсто либо сравненіе $x\equiv 0 \pmod{4}$, либо же сравненіе $nx\equiv -1 \pmod{4}$.

Напримѣръ, при $n=31$ разсмотрѣнію подлежатъ простыя числа только двухъ видовъ:

$$p=248x+1 \quad \text{и} \quad p=248x+63\ ^{20});$$

при этомъ для испытанія числа $2^{31}-1$ слѣдуетъ производить дѣленіе его на простыя числа только того изъ этихъ двухъ видовъ, который даетъ числа, меньшія, чѣмъ $\sqrt{2^{31}-1}$, т. е. чѣмъ 46339.

Этого результата Эйлеръ добился съ помощью сравнительно небольшихъ вычисленій; напротивъ, установленіе того, что $2^{61}-1$ есть число простое, потребовало чрезвычайно сложныхъ вычисленій.

---

[20]) Первая форма соотвѣтствуетъ тому случаю, когда x кратно 4-хъ. Вторая форма отвѣчаетъ случаю $nx\equiv -1 \pmod{4}$. Въ самомъ дѣлѣ, въ послѣднемъ случаѣ $nx=4z-1$, т. е. $31x-4z=-1$; общее рѣшеніе этого неопредѣленнаго уравненія относительно x даетъ $x=1+4t$. Подставляя это въ выраженіе $p=2nx+1=62x+1$, получаемъ: $p=248t+63$; въ текстѣ t замѣнено черезъ x.

До сихъ поръ изъ простыхъ чиселъ вида $2^n - 1$ опредѣлены слѣдующія девять:

$$2^2 - 1 = 3,$$

$$2^3 - 1 = 7,$$

$$2^5 - 1 = 31,$$

$$2^7 - 1 = 127,$$

$$2^{13} - 1 = 8\,191,$$

$$2^{17} - 1 = 131\,071,$$

$$2^{19} - 1 = 524\,287,$$

$$2^{31} - 1 = 2\,147\,483\,647,$$

$$2^{61} - 1 = 2\,305\,843\,009\,213\,693\,951.$$

Сообразно съ этимъ мы знаемъ 9 совершенныхъ чиселъ. Послѣднее изъ этихъ чиселъ $2^{61} - 1$, какъ уже упомянуто выше, есть наибольшее изъ извѣстныхъ простыхъ чиселъ.

Показатель 11 не даетъ простого числа, такъ какъ $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$.

ГЛАВА XV.

Непрерывныя дроби.

§ 87. Обращеніе ирраціональныхъ чиселъ въ непрерывныя дроби.

1. Если x есть произвольное — раціональное или ирраціональное, положительное или отрицательное — число, то всегда существуетъ одно опредѣленное наибольшее цѣлое число q, содержащееся въ x, т. е. наибольшее цѣлое число q, не превосходящее x. Это число, очевидно, удовлетворяетъ условіямъ:

$$q \leqq x < q + 1.$$

Если x есть число отрицательное, то и q есть число отрицательное; если x есть положительная правильная дробь, то $q = 0$; если $x > 1$, то q есть положительное цѣлое число. Если x не равно q, то можно положить:

$$x = q + \frac{1}{x_1},$$

гдѣ $1/x_1 < 1$, т. е. $x_1 > 1$. Поступимъ съ x_1 такъ же, какъ мы поступили съ x, и обозначимъ черезъ q_1 наибольшее цѣлое число, содержащееся въ x_1, которое теперь уже, во всякомъ случаѣ, есть число положительное. Тогда получимъ:

$$x_1 = q_1 + \frac{1}{x_2};$$

здѣсь x_2 опять больше 1. Мы можемъ написать теперь:

$$x = q + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{x_2}}. \tag{1}$$

Поступая такимъ образомъ, мы построимъ алгориөмъ:

$$\begin{aligned} x &= q + \frac{1}{x_1}, \\ x_1 &= q_1 + \frac{1}{x_2}, \\ x_2 &= q_2 + \frac{1}{x_3}, \qquad (2) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} &= q_{n-1} + \frac{1}{x_n}, \end{aligned}$$

который можно продолжать до тѣхъ поръ, пока x_n само не представитъ собою цѣлаго числа. Если подставимъ каждое x_k въ предыдущее выраженіе для x_{k-1}, то въ результатѣ мы выразимъ число x въ видѣ непрерывной дроби. Выраженіе (1) служитъ примѣромъ такой дроби. Значеніе дроби существенно зависитъ только отъ ряда чиселъ $q, q_1, q_2, \ldots$, который опредѣляется вполнѣ природой числа x.

2. Если x есть раціональное число, то и $x_1, x_2, \ldots$ тоже представляютъ собой раціональныя числа. Если положимъ $x = a/a_1$, то $x_1 = a_1/a_2$, гдѣ q будетъ частное, а a_2 — остатокъ отъ дѣленія a на a_1. Алгориөмъ (2) въ этомъ случаѣ совпадаетъ съ Евклидовымъ алгориөмомъ (§ 16). Если же x есть число ирраціональное, то и всѣ послѣдующія числа $x_1, x_2, \ldots$ ирраціональны; ни одно x_n не можетъ быть цѣлымъ числомъ, и въ этомъ случаѣ алгориөмъ (2) можно продолжать безъ конца.

Разсмотримъ случай, когда x есть число ирраціональное, и, сверхъ того, положимъ $x > 1$; тогда всѣ числа $q, q_1, q_2, \ldots$ будутъ положительны.

3. Изъ чиселъ $q, q_1, q_2, \ldots$ мы образуемъ рядъ новыхъ чиселъ R_n съ помощью рекуррентной формулы:

$$R_n = R_{n-1} q_{n-1} + R_{n-2}. \qquad (3)$$

Начнемъ съ $n = 1$ и предположимъ, что числа R_{-1}, R_0 заданы произвольно. Если только извѣстны всѣ числа q_n, то изъ нашей формулы можно однозначно опредѣлить числа $R_1, R_2, R_3, \ldots$.

Мы припишемъ числамъ R_0 и R_{-1} двѣ пары частныхъ значеній; числа R, соотвѣтствующія первой парѣ значеній, обозначимъ черезъ:

$$P_{-1}, P_0, P_1, P_2, \ldots, \qquad (a)$$

числа же, соотвѣтствующія второй парѣ значеній R_0 и R_{-1}, обозначимъ черезъ

$$Q_{-1},\ Q_0,\ Q_1,\ Q_2,\ \ldots \tag{β}$$

Мы положимъ:

$$\begin{aligned} P_{-1} &= 0, \quad P_0 = 1, \\ Q_{-1} &= 1, \quad Q_0 = 0; \end{aligned} \tag{4}$$

для обоихъ рядовъ мы будемъ, слѣдовательно, имѣть формулы:

$$\begin{aligned} P_n &= P_{n-1}q_{n-1} + P_{n-2}, \\ Q_n &= Q_{n-1}q_{n-1} + Q_{n-2}. \end{aligned} \tag{5}$$

Такъ, напримѣръ:

$$\begin{aligned} P_1 &= q, & Q_1 &= 1, \\ P_2 &= qq_1 + 1, & Q_2 &= q_1. \end{aligned}$$

Общее же выраженіе для R_n мы можемъ представить съ помощью чиселъ P_n и Q_n въ формѣ

$$R_n = aP_n + bQ_n, \tag{6}$$

гдѣ a и b суть произвольныя числа, не зависящія отъ n [1]). Въ самомъ дѣлѣ, положивъ

$$\begin{aligned} R_{-1} &= aP_{-1} + bQ_{-1} = b, \\ R_0 &= aP_0 \ \ + bQ_0 \ \ = a, \end{aligned}$$

мы получимъ съ помощью формулъ (5) и (6) формулу (3). Въ § 76 мы встрѣчали уже точно такіе же ряды чиселъ P_n и Q_n, только теперь мы представляемъ себѣ эти ряды продолжающимися безъ конца.

4. Числа P_n, Q_n находятся въ тѣсной связи съ алгориѳмомъ (2).

Мы придемъ къ этимъ числамъ, если постараемся выразить x черезъ x_n, исключая промежуточныя числа $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$.

---

[1]) Авторъ желаетъ сказать слѣдующее. Фиксировавъ двумя способами числа R_0 и R_{-1}, мы получимъ два ряда чиселъ (α) и (β). Выбравъ теперь какъ-нибудь иначе числа R_{-1} и R_0, мы получимъ новый рядъ чиселъ R_n; но въ этомъ случаѣ всегда $R_n = aP_n + bQ_n$, гдѣ a и b суть нѣкоторыя числа, не зависящія отъ n. Это, въ сущности, уже доказано въ § 76, 8; мы предоставляемъ читателю убѣдиться въ этомъ самому, тѣмъ болѣе, что это для дальнѣйшаго значенія не имѣетъ.

Именно, можно показать, что

$$x = \frac{P_n x_n + P_{n-1}}{Q_n x_n + Q_{n-1}}. \tag{7}$$

Эта формула при $n = 0$ даетъ:

$$x = \frac{P_0 x_0 + P_{-1}}{Q_0 x_0 + Q_{-1}} = x_0,$$

а при $n = 1$:

$$x = \frac{P_1 x_1 + P_0}{Q_1 x_1 + Q_0} = q + \frac{1}{x_1}.$$

Такимъ образомъ, если мы будемъ подъ x_0 разумѣть то же, что и подъ x, то формула (5) при $n = 0$ и $n = 1$ справедлива. Положимъ, что она справедлива, если замѣнить n черезъ $n - 1$, т. е. что

$$x = \frac{P_{n-1} x_{n-1} + P_{n-2}}{Q_{n-1} x_{n-1} + Q_{n-2}};$$

если теперь, согласно послѣдней изъ формулъ (2), сдѣлаемъ подстановку $x_{n-1} = q_{n-1} + 1/x_n$ и помножимъ числителя и знаменателя нашей дроби на x_n, то получимъ соотношеніе (7), которое, такимъ образомъ, доказано въ общемъ видѣ.

5. Помножая первое изъ равенствъ (5) на Q_{n-1}, второе на $- P_{n-1}$ и складывая ихъ, получимъ:

$$P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1} = -(P_{n-1} Q_{n-2} - Q_{n-1} P_{n-2}).$$

Это значитъ, что $(-1)^n (P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1})$ не зависитъ отъ n. Но такъ какъ для $n = 0$ значеніе этой величины есть 1, то и вообще

$$P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1} = (-1)^n. \tag{8}$$

Послѣднее соотношеніе имѣетъ большое значеніе. Прежде всего мы отсюда заключаемъ, что цѣлыя числа P_n и Q_n не имѣютъ общихъ дѣлителей; такой дѣлитель долженъ былъ бы дѣлить ± 1.

6. Такъ какъ, въ силу нашего предположенія $(x > 1)$ $q, q_1, q_2, \ldots$ суть цѣлыя и положительныя числа, то, въ виду соотношеній (5), P_n и Q_n также представляютъ собою цѣлыя и положительныя числа: они составлены изъ чиселъ q посредствомъ дѣйствій сложенія и умноженія.

Изъ соотношеній (5) слѣдуетъ далѣе, что

$$P_n > P_{n-1}, \quad Q_n > Q_{n-1}. \tag{9}$$

Такъ какъ P_n и Q_n суть цѣлыя числа, то мы отсюда заключаемъ, что они, начиная съ P_0 и Q_0, возрастаютъ неограниченно вмѣстѣ съ n. Если $q = 1$, то $P_0 = P_1$; возрастаніе начинается съ P_1; для бо́льшихъ значеній n возможность равенства исключается въ виду соотношеній (9). Нарастаніе отъ P_{n-1} къ P_n и отъ Q_{n-1} къ Q_n тѣмъ сильнѣе, чѣмъ больше соотвѣтствующее число q_{n-1}.

§ 88. Приближенное выраженіе ирраціональныхъ чиселъ при помощи раціональныхъ дробей.

1. Изъ формулъ (7) и (8) § 87-го получаемъ:

$$\begin{aligned}\frac{P_n}{Q_n} - x &= \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_n x_n + P_{n-1}}{Q_n x_n + Q_{n-1}} = \\ &= \frac{P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1}}{Q_n(Q_n x_n + Q_{n-1})} = \frac{(-1)^n}{Q_n(Q_n x_n + Q_{n-1})},\end{aligned} \tag{1}$$

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{Q_n Q_{n-1}}, \quad \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}} = \frac{(-1)^{n-1}}{Q_{n-1}Q_{n-2}}, \tag{2}$$

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}} = \frac{(-1)^{n+1}(Q_n - Q_{n-2})}{Q_n Q_{n-1} Q_{n-2}}. \tag{3}$$

Изъ этихъ равенствъ можно вывести слѣдующія заключенія.

2. Изъ равенствъ (1) слѣдуетъ, что раціональная дробь P_n/Q_n больше x, если n есть четное число, и меньше x, если n есть нечетное число.

3. Такъ какъ $Q_n - Q_{n-2}$ есть положительное число, то изъ равенства (3) слѣдуетъ, что дроби

$$\frac{P_{2n}}{Q_{2n}}, \quad \frac{P_{2n+2}}{Q_{2n+2}}, \quad \frac{P_{2n+4}}{Q_{2n+4}}, \ldots \tag{4}$$

образуютъ рядъ у б ы в а ю щ и х ъ чиселъ, а дроби

$$\frac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}}, \quad \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}, \quad \frac{P_{2n+3}}{Q_{2n+3}}, \ldots \tag{5}$$

образуютъ рядъ **возрастающихъ** чиселъ. Согласно п. 2, всѣ члены перваго ряда **больше** x, а всѣ члены второго — **меньше** x.

4. Изъ равенствъ (2) слѣдуетъ, что разности между двумя соотвѣтствующими членами рядовъ (4) и (5) становятся меньше всякой данной величины, такъ какъ Q_n неограниченно возрастаетъ. Слѣдовательно, x **представляетъ собой въ одно и то же время нижнюю границу перваго ряда и верхнюю границу второго.**

Дробь P_n/Q_n называется поэтому **подходящей** дробью непрерывной дроби x.

5. Подходящія дроби даютъ возможность представлять приближенныя значенія ирраціональныхъ чиселъ (или раціональныхъ, выражающихся съ помощью очень большихъ чиселъ) при помощи раціональныхъ дробей съ небольшими числителями и знаменателями. Для этого служитъ слѣдующая теорема:

Если между двумя послѣдовательными подходящими дробями P_{n-1}/Q_{n-1} и P_n/Q_n заключена другая раціональная дробь M/N, которая подходитъ, слѣдовательно, къ x ближе, чѣмъ одна изъ этихъ подходящихъ дробей, то N больше, чѣмъ Q_n.

Дѣйствительно, если M/N заключается между дробями P_{n-1}/Q_{n-1} и P_n/Q_n, то разности

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}, \quad \frac{M}{N} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$$

имѣютъ одинъ и тотъ же знакъ (положительный при четномъ n, отрицательный при нечетномъ n), по абсолютной же величинѣ первая разность больше второй. Поэтому

$$(-1)^n\left(\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right) > (-1)^n\left(\frac{M}{N} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right) > 0;$$

а вмѣстѣ съ тѣмъ (§ 87, (8))

$$\frac{1}{Q_n Q_{n-1}} > (-1)^n \frac{MQ_{n-1} - NP_{n-1}}{NQ_{n-1}} > 0,$$

откуда

$$N > (-1)^n Q_n (MQ_{n-1} - NP_{n-1});$$

а такъ какъ $(-1)^n(MQ_{n-1} - NP_{n-1})$ есть цѣлое положительное число, т. е., по меньшей мѣрѣ, 1, то $N > Q_n$, что и требовалось доказать.

Если считать **болѣе простой** дробь съ меньшимъ знаменателемъ, то предыдущая теорема обнаруживаетъ, что всякая дробь, стоящая къ x ближе подходящей, **менѣе проста, чѣмъ эта подходящая**.

Для примѣра возьмемъ число

$$\pi = 3{,}14159265359\ \ldots;$$

съ помощью простого дѣленія получимъ:

$$q = 3, \quad q_1 = 7, \quad q_2 = 15, \quad q_3 = 1,$$

что даетъ подходящія дроби

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{3}{1}, \quad \frac{P_2}{Q_2} = \frac{22}{7}, \quad \frac{P_3}{Q_3} = \frac{333}{106}, \quad \frac{P_4}{Q_4} = \frac{355}{113}.$$

Для сравненія обратимъ эти раціональныя дроби опять въ десятичныя:

$$\frac{22}{7} = 3{,}14285\ \ldots$$

$$\frac{333}{106} = 3{,}141509\ \ldots$$

$$\frac{355}{113} = 3{,}14159292\ \ldots\ ^{*)}.$$

§ 89. Обращеніе квадратныхъ корней въ непрерывныя дроби.

1. Посмотримъ, какъ обращаются въ непрерывныя дроби простѣйшія ирраціональныя числа — квадратные корни. Будемъ разумѣть подъ D **цѣлое положительное число**, не представляющее собой полнаго квадрата. Каждое равенство, содержащее, кромѣ раціональныхъ чиселъ, только $\sqrt{D}$, влечетъ за собою другое равенство, которое получается изъ перваго, если замѣнить $\sqrt{D}$ на $-\sqrt{D}$. Въ самомъ дѣлѣ, такое равенство всегда можно привести къ виду $A + B\sqrt{D} = 0$; но это равенство воз-

*) Прекрасное приближеніе $\frac{355}{113}$ дано Адріаномъ Антоніемъ изъ Меца (Adriaen Anthonisz aus Metz, 1517 — 1607). Какимъ образомъ онъ нашелъ это число, въ точности не извѣстно. Въ іюньской тетради журнала „Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ за 1905 г. Гарцеръ (Harzer) въ статьѣ „О точныхъ наукахъ въ древней Японіи“ даетъ 27 первыхъ подходящихъ дробей для числа π и 8 первыхъ подходящихъ для числа π^2; онъ указываетъ при этомъ, что у японскихъ авторовъ XVII и XVIII столѣтій встрѣчаются не только эти подходящія дроби, но также 12-ая и 27-ая.

можно только въ томъ случаѣ, когда $A = B = 0$, ибо иначе мы получили бы раціональное значеніе для $\sqrt{D}$, именно $-\frac{A}{B}$, что, согласно п. 1 § 24-го, не можетъ имѣть мѣста, а потому и $A - B\sqrt{D} = 0$.

2. Приложимъ алгориѳмъ (2) § 87-го къ числу $x = \sqrt{D}$.

Если q есть наибольшее цѣлое число, содержащееся въ $\sqrt{D}$, то

$$0 < \sqrt{D} - q < 1,$$

и $\sqrt{D} - q = 1/x_1$; отсюда

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{D} - q} = \frac{\sqrt{D} + q}{D - q^2};$$

если же положимъ

$$q = b_1, \quad D - b_1^2 = c_1,$$

то

$$x_1 = \frac{\sqrt{D} + b_1}{c_1}.$$

Если q_1 есть наибольшее цѣлое число, содержащееся въ x_1, то изъ равенства $x_1 = q_1 + 1/x_2$ слѣдуетъ:

$$x_2 = \frac{1}{x_1 - q_1} = \frac{c_1}{\sqrt{D} - (c_1 q_1 - b_1)} = \frac{\sqrt{D} + b_2}{c_2} \text{ [2]};$$

такъ какъ $D = b_1^2 + c_1$, то здѣсь

$$b_2 = c_1 q_1 - b_1,$$

$$c_2 = \frac{D - b_2^2}{c_1} = 1 - c_1 q_1^2 + 2 b_1 q_1,$$

$$D - b_2^2 = c_1 c_2.$$

[2]) Умножая въ выраженіи $\frac{c_1}{\sqrt{D} - (c_1 q_1 - b_1)}$ числителя и знаменателя на $\sqrt{D} + (c_1 q_1 - b_1)$, получимъ: $\frac{c_1[\sqrt{D} + (c_1 q_1 - b_1)]}{D - b_1^2 + 2 c_1 q_1 b_1 - c_1^2 q_1^2}$; раздѣляя здѣсь числителя и знаменателя на c_1, мы приведемъ выраженіе къ указанному виду, гдѣ b_2 и c_2 имѣютъ значенія, приведенныя ниже въ текстѣ.

3. Положимъ, что соотношенія

$$x_n = \frac{\sqrt{D} + b_n}{c_n} \text{ и } D - b_n^2 = c_{n-1}c_n, \tag{1}$$

гдѣ b_n, c_{n-1} и c_n суть **цѣлыя** числа, оказались справедливыми для нѣкотораго опредѣленнаго n. Докажемъ, что въ этомъ случаѣ и для x_{n+1} будетъ существовать такая же формула. Пусть q_n будетъ наибольшее цѣлое число, содержащееся въ x_n; тогда

$$x_n = q_n + \frac{1}{x_{n+1}},$$

и потому

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n - q_n} = \frac{c_n}{\sqrt{D} - (c_n q_n - b_n)}.$$

Положимъ:

$$c_n q_n - b_n = b_{n+1}; \tag{2}$$

тогда

$$x_{n+1} = \frac{c_n(\sqrt{D} + b_{n+1})}{D - b_{n+1}^2};$$

но

$$D - b_{n+1}^2 = D - b_n^2 - c_n^2 q_n^2 + 2 b_n c_n q_n,$$

и, согласно соотношенію (1),

$$= c_{n-1}c_n + 2 b_n c_n q_n - c_n^2 q_n^2.$$

Если поэтому положить

$$c_{n-1} + 2 b_n q_n - c_n q_n^2 = c_{n+1}, \tag{3}$$

то получимъ:

$$x_{n+1} = \frac{\sqrt{D} + b_{n+1}}{c_{n+1}}, \quad D - b_{n+1}^2 = c_n c_{n+1}.$$

Такимъ образомъ, мы доказали формулу (1) въ общемъ видѣ.

4. Изъ выраженій для x_1, b_1, c_1 въ п. 2 слѣдуетъ неравенство:

$$0 < \frac{\sqrt{D} - b_1}{c_1} < 1 < \frac{\sqrt{D} + b_1}{c_1}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, $x_1 > 1$ [3]), а $\sqrt{D} - b_1 = \sqrt{D} - q$, по опредѣленію числа q, есть положительная правильная дробь; такъ какъ c_1 есть цѣлое положительное число, т. е., по крайней мѣрѣ, 1, то $(\sqrt{D} - b_1)/c_1$ есть положительная правильная дробь.

Допустимъ, что неравенства

$$0 < \frac{\sqrt{D} - b_n}{c_n} < 1 < \frac{\sqrt{D} + b_n}{c_n} \tag{4}$$

доказаны для какого-нибудь значенія числа n. Если мы въ этомъ предположеніи докажемъ его справедливость для $n + 1$, то мы этимъ самымъ докажемъ его для всякаго n. Съ одной стороны,

$$\frac{\sqrt{D} + b_{n+1}}{c_{n+1}} = x_{n+1} > 1;$$

слѣдовательно, одно изъ этихъ неравенствъ доказано. Съ другой стороны,

$$\frac{\sqrt{D} - b_{n+1}}{c_{n+1}} = \frac{D - b_{n+1}^2}{c_{n+1}(\sqrt{D} + b_{n+1})} = \frac{c_n}{\sqrt{D} + c_n q_n - b_n} = \frac{1}{\dfrac{\sqrt{D} - b_n}{c_n} + q_n}.$$

Мы предположили справедливость неравенствъ (4); слѣдовательно, $(\sqrt{D} - b_n)/c_n$ есть положительное число, а такъ какъ q_n, по меньшей мѣрѣ, равняется 1, то и

$$0 < \frac{1}{\dfrac{\sqrt{D} - b_n}{c_n} + q_n} < 1.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ

$$0 < \frac{\sqrt{D} - b_{n+1}}{c_{n+1}} < 1 < \frac{\sqrt{D} + b_{n+1}}{c_{n+1}}.$$

Неравенства (4) доказаны, такимъ образомъ, для всякаго n.

5. Если мы положимъ для $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$x_n = \frac{\sqrt{D} + b_n}{c_n}, \quad x'_n = \frac{\sqrt{D} - b_n}{c_n}, \tag{5}$$

то

$$x_n = q_n + \frac{1}{x_{n+1}}, \quad x'_n = -q_n + \frac{1}{x'_{n+1}};$$

---

[3]) А потому и $\dfrac{\sqrt{D} + b_1}{c_1} > 1$.

второе изъ равенствъ (5) получается изъ перваго, если замѣнить $\sqrt{D}$ на $-\sqrt{D}$[4]), что можно сдѣлать согласно п. 1.

Такъ какъ x_n, x_{n+1} суть неправильныя дроби, а x'_n, x'_{n+1}, въ силу неравенствъ (4), представляютъ собой правильныя дроби, то q_n есть наибольшее цѣлое число, заключающееся въ x_n, и въ то же время наибольшее цѣлое число, заключающееся въ $1/x'_{n+1}$[5]), и, стало быть, при $n > 1$ q_{n-1} есть наибольшее цѣлое число, заключающееся въ $1/x'_n$. При данномъ D цѣлыя числа q_n и q_{n-1}, а, слѣдовательно, и числа x_{n+1} и x_{n-1}, однозначно опредѣляются числомъ x_n, т. е. числами b_n и c_n[6]).

6. Неравенства (4) показываютъ, что b_n и c_n суть положительныя числа. Въ самомъ дѣлѣ, они должны имѣть одинаковые знаки, такъ какъ въ противномъ случаѣ мы имѣли бы:

$$\frac{\sqrt{D}-b_n}{c_n} > \frac{\sqrt{D}+b_n}{c_n} \quad ^{7}),$$

что противорѣчитъ неравенствамъ (4); кромѣ того, оба числа не могутъ быть одновременно отрицательными, такъ какъ тогда и число $(\sqrt{D}-b_n)/c_n$ было бы отрицательнымъ, что опять-таки противорѣчитъ неравенствамъ (4). Въ виду этого неравенства (4) даютъ:

$$0 < b_n < \sqrt{D}, \quad c_n < \sqrt{D} + b_n, \quad 0 < c_n < 2\sqrt{D}.$$

Но такъ какъ b_n и c_n суть цѣлыя числа, то мы отсюда заключаемъ, что при заданномъ значенiи D существуетъ только конечное число паръ значенiй, которыя они могутъ принимать; вмѣстѣ съ тѣмъ и число x_n

---

[4]) Это становится очевиднымъ, если примемъ во вниманiе, что x_n переходитъ въ $-x'_n$ при замѣнѣ $\sqrt{D}$ на $-\sqrt{D}$.

[5]) Ибо предыдущее равенство обнаруживаетъ, что обѣ разности

$$x_n - q_n \quad \text{и} \quad \frac{1}{x'_{n+1}} - q_n$$

суть правильныя положительныя дроби.

[6]) Если даны числа b_n и c_n, то равенство (5) опредѣляетъ числа x_n и x'_n, а, слѣдовательно, и наибольшiя цѣлыя числа, содержащiяся въ x_n и въ $\frac{1}{x'_n}$.

[7]) Ибо разность $-\frac{2b_n}{c_n}$ между лѣвой и правой частью была бы положительнымъ числомъ.

имѣетъ только конечное число значеній. Слѣдовательно, въ ряду чиселъ

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots \qquad (6)$$

должны быть повторяющіеся члены.

Если же $x_k = x_{k+n}$, то, согласно п. 5, и

$$x_{k-1} = x_{k+n-1}, \quad x_{k+1} = x_{k+n+1},$$

и, слѣдовательно, въ ряду (6) первымъ долженъ повториться членъ $x_1 = x_{n+1}$. Отсюда слѣдуетъ, что $x_2 = x_{n+2}$, $x_3 = x_{n+3}, \ldots$; рядъ (6) распадается на періоды:

$$[x_1, x_2, \ldots, x_n], \qquad (7)$$

въ которыхъ уже ни одинъ членъ не появляется больше одного раза. Рядъ (6), такимъ образомъ, составленъ изъ безконечно повторяющихся періодовъ. Слѣдовательно, и рядъ

$$q_1, q_2, q_3, \ldots \qquad (8)$$

также состоитъ изъ періодовъ

$$[q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n]. \qquad (9)$$

Замѣтимъ, что въ періодѣ (9) среди чиселъ q одно и то же число можетъ повторяться нѣсколько разъ [8]). Мы приходимъ, такимъ образомъ, къ слѣдующему выводу:

Непрерывная дробь, въ которую обращается квадратный корень изъ положительнаго цѣлаго числа, періодична. Періодъ начинается, однако, всегда съ q_1 [9]).

---

[8]) Въ періодѣ (7) всѣ числа различны; q_i есть наибольшее цѣлое число, содержащееся въ числѣ x_i; ясно, что x_i и x_j могутъ быть и не равны, хотя въ нихъ и содержится одно и то же наибольшее цѣлое число.

[9]) Чтобы лучше выяснить это довольно сложное доказательство, укажемъ еще разъ общій ходъ разсужденія. Авторъ разлагаетъ число $x = \sqrt{D}$ въ непрерывную дробь, слѣдуя общему правилу, указанному въ п. 1 § 87-го. Далѣе онъ обнаруживаетъ, что всѣ полныя частныя x_n могутъ быть всегда представлены въ видѣ (1), гдѣ b_n и c_n суть цѣлыя числа (п. 3). Далѣе доказывается, что каждое число x_n опредѣляетъ однозначно какъ послѣдующее число x_{n+1}, такъ и предыдущее число x_{n-1}. Если поэтому повторится число x_i, то вслѣдъ на нимъ должно повториться число x_{i+1}, а до него должно было повториться число x_{i-1}. Остается поэтому доказать, что въ ряду (6) съ возрастаніемъ индекса непремѣнно повторяется одно изъ бывшихъ уже чиселъ. Для этого авторъ доказываетъ, что b_n и c_n суть числа

§ 90. Уравненіе Пелля.

1. Разсмотримъ теперь подходящія дроби для $\sqrt{D}$. Такъ какъ P_n и Q_n постоянно возрастаютъ вмѣстѣ съ n, то они, конечно, не могутъ періодически повторяться.

Согласно равенству (7) § 87-го,

$$\sqrt{D}=\frac{P_{n+1}x_{n+1}+P_n}{Q_{n+1}x_{n+1}+Q_n};$$

а такъ какъ $x_{n+1}=x_1=1:(\sqrt{D}-q)$ (§ 89, 6), то

$$\sqrt{D}=\frac{(P_{n+1}-qP_n)+P_n\sqrt{D}}{(Q_{n+1}-qQ_n)+Q_n\sqrt{D}}.$$

Помножая обѣ части этого равенства на знаменателя, получаемъ:

$$(Q_{n+1}-qQ_n)\sqrt{D}+DQ_n=(P_{n+1}-qP_n)+P_n\sqrt{D}.$$

Согласно п. 1 § 89-го, это равенство разлагается на два:

$$\begin{array}{rl|r} P_n = & Q_{n+1}-qQ_n, & P_n \\ DQ_n = & P_{n+1}-qP_n, & -Q_n. \end{array}$$

Помножая эти равенства на множителей, приписанныхъ сбоку, складывая результаты и замѣняя $P_nQ_{n+1}-Q_nP_{n+1}$ черезъ $(-1)^n$ (§ 87, (8)), получимъ:

$$P_n^2-DQ_n^2=(-1)^n. \tag{1}$$

Послѣдняя формула остается справедливой, если замѣнить n черезъ $2n$, $3n$, $4n$, ...; въ этихъ случаяхъ она даетъ:

$$P_{2n}^2-DQ_{2n}^2=1,$$
$$P_{3n}^2-DQ_{3n}^2=(-1)^n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

положительныя и не могутъ превосходить первое $\sqrt{D}$, а второе $2\sqrt{D}$. Вслѣдствіе этого каждое изъ этихъ чиселъ можетъ имѣть лишь конечное число значеній, и рано или поздно должна повториться какая-либо пара значеній b_n и c_n; а вмѣстѣ съ этимъ повторится и число x_n.

Идея этого доказательства принадлежитъ Лагранжу.

Въ самомъ дѣлѣ, при выводѣ равенства (1), мы опирались только на то, что $[q_1, q_2, \ldots, q_n]$, есть періодъ непрерывной дроби, выражающей $\sqrt{D}$. Дѣло не измѣнится, если два и три періода соединить и считать за одинъ періодъ.

2. Полученные нами результаты содержатъ рѣшеніе знаменитой задачи объ опредѣленіи цѣлыхъ чиселъ T и U, удовлетворяющихъ уравненію

$$T^2 - DU^2 = 1, \tag{2}$$

гдѣ D есть данное положительное число, не представляющее собой полнаго квадрата.

Чтобы рѣшить эту задачу, нужно обратить въ непрерывную дробь $\sqrt{D}$. Если n (число членовъ періода) есть четное число, то уравненіе (2) удовлетворяется безчисленнымъ множествомъ чиселъ T и U по формуламъ:

$$T = P_{mn}, \quad U = Q_{mn},$$

гдѣ есть m произвольное цѣлое положительное число. Если же n есть нечетное число, то въ этихъ формулахъ m нужно брать четнымъ. При нечетныхъ же значеніяхъ m мы въ этомъ случаѣ получимъ рѣшенія уравненія:

$$T^2 - DU^2 = -1. \tag{3}$$

Итакъ, уравненіе (2) имѣетъ всегда безчисленное множество рѣшеній, а уравненіе (3) имѣеть рѣшенія только въ случаѣ нечетнаго n *).

Уравненіе (2) называется уравненіемъ Пелля (Pell).

Значенія чиселъ T и U измѣняются очень неправильно и трудно усмотрѣть ихъ связь съ числомъ D. Вычисленіе ихъ, — по крайней мѣрѣ, для небольшихъ значеній D, — производится довольно просто. Мы увидимъ это сейчасъ на примѣрѣ.

3. Примѣръ:

$$\sqrt{D} = \sqrt{59}. \qquad q = 7. \tag{1}$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{59} - 7} = \frac{\sqrt{59} + 7}{10}, \quad q_1 = 1,$$

$$x_2 = \frac{10}{\sqrt{59} - 3} = \frac{\sqrt{59} + 3}{5}, \quad q_2 = 2,$$

*) Здѣсь, собственно, рѣчь идетъ только о рѣшеніяхъ, получающихся даннымъ путемъ, посредствомъ обращенія $\sqrt{D}$ въ непрерывную дробь. Въ теоріи чиселъ доказывается, однако, что этотъ способъ исчерпываетъ всѣ рѣшенія уравненій (2) и (3).

$$x_3 = \frac{5}{\sqrt{59}-7} = \frac{\sqrt{59}+7}{2}, \quad q_3 = 7,$$

$$x_4 = \frac{2}{\sqrt{59}-7} = \frac{\sqrt{59}+7}{5}, \quad q_4 = 2,$$

$$x_5 = \frac{5}{\sqrt{59}-3} = \frac{\sqrt{59}+3}{10}, \quad q_5 = 1,$$

$$x_6 = \frac{10}{\sqrt{59}-7} = \frac{\sqrt{59}+7}{1}, \quad q_6 = 14,$$

$$x_7 = \frac{1}{\sqrt{59}-7} = x_1.$$

Итакъ, періодъ состоитъ изъ шести членовъ:

$$[1,\ 2,\ 7,\ 2,\ 1,\ 14],$$

а до періода стоитъ число $q = 7$.

Согласно соотношеніямъ (4) и (5) § 87-го,

$$\frac{P_{-1}}{Q_{-1}} = \frac{0}{1}, \quad \frac{P_0}{Q_0} = \frac{1}{0}, \quad \frac{P_1}{Q_1} = \frac{7}{1}, \quad \frac{P_2}{Q_2} = \frac{8}{1},$$

$$\frac{P_3}{Q_3} = \frac{23}{3}, \quad \frac{P_4}{Q_4} = \frac{169}{22}, \quad \frac{P_5}{Q_5} = \frac{361}{47}, \quad \frac{P_6}{Q_6} = \frac{530}{69}.$$

Значитъ, $T = 530$, $U = 69$. Дѣйствительно, легко провѣрить справедливость равенства:

$$530^2 - 59 \,.\, 69^2 = 1.$$

Приведемъ еще нѣсколько примѣровъ съ ихъ рѣшеніями, но безъ вычисленій:

$$\sqrt{D} = \sqrt{19} \qquad q = 4, \qquad n = 6, \tag{2}$$
$$T = 170, \qquad U = 39, \qquad T^2 - 19\,U^2 = 1.$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{103}, \qquad q = 10, \qquad n = 12, \tag{3}$$
$$T = 227\,528, \qquad U = 22\,419, \qquad T^2 - 103\,U^2 = 1.$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{38}, \quad q = 6, \quad n = 2, \tag{4}$$
$$T = 37, \quad U = 6, \quad T^2 - 38\,U^2 = 1$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{29}, \quad q = 5, \quad n = 5, \tag{5}$$
$$T = 70, \quad U = 13, \quad T^2 - 29\,U^2 = -1.$$

Можно выбирать примѣры совершенно произвольно; если число D не превышаетъ числа 100, то вычисленіе не отличается сложностью *).

---

*) Дегенъ (Degen) вычислилъ таблицу рѣшеній уравненія Пелля („Canon Pellianus", Hafniae 1817). Въ теоріи чиселъ Лежандра („Zahlentheorie" [10]), Bd. I, 3 Aufl., 1830, deutch von Maser—1886) находится такая же таблица для всѣхъ значеній D до 1003. Совершенно неумѣстно вообще распространенное названіе „уравненія Пелля": Пелль не занимался рѣшеніемъ этихъ уравненій. По мнѣнію Энестрема (Eneström, „Bibliotheca mathematica", 3. Folge, Bd. 3, Leipzig 1902, S. 204), ошибка произошла потому, что Эйлеръ смѣшалъ двухъ англійскихъ математиковъ — Пелля и Браункера (Brouncker). Впервые далъ общее доказательство разрѣшимости этой задачи Лагранжъ (Приложенія къ „Elemente der Algebra" Эйлера, 1784 г.); на нѣмецкомъ языкѣ это сочиненіе имѣется среди „Ostwalds Klassiker" — № 103; издательство „Mathesis" готовитъ русскій переводъ этого классическаго сочиненія.

[10]) Подлинникъ носитъ названіе: A. M. Legendre, „Théorie des Nombres", Paris 1798.

ГЛАВА XVI.

Алгебраическое рѣшеніе уравненій 3-ей и 4-ой степени.

---

§ 91. Трисекція угла.

1. Трисекція угла есть несомнѣнно самая популярная изъ всѣхъ геометрическихъ задачъ, приводящихъ къ уравненію третьей степени.

Чтобы составить соотвѣтствующее уравненіе, мы будемъ исходить изъ формулы **Муавра** (§ 51, 8):

$$\left(\cos\frac{1}{3}\vartheta + i\sin\frac{1}{3}\vartheta\right)^3 = \cos\vartheta + i\sin\vartheta.$$

Возводя въ кубъ и отдѣляя вещественную часть отъ мнимой, получимъ:

$$\cos\vartheta = \left(\cos\frac{1}{3}\vartheta\right)^3 - 3\cos\frac{1}{3}\vartheta\left(\sin\frac{1}{3}\vartheta\right)^2,$$

$$\sin\vartheta = 3\left(\cos\frac{1}{3}\vartheta\right)^2\sin\frac{1}{3}\vartheta - \left(\sin\frac{1}{3}\vartheta\right)^3.$$

Если положимъ

$$2\cos\frac{1}{3}\vartheta = x$$

и замѣнимъ $(\sin\frac{1}{3}\vartheta)^2$ черезъ $1 - (\cos\frac{1}{3}\vartheta)^2$, то первое уравненіе приметъ видъ:

$$x^3 - 3x = 2\cos\vartheta, \tag{1}$$

а второе:

$$(x^2 - 1)\sin\frac{1}{3}\vartheta = \sin\vartheta. \tag{2}$$

Значеніе $\cos\vartheta$ не измѣняется, когда аргументъ ϑ увеличивается или уменьшается на 2π. Поэтому, кромѣ $x = 2\cos\frac{1}{3}\vartheta$, уравненіе (1) имѣетъ еще два корня $x = 2\cos\frac{1}{3}(\vartheta + 2\pi)$ и $x = 2\cos\frac{1}{3}(\vartheta - 2\pi)$ [1]), или $x = -2\cos\frac{1}{3}(\pi - \vartheta)$ и $x = -2\cos\frac{1}{3}(\pi + \vartheta)$. Итакъ, уравненіе (1) имѣетъ три вещественныхъ корня:

$$x_0 = 2\cos\frac{\vartheta}{3}, \quad x_1 = -2\cos\frac{\pi - \vartheta}{3}, \quad x_2 = -2\cos\frac{\pi + \vartheta}{3}.$$

Изъ уравненія (2) мы найдемъ соотвѣтствующія значенія синуса:

$$\sin\frac{\vartheta}{3} = \frac{\sin\vartheta}{x_0^2 - 1}, \quad \sin\frac{\pi - \vartheta}{3} = \frac{\sin\vartheta}{x_1^2 - 1}, \quad \sin\frac{\pi + \vartheta}{3} = -\frac{\sin\vartheta}{x_2^2 - 1}.$$

Итакъ, если данъ $\cos\vartheta$ или, лучше сказать, $\log\cos\vartheta$, то съ помощью логариѳмическихъ таблицъ тригонометрическихъ величинъ можно вычислить всѣ три корня уравненія (1) съ тою степенью точности, какую допускаютъ эти таблицы.

2. Пусть $f(x) = x^3 - 3x - 2\cos\vartheta$. Такъ какъ производная $f'(x) = 3x^2 - 3$, то ея корень $x = \pm 1$ можетъ быть двукратнымъ корнемъ функціи $f(x)$; для этого нужно, чтобы было $\cos\vartheta = \mp 1$. Тогда $f(x)$ имѣетъ еще одинъ простой корень $x = \mp 2$. Этотъ частный случай соотвѣтствуетъ трисекціи цѣлой окружности или полуокружости.

3. Изслѣдуемъ теперь, нельзя ли въ болѣе общемъ случаѣ привести уравненіе третьей степени къ виду (1) и такимъ образомъ рѣшить его съ помощью тригонометрическихъ таблицъ.

Положимъ, что намъ дано уравненіе третьей степени

$$z^3 + Az^2 + Bz + C = 0;$$

мы можемъ упростить его, положивъ:

$$z = y - \frac{1}{3}A;$$

---

[1]) Если $x = 2\cos\frac{\vartheta}{3}$, то $\frac{1}{2}(x^3 - 3x)$ даетъ $\cos\vartheta$; если поэтому положимъ $x = 2\cos\frac{\vartheta + 2\pi}{3}$, то $\frac{1}{2}(x^3 - 3x)$ дастъ $\cos(\vartheta + 2\pi)$, т. е. также $\cos\vartheta$.

тогда

$$z^2 = y^2 - \frac{2}{3} Ay + \frac{1}{9} A^2.$$

$$z^3 = y^3 - Ay^2 + \frac{1}{3} A^2 y - \frac{1}{27} A^3.$$

Послѣ подстановки этихъ выраженій наше уравненіе приметъ видъ:

$$y^3 + ay = b, \tag{3}$$

гдѣ

$$a = B - \frac{1}{3} A^2,$$

$$b = -\frac{2}{27} A^3 + \frac{1}{3} AB - C.$$

Положимъ, наконецъ, $x = gy$, разумѣя подъ g неопредѣленный множитель; тогда уравненіе (3) перейдетъ въ уравненіе

$$x^3 + ag^2 x = bg^3.$$

Если опредѣлимъ g такъ, чтобы было

$$ag^2 = -3, \quad bg^3 = 2\cos\vartheta,$$

то послѣднее уравненіе будетъ тождественно съ уравненіемъ (1).

Первому изъ этихъ уравненій можно удовлетворить вещественнымъ значеніемъ g только въ томъ случаѣ, если a есть отрицательное число. Тогда

$$g = \sqrt{\frac{-3}{a}}, \quad \cos\vartheta = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{-27}{a^3}}.$$

Замѣтимъ, что знакъ передъ квадратнымъ корнемъ мы можемъ выбрать произвольно; поэтому его можно считать положительнымъ. Далѣе, значеніе косинуса по абсолютной величинѣ всегда меньше 1; слѣдовательно, уголъ ϑ можетъ быть опредѣленъ только въ томъ случаѣ, если $-27b^2/4a^3$ есть правильная дробь, т. е. если $b^2/4 < -a^3/27$.

Полагая

$$R = \frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27},$$

мы видимъ, что R должно быть отрицательнымъ числомъ; вмѣстѣ съ тѣмъ получаемъ:

$$\sin\vartheta = \sqrt{\frac{27R}{a^3}}.$$

Если $a > 0$, то R, во всякомъ случаѣ, есть положительное число; слѣдовательно, предполагая R отрицательнымъ, мы тѣмъ самымъ принимаемъ, что и a есть отрицательное число; но при отрицательномъ a число R можетъ и не быть отрицательнымъ.

Взявъ при радикалахъ положительные знаки, мы получимъ опредѣленныя значенія для $\cos\vartheta$ и $\sin\vartheta$, которымъ отвѣчаетъ опредѣленный уголъ ϑ, содержащійся между 0 и π. Этотъ уголъ при $b > 0$ заключается между 0 и $\pi/2$, при $b < 0$ — между $\pi/2$ и π.

Опредѣливъ такимъ образомъ уголъ ϑ при помощи логариѳмическихъ таблицъ, мы найдемъ всѣ три корни уравненія (3):

$$y_1 = 2\sqrt{\frac{-a}{3}}\cos\frac{\vartheta}{3}, \quad y_2 = -2\sqrt{\frac{-a}{3}}\cos\frac{\pi-\vartheta}{3},$$

$$y_3 = -2\sqrt{\frac{-a}{3}}\cos\frac{\pi+\vartheta}{3}.$$

Если b есть положительное число и, слѣдовательно, ϑ заключено между 0 и $\pi/2$, то углы $\frac{1}{3}\vartheta$, $\frac{1}{3}(\pi-\vartheta)$, $\frac{1}{3}(\pi+\vartheta)$ всѣ лежатъ между 0 и $\pi/2$; ихъ косинусы имѣютъ поэтому положительныя значенія, такъ что y_1 есть положительное, а y_2 и y_3 отрицательныя числа.

4. Для примѣра возьмемъ кубическое уравненіе:

$$z^3 + z^2 - 4z + 1 = 0.$$

Положимъ

$$z = -y - \frac{1}{3}$$

(чтобы получить положительный коэффиціентъ b). Для y получимъ уравненіе:

$$y^3 - \frac{13}{3}y = \frac{65}{27};$$

слѣдовательно,

$$b = \frac{65}{27}, \quad a = -\frac{13}{3}, \quad \cos\vartheta = \frac{65}{2\sqrt{13^3}},$$

$$\log\cos\vartheta = 9{,}8409683 - 10, \quad \vartheta = 46^0\,6'\,7{,}6'',$$

$$\frac{\vartheta}{3} = 15^0\,22'\,2{,}5'', \quad \frac{\pi-\vartheta}{3} = 44^0\,37'\,57{,}5'', \quad \frac{\pi+\vartheta}{3} = 75^0\,22'\,2{,}5'',$$

$$\log y_1 = 0{,}3650684, \qquad y_1 = 2{,}317760,$$

$$\log(-y_2) = 0{,}2331322, \qquad -y_2 = 1{,}710536,$$

$$\log(-y_3) = 0{,}7833491 - 1, \qquad -y_3 = 0{,}607224.$$

При этомъ сумма логариѳмовъ

$$\log y_1 + \log(-y_2) + \log(-y_3) = \log y_1 y_2 y_3$$

должна быть равна логариѳму свободнаго члена, въ данномъ случаѣ — разности $\log 65 - \log 27 = 0{,}381\,5496$; сумма же $y_1 + y_2 + y_3$ должна быть равна взятому съ обратнымъ знакомъ коэффиціенту при y^2, въ данномъ случаѣ — нулю (§ 70, 1). Эти два обстоятельства могутъ служить средствомъ для повѣрки сдѣланныхъ вычисленій.

§ 92. Формула Кардана.

1. Рѣшеніе уравненія

$$y^3 + ay = b \tag{1}$$

въ томъ случаѣ, когда

$$R = \frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27} < 0,$$

было приведено разсужденіями предыдущаго параграфа къ трисекціи угла. Для этого послужили подстановки:

$$\cos\vartheta = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{-27}{a^3}}, \quad \sin\vartheta = \sqrt{\frac{27R}{a^3}}, \quad y = 2\sqrt{\frac{-a}{3}}\cos\frac{1}{3}\vartheta, \tag{2}$$

изъ которыхъ вытекаетъ:

$$\cos\vartheta + i\sin\vartheta = \left(\sqrt{\frac{-3}{a}}\right)^3\left(\frac{b}{2} + \sqrt{R}\right),$$

$$\cos\vartheta - i\sin\vartheta = \left(\sqrt{\frac{-3}{a}}\right)^3\left(\frac{b}{2} - \sqrt{R}\right).$$

Извлекая изъ обѣихъ частей этихъ равенствъ кубическіе корни и пользуясь въ примѣненіи къ лѣвымъ частямъ формулой Муавра, получимъ:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{-a}{3}}\left(\cos\frac{1}{3}\vartheta + i\sin\frac{1}{3}\vartheta\right) &= \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{R}},\\ \sqrt{\frac{-a}{3}}\left(\cos\frac{1}{3}\vartheta - i\sin\frac{1}{3}\vartheta\right) &= \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{R}}.\end{aligned} \tag{3}$$

Перемноживъ равенства (3) почленно, получимъ:

$$\frac{-a}{3} = \sqrt[3]{\frac{b}{2}+\sqrt{R}} \cdot \sqrt[3]{\frac{b}{2}-\sqrt{R}}; \tag{4}$$

наконецъ, сложивъ почленно равенства (3), имѣемъ:

$$y = \sqrt[3]{\frac{b}{2}+\sqrt{R}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2}-\sqrt{R}}. \tag{5}$$

Здѣсь корень y представленъ въ видѣ суммы двухъ корней третьей степени изъ мнимыхъ величинъ. Позже мы увидимъ, что въ случаѣ $R<0$ корни уравненія третьей степени никоимъ образомъ нельзя представить въ такомъ видѣ, чтобы вещественные корни y выражались при помощи вещественныхъ радикаловъ. Благодаря этому, въ прежнее время математики называли случай, когда $R<0$, неприводимымъ случаемъ уравненія третьей степени (casus irreducibilis) *).

2. Если предположить R положительнымъ, то оба кубическихъ корня

$$\sqrt[3]{\frac{b}{2}+\sqrt{R}}, \quad \sqrt[3]{\frac{b}{2}-\sqrt{R}}$$

мѣютъ вещественныя значенія, а, согласно равенству (4), ихъ произведеніе есть

$$\sqrt[3]{\frac{b^2}{4}-R} = \sqrt[3]{\frac{-a^3}{27}} = \frac{-a}{3}.$$

Равенство (5) даетъ вещественное значеніе для y, которое и въ этомъ случаѣ удовлетворяетъ уравненію (1). Въ послѣднемъ легко убѣдиться съ помощью несложной передѣлки.

Выраженіе (5) для корней кубическаго уравненія носитъ названіе формулы Кардана (Cardano).

3. Къ той же формулѣ рѣшенія уравненія третьей степени можно придти прямымъ путемъ, не пользуясь тригонометрическими функціями.

Положимъ для этого

$$y = u + v,$$

*) Въ выраженіи „casus irreducibilis" терминъ „неприводимый" употребляется не въ обычномъ значеніи этого слова (§ 68).

не опредѣляя пока u и v ближе. Тогда

$$y^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$$
$$= u^3 + v^3 + 3uv(u + v).$$

Если y есть корень уравненія (1), то

$$u^3 + v^3 + (3uv + a)(u + v) = b. \qquad (6)$$

Этому уравненію можно удовлетворить, если положить [2]:

$$3uv = -a.$$
$$u^3 + v^3 = b$$

Итакъ, намъ извѣстны сумма и произведеніе двухъ величинъ u^3 и v^3. Какъ было выведено въ п. 4 § 50-го,

$$u^3 - v^3 = 2\sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}} = 2\sqrt{R}; \qquad (7)$$

слѣдовательно,

$$u = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{R}}, \quad v = \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{R}}.$$

Соотношеніе $y = u + v$ даетъ для y вновь выраженіе (5). Оба кубическихъ корня u, v, какъ и прежде, связаны между собой уравненіемъ $3uv = -a$.

§ 93. Мнимые корни кубическаго уравненія.

1. Какъ мы уже видѣли выше, если извѣстенъ одинъ корень уравненія, то разысканіе остальныхъ приводится къ рѣшенію уравненія низшей степени. Кубическое уравненіе имѣетъ три корня. Если найденъ одинъ вещественный корень $y_1 = u + v$, то остальные два корня могутъ быть найдены изъ квадратнаго уравненія. Составимъ это квадратное уравненіе.

---

[2]) Такъ какъ u и v связаны только уравненіемъ (6), то мы можемъ подчинить ихъ еще условію

$$3uv + a = 0;$$

тогда уравненіе (6) даетъ:

$$u^3 + v^3 = b.$$

2. Если функцію $y^3 + ay - b$ раздѣлить на $y - y_1$, то это дѣленіе совершается нацѣло, и мы получимъ (§ 66, 3):

$$y^3 + ay - b = (y - y_1)(y^2 + yy_1 + y_1^2 + a).$$

Недостающіе два корня кубическаго уравненія y_2, y_3 будутъ корнями квадратнаго уравненія:

$$y^2 + yy_1 + y_1^2 + a = 0,$$

или

$$\left(y + \frac{1}{2}y_1\right)^2 = -\frac{3}{4}y_1^2 - a.$$

Если подставить въ это уравненіе $y_1 = u + v$, $a = -3uv$, то оно приметъ видъ:

$$\left(y + \frac{1}{2}(u + v)\right)^2 = -\frac{3}{4}(u - v)^2,$$

такъ какъ $(u + v)^2 - 4uv = (u - v)^2$. Послѣднее уравненіе имѣетъ корни:

$$-\frac{1}{2}(u + v) \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}(u - v);$$

если для сокращенія положимъ:

$$\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = \varepsilon, \tag{1}$$

то, возводя обѣ части послѣдняго равенства въ квадратъ, получимъ:

$$\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = \varepsilon^2, \tag{2}$$

такъ что оба корня y_2, y_3 предложеннаго кубическаго уравненія получатся въ формѣ:

$$y_2 = \varepsilon u + \varepsilon^2 v, \quad y_3 = \varepsilon^2 u + \varepsilon v. \tag{3}$$

3. Полученные нами корни (при вещественныхъ u и v, т. е. при $R > 0$) суть сопряженныя мнимыя числа.

Изъ уравненій (1) и (2) слѣдуетъ, что $\varepsilon^3 = 1$, т. е. ε есть мнимый корень третьей степени изъ 1. Онъ удовлетворяетъ также квадратному уравненію

$$1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0; \tag{4}$$

въ частности, кубическое уравненіе $x^3 - 1 = 0$ имѣетъ, такимъ образомъ, корни 1, ε, ε^2.

§ 94. Дискриминантъ кубическаго уравненія.

1. Значеніе величины R станетъ яснѣе, если выразить R черезъ корни кубическаго уравненія. Пусть, по прежнему,

$$y_1 = u + v, \quad y_2 = \varepsilon u + \varepsilon^2 v, \quad y_3 = \varepsilon^2 u + \varepsilon v.$$

Такъ какъ $\varepsilon = (-1 + \sqrt{3})/2$, $\varepsilon^2 = (-1 - i\sqrt{3})/2$, то

$$1 - \varepsilon = \frac{3}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}, \quad 1 - \varepsilon^2 = \frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, \quad \varepsilon - \varepsilon^2 = i\sqrt{3};$$

слѣдовательно,

$$y_1 - y_2 = \frac{3}{2}(u + v) - i\sqrt{3}\,\frac{u - v}{2},$$

$$y_1 - y_3 = \frac{3}{2}(u + v) + i\sqrt{3}\,\frac{u - v}{2}.$$

Перемножая почленно эти равенства, получимъ:

$$(y_1 - y_2)(y_1 - y_3) = \frac{9}{4}(u + v)^2 + \frac{3}{4}(u - v)^2 = 3(u^2 + v^2 + uv).$$

Наконецъ, перемножимъ это равенство почленно съ равенствомъ:

$$y_2 - y_3 = i\sqrt{3}\,(u - v);$$

тогда получимъ:

$$(y_2 - y_3)(y_1 - y_2)(y_1 - y_3) = \sqrt{-27}\,(u^3 - v^3).$$

Но $u^3 - v^3 = 2\sqrt{R}$ (§ 92, (7)); слѣдовательно:

$$(y_2 - y_3)(y_1 - y_2)(y_1 - y_3) = 2\sqrt{-27R} = \sqrt{-(27b^2 + 4a^3)}.$$

Выраженіе

$$D = (y_2 - y_3)^2 (y_1 - y_2)^2 (y_1 - y_3)^2,$$

представляющее собой квадратъ лѣвой части послѣдняго равенства, называется **дискриминантомъ** кубическаго уравненія. Этотъ дискриминантъ равенъ, очевидно, $-4 . 27 R$ (ср. § 70, 6).

2. Если два изъ корней y_1, y_2, y_3 равны между собой, то дискриминантъ равенъ нулю. Обратно, если дискриминантъ равенъ нулю, то между корнями y_1, y_2, y_3 имѣется два равныхъ. Слѣдовательно, $D = 0$

есть необходимое и достаточное условіе для того, чтобы кубическое уравненіе имѣло двойной корень. Въ этомъ случаѣ

$$u = v = \sqrt[3]{\frac{b}{2}},$$

$$y_1 = 2\sqrt[3]{\frac{b}{2}}, \quad y_2 = y_3 = -\sqrt[3]{\frac{b}{2}}.$$

Если дискриминантъ D имѣетъ положительное значеніе (слѣдовательно, $R < 0$), то всѣ три корня вещественны; если же дискриминантъ имѣетъ отрицательное значеніе (слѣдовательно, $R > 0$), то уравненіе имѣетъ одинъ вещественный и два мнимыхъ корня.

§ 95. Тригонометрическое рѣшеніе кубическаго уравненія.

1. Въ § 91 мы видѣли, что въ случаѣ $R < 0$ нахожденіе корней уравненія

$$y^3 + ay = b \tag{1}$$

приводится къ трисекціи угла и въ виду этого производится съ помощью тригонометрическихъ таблицъ. Но и при $R > 0$ можно пользоваться тригонометрическими таблицами; это облегчаетъ рѣшеніе уравненія.

Мы можемъ при этомъ считать свободный членъ b положительнымъ. Въ самомъ дѣлѣ, чтобы найти корни уравненія $y^3 + ay = -b$, достаточно перемѣнить знаки при корняхъ уравненія $y^3 + ay = b$. Такимъ образомъ, намъ остается только различать два случая, когда $a > 0$ и когда $a < 0$.

2. При положительномъ a мы полагаемъ

$$\frac{b}{2} = \sqrt{\frac{a^3}{27}}\operatorname{cotg}\vartheta, \quad \sqrt{R} = \sqrt{\frac{a^3}{27}}\frac{1}{\sin\vartheta} \tag{2}$$

и, согласно п. 3 § 92-го, получаемъ:

$$u = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{a^3}{27}}\left(\operatorname{cotg}\vartheta + \frac{1}{\sin\vartheta}\right)} = \sqrt{\frac{a}{3}}\sqrt[3]{\frac{1+\cos\vartheta}{\sin\vartheta}},$$

$$v = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{a^3}{27}}\left(\operatorname{cotg}\vartheta - \frac{1}{\sin\vartheta}\right)} = -\sqrt{\frac{a}{3}}\sqrt[3]{\frac{1-\cos\vartheta}{\sin\vartheta}},$$

$$y = u + v = \sqrt{\frac{a}{3}}\left(\sqrt[3]{\frac{1+\cos\vartheta}{\sin\vartheta}} - \sqrt[3]{\frac{1-\cos\vartheta}{\sin\vartheta}}\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{a}{3}}\left(\sqrt[3]{\operatorname{cotg}\frac{\vartheta}{2}} - \sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}}\right).$$

Положивъ теперь

$$\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} = \left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^3, \tag{3}$$

мы найдемъ:

$$y = 2\sqrt{\frac{a}{3}}\operatorname{cotg}\varphi. \tag{4}$$

Формулы (2), (3), (4) даютъ возможность вычислить значенiе y съ помощью тригонометрическихъ таблицъ.

3. При отрицательномъ a положимъ:

$$\frac{b}{2} = \sqrt{-\frac{a^3}{27}}\frac{1}{\sin\vartheta}, \quad \sqrt{R} = \sqrt{-\frac{a^3}{27}}\operatorname{cotg}\vartheta, \tag{5}$$

$$y = \sqrt{-\frac{a}{3}}\left(\sqrt[3]{\frac{1+\cos\vartheta}{\sin\vartheta}} + \sqrt[3]{\frac{1-\cos\vartheta}{\sin\vartheta}}\right) =$$

$$= \sqrt{-\frac{a}{3}}\left(\sqrt[3]{\operatorname{cotg}\frac{\vartheta}{2}} + \sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}}\right),$$

$$\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} = \left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^3, \tag{6}$$

$$y = 2\sqrt{-\frac{a}{3}}\frac{1}{\sin\varphi}. \tag{7}$$

Возьмемъ слѣдующiй примѣръ:

$$y^3 - 2y = 2,$$

$$\sin\vartheta = \sqrt{\frac{8}{27}};$$

по семизначнымъ таблицамъ получимъ, что $y = 1{,}769292$, при чемъ только послѣднiй десятичный знакъ не вполнѣ надеженъ *).

---

*) Богатый матерiалъ для упражненiй даетъ Е. Лампе (E. Lampe) въ приложенiи къ годичному отчету (Programm) Луизенштадскаго высшаго реальнаго училища въ Берлинѣ. „Задачи на рѣшенiе уравненiй высшихъ степеней изъ области геометрiи и механики" („Geometrische und mechanische Aufgaben zur numerischen Auflösung von Gleichungen höherer Grade". Ostern, 1885. Gaertners Verlagsbuchandlung).

§ 96. Рѣшеніе уравненій четвертой степени.

1. Рѣшеніе уравненія четвертой степени можетъ быть приведено къ рѣшенію нѣкотораго уравненія третьей степени. При этомъ, слѣдуя Эйлеру, можно достичь цѣли съ помощью способа, аналогичнаго тому, который мы примѣняли при рѣшеніи уравненія третьей степени *).

Точно такъ же, какъ уравненіе 3-ей степени, общее уравненіе 4-ой степени

$$y^4 + Ay^3 + By^2 + Cy + D = 0$$

подстановкой

$$y = x - \frac{1}{4} A$$

приводится къ болѣе простому виду, не содержащему члена съ неизвѣстной въ третьей степени:

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0; \qquad (1)$$

коэффиціенты a, b, c очень легко выразить въ коэффиціентахъ A, B, C, D.

Разложимъ теперь x на три слагаемыхъ; именно, положимъ:

$$2x = u + v + w.$$

Тогда

$$4x^2 = u^2 + v^2 + w^2 + 2(uv + vw + wu),$$

$$16x^4 = (u^2 + v^2 + w^2)^2 + 4(u^2 + v^2 + w^2)(uv + vw + wu) + \\ + 4(u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2) + 8uvw(u + v + w).$$

Подставивъ эти выраженія въ уравненіе (1), получимъ:

$$(u^2 + v^2 + w^2)^2 + 4(uv + vw + wu)(u^2 + v^2 + w^2 + 2a) + \\ + 4a(u^2 + v^2 + w^2) + 8(uvw + b)(u + v + w) + \\ + 4(u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2) + 16c = 0.$$

Мы упростимъ наше уравненіе, если подчинимъ u, v и w условіямъ:

$$u^2 + v^2 + w^2 = -2a, \qquad (2)$$

$$uvw = -b. \qquad (3)$$

Оно приметъ тогда видъ:

$$4(u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2) + 4a(u^2 + v^2 + w^2) + (u^2 + v^2 + w^2)^2 + 16c = 0;$$

---

*) Euler, „Vollständige Anleitung zur Algebra". Zweiter Teil, erster Abschnitt, Nr. 15.

въ виду же соотношенія (2) оно еще болѣе упрощается:

$$u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2 = a^2 - 4c. \qquad (4)$$

Если z есть неопредѣленная величина, то изъ равенствъ (2), (3) и (4) вытекаетъ тождество:

$$(z - u^2)(z - v^2)(z - w^2) = z^3 + 2az^2 + (a^2 - 4c)z - b^2,$$

т. е. u^2, v^2 и w^2 суть корни кубическаго уравненія:

$$z^3 + 2az^2 + (a^2 - 4c)z - b^2 = 0, \qquad (5)$$

(§ 70, 1). Обозначимъ корни этого уравненія черезъ z_1, z_2 и z_3; тогда

$$u = \sqrt{z_1}, \quad v = \sqrt{z_2}, \quad w = \sqrt{z_3}. \qquad (6)$$

Знаки передъ этими радикалами не вполнѣ произвольны; въ виду соотношенія (3) знакъ одного изъ нихъ опредѣляется знаками двухъ другихъ. Итакъ, имѣя въ виду равенство $\sqrt{z_1}\sqrt{z_2}\sqrt{z_3} = -b$, мы получимъ четыре корня заданнаго уравненія въ видѣ:

$$\begin{aligned}
2x_1 &= \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3},\\
2x_2 &= \sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3},\\
2x_3 &= -\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3},\\
2x_4 &= -\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}.
\end{aligned}$$

Уравненіе 3-ей степени (5) называется кубической резольвентой даннаго уравненія четвертой степени. Такъ какъ $z_1z_2z_3 = b^2$ всегда представляетъ собою положительное число, то здѣсь могутъ имѣть мѣсто три случая:

1) z_1, z_2, z_3, суть вещественныя положительныя числа; тогда уравненіе четвертой степени имѣетъ четыре вещественныхъ корня.

2) Два изъ корней уравненія (5), — скажемъ, z_2 и z_3, — имѣютъ отрицательныя значенія, а третій z_1 — положительное. Въ этомъ случаѣ всѣ четыре корня x_1, x_2, x_3, x_4 представляютъ собой мнимыя числа, при чемъ x_1 и x_2, x_3 и x_4 суть числа, попарно сопряженныя.

3) Уравненіе 3-ей степени (5) имѣетъ два сопряженныхъ мнимыхъ корня, — скажемъ, z_2 и z_3. Такъ какъ въ этомъ случаѣ произведеніе z_2z_3 есть число положительное, то и z_1 должно быть положительнымъ числомъ. Опредѣлимъ знаки при квадратныхъ корняхъ такъ, чтобы $\sqrt{z_2}$ и $\sqrt{z_3}$ имѣли сопряженныя мнимыя значенія.

Тогда x_1 и x_2 будутъ вещественныя, а x_3 и x_4 — сопряженныя мнимыя числа.

§ 97. Дискриминантъ уравненія четвертой степени.

1. По коэффиціентамъ уравненія (1), не рѣшая его, можно опредѣлить, какой изъ указанныхъ трехъ случаевъ будетъ имѣть мѣсто.

Съ этой цѣлью составимъ сначала разности:

$$x_1 - x_2 = \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}, \quad x_3 - x_4 = \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3},$$
$$x_1 - x_3 = \sqrt{z_1} + \sqrt{z_3}, \quad x_2 - x_4 = \sqrt{z_1} - \sqrt{z_3},$$
$$x_1 - x_4 = \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2}, \quad x_2 - x_3 = \sqrt{z_1} - \sqrt{z_2}.$$

Перемножая между собой эти равенства, получимъ:

$$\begin{aligned}(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_3 - x_4)(x_2 - x_4)(x_2 - x_3) = \\ = (z_2 - z_3)(z_1 - z_3)(z_1 - z_2).\end{aligned} \tag{1}$$

Квадратъ этой величины называется **дискриминантомъ** уравненія четвертой степени. Онъ представляетъ собою симметрическую функцію корней x_1, x_2, x_3, x_4 и, слѣдовательно, согласно § 70, выражается раціонально черезъ коэффиціенты a, b, c.

Необходимое и достаточное условіе для того, чтобы уравненіе четвертой степени имѣло кратные корни, состоитъ въ томъ, что дискриминантъ долженъ быть равенъ нулю.

2. Соотношеніе (1) заключаетъ въ себѣ теорему: дискриминантъ уравненія четвертой степени равенъ дискриминанту его кубической резольвенты. Чтобы образовать дискриминантъ кубической резольвенты, нужно по правилу, указанному въ § 94, предварительно подстановкой

$$z = y - \frac{2a}{3}$$

освободить его отъ члена, содержащаго неизвѣстное во второй степени. Какъ мы видѣли въ п. 3 § 91-го, мы получимъ тогда для y кубическое уравненіе:

$$y^3 + Ay + B = 0,$$

гдѣ

$$A = -\frac{a^2}{3} - 4c,$$

$$B = -\frac{2a^3}{27} + \frac{8ac}{3} - b^2.$$

Дискриминантъ этого уравненія

$$D = -27B^2 - 4A^3$$

представляетъ собой также дискриминантъ уравненія четвертой степени. Если мы выполнимъ вычисленія и выразимъ дискриминантъ въ коэффиціентахъ даннаго уравненія четвертой степени, то получимъ:

$$D = 16a^4c - 4a^3b^2 - 128a^2c^2 + 144acb^2 + 256c^3 - 27b^4.$$

3. Посмотримъ теперь, какъ съ помощью дискриминанта различаются упомянутые три случая. Замѣтимъ прежде всего, что случай (3), когда уравненіе четвертой степени имѣетъ два вещественныхъ и два мнимыхъ корня, вполнѣ характеризуется тѣмъ, что дискриминантъ D имѣетъ отрицательное значеніе [3]).

Намъ остается установить различіе между случаями 1) и 2), т. е. между случаемъ, когда всѣ корни вещественные, и тѣмъ случаемъ, когда всѣ корни мнимые. Въ обоихъ случаяхъ $D > 0$. Въ первомъ кубическая резольвента имѣетъ три положительныхъ корня, во второмъ — одинъ положительный и два отрицательныхъ.

Изъ резольвенты (5) § 96-го по теоремамъ § 70-го получимъ соотношенія:

$$\begin{aligned} -2a &= z_1 + z_2 + z_3, \\ a^2 - 4c &= z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3; \end{aligned} \tag{2}$$

если всѣ три величины z_1, z_2 и z_3 положительны, то

$$a < 0, \quad a^2 - 4c > 0. \tag{3}$$

Докажемъ теперь, что эти два условія вмѣстѣ съ условіемъ $D > 0$ достаточны для того, чтобы уравненіе четвертой степени имѣло четыре вещественныхъ корня.

4. Произведеніе $z_1z_2z_3 = b^2$ есть число положительное; поэтому, если $D > 0$ [4]), то возможны только два случая: либо всѣ три корня z_1, z_2, z_3 кубической резольвенты положительны, либо два изъ нихъ отрицательны. Положимъ, что $z_2 = -\xi_2$, $z_3 = -\xi_3$, гдѣ ξ_2 и ξ_3 суть положительныя числа.

Если $a < 0$, то, согласно первому изъ равенствъ (2),

$$\begin{gathered} z_1 > \xi_2 + \xi_3, \\ z_1(\xi_2 + \xi_3) > (\xi_2 + \xi_3)^2, \\ z_1(\xi_2 + \xi_3) - \xi_2\xi_3 > \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_2\xi_3 > 0 \end{gathered}$$

---

[3]) Ибо въ этомъ и только въ этомъ случаѣ соотвѣтствующее уравненіе третьей степени имѣетъ два мнимыхъ корня (§ 94, 2).

[4]) Такъ что z_1, z_2 и z_3 суть вещественныя числа.

и, слѣдовательно,

$$\zeta_1(\zeta_2+\zeta_3)+\zeta_2\zeta_3<0, \quad a^2-4c<0.$$

Итакъ, въ этомъ случаѣ либо $a \geqq 0$, либо $a^2-4c<0$, т. е. условія (2) не выполняются. Слѣдовательно, эти условія (2) характеризуютъ первый случай. Если b, а, слѣдовательно, и одинъ изъ корней $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ обращаются въ нуль, то наши разсужденія все-таки остаются въ силѣ.

5. Если $D=0$, то какія-либо двѣ изъ величинъ $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ равны между собой. Пусть $\zeta_2=\zeta_3$; допустимъ сперва, что ζ_2 и ζ_3 не равны нулю. Вмѣстѣ съ тѣмъ ζ_1 должно быть положительнымъ или, по крайней мѣрѣ, не отрицательнымъ числомъ, такъ какъ произведеніе $\zeta_1\zeta_2\zeta_3=b^2$ не можетъ быть отрицательнымъ числомъ. Тогда

$$2x_1=\sqrt{\zeta_1}+2\sqrt{\zeta_2}, \quad 2x_2=\sqrt{\zeta_1}-2\sqrt{\zeta_2},$$
$$2x_3=2x_4=-\sqrt{\zeta_1}.$$

Уравненіе четвертой степени имѣетъ въ этомъ случаѣ двойной вещественный корень; два же другіе корня x_1 и x_2 будутъ либо также вещественными, либо мнимыми сопряженными, смотря по тому, представляетъ ли собою ζ_2 отрицательное или положительное число. Ясно, что неравенства (3) являются необходимымъ и достаточнымъ условіемъ, чтобы уравненіе четвертой степени имѣло исключительно вещественные корни.

6. Въ частности, подъ это условіе подходитъ случай, когда $\zeta_1=\zeta_2=\zeta_3>0$. Тогда

$$x_1=\frac{3}{2}\sqrt{\zeta_1}, \quad x_2=x_3=x_4=-\frac{1}{2}\sqrt{\zeta_1},$$

т. е. уравненіе четвертой степепени въ этомъ случаѣ имѣетъ корень третьей кратности. Необходимое и достаточное для этого условіе выражается равенствомъ:

$$\zeta^3+2a\zeta^2+(a^2-4c)\zeta-b^2=(\zeta-\zeta_1)^3 \text{ [5]},$$

откуда

$$3\zeta_1=-2a, \quad 3\zeta_1{}^2=a^2-4c, \quad \zeta_1{}^3=b^2;$$

исключивъ ζ_1, получимъ:

$$a^2+12c=0, \quad 8a^3+27b^2=0.$$

---

[5]) Это соотношеніе должно имѣть мѣсто тождественно относительно ζ.

7. Если $\zeta_2 = \zeta_3 = 0$, то

$$x_1 = x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\zeta_1}, \quad x_3 = x_4 = -\frac{1}{2}\sqrt{\zeta_1},$$

т. е. уравненіе четвертой степени имѣетъ **два двойныхъ** корня. Эти корни представляютъ собой вещественныя или мнимыя сопряженныя числа, смотря по тому, есть ли ζ_1 положительное или отрицательное число.

Условія, соотвѣтствующія этому случаю, выражаются равенствами:

$$b = 0, \quad a^2 - 4c = 0;$$

ζ_1 есть отрицательное или положительное число, смотря по тому, представляетъ ли собою a положительное или отрицательное число. Если, наконецъ, $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = 0$, то

$$a = 0, \quad a^2 - 4c = 0, \quad b = 0,$$

и уравненіе четвертой степени имѣетъ четыре равныхъ корня; общее значеніе этихъ корней есть нуль [6]).

§ 98. Группа уравненія четвертой степени.

1. Болѣе глубокія основанія, вслѣдствіе которыхъ уравненія четвертой степени приводятъ къ кубической резольвентѣ, заключаются въ свойствахъ группы перестановокъ изъ четырехъ элементовъ (§ 56, 6). Эта группа, какъ мы видѣли, состоитъ изъ 24 перестановокъ. Если мы условимся разумѣть подъ элементами этихъ перестановокъ четыре корня x_1, x_2, x_3, x_4 уравненія четвертой степени, то **симметрической функціей** этихъ корней будетъ такая, которая остается тождественно равной самой себѣ **при всѣхъ перестановкахъ**. Такая функція выражается раціонально черезъ коэффиціенты уравненія четвертой степени. Если между корнями x_1, x_2, x_3, x_4 не существуетъ какихъ-либо особыхъ соотношеній, то симметрическія функціи суть единственныя, обладающія этимъ свойствомъ [7]). Въ самомъ дѣлѣ, принимая во вниманіе, что коэффиціенты уравненія суть основныя симметрическія функціи, т. е. что

---

[6]) Можетъ показаться страннымъ, что въ томъ случаѣ, когда всѣ четыре корня уравненія четвертой степени равны, они необходимо равны нулю; но нужно имѣть въ виду, что здѣсь идетъ рѣчь объ уравненіи, приведенномъ къ виду (I) § 96-го.

[7]) Это значитъ: симметрическія функціи суть единственныя, которыя выражаются въ коэффиціентахъ раціонально, какія бы значенія ни имѣли количества a_1, a_2, a_3, a_4.

$$\begin{aligned}
-a_1 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \\
a_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4, \\
-a_3 &= x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4, \\
a_4 &= x_1x_2x_3x_4,
\end{aligned}$$

мы отсюда заключаемъ обратно, что всякая раціональная функція этихъ коэффиціентовъ есть въ то же время симметрическая функція величинъ x_1, x_2, x_3, x_4, которыя представляютъ собой корни уравненія четвертой степени

$$x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0. \qquad (1)$$

Эта группа изъ 24 перестановокъ называется группой Галуа общаго уравненія четвертой степени.

2. Въ этой группѣ, какъ было показано выше, содержится группа четныхъ перестановокъ, состоящая изъ 12 элементовъ. Существуютъ функціи, остающіяся безъ перемѣнъ только при четныхъ перестановкахъ. Такія функціи называются знакоперемѣнными, а самая группа четныхъ перестановокъ поэтому тоже называется знакоперемѣнной. Примѣромъ такой функціи можетъ служить произведеніе разностей:

$$P = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4),$$

квадратъ котораго есть дискриминантъ. Эта функція мѣняетъ знакъ, если произвести одну какую-нибудь транспозицію (§ 53, 1), напримѣръ, замѣнить другъ другомъ x_1 и x_2, и принимаетъ прежнее значеніе, если сдѣлать двѣ или, вообще, четное число транспозицій [8]).

3. Каждая цѣлая функція Q отъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которая не мѣняется при перестановкахъ знакоперемѣнной группы, выражается раціонально черезъ коэффиціенты $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ и приведенную выше функцію P.

Положимъ, что такая функція Q_1 при какой-нибудь транспозиціи, — напримѣръ, (x_1, x_2), — переходитъ въ Q_2. Въ такомъ случаѣ Q_2, въ свою очередь, послѣ вторичной транспозиціи какихъ-нибудь двухъ элементовъ

---

[8]) Чтобы вполнѣ уяснить себѣ какъ этотъ пунктъ, такъ и дальнѣйшее, нужно отдать себѣ полный отчетъ въ значеніи терминовъ, которые авторъ употребляетъ. Мы имѣемъ функцію $F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$. Подъ знакомъ функціи F здѣсь стоятъ перемѣнныя въ послѣдовательности, соотвѣтствующей основной перестановкѣ $E = x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Если мы, однако, замѣнимъ перестановку E другой перестановкой $S = x_1', x_2', x_3', \ldots, x_n'$, т. е. произведемъ въ функціи субституцію, ведущую отъ перестановки E къ перестановкѣ S, то мы получимъ функцію

переходитъ въ Q_1 [9]). Вообще, функція эта не можетъ имѣть другихъ значеній, кромѣ Q_1 и Q_2, такъ какъ каждая нечетная перестановка получается изъ четной помощью одной транспозиціи. Слѣдовательно, $Q_1 + Q_2$ есть симметрическая функція. Разность же $Q_1 - Q_2$ мѣняетъ знакъ, если переставить x_1 и x_2, и потому равна нулю при $x_1 = x_2$. Поэтому $Q_1 - Q_2$, какъ цѣлая функція отъ x_1, дѣлится на $x_1 - x_2$ и точно такъ же и на остальныя разности $x_1 - x_3$, $x_1 - x_4$, ..., т. е. на произведеніе P. Частное $(Q_1 - Q_2)/P$ опять представляетъ собой симметрическую функцію.

$F(S) = F(x_1', x_2', \ldots, x_n')$, которая иногда совпадаетъ съ первоначальной функціей, а иногда отличается отъ нея.

Пусть, напримѣръ,

$$F(E) = F(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_2 + x_3 x_4.$$

Если перестановка $S = x_2, x_1, x_3, x_4 = (x_1, x_2)$, то

$$F(S) = F(x_2, x_1, x_3, x_4) = x_2 + x_1 + x_3 x_4.$$

Если перестановка $T = x_1, x_2, x_4, x_3 = (x_3, x_4)$, то

$$F(T) = F(x_1, x_2, x_4, x_3) = x_1 + x_2 + x_4 x_3.$$

Точно такъ же

$$F(ST) = F(x_2, x_1, x_4, x_3) = x_2 + x_1 + x_4 x_3.$$

Ясно, что наша функція при перестановкахъ S, T и ST имѣетъ то же значеніе, что и при перестановкѣ E. Но при перестановкѣ $R = x_1, x_3, x_2, x_4 = (x_2, x_3)$ она получаетъ уже другое значеніе:

$$F(R) = F(x_1, x_3, x_2, x_4) = x_1 + x_3 + x_2 x_4.$$

При такихъ условіяхъ говорятъ, что наша функція не мѣняется при перестановкахъ S, T, ST и мѣняется при остальныхъ перестановкахъ, — напримѣръ, при перестановкѣ R.

Если мы въ функціи P, приведенной въ текстѣ, произведемъ какую-либо транспозицію, — напримѣръ, (x_1, x_2), то получимъ:

$$P(x_2, x_1, x_3, x_4) = (x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_3 - x_4) = -P.$$

Функція мѣняетъ знакъ при каждой транспозиціи, а потому остается безъ измѣненія при четныхъ перестановкахъ и мѣняетъ знакъ при нечетныхъ.

Чтобы понять дальнѣйшія примѣчанія, нужно замѣтить слѣдующее.

Пусть $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будетъ нѣкоторая функція отъ перемѣнныхъ x_i, а R — нѣкоторая перестановка. Положимъ далѣе, что $F(R) = F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а S есть другая перестановка. Если мы теперь въ функціи F_1 произведемъ субституцію, ведущую отъ перестановки E къ S, то это все равно, что въ функціи F произвести субституцію, ведущую отъ E къ перестановкѣ RS. Иначе:

$$\text{Если } F(R) = F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \text{ то } F(RS) = F_1(S).$$

[9]) Потому что двѣ транспозиціи, по условію, не мѣняютъ функціи Q_1.

Если положимъ $P=\sqrt{D}$, то D есть дискриминантъ. Вмѣстѣ съ тѣмъ

$$Q_1+Q_2=2A,\quad Q_1-Q_2=2B\sqrt{D}.$$

гдѣ A и B суть раціональныя функціи коэффиціентовъ; слѣдовательно,

$$Q_1=A+B\sqrt{D},$$

что и требовалось доказать [10]).

4. Въ группѣ 24 перестановокъ заключается группа изъ 8 перестановокъ G_1 (§ 56, 6):

---

[10]) Изложимъ это доказательство подробнѣе.

По условію $Q_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть знакоперемѣнная функція, т. е. она не мѣняется при четныхъ перестановкахъ, такъ что, если R есть четная перестановка, то $Q_1(R)=Q_1$.

Пусть теперь S будетъ нечетная перестановка. Въ такомъ случаѣ $Q_1(S)$ представляетъ собой нѣкоторую другую функцію Q_2. Покажемъ теперь, что при всякой другой нечетной перестановкѣ T функція $Q_1(T)$ также равна Q_2. Въ самомъ дѣлѣ, мы всегда можемъ найти перестановку V, удовлетворяющую условію $T=VS$. Такъ какъ T и S суть нечетныя перестановки, то V есть четная перестановка. Поэтому $Q_1(V)=Q_1$ и, слѣдовательно, $Q_1(VS)=Q_1(S)$; или иначе: $Q_1(T)=Q_1(S)=Q_2$.

Итакъ, наша функція при всѣхъ четныхъ перестановкахъ имѣетъ значеніе Q_1, а при всѣхъ нечетныхъ — значеніе Q_2.

Легко видѣть, что функція Q_2, въ свою очередь, при четныхъ перестановкахъ остается безъ измѣненія, при нечетныхъ же переходитъ въ Q_1. Въ самомъ дѣлѣ, если R есть четная, а S нечетная перестановка, то $Q_1(S)=Q_2$ а потому $Q_2(R)=Q_1(SR)$, но такъ какъ SR также представляетъ собой нечетную перестановку, то $Q_1(SR)=Q_2$, а потому $Q_2(R)=Q_2$. Напротивъ, $Q_2(S)=Q_1(SS)$; а такъ какъ SS есть четная перестановка, то $Q_1(SS)=Q_1$, а потому $Q_2(S)=Q_1$.

Итакъ, функціи Q_1 и Q_2 не измѣняются при четныхъ перестановкахъ и переходятъ одна въ другую при нечетныхъ перестановкахъ. Поэтому функція Q_1+Q_2 не измѣняется ни при четныхъ, ни при нечетныхъ перестановкахъ.

Если мы теперь въ функціи Q_1-Q_2 замѣнимъ x_1 на x_2, т. е. произведемъ транспозицію (x_1, x_2), то она перейдетъ въ Q_2-Q_1, т. е. перемѣнитъ знакъ. Но если $x_1=x_2$, то это замѣщеніе не должно измѣнить функціи; поэтому при $x_1=x_2$ функція Q_1-Q_2 обращается въ нуль. Отсюда, какъ указано въ текстѣ, заключаемъ, что функція Q_1-Q_2 дѣлится нацѣло на P. Если мы теперь разсмотримъ частное $\frac{Q_1-Q_2}{P}$, то при четной перестановкѣ какъ числитель, такъ и знаменатель остаются безъ измѣненія; при нечетной перестановкѣ числитель и знаменатель мѣняютъ знаки; поэтому частное не измѣняется ни при какой перестановкѣ.

Итакъ, Q_1+Q_2 и $\frac{Q_1-Q_2}{P}$ суть симметрическія функціи отъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$; поэтому онѣ выражаются раціонально въ коэффиціентахъ $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Эти двѣ функціи и обозначены въ текстѣ черезъ $2A$ и $2B$.

$$G_1 = (1),\ (1,\ 2)(3,\ 4),\ (1,\ 3)(2,\ 4),\ (1,\ 4)(2,\ 3),$$
$$(1,\ 2),\ (3,\ 4),\ (1,\ 4,\ 2,\ 3),\ (1,\ 3,\ 2,\ 4).$$

Каждую изъ этихъ перестановокъ соединимъ послѣдовательно съ двумя перестановками, не входящими въ эту группу, — скажемъ, съ перестановками

$$(1,\ 4) \text{ и } (1,\ 3).$$

Если, соединяя перестановки группы G_1 съ перестановками $(1, 4)$ и $(1, 3)$, мы будемъ ставить послѣднія на второмъ мѣстѣ, то получимъ слѣдующія двѣ системы перестановокъ:

$$G_2 = (1,4),\ (1,2,4,3),\ (1,3,4,2),\ (2,3),\ (1,2,4),\ (1,4,3),\ (2,3,4),\ (1,3,2);$$
$$G_3 = (1,3),\ (1,2,3,4),\ (2,4),\ (1,4,3,2),\ (1,2,3),\ (1,3,4),\ (1,4,2),\ (2,4,3).$$

Въ системахъ G_1, G_2, G_3, взятыхъ вмѣстѣ, заключаются всѣ 24 перестановки (§ 56, 4). G_2 и G_3 не могутъ быть названы группами въ собственномъ смыслѣ этого слова, такъ какъ результатъ соединенія двухъ элементовъ, положимъ, изъ системы G_2, не всегда содержится въ G_2. Поэтому системы G_2 и G_3 называются относительно группы G_1 ея **согруппами**.

Если y_1 есть функція перемѣнныхъ x_1, x_2, x_3, x_4, которая не мѣняется при перестановкахъ G_1, то при всѣхъ вообще перестановкахъ она можетъ принимать только три значенія y_1, y_2, y_3 [11]). Основныя симметрическія функціи y-овъ:

$$\begin{aligned} -A_1 &= y_1 + y_2 + y_3, \\ A_2 &= y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3, \\ -A_3 &= y_1 y_2 y_3 \end{aligned}$$

представляютъ собой симметрическія функціи отъ x и поэтому выражаются раціонально черезъ коэффиціенты уравненія четвертой степени. Количества же y_1, y_2, y_3 суть корни уравненія третьей степени

$$y^3 + A_1 y^2 + A_2 y + A_3 = 0. \tag{2}$$

Каждое такое уравненіе называется **кубической резольвентой** уравненія четвертой степени (1).

---

[11]) Если мы въ функціи y_1 замѣнимъ x_1, x_2, x_3, x_4 перестановкой, входящей въ составъ группы G_1, то она не измѣняется. Если мы въ ней замѣнимъ x_1, x_2, x_3, x_4 какой-либо перестановкой согруппы G_2, то это все равно, что замѣнить x_1, x_2, x_3, x_4 нѣкоторой перестановкой группы G_1 (отчего функція не измѣнится), а потомъ произвести транспозицію (x_1, x_4); мы получимъ функцію y_2; точно такъ же, если мы замѣнимъ x_1, x_2, x_3, x_4 какой-либо перестановкой согруппы G_3, то мы получимъ одну и ту же функцію y_3.

Если функція y_1 не измѣняется при перестановкахъ группы G_1 и имѣетъ три значенія, то говорятъ, что она **принадлежитъ** группѣ G_1.

5. Функціи, принадлежащія группѣ G_1, могутъ быть составлены многими способами. Вмѣстѣ съ тѣмъ и уравненіе четвертой степени можно рѣшить различными пріемами. Эйлеръ пользовался функціей

$$z_1 = \tfrac{1}{4}(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2,$$

которая, очевидно, не мѣняется при перестановкахъ группы G_1, а при перестановкахъ согруппъ G_2 и G_3 переходитъ соотвѣтственно въ функціи

$$z_2 = \tfrac{1}{4}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2,$$
$$z_3 = \tfrac{1}{4}(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)^2.$$

Если извѣстны три корня кубической резольвенты [12]), то, чтобы опредѣлить корни x, остается только извлечь квадратные корни изъ этихъ трехъ величинъ; корни эти связаны соотношеніемъ:

$$\sqrt{z_1}\,\sqrt{z_2}\,\sqrt{z_3} = -b.$$

6. Между функціями, принадлежащими группѣ G_1, есть еще болѣе простая, именно:

$$y_1 = x_1x_2 + x_3x_4;$$

при перестановкахъ согруппъ G_2 и G_3 она переходитъ въ

$$y_2 = x_1x_3 + x_2x_4,$$
$$y_3 = x_1x_4 + x_2x_3.$$

Для этого случая коэффиціенты A_1, A_2, A_3, какъ симметрическія функціи легко вычисляются. По обозначеніямъ § 70-го и § 71-го

$$-A_1 = y_1 + y_2 + y_3 = \Sigma x_1x_2 = a_2,$$
$$A_2 = y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = \Sigma x_1^2x_2x_3 =$$
$$= \Sigma x_1 \Sigma x_1x_2x_3 - 4x_1x_2x_3x_4 = a_1a_3 - 4a_4,$$
$$-A_3 = y_1y_2y_3 = \Sigma x_1^3x_2x_3x_4 + \Sigma x_1^2x_2^2x_3^2 =$$
$$= x_1x_2x_3x_4\Sigma x_1^2 + (\Sigma x_1x_2x_3)^2 - 2\Sigma x_1^2x_2^2x_3x_4;$$

но

$$\Sigma x_1^2x_2^2x_3x_4 = x_1x_2x_3x_4\Sigma x_1x_2 = a_2a_4,$$
$$\Sigma x_1^2 = (\Sigma x_1)^2 - 2\Sigma x_1x_2 = a_1^2 - 2a_2,$$

---

[12]) Эта резольвента и есть уравненіе (5) § 96-го.

и, слѣдовательно,

$$-A_3 = a_1^2 a_4 + a_3^2 - 4 a_2 a_4.$$

Итакъ, кубической резольвентой въ данномъ случаѣ служитъ уравненіе:

$$y^3 - a_2 y^2 + (a_1 a_3 - 4 a_4) y + 4 a_2 a_4 - a_1^2 a_4 - a_3^2 = 0. \qquad (3)$$

Это уравненіе нѣсколько упрощается, если самое уравненіе четвертой степени задано въ упрощенномъ видѣ, т. е. если $a_1 = 0$.

7. Положимъ въ уравненіи (3)

$$3y = t + a_2;$$

тогда членъ, содержащій неизвѣстное во второй степени, обратится въ нуль. Путемъ простыхъ вычисленій мы получимъ кубическую резольвенту въ видѣ функціи отъ t:

$$t^3 - 3At - B = 0. \qquad (4)$$

Здѣсь для сокращенія положено:

$$A = a_2^2 - 3a_1 a_3 + 12 a_4,$$
$$B = 27 a_1^2 a_4 + 27 a_3^2 + 2 a_2^3 - 72 a_2 a_4 - 9 a_1 a_2 a_3.$$

Коэффиціенты A и B называются первымъ и вторымъ инваріантами уравненія четвертой степени (1).

8. Зная корни резольвенты (3), т. е. y_1, y_2, y_3, можно вычислить z_1, z_2, z_3 при помощи формулы:

$$z_1 = (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - 4(x_1 + x_2)(x_3 + x_4)$$
$$= a_1^2 - 4a_2 + 4y_1; \qquad (5)$$

подобныя же формулы можно написать для z_2 и z_3. Извлекая квадратные корни изъ полученныхъ трехъ выраженій, легко получимъ x_1, x_2, x_3, x_4. Упомянутые три квадратныхъ корня связаны соотношеніемъ, опредѣляющимъ одинъ изъ нихъ въ зависимости отъ двухъ другихъ. Въ самомъ дѣлѣ,

$$(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)$$

есть симметрическая функція, которая съ помощью простыхъ вычисленій можетъ быть такъ выражена въ коэффиціентахъ уравненія (1):

$$-a_1^3 + 4a_1 a_2 - 8a_3$$ [13]).

---

[13]) Изъ соотношенія (5) мы выводимъ:

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = \sqrt{a_1^2 - 4a_2 + 4y_1};$$

9. Функція u_1 отъ x_1, x_2, x_3, x_4, которая не мѣняется при перестановкахъ группы изъ четырехъ двойныхъ двучленныхъ цикловъ:

$$(1),\ (1,\ 2)(3,\ 4),\ (1,\ 3)(2,\ 4),\ (1,\ 4)(2,\ 3),$$

можетъ принимать при различныхъ транспозиціяхъ x-овъ только шесть различныхъ значеній. Если же мы ограничимся только четными перестановками, то получимъ только три значенія u_1, u_2, u_3. Симметрическія функціи этихъ трехъ значеній:

$$\begin{aligned} -B_1 &= u_1 + u_2 + u_3, \\ B_2 &= u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3, \\ -B_3 &= u_1 u_2 u_3 \end{aligned}$$

не измѣняются при перестановкахъ знакоперемѣнной группы и поэтому выражаются раціонально черезъ коэффиціенты и квадратный корень $\sqrt{D}$. Этимъ путемъ мы придемъ къ кубическимъ резольвентамъ другого рода. Простѣйшая функція этого рода будетъ:

$$\begin{aligned} u_1 &= (x_1 - x_2)(x_3 - x_4), \\ u_2 &= (x_1 - x_3)(x_4 - x_2), \\ u_3 &= (x_1 - x_4)(x_2 - x_3). \end{aligned}$$

Складывая и перемножая, получимъ:

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0,$$
$$u_1 u_2 u_3 = -\sqrt{D},$$

такимъ же образомъ найдемъ:

$$x_1 + x_3 - x_2 - x_4 = \sqrt{a_1^2 - 4a_2 + 4y_2},$$
$$x_1 + x_4 - x_2 - x_3 = \sqrt{a_1^2 - 4a_2 + 4y_3}.$$

Если сюда присоединимъ еще соотношеніе

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -a_1,$$

то мы легко найдемъ всѣ корни x_1, x_2, x_3, x_4. Именно, складывая эти уравненія, мы получимъ:

$$4x_1 = \sqrt{a_1^2 - 4a_2 + 4y_1} + \sqrt{a_1^2 - 4a_2 + 4y_2} + \sqrt{a_1^2 - 4a_2 + 4y_3} - a_1.$$

Какъ указано въ текстѣ, произведеніе этихъ трехъ радикаловъ равно $-a_1^3 + 4a_1a_2 - 8a_3$. Если поэтому выбраны знаки двухъ радикаловъ, то знакъ третьяго этимъ опредѣляется. Комбинируя четырьмя возможными способами знаки двухъ радикаловъ, мы изъ того же выраженія получимъ всѣ четыре корня.

т. е. $B_1 = 0$ и $B_3 = \sqrt{D}$. Нѣсколько труднѣе составить B_2. Выполняя умноженія, мы получимъ:

$$-(u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3) = \Sigma x_1^2 x_2^2 - \Sigma x_1^2 x_2 x_3 + 6x_1x_2x_3x_4 =$$
$$= (\Sigma x_1 x_2)^2 - 3\Sigma x_1^2 x_2 x_3,$$
$$\Sigma x_1^2 x_2 x_3 = \Sigma x_1 \Sigma x_1 x_2 x_3 - 4x_1x_2x_3x_4,$$

а потому

$$-B_2 = a_2^2 - 3a_1a_3 + 12a_4 = A,$$

при чемъ A имѣетъ то же значеніе, что и въ п. 7. Мы получили кубическую резольвенту:

$$u^3 - Au + \sqrt{D} = 0. \tag{6}$$

Зная u_1, u_2, u_3, мы можемъ найти y_1, y_2, y_3, такъ какъ

$$u_2 - u_3 = x_1x_4 + x_2x_3 + x_1x_3 + x_2x_4 - 2x_1x_2 - 2x_3x_4 = a_2 - 3y_1.$$

Какъ и выше, извлекая квадратные корни, мы по корнямъ y найдемъ корни x.

§ 99. Система двухъ уравненій второй степени съ двумя неизвѣстными.

1. Къ уравненію четвертой степени приводится, въ частности, задача объ опредѣленіи двухъ неизвѣстныхъ изъ двухъ уравненій второй степени. Общее уравненіе второй степени съ двумя неизвѣстными имѣетъ видъ:

$$f(x, y) = ax^2 + by^2 + c + 2a'y + 2b'x + 2c'xy = 0. \tag{1}$$

Если одному изъ этихъ двухъ неизвѣстныхъ, — скажемъ, x, — будемъ придавать произвольныя значенія, то другое получитъ каждый разъ два значенія, которыя найдемъ, рѣшивъ квадратное уравненіе:

$$by^2 + 2y(c'x + a') + ax^2 + 2b'x + c = 0.$$

Если b не нуль, то корни этого уравненія суть:

$$by = -(c'x + a') \pm \sqrt{(c'x + a')^2 - b(ax^2 + 2b'x + c)},$$

или короче:

$$by = -(c'x + a') \pm \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C},$$

гдѣ A, B и C обозначаютъ:

$$A = c'^2 - ab, \quad B = a'c' - bb', \quad C = a'^2 - bc.$$

Выраженіе, стоящее подъ знакомъ радикала, можетъ иногда быть полнымъ квадратомъ линейной функціи $\alpha x + \beta$. Въ этомъ случаѣ функція второй степени $f(x, y)$ разлагается на двѣ линейныя функціи:

$$by + c'x + a' \pm (\alpha x + \beta).$$

Послѣднее имѣетъ мѣсто, если

$$\alpha^2 = A, \quad \alpha\beta = B \quad \text{и} \quad \beta^2 = C,$$

т. е. если

$$AC - B^2 = 0,$$

откуда

$$\alpha = \sqrt{A}, \quad \beta = B : \sqrt{A} = \sqrt{C}.$$

Итакъ, условіе, необходимое и достаточное для того, чтобы функція второй степени $f(x, y)$ разлагалась на два линейныхъ множителя, выражается равенствомъ:

$$(c'^2 - ab)(a'^2 - bc) - (a'c' - bb')^2 = 0.$$

Если развернуть это выраженіе и отбросить множителя b, то получится:

$$abc - aa'^2 - bb'^2 - cc'^2 + 2a'b'c' = 0, \tag{2}$$

или въ формѣ опредѣлителя (§ 44):

$$\begin{vmatrix} a, & c', & b' \\ c', & b, & a' \\ b', & a', & c \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Выраженіе, составляющее лѣвую часть этого равенства, называется **опредѣлителемъ функціи** $f(x, y)$.

2. Мы предполагали b отличнымъ отъ нуля. Если $b = 0$, то разрѣшая уравненіе (1) относительно y вмѣсто x, придемъ къ тому же результату [14]). Если коэффиціенты a и b оба равны нулю, то c' не можетъ равняться нулю, если только $f(x, y)$ не есть линейная функція. Если при этомъ функція

$$c + 2a'y + 2b'x + 2c'xy$$

---

[14]) Если $b = 0$, то уравненіе (1) будетъ первой степени относительно y; вмѣстѣ съ тѣмъ переходъ къ равенству (2) былъ бы въ этомъ случаѣ неправиленъ, такъ какъ множителя b нельзя было бы удалить. Но какъ указано въ текстѣ, мы все же можемъ придти къ тому же результату, рѣшая уравненіе относительно x. Однако, въ этомъ случаѣ придется опустить множителя a. Поэтому нужно еще разсмотрѣть отдѣльно тотъ случай, когда и $a = 0$. Это авторъ и дѣлаетъ въ текстѣ.

разлагается на два линейныхъ множителя, то она должна имѣть видъ:

$$2c'(x+m)(y+n),$$

откуда

$$c'n=b', \quad c'm=a', \quad 2c'mn=c;$$

а такъ какъ c' не нуль, то

$$2a'b'-cc'=0.$$

Къ этому сводится равенство (2), если въ немъ положить $a=b=0$.

Если, наконецъ, a, b и c' равны нулю, то равенство (2) обращается въ тождество.

Слѣдовательно, равенство (2) выражаетъ условіе, необходимое и достаточное для того, чтобы функція $f(x, y)$ либо была линейной, либо разлагалась на два линейныхъ множителя.

3. Положимъ теперь, что значенія двухъ неизвѣстныхъ x и y должны быть опредѣлены изъ двухъ уравненій второй степени:

$$f(x, y)=ax^2+by^2+c+2a'y+2b'x+2c'xy=0,$$
$$\varphi(x, y)=\alpha x^2+\beta y^2+\gamma+2\alpha'y+2\beta'x+2\gamma'xy=0.$$

Въ частномъ случаѣ, если обѣ функціи f и φ разлагаются на линейныхъ множителей

$$f=f_1f_2, \quad \varphi=\varphi_1\varphi_2,$$

рѣшенія получаются изъ четырехъ паръ линейныхъ уравненій:

$$\begin{aligned}
&1)\quad f_1=0, \quad \varphi_1=0;\\
&2)\quad f_1=0, \quad \varphi_2=0;\\
&3)\quad f_2=0, \quad \varphi_1=0;\\
&4)\quad f_2=0, \quad \varphi_2=0.
\end{aligned}$$

Общій случай приводится къ этому частному случаю; приходится только разрѣшить предварительно нѣкоторое уравненіе третьей степени.

Чтобы это показать, составимъ функцію

$$F=f+\lambda\varphi,$$

гдѣ λ означаетъ произвольный коэффиціентъ. Функція второй степени F обращается въ нуль для всѣхъ тѣхъ паръ значеній x и y, для которыхъ одновременно обращаются въ нуль функціи f и φ.

Полагая детерминантъ (3) функціи F равнымъ нулю, мы получимъ кубическое уравненіе относительно λ:

$$\begin{vmatrix} a+\lambda\alpha, & c'+\lambda\gamma', & b'+\lambda\beta' \\ c'+\lambda\gamma', & b+\lambda\beta, & a'+\lambda\alpha' \\ b'+\lambda\beta', & a'+\lambda\alpha', & c+\lambda\gamma \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Слѣдовательно, можно троякимъ образомъ опредѣлить λ такъ, чтобы функція F разлагалась на линейныхъ множителей. Если λ_1 и λ_2 суть два различныхъ корня этого кубическаго уравненія, то обѣ функціи

$$F_1 = f + \lambda_1\varphi, \quad F_2 = f + \lambda_2\varphi$$

разлагаются на линейныхъ множителей [15].

Этимъ путемъ мы сразу приходимъ къ кубической резольвентѣ, не прибѣгая къ вычисленію коэффиціентовъ уравненія четвертой степени, которое получается исключеніемъ y или x изъ системы $f=0$ и $\varphi=0$. *

4. Уравненіе четвертой степени можно самыми разнообразными способами замѣнить двумя квадратными уравненіями съ двумя неизвѣстными. Эта замѣна даетъ возможность рѣшить уравненіе четвертой степени изложеннымъ сейчасъ методомъ. Наиболѣе простой путь слѣдующій.

Пусть дано уравненіе четвертой степени:

$$x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0. \tag{5}$$

Положимъ

$$xy - 1 = 0 \text{ [16]}; \tag{6}$$

помножая уравненіе (5) на y^2, получимъ:

$$x^2 + a_1x + a_2 + a_3y + a_4y^2 = 0. \tag{7}$$

Кубическая резольвента относительно λ [17]) имѣетъ видъ:

$$\begin{vmatrix} 1, & \frac{1}{2}\lambda, & \frac{1}{2}a_1 \\ \frac{1}{2}\lambda, & a_4, & \frac{1}{2}a_3 \\ \frac{1}{2}a_1, & \frac{1}{2}a_3, & a_2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

---

[15]) Мы найдемъ, слѣдовательно, системы значеній x и y, которыя обращаютъ въ нуль функціи F_1 и F_2; тѣ же значенія обращаютъ въ нуль функціи f и φ — и обратно.

[16]) Т. е. присоединимъ къ уравненію (5) еще уравненіе (6). Затѣмъ уравненіе (5) замѣняется уравненіемъ (7), и мы получаемъ два уравненія (6) и (7) второй степени.

[17]) Для уравненій (6) и (7).

или въ развернутомъ видѣ:

$$\lambda^3 - \lambda^2 a_2 + \lambda(a_1 a_3 - 4a_4) + 4a_2 a_4 - a_1{}^2 a_4 - a_3{}^2 = 0;$$

это уравненіе совпадаетъ съ резольвентой для y, найденной въ п. 6 § 98-го.

5. Чтобы сообщить наглядность полученнымъ результатамъ, посмотримъ, какое значеніе они имѣютъ въ аналитической геометріи. Если x и y суть прямоугольныя координаты, то уравненіе второй степени $f(x, y) = 0$ выражаетъ коническое сѣченіе. Два коническихъ сѣченія $f = 0$ и $\varphi = 0$ пересѣкаются въ четырехъ точкахъ. Черезъ эти четыре точки 1, 2, 3, 4 можно тремя способами провести двѣ прямыя, а именно: $\overline{12}$, $\overline{34}$; $\overline{13}$, $\overline{24}$; $\overline{14}$, $\overline{23}$; зная уравненія этихъ паръ линій, мы опредѣлили бы четыре точки пересѣченія 1, 2, 3, 4 изъ линейныхъ уравненій.

Каждое коническое сѣченіе, выражаемое уравненіемъ вида $f + \lambda\varphi = 0$, проходитъ черезъ точки пересѣченія обоихъ коническихъ сѣченій $f = 0$ и $\varphi = 0$. Если λ можетъ принимать различныя произвольныя значенія, то совокупность всѣхъ коническихъ сѣченій, выражаемыхъ уравненіемъ $f + \lambda\varphi = 0$, называется пучкомъ коническихъ сѣченій. Въ каждомъ такомъ пучкѣ содержатся три особыхъ коническихъ сѣченія, которыя состоятъ каждое изъ двухъ пересѣкающихся прямыхъ линій; соотвѣтствующія значенія λ получаются, какъ корни кубическаго уравненія (4). Подробнѣе этотъ вопросъ разсматривается во II-омъ томѣ въ главѣ, посвященной аналитической геометріи.

ГЛАВА XVII.

Приближенное вычисленіе корней численныхъ уравненій.

§ 100. Декартово правило знаковъ.

1. Вопросъ объ алгебраическомъ рѣшеніи уравненій имѣетъ очень мало значенія для практическихъ вычисленій. Для этой цѣли нужно только умѣть по даннымъ численнымъ коэффиціентамъ уравненія вычислить его корни съ опредѣленнымъ числомъ десятичныхъ знаковъ; иначе говоря, нужно найти два раціональныхъ числа, разность которыхъ не превышаетъ нѣкоторой данной величины и между которыми лежитъ опредѣляемый корень. Эта задача всегда разрѣшима; мало того, для этого существуютъ такіе простые и практическіе способы, что нерѣдко предпочитаютъ пользоваться ими даже для уравненій третьей и четвертой степени, чѣмъ вычислять алгебраическое выраженіе корня, напримѣръ, по формулѣ Кардана.

2. Если коэффиціентами даннаго уравненія служатъ раціональныя числа, то прежде всего, по способу, указанному въ п. 1 § 68-го, нужно посмотрѣть, не имѣетъ ли оно раціональныхъ корней; если a есть такой корень, то, раздѣляя $f(x)$ на $x-a$, получаемъ уже уравненіе низшей степени. Чтобы возможно болѣе упростить вычисленіе корней, слѣдуетъ предварительно на всякій случай попробовать разложить функцію $f(x)$ на множителей низшихъ степеней (§ 68).

3. Если α и β суть два такихъ числа, что $f(\alpha)$ и $f(\beta)$ имѣютъ различные знаки, то между α и β навѣрное заключается, по крайней мѣрѣ, одинъ корень; въ самомъ дѣлѣ, если x проходитъ черезъ всѣ значенія отъ α до β, то $f(x)$ переходитъ отъ отрицательныхъ значеній къ положительнымъ; при этомъ функція $f(x)$ должна (§ 72, 5) пройти также черезъ значеніе нуль. Можетъ случиться, что $f(x)$ пройдетъ черезъ нуль три раза, пять разъ и вообщее нечетное число разъ; въ этомъ случаѣ между α и β будутъ находиться три, пять и т. д. корней [1]).

При этомъ нужно имѣть въ виду, что тѣ значенія x, при которыхъ $f(x)$ обращается въ нуль, не мѣняя своего знака, нужно считать два или, вообще, четное число разъ [2]).

4. Прежде всего, однако, возникаетъ вопросъ, сколько вообще корней [3]) имѣетъ данное уравненіе и, въ частности, сколько оно имѣетъ положительныхъ и сколько отрицательныхъ корней. Прежде, чѣмъ этотъ вопросъ былъ окончательно и вполнѣ рѣшенъ теоремой Штурма, было установлено нѣсколько предложеній, не дававшихъ, правда, общаго и вполнѣ точнаго отвѣта на этотъ вопросъ, но все же очень полезныхъ благодаря своей простотѣ. Наиболѣе простымъ и наиболѣе извѣстнымъ изъ этихъ предложеній является Декартово правило знаковъ. Въ формулировкѣ и доказательствѣ этого предложенія мы будемъ слѣдовать Гауссу *).

---

[1]) Изъ разсужденій автора вытекаетъ только, что функія $f(x)$ должна обращаться въ нуль между α и β, если $f(\alpha)$ и $f(\beta)$ имѣютъ противоположные знаки. Но допустимъ, что между α и β функція обращается въ нуль только при $x=\gamma$. Можемъ ли мы утверждать, что γ есть корень нечетной кратности? Можемъ ли мы утверждать, что между α и β есть нечетное число корней, если каждый корень считать по степени его кратности? Это изъ разсужденій автора не вытекаетъ, хотя доказывается очень просто.

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ будутъ корни функціи $f(x)$. Тогда

$$f(x)=a(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n),$$

$$\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}=\left(\frac{\alpha-a_1}{\beta-a_1}\right)\left(\frac{\alpha-a_2}{\beta-a_2}\right)\cdots\left(\frac{\alpha-a_n}{\beta-a_n}\right).$$

Если $f(\alpha)$ и $f(\beta)$ имѣютъ различные знаки, то $\dfrac{f(\alpha)}{f(\beta)}$ есть отрицательная дробь, а потому въ правой части предыдущаго равенства должно быть нечетное число отрицательныхъ множителей вида

$$\frac{\alpha-a_i}{\beta-a_i}.$$

Но такая дробь имѣетъ отрицательное значеніе только въ томъ случаѣ, если a_i содержится между α и β. Слѣдовательно, между α и β заключается нечетное число корней a_i.

[2]) Точнѣе говоря, если функція $f(x)$ проходитъ черезъ корень γ, не мѣняя при этомъ знака, то γ есть корень четной кратности. Это доказывается точно такъ же, какъ предыдущее предложеніе въ примѣчаніи 1.

[3]) Конечно, вещественныхъ.

*) Указаніе на это предложеніе имѣется уже у Кардана; ясно же и опредѣленно оно формулировано впервые въ „Géométrie“ Декарта (1637). Джонъ

5. Пусть X будетъ полиномъ m-ой степени, въ которомъ коэффиціентъ при x^m равенъ 1, а свободный членъ не равенъ нулю, такъ что 0 не принадлежитъ къ числу корней этого полинома. Если мы расположимъ полиномъ X по убывающимъ степенямъ перемѣннаго x, то онъ будетъ начинаться съ коэффиціента $+1$. Вопросъ сводится къ тому, сколько разъ происходитъ перемѣна знака при коэффиціентахъ, когда мы переходимъ отъ перваго члена полинома X къ послѣднему; недостающіе степени при этомъ не проставляются съ коэффиціентами 0, а просто опускаются.

Положимъ теперь, что въ нашемъ полиномѣ первый отрицательный членъ есть $-Nx^n$, которому предшествуетъ членъ $+N'x^{n'}$; пусть, далѣе, $+Px^p$ будетъ ближайшій за нимъ положительный членъ, которому предшествуетъ отрицательный членъ $-P'x^{p'}$, и т. д.; наконецъ, пусть $\pm Sx^s$ будетъ членъ, при которомъ въ послѣдній разъ происходитъ перемѣна знака и которому, такимъ образомъ, предшествуетъ членъ $\mp S'x^{s'}$. Знакъ $\pm$ сохраняется уже, слѣдовательно, до конца, т. е. вплоть до свободнаго члена $\pm T$.

Сообразно этому мы представимъ полиномъ X въ видѣ:

$$\begin{aligned} X = \quad & x^m + \cdots + N'x^{n'} - \\ & - Nx^n - \cdots - P'x^{p'} + \\ & + Px^p + \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ & .\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \mp S'x^{s'} \pm \\ & \pm Sx^s \pm \cdots \pm T. \end{aligned} \tag{1}$$

Первая строка содержитъ положительные члены, вторая — отрицательные, третья — опять положительные и т. д.; такимъ образомъ, число строкъ на 1 больше, нежели число перемѣнъ знака при коэффиціентахъ полинома X, которое мы обозначимъ черезъ w.

6. Съ помощью выраженія (1) мы составимъ теперь произведеніе

$$X_1 = X(x - \alpha), \tag{2}$$

Валлисъ (John Wallis) въ своемъ „Treatise of Algebra" (1685) приписываетъ открытіе этого предложенія Ѳомѣ Гарріоту (Thomas Harriot жилъ въ Оксфордѣ 1560 — 1621); Канторъ полагаетъ, однако, что это неправильно („Geschichte der Mathematik", Bd. III, S. 4). Тѣмъ не менѣе это предложеніе и теперь еще часто называютъ теоремой Гарріота. Ср. Gauss, „Beweis eines algebraischen Lehrsatzes", Werke, Bd. III, S. 67.

гдѣ a представляетъ собой произвольное положительное число; мы получимъ слѣдующее выраженіе $(m+1)$-ой степени:

$$
\begin{aligned}
X_1 = \quad & x^{m+1} + \cdots \\
& - N_1 x^{n+1} - \cdots \\
& + P_1 x^{p+1} + \cdots \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots \\
& \pm S_1 x^{s+1} \pm \cdots \\
& \mp T_1 .
\end{aligned} \tag{3}
$$

Если n' больше, чѣмъ $n+1$, то въ этомъ выраженіи $N_1 = N$; если же $n' = n+1$, то $N_1 = N + aN'$; поэтому N_1, во всякомъ случаѣ, представляетъ собой положительное число. На томъ же основаніи $P_1, \ldots, S_1, T_1 = aT$ суть также числа положительныя.

Какъ измѣняются знаки въ каждой изъ строкъ (3), указать нельзя. Но, во всякомъ случаѣ, при переходѣ отъ x^{m+1} къ $-N_1 x^{n+1}$ знакъ мѣняется одинъ или нѣсколько разъ и при томъ непремѣнно нечетное число разъ [4]).

То же самое относится также къ переходу отъ $-N_1 x^{n+1}$ къ $+P_1 x^{p+1}$ и т. д. и, наконецъ, къ переходу отъ $\pm S_1 x^{s+1}$ къ $\mp T_1$.

Такимъ образомъ, число перемѣнъ w_1 въ полиномѣ X_1 превышаетъ число перемѣнъ w въ полиномѣ X, по крайней мѣрѣ, на единицу и, во всякомъ случаѣ, на нечетное число [5]); слѣдовательно,

$$
w_1 = w + 1 + g, \tag{4}
$$

гдѣ g есть четное неотрицательное число (т. е. $g \geqq 0$).

7. Если функція X не имѣетъ положительныхъ корней, то въ ряду ея коэффиціентовъ либо вовсе нѣтъ перемѣнъ, либо таковыхъ имѣется четное число. Въ самомъ дѣлѣ, при нечетномъ числѣ перемѣнъ послѣдній членъ $\pm T$ имѣетъ отрицательное значеніе, а потому функція при $x = 0$ имѣетъ отрицательное значеніе; между тѣмъ, при достаточно большихъ значеніяхъ x, функція имѣетъ значенія того же знака, что и x^m, т. е. положительныя. Слѣдовательно, при такихъ условіяхъ функція имѣла бы, по крайней мѣрѣ, одинъ положительный корень.

8. Выдѣлимъ теперь всѣ положительные корни функціи $f(x)$; пусть это будутъ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Тогда

$$
f(x) = X(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \ldots, \tag{5}
$$

---

[4]) Ибо послѣ четнаго числа перемѣнъ мы возвратились бы къ тому же знаку $+$, а не къ обратному.

[5]) Нужно принять во вниманіе, что число строкъ (3) на 1 больше числа строкъ (1).

гдѣ X есть цѣлая функція, имѣющая только отрицательные или мнимые корни; если функція $f(x)$ имѣетъ исключительно положительные корни, то X сводится къ 1.

Согласно тому, что было изложено въ п. 6-омъ, введеніе каждаго имъ множителей $x-\alpha$, $x-\beta$, $x-\gamma$, ... прибавляетъ къ числу перемѣнъ, имѣющихся въ функціи X, еще одну или, во всякомъ случаѣ, нечетное число ихъ. Принимая же во вниманіе, что въ полиномѣ X, какъ показано въ п. 7-мъ, имѣется четное число перемѣнъ, мы приходимъ къ слѣдующему выводу:

Число положительныхъ корней цѣлой функціи $f(x)$ либо равно числу перемѣнъ въ ряду ея коэффиціентовъ, либо меньше послѣдняго на четное число.

9. Каждому отрицательному корню функціи $f(x)$ отвѣчаетъ положительный корень функцій $f(-x)$; сообразно этому мы можемъ дополнить это предложеніе слѣдующимъ образомъ:

Число отрицательныхъ корней функціи $f(x)$ либо равняется числу перемѣнъ въ ряду коэффиціентовъ функціи $f(-x)$, либо меньше его на четное число.

10. Мы примѣнимъ правило Декарта къ изслѣдованію уравненія 4-ой степени. Пусть

$$f(x)=x^4+ax^2+bx+c,$$
$$f(-x)=x^4+ax^2-bx+c.$$

Коэффиціенты a, b и c мы будемъ считать отличными отъ нуля. Въ такомъ случаѣ относительно знаковъ при коэффиціентахъ функцій $f(x)$ и $f(-x)$ вазможны 8 различныхъ комбинацій:

	$f(x)$				w	$f(-x)$				w
1)	+	+	+	+	0	+	+	−	+	2
2)	+	+	−	+	2	+	+	+	+	0
3)	+	−	+	+	2	+	−	−	+	2
4)	+	−	−	+	2	+	−	+	+	2
5)	+	+	+	−	1	+	+	−	−	1
6)	+	+	−	−	1	+	+	+	−	1
7)	+	−	+	−	3	+	−	−	−	1
8)	+	−	−	−	1	+	−	+	−	3

Въ колоннахъ, помѣченныхъ буквою w, указано число перемѣнъ соотвѣтствующаго ряда.

Если мы присоединимъ къ этому результатъ, полученный въ § 97, что уравненіе при отрицательномъ дискриминантѣ D имѣетъ два вещественныхъ и два мнимыхъ корня, а при положительномъ дискриминантѣ имѣетъ либо 4 вещественныхъ, либо 4 мнимыхъ корня, то правило Декарта (п. п. 8 и 9) приводитъ въ указанныхъ 8 случаяхъ къ слѣдующимъ выводамъ:

1) $D > 0$: 4 мнимыхъ корня.
   $D < 0$: 2 мнимыхъ и 2 вещественныхъ отрицательныхъ корня.
2) $D > 0$: 4 мнимыхъ корня.
   $D < 0$: 2 мнимыхъ и 2 вещественныхъ положительныхъ корня.

Въ случаяхъ 3) и 4) знаки дискриминанта и коэффиціентовъ еще не разрѣшаютъ вопроса; въ этомъ случаѣ какъ число положительныхъ, такъ и число отрицательныхъ корней можетъ быть равно либо 2, либо 0.

Въ случаяхъ 5) и 6) мы имѣемъ 1 положительный и 1 отрицательный корень и, стало-быть, два мнимыхъ корня; дискриминантъ необходимо долженъ имѣть въ этихъ случаяхъ отрицательное значеніе, какъ это, впрочемъ, вытекаетъ и непосредственно изъ выраженія, приведеннаго въ п. 2 § 97-го.

Въ случаѣ 7) мы имѣемъ 1 отрицательный корень и либо 3, либо 1 положительный, смотря по тому, имѣетъ ли дискриминантъ положительное или отрицательное значеніе. Наконецъ, въ случаѣ 8) мы имѣемъ 1 положительный корень и либо 3, либо 1 отрицательный.

§ 101. Теорема Штурма.

1. Научнымъ основаніемъ всякаго метода приближеннаго рѣшенія алгебраическихъ уравненій служитъ теорема Штурма. Эта теорема даетъ возможность точно указать, сколько корней данной функціи $f(x)$ n-той степени заключается между двумя данными предѣлами. Эта теорема, основная мысль которой очень проста, вытекаетъ изъ непрерывности цѣлой функціи; такая функція при непрерывномъ измѣненіи перемѣннаго x не можетъ перейти отъ положительныхъ значеній къ отрицательнымъ, не проходя при этомъ черезъ нуль.

2. Если x_1 есть корень функціи $f(x)$, то $f(x)$ дѣлится на $x - x_1$. Если мы положимъ

$$f(x) = (x - x_1) F(x), \tag{1}$$

а черезъ $f_1(x)$ обозначимъ производную функціи $f(x)$, то, по п. 4 § 66-го,

$$F(x_1) = f_1(x_1).$$

Предположимъ, что функціи $f(x)$ и $f_1(x)$ не имѣютъ общихъ корней, или что функція $f(x)$ заранѣе освобождена отъ множителей, входящихъ также въ составъ функціи $f_1(x)$ (§ 67). Тогда $f_1(x_1)$, а, слѣдовательно, и $F(x_1)$, отлично отъ нуля и можетъ имѣть либо положительное, либо отрицательное значеніе. Вмѣстѣ съ тѣмъ функція $F(x)$ не мѣняетъ знака, по крайней мѣрѣ, до тѣхъ поръ, пока x достаточно близко къ x_1.

Изъ равенства (1) слѣдуетъ:

Если $f_1(x_1)$ имѣетъ положительное значеніе и x проходитъ черезъ значеніе x_1 возрастая, то $f(x)$ проходитъ черезъ нуль также возрастая, т. е. переходитъ отъ отрицательныхъ значеній къ положительнымъ.

Если $f_1(x_1)$ имѣетъ отрицательное значеніе, то $f(x)$ переходитъ отъ положительныхъ значеній къ отрицательнымъ.

Тотъ и другой случай можно соединить въ одно предложеніе:

Если x, возрастая, переходитъ черезъ корень x_1 функціи $f(x)$, то функціи

$$f(x) \text{ и } f_1(x)$$

переходятъ отъ различныхъ знаковъ къ одинаковымъ [6]).

3. Произведемъ теперь рядъ дѣленій, какъ это дѣлается при нахожденіи общаго наибольшаго дѣлителя двухъ функцій $f(x)$ и $f_1(x)$ (§ 67). Разница будетъ заключаться только въ обозначеніяхъ, а именно: каждый остатокъ мы будемъ соотвѣтственно обозначать черезъ $-f_2$, $-f_3$, . . . [7]). Пусть Q, Q_1, Q_2, . . . будутъ частныя; тогда:

$$\left.\begin{aligned} f &= Q f_1 - f_2, \\ f_1 &= Q_1 f_2 - f_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{m-2} &= Q_{m-2} f_{m-1} - f_m. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Степени функцій f_1, f_2, . . . постоянно понижаются. Мы продолжимъ нашъ алгориѳмъ до тѣхъ поръ, пока не получимъ функцію f_m, уже не зависящую отъ x. Такъ какъ, по предположенію, f и f_1 не имѣютъ об-

---

[6]) Это значитъ, что вблизи x_1 функціи $f(x)$ и $f_1(x)$ имѣютъ сначала различные знаки, а потомъ одинаковые. Или еще иначе: функція $f(x)$ имѣетъ вблизи корня x_1 послѣ уничтоженія тотъ же знакъ, что и ея производная, а до уничтоженія — противоположный знакъ.

[7]) Иначе говоря, раздѣливъ $f(x)$ на $f_1(x)$, мы получимъ нѣкоторый остатокъ; при этомъ остаткѣ мы перемѣнимъ знакъ на обратный и функцію, полученную послѣ перемѣны знака, обозначимъ черезъ $f_2(x)$. Точно такъ же раздѣлимъ $f_1(x)$ на $f_2(x)$ и при остаткѣ перемѣнимъ знакъ; полученную такимъ образомъ функцію обозначимъ черезъ $f_3(x)$ и т. д.

щихъ множителей, то f_m есть постоянная, отличная отъ нуля. Изъ этого предположенія вытекаетъ также, что въ ряду функцій Штурма

$$f, f_1, f_2, f_3, \ldots, f_m \tag{3}$$

два рядомъ стоящихъ члена f_ν, $f_{\nu+1}$ ни при какомъ значеніи x одновременно не могутъ обратиться въ нуль. Дѣйствительно, для такого значенія x должны были бы обратиться въ нуль одновременно функціи f и f_1, что противно условію [8]).

4. Взявъ значенія членовъ ряда (3) для какого-нибудь значенія перемѣннаго x, мы получимъ рядъ чиселъ; въ этомъ ряду мы будемъ называть перемѣной знака тотъ случай, когда два рядомъ стоящихъ члена f_ν и $f_{\nu+1}$ имѣютъ различные знаки, и постоянствомъ знаковъ — тотъ случай, когда два рядомъ стоящихъ члена имѣютъ одинаковые знаки.

Для каждаго такого значенія x, для котораго ни одна изъ функцій (3) не обращается въ нуль, мы получимъ опредѣленное число перемѣнъ. Сообразно этому теорема Штурма выражается такъ:

Если α и β суть два значенія x и $\alpha < \beta$, то число корней функціи $f(x)$, содержащихся между α и β, равно числу перемѣнъ въ ряду Штурма (3), которыя теряются при переходѣ отъ $x = \alpha$ къ $x = \beta$ [9]).

5. Доказательство этой теоремы очень просто. Потеря перемѣнъ или появленіе новыхъ перемѣнъ въ ряду Штурма можетъ имѣть мѣсто только въ томъ случаѣ, если одна изъ функцій проходитъ черезъ нуль. Но если $0 < \nu < m$ и если $f_\nu(x_0) = 0$, то въ виду соотношеній (2) $f_{\nu-1}(x_0) = -f_{\nu+1}(x_0)$, т. е. $f_{\nu-1}$ и $f_{\nu+1}$ при $x = x_0$ и вблизи этого зна-

---

[8]) Если, напримѣръ, числа $f_4(x_1)$ и $f_3(x_1)$ равны нулю, то третье равенство въ ряду (2) обнаруживаетъ, что и $f_2(x) = 0$, а два предыдущихъ равенства обнаруживаютъ, что $f_1(x_1) = 0$ и $f(x_1) = 0$.

[9]) Выяснимъ нѣсколько подробнѣе содержаніе этой теоремы. Составимъ ряды

$$f(\alpha),\ f_1(\alpha),\ f_2(\alpha),\ \ldots,\ f_m(\alpha),$$

$$f(\beta),\ f_1(\beta),\ f_2(\beta),\ \ldots,\ f_m(\beta).$$

Если $\alpha < \beta$, то теорема утверждаетъ, что число перемѣнъ въ первомъ ряду ни въ какомъ случаѣ не можетъ быть меньше, нежели во второмъ. Если въ обоихъ рядахъ одинаковое число перемѣнъ, то функція $f(x)$ не имѣетъ корней въ интервалѣ между α и β. Если же число перемѣнъ въ первомъ ряду превышаетъ число перемѣнъ во второмъ ряду, т. е. если при переходѣ отъ α къ β теряется нѣкоторое число перемѣнъ, то число корней функціи $f(x)$, содержащихся между α и β, равно числу потерянныхъ перемѣнъ.

ченія имѣютъ противоположные знаки. Въ ряду трехъ послѣдовательныхъ функцій

$$f_{\nu-1}(x),\quad f_\nu(x),\quad f_{\nu+1}(x)$$

какъ до, такъ и послѣ перехода черезъ x_0 будетъ одна перемѣна, и, слѣдовательно, при переходѣ черезъ нуль функціи $f_\nu(x)$ не произойдетъ ни потери перемѣнъ, ни появленія новыхъ перемѣнъ.

Такъ какъ f_m вообще не равно нулю, то измѣненіе въ числѣ перемѣнъ можетъ произойти только въ томъ случаѣ, если x проходитъ черезъ корень функціи $f(x)$. Въ п. 2 мы уже показали, что въ послѣднемъ случаѣ всякій разъ происходитъ потеря одной перемѣны. Теорема доказана.

6. Вычисленія, которыя необходимо сдѣлать, примѣняя теорему Штурма, часто можно упростить, руководствуясь слѣдующими замѣчаніями.

При составленіи послѣдовательныхъ функцій $f, f_1, f_2, \ldots$ можно отбрасывать положительныхъ численныхъ множителей, такъ какъ это не вліяетъ на знаки и всѣ наши разсужденія остаются въ силѣ.

Если при дѣленіи мы придемъ къ функціи f_m, относительно которой мы знаемъ, что она, не будучи постоянной, все-таки не мѣняетъ знака при переходѣ x отъ α до β, то мы можемъ не продолжать вычисленій, такъ какъ мы опирались только на то свойство функціи f_m, что она не мѣняетъ знака въ изслѣдуемомъ интервалѣ.

7. Примѣръ 1. Составимъ рядъ Штурма для функціи

$$f(x) = x^3 - 6x + 2.$$

Отбрасывая положительныхъ численныхъ множителей, мы получимъ:

$$f_1(x) = x^2 - 2,$$
$$f_2(x) = 2x - 1,$$
$$f_3(x) = 1;$$

знаки будутъ слѣдующіе:

$x =$	-3,	-2,	-1,	0,	1,	2,	3
$x^3 - 6x + 2$:	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
$x^2 - 2$:	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$2x - 1$:	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$+1$:	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

Для $x = -3$ имѣемъ три перемѣны, а для $x = +3$ — ни одной; слѣдовательно, между этими предѣлами заключены всѣ три корня.

Одна перемѣна теряется между -3 и -2; слѣдовательно, одинъ изъ корней заключается между этими предѣлами.

Вторая перемѣна теряется между 0 и 1, а третья между 2 и 3; въ каждомъ изъ этихъ интерваловъ содержится по одному корню.

8. Примѣръ II.

$$f(x) = x^3 - \tfrac{15}{11}x^2 + \tfrac{5}{11}x - \tfrac{5}{231},$$
$$f_1(x) = x^2 - \tfrac{10}{11}x + \tfrac{5}{33},$$
$$f_2(x) = x - \tfrac{3}{7},$$
$$f_3(x) = 1.$$

Для $x = 0$ имѣемъ знаки:

$$- \quad + \quad - \quad +,$$

т. е. три перемѣны, а для $x = 1$:

$$+ \quad + \quad + \quad +;$$

слѣдовательно, всѣ корни содержатся между 0 и 1.

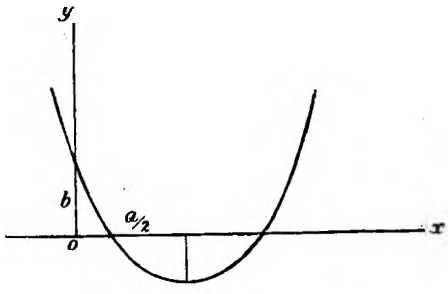
9. Для практическихъ цѣлей можно не примѣнять теоремы Штурма, если можно убѣдиться другимъ путемъ въ томъ, что между двумя данными предѣлами заключается только одинъ корень. Такъ, напримѣръ, это имѣетъ мѣсто, если извѣстно число всѣхъ вещественныхъ корней и имѣется такое же число интерваловъ, въ каждомъ изъ которыхъ навѣрно содержится, по крайней мѣрѣ, одинъ корень.

§ 102. Regula falsi.

1. Дадимъ функціи $f(x)$ геометрическое значеніе и сдѣлаемъ такимъ образомъ нагляднымъ расположеніе ея корней.

Для этого условимся изображать значенія x отрѣзками на прямой линіи, выбравъ произвольное начало и единицу длины; значенія $y = f(x)$ будемъ подобнымъ же образомъ откладывать на перпендикулярѣ, возставленномъ въ конечной точкѣ отрѣзка x. Единица длины, въ которой выражается y, совершенно произвольна и, если угодно, можетъ быть отлична отъ единицы, взятой для x. Положительныя значенія y будемъ откладывать вверхъ, а отрицательныя внизъ. Значенія x будутъ служить абсциссами, а значенія y — ординатами точекъ кривой, которую получимъ, соединяя конечныя точки перпендикуляровъ между собой. Корнями уравненія $f(x) = 0$ будутъ абсциссы тѣхъ точекъ, въ которыхъ $y = 0$, т. е. точекъ пересѣченія кривой съ осью абсциссъ.

Пусть, напримѣръ, $f(x) = x^2 + ax + b$; наша кривая будетъ параболой съ вершиной, обращенной внизъ (фиг. 16); $f(x)$ имѣетъ два ве-



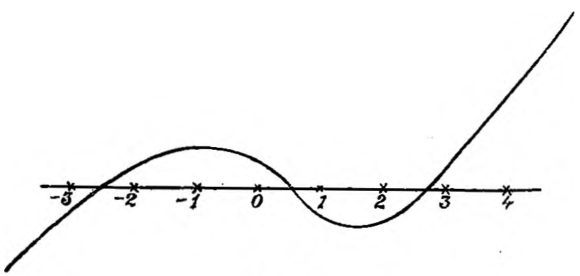
Фиг. 16.

щественныхъ корня, если вершина лежитъ ниже оси абсциссъ, и два мнимыхъ, если она расположена выше ея.

Разобранный выше примѣръ

$$y = x^3 - 6x + 2$$

воспроизводится приблизительно фигурой 17:

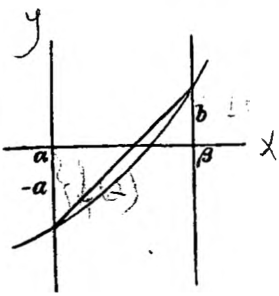


Фиг. 17.

2. Если между двумя числами α и β $(\alpha < \beta)$ содержится одинъ корень функціи $f(x)$, то $f(\alpha)$ и $f(\beta)$ должны быть различны по знаку; пусть $f(\alpha) = -a$ имѣетъ отрицательное значеніе, а $f(\beta) = b$ — положительное. Эти числа α и β можно считать первыми приближенными значеніями содержащагося между ними корня; каждому изъ этихъ значеній отвѣчаетъ опредѣленная погрѣшность.

Если, напримѣръ, α и β суть два послѣдовательныхъ цѣлыхъ числа, а корень выражается десятичной дробью, то α есть число, стоящее передъ запятой.

Если ξ есть погрѣшность, соотвѣтствующая приближенному значенію α, то $\alpha + \xi = x$ есть искомый корень функціи; съ другой стороны, $x = \beta - (\beta - \alpha - \xi) = \beta - \eta$, т. е. погрѣшность η, соотвѣтствующая значенію β, равна $(\beta - \alpha - \xi)$; если при этомъ α меньше корня, то β больше его. Для дальнѣйшаго приближенія къ корню обыкновенно принимаютъ сначала, что погрѣшность значенія α больше погрѣшности значенія β, если $f(\alpha)$ больше отличается отъ нуля, чѣмъ $f(\beta)$, и что приблизительно обѣ погрѣшности можно считать пропорціональными абсолютнымъ величинамъ $f(\alpha)$ и $f(\beta)$. Геометрически это соотвѣтствуетъ предположенію, что отрѣзокъ кривой, изображающей $f(x)$, между точками $f(\alpha)$ и $f(\beta)$ есть прямолинейный отрѣзокъ (фиг. 18).



Фиг. 18.

Въ этомъ предположеніи:

$$\xi : (\beta - \alpha - \xi) = a : b,$$

$$b\xi = a(\beta - \alpha) - a\xi,$$

$$\xi = \frac{a(\beta - \alpha)}{a + b}, \qquad (1)$$

т. е.

$$x = \alpha + \xi = \frac{\alpha b + \beta a}{a + b}. \qquad (2)$$

Это равенство, конечно, неточно, но оно даетъ для x значеніе, болѣе близкое къ истинному, чѣмъ α и β.

Если $\beta - \alpha = 1$, то

$$\xi = \frac{a}{a + b}. \qquad (3)$$

это выраженіе даетъ одинъ или, смотря по обстоятельствамъ, нѣсколько точныхъ десятичныхъ знаковъ послѣ запятой. Приближенное вычисленіе, основанное на формулахъ (1) или (3), называется Regula falsi.

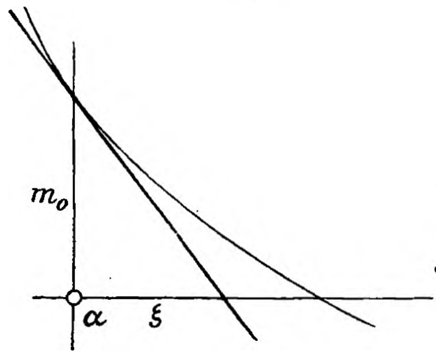
3. Если α есть приближенное значеніе корня, вычисленное съ достаточной степенью точности, то его можно исправить далѣе еще другимъ способомъ. Положимъ $x = \alpha + \xi$ и, прилагая къ отдѣльнымъ степенямъ $\alpha + \xi$ правило бинома, расположимъ $f(\alpha + \xi)$ по степенямъ ξ:

$$f(\alpha + \xi) = m_0 + m_1\xi + m_2\xi^2 + m_3\xi^3 + \cdots \qquad (4)$$

Число ξ нужно опредѣлить такъ, чтобы это выраженіе стало равнымъ 0. Сначала можетъ показаться, что этотъ пріемъ нисколько не упрощаетъ задачи, такъ какъ для ξ мы получаемъ уравненіе той же степени, что и первоначальное. Но когда a уже близко къ дѣйствительному значенію корня, то ξ есть малая дробь, и высшія степени ея для слѣдующаго приближенія можно отбросить, если коэффиціенты m_2, m_3, ... не очень велики. Для погрѣшности, соотвѣтствующей значенію a, мы получаемъ:

$$\xi = -\frac{m_0}{m_1}. \tag{5}$$

Геометрическій смыслъ этого пріема состоитъ въ томъ, что вблизи точки $x = a$, $y = m_0$ мы замѣняемъ кривую, изображающую функцію $f(x)$, касательной къ ней, проведенной въ этой точкѣ (фиг. 19).



Фиг. 19.

Иногда лучше принять въ соображеніе и слѣдующій членъ въ разложеніи (4); тогда ξ опредѣлится изъ квадратнаго уравненія:

$$m_0 + m_1\xi + m_2\xi^2 = 0,$$

откуда

$$\xi = \frac{-m_1 \pm \sqrt{m_1^2 - 4m_0m_2}}{2m_2} \tag{6}$$

Имѣя въ виду, что ξ должно быть малой дробью, нужно взять корень съ тѣмъ знакомъ, какой имѣетъ m_1.

Этотъ способъ данъ Ньютономъ и поэтому называется Ньютоновымъ способомъ вычисленія корней. Тотъ же пріемъ иногда примѣняютъ также и въ томъ случаѣ, если нужно предъ тѣмъ, какъ приступить къ ближайшему вычисленію корней, приблизительно опредѣлить величину большихъ корней; для этого изъ всей функціи $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots$, расположенной по степенямъ x, оставляютъ только два первыхъ высшихъ члена, такъ что, при грубомъ приближеніи, x полагаютъ равнымъ $-a_1/a_0$.

4. На практикѣ нельзя ограничиваться непремѣнно какимъ-либо однимъ изъ этихъ способовъ; смотря по обстоятельствамъ, примѣняютъ то тотъ, то другой. Но рѣшеніе задачи всегда сводится къ тому, что должны быть найдены двѣ десятичныя дроби a и a' съ одинаковымъ числомъ десятичныхъ знаковъ ζ, которыя отличаются только на одну единицу послѣдняго разряда и при которыхъ $f(a)$ и $f(a')$ имѣютъ различные знаки; тогда истинное значеніе корня лежитъ между a и a' и погрѣшность меньше, нежели $10^{-\epsilon}$. Если желательно вычислить дальнѣйшіе знаки, то къ a съ правой стороны приписываютъ цифры отъ 1 до 9 и изъ полученныхъ такимъ образомъ чиселъ вновь выбираютъ два послѣдовательныхъ значенія a_1 и a_1', для которыхъ $f(a_1)$ и $f(a_1')$ имѣютъ разные знаки. Примѣняя цѣлесообразо изложенные способы, можно очень сократить число необходимыхъ дла этого испытаній.

При вычисленіяхъ этого рода очень полезно пользоваться таблицами степеней или логариѳмическими таблицами, если это допускаетъ требуемая точность вычисленій.

§ 103. Примѣръ.

1. Для примѣра возьмемъ уравненіе 5-той степени

$$x^5 - 4x - 2 = 0.$$

Въ данномъ случаѣ

$$f(-2) = -26,\ f(-1) = +1,\ f(0) = -2,\ f(1) = -5,\ f(2) = +22,$$

а, слѣдовательно, корень x_1 находится между 1 и 2, корень x_2 — между -1 и 0, x_3 между -2 и -1, остальные два корня мнимые. Вычислимъ сначала x_1.

Regula falsi (§ 102, (1)) даетъ для ξ значеніе $\frac{5}{27}$, т. е. около 0,2; это значеніе мало, такъ какъ даже $f(1{,}5) = (\frac{3}{2})^5 - 8 = -\frac{13}{32}$ имѣетъ еще отрицательное значеніе; слѣдовательно, ξ больше, чѣмъ 0,5.

Ньютоновъ способъ даетъ лучшій результатъ.

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ $x = 1 + \xi$; тогда:

$$x^5 = \xi^5 + 5\xi^4 + 10\xi^3 + 10\xi^2 + 5\xi + 1,$$

$$x^5 - 4x - 2 = \xi^5 + 5\xi^4 + 10\xi^3 + 10\xi^2 + \xi - 5.$$

Приближенное значеніе ξ мы будемъ находить не по двумъ, а по тремъ послѣднимъ членамъ [10]):

$$10\xi^2 + \xi - 5 = 0,$$

$$\xi = \frac{-1 + \sqrt{201}}{20},\quad \text{т. е. около } 0{,}6.$$

---

[10]) Если бы мы ограничились двумя членами, то получили бы никуда негодное значеніе $\xi = 5$.

Дальнѣйшія вычисленія производятся, какъ показано въ слѣдующей таблицѣ, понятной безъ объясненій.

x	$\log x$	$5 \log x$	x^5	$4x+2$	$f(x)$
1,5	0,1760913	0,8804565	7,593754	8	— 0,406246
1,6	0,2041200	1,0206000	10,485906	8,4	+ 2,085906
1,51	0,1789769	0,8868845	7,707015	8,04	— 0,232985
1,52	0,1818436	0,9092180	8,113682	8,08	+ 0,033682
1,518	0,1812718	0,9063590	8,060444	8,072	— 0,011546
1,519	0,1815578	0,9077890	8,087030	8,076	+ 0,011030
1,5185	0,1814148	0,9070740	8,073726	8,0740	— 0,000274
1,5186	0,1814434	0,9072170	8,076786	8,0744	+ 0,002386
1,51851	0,1814177	0,9070885	8,073996	8,074040	— 0,000034
1,51852	0,1814205	0,9071025	8,074256	8,074080	+ 0,000176
1,518511	0,1814180	0,9070900	8,074024	8,074044	— 0,000020
1,518512	0,1814183	0,9070915	8,074052	8,074048	+ 0,000004

Итакъ, значеніе

$$x_1 = 1,518512$$

очень близко къ истинному значенію корня.

Это значеніе превышаетъ нѣсколько истинное значеніе корня. Обращаясь къ таблицѣ, мы видимъ по соотвѣтствующимъ значеніямъ $f(x)$, что корень лежитъ ближе къ верхнему предѣлу, чѣмъ къ нижнему.

2. Нужно замѣтить, что изъ каждой пары чиселъ два послѣднихъ десятичныхъ знака слѣдующей пары получаются, на основаніи Regula falsi, помощью очень простыхъ вычисленій. Кромѣ того, нужно замѣтить, что въ нашемъ примѣрѣ Regula falsi даетъ всегда нижній предѣлъ, что явствуетъ изъ того, что между 1 и 2 кривая $y = f(x)$ обращена выпуклостью книзу.

Такъ, по значеніямъ 1,5 и 1,6 находимъ (§ 102, (2)):

$$\xi = \frac{0,406\,246}{2,492\,152}\,0,1 = 0,01\ldots$$

Въ началѣ вычисленія достаточно принимать во вниманіе небольшое число десятичныхъ знаковъ. Мы вычислили корень съ тою точностью, какую позволяютъ семизначныя таблицы логариѳмовъ. Если желательна бо́льшая точность, то либо пользуются логариѳмическими таблицами съ бо́льшимъ числомъ знаковъ, либо вычисляютъ безъ помощи логариѳмовъ, что также приводитъ къ требуемому результату, но сопряжено съ болѣе сложными вычисленіями. Въ послѣднемъ случаѣ можно пользоваться сокращеннымъ умноженіемъ.

3. Чтобы вычислить отрицательные корни, достаточно положить $x = -y$ и искать положительные корни уравненія

$$y^5 - 4y + 2 = 0.$$

Этимъ путемъ получимъ:

$$x_2 = -0{,}508\,499\,4,$$

$$x_3 = -1{,}243\,596\,4.$$

4. Наше уравненіе имѣетъ еще пару сопряженныхъ мнимыхъ корней. Чтобы найти ихъ приближенныя значенія, положимъ:

$$x = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

По теоремѣ Муавра наше уравненіе представится въ видѣ:

$$x^5 - 4x - 2 = r^5(\cos 5\varphi + i\sin 5\varphi) - 4r(\cos\varphi + i\sin\varphi) - 2,$$

что даетъ два уравненія:

$$r^5\cos 5\varphi - 4r\cos\varphi - 2 = 0,$$

$$r^5\sin 5\varphi - 4r\sin\varphi = 0.$$

Второе изъ этихъ уравненій даетъ:

$$r^4 = \frac{4\sin\varphi}{\sin 5\varphi}, \tag{1}$$

и потому первое можетъ быть представлено въ видѣ:

$$2r(\sin\varphi\cos 5\varphi - \cos\varphi\sin 5\varphi) = \sin 5\varphi,$$

откуда

$$r = -\frac{\sin 5\varphi}{2\sin 4\varphi}. \tag{2}$$

Обозначимъ уголъ, дополнительный къ φ, черезъ ψ; иными словами, положимъ $\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$; тогда уравненія (1) и (2) примутъ видъ:

$$r^4 = \frac{4\cos\psi}{\cos 5\psi}, \quad r = \frac{\cos 5\psi}{2\sin 4\psi} \tag{3}$$

и

$$x = r\sin\psi + i\,r\cos\psi.$$

Возвысимъ въ 4-ую степень второе изъ равенствъ (3) и приравняемъ другъ другу оба выраженія, полученныя для r^4:

$$(\cos 5\psi)^5 - 64\cos\psi(\sin 4\psi)^4 = 0. \tag{4}$$

Если положимъ здѣсь $\psi = 0$, то лѣвая часть равна 1, т. е. имѣетъ положительное значеніе. Если же $\psi = 10^0$, то $\cos 5\psi = \sin 4\psi$, и лѣвая часть

$$(\sin 40^0)^4(\sin 40^0 - 64\cos 10^0),$$

очевидно, имѣетъ отрицательное значеніе. Слѣдовательно, корень уравненія (4) лежитъ между $\psi = 0$ и $\psi = 10^0$.

Вычисляя съ помощью пятизначныхъ логариѳмовъ выраженія

$$(\cos 5\psi)^5, \quad 64\cos\psi(\sin 4\psi)^4$$

для послѣдовательно возрастающаго числа градусовъ между 0^0 и 10^0, найдемъ, что перемѣна знака происходитъ между $\psi = 4^0$ и $\psi = 5^0$. Примѣняя Regula falsi, находимъ, что ψ лежитъ около $4^0 40'$. Взявши $\psi = 4^0 30'$, $4^0 40'$, снова по Regula falsi находимъ значеніе, близкое къ $4^0 38'$.

Теперь обратимся къ вычисленію:

$$\begin{aligned} \psi = 4^0 38' \qquad & \log(\cos 5\psi)^5 = 0{,}81745 - 1, \\ & \log 64\cos\psi(\sin 4\psi)^4 = 0{,}81368 - 1; \\ \psi = 4^0 39' \qquad & \log(\cos 5\psi)^5 = 0{,}81610 - 1, \\ & \log 64\cos\psi(\sin 4\psi)^4 = 0{,}81871 - 1. \end{aligned}$$

Разность въ первомъ случаѣ положительна, во второмъ случаѣ — отрицательна; слѣдовательно, ψ лежитъ между $4^0 38'$ и $4^0 39'$. Положимъ $\psi = 4^0 38' 30''$; тогда

$$\log(\cos 5\psi)^5 = 0{,}816\,762\,5 - 1,$$

$$\log 64\cos\psi(\sin 4\psi)^4 = 0{,}816\,688\,5 - 1.$$

Разность равна 0,000 074; слѣдовательно, значенiе $\psi = 4^\circ 38' 30''$ даетъ хорошее приближенiе (это значенiе меньше истиннаго).

Изъ уравненiя (3) получимъ:

$$\log r = \log\cos 5\psi - \log\sin 4\psi - \log 2;$$

$$\begin{array}{ll} \log\cos 5\psi & = 0{,}963\,352\,5 - 1 \\ \log\sin 4\psi & = 0{,}502\,983\,8 - 1 \\ \log 2 & = 0{,}301\,030\,0 \\ \hline \log r & = 0{,}159\,338\,7 \\ \log\sin\psi & = 0{,}908\,076\,2 - 2 \\ \log\cos\psi & = 0{,}998\,573\,3 - 1 \\ \hline \log(r\sin\psi) & = 0{,}067\,414\,9 - 1 \\ \log(r\cos\psi) & = 0{,}157\,912\,0. \end{array}$$

Слѣдовательно, мнимые корни приблизительно равны:

$$x = 0{,}11679 \pm i\,1{,}4385,$$

а ихъ модуль

$$r = 1{,}444\,24.$$

Для испытанiя точности результатовъ можно воспользоваться тѣмъ обстоятельствомъ, что сумма $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ всѣхъ корней нашего уравненiя должна быть равна нулю. Найденныя же нами значенiя корней даютъ:

$$x_1 + x_4 + x_5 = \quad 1{,}752\,09,$$

$$x_2 + x_3 = -\,1{,}752\,095\,8.$$

§ 104. Разложенiе вещественнаго корня въ непрерывныя дроби.

1. Въ § 87 мы видѣли, что каждое ирращiональное число можетъ быть представлено въ видѣ непрерывной дроби, и, въ частности, мы выполнили это для квадратнаго корня.

Обратно, имѣя достаточное число послѣдовательныхъ знаменателей, мы можемъ получить приближенное значенiе ирращiональнаго числа въ видѣ рацiональной дроби. Это приближенное значенiе будетъ тѣмъ ближе къ истинной величинѣ ирращiональнаго числа, чѣмъ быстрѣе возрастаютъ знаменатели подходящихъ дробей Q_1, Q_2, Q_3, . . .; поэтому выгодно, если между частными знаменателями непрерывной дроби $q, q_1, q_2, \ldots$ скоро появляются довольно большія числа.

2. Если ирраціональное число задано, какъ корень алгебраическаго уравненія n-той степени $f(x) = 0$, то его можно представить въ видѣ непрерывной дроби, исходя непосредственно изъ уравненія. Этимъ пріемомъ можно пользоваться, какъ новымъ способомъ приближеннаго вычисленія вещественныхъ корней уравненія *).

Предположимъ, что найдено цѣлое положительное число q такого рода, что между q и $q+1$ лежитъ одинъ или нѣсколько корней функціи $f(x)$. Это можно выполнить хотя бы съ помощью теоремы Штурма. Положимъ тогда:

$$x = q + \frac{1}{x_1} = \frac{qx_1 + 1}{x_1};$$

для x_1 получимъ, въ свою очередь, уравненіе n-той степени:

$$x_1^n f\left(\frac{qx_1+1}{x_1}\right) = f_1(x_1) = 0.$$

Это уравненіе имѣетъ столько же вещественныхъ корней, большихъ, чѣмъ 1, сколько $f(x)$ имѣетъ корней между q и $q+1$ [11]).

Найдемъ число q_1 такого рода, чтобы между q_1 и q_1+1 лежалъ, по крайней мѣрѣ, одинъ корень уравненія $f_1(x_1) = 0$, и положимъ

$$x_1 = q_1 + \frac{1}{x_2} = \frac{q_1 x_2 + 1}{x_2}.$$

Мы вновь получимъ уравненіе n-той степени для x_2:

$$x_2^n f_1\left(\frac{q_1 x_2 + 1}{x_2}\right) = f_2(x_2) = 0;$$

это уравненіе опять имѣетъ, по крайней мѣрѣ, одинъ корень, большій, чѣмъ 1.

---

*) Этотъ пріемъ принадлежитъ Лагранжу (Lagrange, „Mém. de Berlin", 1767).

[11]) Ибо каждому корню α функціи $f(x)$, лежащему между q и $q+1$, отвѣчаетъ корень x_1 функціи $f_1(x_1)$, удовлетворяющій равенству $\alpha = q + \frac{1}{x_1}$; такъ какъ $\frac{1}{x_1}$ есть правильная дробь, то $x_1 > 1$.

Этотъ процессъ можно продолжать сколько угодно. Если между q и $q+1$ заключается нѣсколько корней функцiи $f(x)$, то, смотря по обстоятельствамъ, можетъ получиться и нѣсколько значенiй для q_1. Можетъ случиться, что и для q_2 получится нѣсколько значенiй; однако, всегда настанетъ моментъ, когда всѣ корни между q и $q+1$ будутъ отдѣлены другъ отъ друга [12]).

Значенiе x получается въ видѣ непрерывной дроби:

$$x = q + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cdots}}}$$

3. Достигнуть болѣе или менѣе значительнаго приближенiя къ истинному значенiю корня можно, большею частью, только вычисливши большое число послѣдовательныхъ знаменателей, а составленiе функцiй $f, f_1, f_2, \ldots$ очень утомительно; поэтому изложенный методъ имѣетъ больше теоретическiй интересъ и мало пригоденъ для практическихъ вычисленiй.

Только въ тѣхъ исключительныхъ случаяхъ, когда въ ряду $q, q_1, q_2, \ldots$ скоро попадается довольно большое число, получаются лучшiе результаты.

Примѣромъ такого рода можетъ служить кубическое уравненiе:

$$x^3 - 2x - 2 = 0.$$

---

[12]) Если бы функцiя $f_1(x_1)$ имѣла, скажемъ, три вещественныхъ корня, большихъ, чѣмъ 1: x_1', x_1'', x_1''', то мы получили бы три корня функцiи $f(x)$:

$$q + \frac{1}{x_1'}, \quad q + \frac{1}{x_1''}, \quad q + \frac{1}{x_1'''}.$$

Дальнѣйшее разложенiе нужно вести для каждаго изъ этихъ корней порознь. Если подстановка

$$x_1' = q_1' + \frac{1}{x_2}$$

приведетъ къ функцiи $f_2(x_2)$, имѣющей два корня, большихъ, чѣмъ 1: x_2' и x_2'' то двумъ послѣдовательнымъ знаменателямъ (q, q_1') будутъ отвѣчать два корня

$$q + \cfrac{1}{q_1' + \cfrac{1}{q_2'}}, \qquad q + \cfrac{1}{q_1' + \cfrac{1}{q_2''}}.$$

Но такъ какъ общее число корней ограничено, то такое расчлененiе должно скоро прекратиться.

Послѣдовательныя преобразованія здѣсь даютъ:

$$\begin{aligned} x^3 - 2x - 2 &= 0, & q &= 1, \\ 3x^3 - x^2 - 3x - 1 &= 0, & q_1 &= 1, \\ 2x^3 - 4x^2 - 8x - 3 &= 0, & q_2 &= 3, \\ 9x^3 - 22x^2 - 14x - 2 &= 0, & q_3 &= 2, \\ 46x^3 - 6x^2 - 32x - 9 &= 0, & q_4 &= 1, \\ x^3 - 94x^2 - 132x - 46 &= 0, & q_5 &= 95, \\ 3561x^3 - 9083x^2 - 191x - 1 &= 0, & q_6 &= 2. \end{aligned}$$

Рядъ послѣдовательныхъ частныхъ знаменателей

$$(1,\ 1,\ 3,\ 2,\ 1,\ 95,\ 2,\ \ldots)$$

даетъ рядъ подходящихъ дробей:

$$\frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{7}{4},\ \frac{16}{9},\ \frac{23}{13},\ \frac{2201}{1244},\ \frac{4425}{2501},\ \ldots$$

Эти дроби поперемѣнно то меньше, то больше, чѣмъ x. Двѣ послѣднія обращаются въ слѣдующія десятичныя дроби:

$$1{,}769\,292\,60, \quad 1{,}769\,292\,28;$$

ошибка послѣдней, нѣсколько меньшей истиннаго значенія x, меньше, чѣмъ

$$0{,}000\,000\,16.$$

ГЛАВА XVIII.

Дѣленіе окружности на равныя части.

§ 105. Корни изъ единицы.

1. Всякое комплексное число, въ зависимости отъ модуля и аргумента, выражается въ видѣ

$$z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta).$$

Согласно п. 8 § 51-го,

$$z^n = r^n(\cos n\vartheta + i\sin n\vartheta). \qquad (1)$$

Эта формула даетъ возможность рѣшить слѣдующую задачу: опредѣлить всѣ числа, n-тая степень которыхъ равна данному числу c (вещественному или комплексному), т. е. найти корни уравненія:

$$z^n = c.$$

Согласно основной теоремѣ алгебры это уравненіе должно имѣть n корней.

2. Пусть

$$c = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

гдѣ ϱ есть положительное число, а φ содержится между 0 и 2π. Тогда

$$r^n\cos n\vartheta = \varrho\cos\varphi, \quad r^n\sin n\vartheta = \varrho\sin\varphi.$$

Возводя оба эти равенства въ квадратъ и складывая, получимъ, что $r^{2n} = \varrho^2$. Такъ какъ и r должно быть положительнымъ числомъ, то

$$r = \sqrt[n]{\varrho},$$

при чемъ подъ правой частью разумѣемъ единственное положительное значеніе корня n-той степени изъ ϱ.

3. Опредѣливъ такимъ образомъ r, мы получимъ для ϑ:

$$\cos n\vartheta = \cos\varphi, \quad \sin n\vartheta = \sin\varphi.$$

Эти уравненія не опредѣляютъ угла φ однозначно. Въ самомъ дѣлѣ, согласно извѣстной теоремѣ тригонометріи, два угла, имѣющіе одинаковые косинусы и синусы, могутъ отличаться другъ отъ друга на произвольное кратное 2π. Слѣдовательно,

$$n\vartheta = \varphi + 2\pi m, \quad \vartheta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi m}{n},$$

гдѣ m есть нѣкоторое цѣлое (положительное или отрицательное) число. Съ другой стороны, два значенія ϑ, разность которыхъ есть число, кратное 2π, даютъ одно и то же значеніе для z. Если положимъ $m = qn + k$, гдѣ k есть остатокъ отъ дѣленія m на n, то

$$\vartheta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} + 2\pi q.$$

Здѣсь всевозможныя значенія цѣлаго числа q даютъ одно и то же значеніе для z. Слѣдовательно, чтобы получить всѣ отличные другъ отъ друга корни n-той степени изъ c, достаточно въ формулѣ

$$z = \sqrt[n]{\varrho}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right]$$

дать k послѣдовательныя значенія: 0, 1, 2, . . ., $n - 1$. Послѣднюю формулу, согласно п. 6 § 51-го, можно представить въ видѣ:

$$z = \sqrt[n]{\varrho}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\left(\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}\right),$$

или

$$z = \sqrt[n]{\varrho}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k.$$

4. Положимъ для сокращенія:

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n},$$

$$\varepsilon^k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}.$$

Тогда $\varepsilon^n = 1$, а, слѣдовательно, и $\varepsilon^{kn} = 1$. Произведенiе двухъ сопряженныхъ мнимыхъ чиселъ:

$$\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \quad \cos\frac{2\pi k}{n} - i\sin\frac{2\pi k}{n}$$

равно 1; слѣдовательно, мы можемъ положить:

$$\varepsilon^{-k} = \cos\frac{2\pi k}{n} - i\sin\frac{2\pi k}{n}.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ $\varepsilon^{-k} = \varepsilon^{n-k}$. Величины

$$1,\ \varepsilon,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^3,\ \ldots,\ \varepsilon^{n-1} \tag{2}$$

непремѣнно всѣ различны между собой. Дѣйствительно, если бы въ этомъ ряду было $\varepsilon^k = \varepsilon^g$, то, въ силу упомянутаго свойства тригонометрическихъ функцiй, числа $2\pi k/n$ и $2\pi g/n$ должны были бы отличаться другъ отъ друга только на число, кратное 2π, а, слѣдовательно, разность $k/n - g/n$ должна была бы быть цѣлымъ числомъ, что, очевидно, невозможно, такъ какъ k и g суть различныя числа изъ ряда 0, 1, 2, 3, ..., $n-1$.

5. Числа (2) называются корнями n-той степени изъ 1. Ихъ имѣется n различныхъ между собой.

Они представляютъ собой корни функцiи $x^n - 1$.

Всѣ корни n-той степени изъ даннаго числа c получатся, если одинъ изъ нихъ умножить послѣдовательно на n-тые корни изъ единицы [1]). За исключенiемъ случая $c = 0$, число различныхъ корней n-той степени изъ c равно n, т. е. числу различныхъ корней изъ 1.

6. На окружности, радiусъ которой мы примемъ равнымъ единицѣ длины, центральные углы при центрѣ можно измѣрять соотвѣтствующими имъ дугами. Четыремъ прямымъ угламъ соотвѣтствуетъ вся окружность, а число, ее измѣряющее, есть 2π. Если раздѣлить всю окружность на n

---

[1]) Это слѣдуетъ изъ послѣдней формулы пункта 3-го. Если мы положимъ въ ней $k=0$, то получимъ:

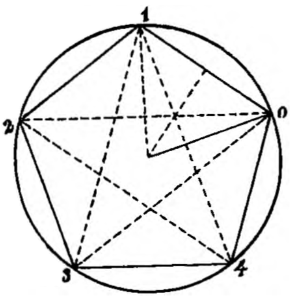
$$z_1 = \sqrt[n]{\varrho}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right),$$

т. е. корнями n-той степени изъ числа c, какъ показываетъ упомянутая формула, служатъ

$$z_1,\ z_1\varepsilon,\ z_1\varepsilon^2,\ z_1\varepsilon^3,\ \ldots,\ z_1\varepsilon^{n-1}.$$

равныхъ частей, то въ точкахъ дѣленія получимъ углы, соотвѣтствующіе правильному вписанному многоугольнику, а именно n-угольнику.

7. Расположимъ одну изъ точекъ дѣленія такъ, чтобы для нея было $x = 1$, $y = 0$. Тогда всѣ вершины нашего многоугольника будутъ геометрическими изображеніями n-тыхъ корней изъ единицы, т. е. комплексныхъ чиселъ (2) (§ 51). Условимся отсчитывать дуги и соотвѣтствующіе имъ углы отъ точки 0 (фиг. 20). Точку, соотвѣтствующую углу $2\pi k/n$, будемъ называть k-той вершиной многоугольника. Въ виду этого начальная точка можетъ быть названа нулевой или n-той вершиной.



Фиг. 20.

Обозначимъ сторону правильнаго n-угольника черезъ S_n. Тогда, какъ видно изъ фигуры 20-ой,

$$S_n = 2 \sin \frac{\pi}{n}.$$

Величины S_n можно опредѣлить какъ геометрически, такъ и алгебраически. Аналитическая геометрія учитъ, что точки пересѣченія [2]) двухъ окружностей съ данными центрами и радіусами, а также и точки пересѣченія круга и прямой могутъ быть выражены алгебраически при помощи корней квадратныхъ уравненій. Обратно, квадратные корни изъ данныхъ чиселъ, если изобразить послѣднія отрѣзками, можно построить циркулемъ и линейкой, а, слѣдовательно, привести задачу къ отысканію точекъ пересѣченія окружностей или окружностей и прямыхъ линій.

Если S_n можно алгебраически выразить при помощи ряда квадратныхъ корней, то геометрическое построеніе правильнаго n-угольника можетъ быть выполнено циркулемъ и линейкой. Обратно, если правильный n-угольникъ можно построить циркулемъ и линейкой, то алгебраическое опредѣленіе n-тыхъ корней изъ единицы приводитъ къ ряду квадратныхъ уравненій.

8. Положимъ

$$S_{n,k} = 2 \sin \frac{k\pi}{n};$$

$S_{n,k}$ есть хорда, которую получимъ, если начальную вершину многоугольника, обозначенную черезъ 0, соединимъ не съ смежной вершиной, а съ k-той. Тогда $S_{n,k} = S_{n,n-k}$. Если k больше, чѣмъ 1, и меньше, чѣмъ $n - 1$, и не имѣетъ общихъ дѣлителей съ n, то $S_{n,k}$ есть сторона звѣзднаго многоугольника (см. фиг. 20 для пятиугольника); если же k и n

[2]) Т. е., конечно, координаты точекъ пересѣченія.

имѣютъ общаго множителя, то $S_{n,k}$ есть сторона многоугольника съ меньшимъ числомъ сторонъ [3]).

9. Если S_n извѣстно, то S_{2n} найдемъ съ помощью извлеченія квадратнаго корня, т. е. съ помощью геометрическаго построенія (дѣленія угла пополамъ).

Наиболѣе простое рѣшеніе этой задачи получается изъ тригонометрическихъ формулъ

$$1 + \cos a = 2\cos^2 \frac{1}{2} a,$$

$$1 - \cos a = 2\sin^2 \frac{1}{2} a;$$

изъ второй формулы при $a = \pi/n$ слѣдуетъ:

$$2 - \sqrt{4 - S_n^2} = 4\left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)^2 = S_{2n}^2,$$

а изъ первой:

$$2 + \sqrt{4 - S_n^2} = 4\left(\cos\frac{\pi}{2n}\right)^2 = 4\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}\right)\right)^2.$$

Слѣдовательно, мѣняя знакъ при квадратномъ корнѣ, мы получаемъ формулу, соотвѣтствующую дѣленію пополамъ угла, смежнаго съ $\frac{\pi}{n}$ [4]).

Итакъ, съ помощью геометрическаго построенія мы всегда можемъ получить изъ n-угольника $2n$-угольникъ, а изъ $2n$-угольника — $4n$-угольникъ и т. д.; поэтому мы можемъ ограничиться предположеніемъ, что n есть число нечетное.

10. Обратно, изъ $2n$-угольника мы получимъ n-угольникъ, соединяя вершины перваго черезъ одну; такъ, напримѣръ, треугольникъ получается изъ шестиугольника, пятиугольникъ изъ десятиугольника и т. д.

---

[3]) Чтобы опредѣлить, сколько сторонъ будетъ имѣть звѣздный (или иногда обыкновенный) многоугольникъ, который мы получимъ, послѣдовательно соединяя вершины n-угольника черезъ k вершинъ, нужно опредѣлить, сколько понадобится провести такихъ діагоналей, чтобы возвратиться къ начальной вершинѣ. Если это число діагоналей есть x, то мы обойдемъ, такимъ образомъ, kx вершинъ. Мы возвратимся въ точку исхода, если kx кратно n. Поэтому, если k и n суть числа взаимно-простыя, то наименьшее значеніе x, при которомъ kx дѣлится на n, есть n; если же k и n имѣютъ общаго наибольшаго дѣлителя d, то наименьшее значеніе x есть n/d.

[4]) Т. е. $2 + \sqrt{4 - S_n^2}$ есть длина хорды, отвѣчающей половинѣ угла, смежнаго съ угломъ π/n.

Сторона же S_{2n} при нечетномъ n можетъ быть непосредственно выражена черезъ n-тые корни изъ единицы. Дѣйствительно,

$$S_{2n} = 2\sin\frac{\pi}{2n} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}\right) = 2\cos\frac{n-1}{4}\cdot\frac{2\pi}{n} =$$

$$= -2\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n}\right) = -2\cos\frac{n+1}{4}\,\frac{2\pi}{n}.$$

Съ другой стороны, согласно п. 4,

$$\varepsilon^k + \varepsilon^{-k} = 2\cos\frac{2\pi k}{n}; \qquad (a)$$

смотря по тому, какое изъ двухъ чиселъ $n-1$, $n+1$ дѣлится на 4, n имѣетъ видъ $4m+1$ или $4m-1$; слѣдовательно,

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \varepsilon^{\frac{n-1}{4}} + \varepsilon^{-\frac{n-1}{4}}, \quad n = 4m+1, \\ S_{2n} &= -\varepsilon^{\frac{n+1}{4}} - \varepsilon^{-\frac{n+1}{4}}, \quad n = 4m-1. \end{aligned} \qquad (3)$$

11. Если a и b суть натуральныя числа, не имѣющія общихъ дѣлителей, то по § 76 можно опредѣлить два такихъ цѣлыхъ и положительныхъ числа x и y, чтобы выполнялось равенство

$$bx - ay = 1.$$

Если $ab = n$, то можно удовлетворить равенству:

$$\frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi x}{a} - \frac{2\pi y}{b}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что сторона n-угольника получится, если точку $2\pi x/a$ соединить съ точкой $2\pi y/b$. Такъ, напримѣръ, сторона 15-угольника получается, если соединить вторую вершину 5-угольника съ первой вершиной треугольника [5]).

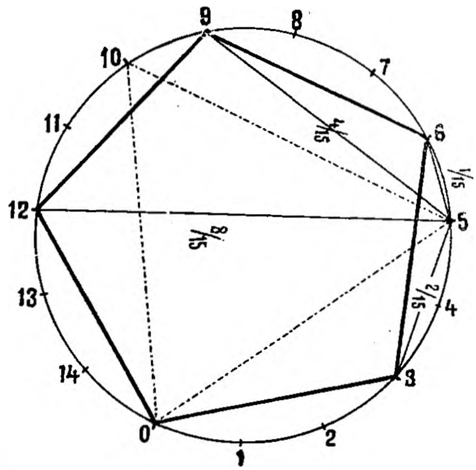
Всего имѣется четыре различныхъ 15-угольника, первыя вершины которыхъ лежатъ при: $2\pi/15$, $4\pi/15$, $8\pi/15$, $14\pi/15$. Мы найдемъ ихъ, если одну изъ вершинъ треугольника соединимъ съ четырьмя вершинами пятиугольника (фиг. 21) [6]).

---

[5]) Въ данномъ случаѣ $a = 5$, $b = 3$, $x = 2$, $y = 1$.

[6]) Мы видѣли выше, что мы получимъ звѣздный многоугольникъ, содержащій 15 сторонъ, если будемъ соединять вершины обыкновеннаго пятнадцатиуголь-

Благодаря вышеизложенному мы можемъ въ дальнѣйшемъ ограничиться только тѣми многоугольниками, въ которыхъ число сторонъ есть нечетное простое число или степень нечетнаго простого числа [7]).



Фиг. 21.

§ 106. Алгебраическое опредѣленіе корней изъ единицы.

1. Имѣя въ виду формулу суммы геометрической прогрессіи (§ 66) или частное отъ дѣленія $x^n - 1$ на $x - 1$ (§ 63), мы можемъ написать:

$$(x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1) = x^n - 1.$$

Подставимъ вмѣсто x какой-нибудь изъ корней n-той степени изъ единицы; правая часть будетъ равна 0, а, слѣдовательно, должна обратиться въ нуль и лѣвая часть. При $x = 1$ исчезаетъ первый множитель

ника черезъ каждыя k, гдѣ k есть число простое относительно 15; такимъ образомъ, k можетъ имѣть значенія 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14. Если $k = 1$, то мы получаемъ обыкновенный правильный 15-угольникъ. При $k = 14$ мы получаемъ тотъ же многоугольникъ, но въ обратномъ порядкѣ. Точно такъ же при $k = 13$, 11, 8 мы получаемъ тѣ же многоугольники, что при $k = 2$, 4, 7. Такимъ образомъ, мы получаемъ четыре 15-угольника, соотвѣтствующіе значеніямъ $k = 1$, 2, 4, 7.

На фиг. 21 изображенъ правильный пятиугольникъ (0, 3, 6, 9, 12). Далѣе, 05 есть сторона правильнаго треугольника. Соединяя его вершину 5 съ остальными вершинами пятиугольника, мы получимъ стороны всѣхъ четырехъ 15-угольниковъ.

Авторъ беретъ $k = 2$, 4, 8, 14, что, какъ мы видѣли, сводится къ тому же.

[7]) Какъ показано выше, если $n = ab$, гдѣ a и b суть числа взаимно-простыя, то мы умѣемъ построить сторону правильнаго n-угольника, если умѣемъ построить сторону a-угольника и сторону b-угольника.

лѣвой части $x-1$, а второй получаетъ значенie n. Если вмѣсто x подставимъ какой-нибудь корень, отличный отъ 1, т. е. одно изъ чиселъ (§ 105, (2)):

$$\varepsilon,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^3,\ \ldots,\ \varepsilon^{n-1},$$

то долженъ обратиться въ нуль другой множитель. Итакъ, степени числа ε суть корни уравненія $(n-1)$-ой степени

$$x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1=0; \tag{1}$$

другихъ же корней это уравненіе не имѣетъ. Дѣйствительно, если выполняется уравненіе (1), то и $x^n-1=0$, т. е. x есть одинъ изъ n-тыхъ корней изъ единицы. Значеніе же $x=1$ не удовлетворяетъ уравненію (1) [8].

Положимъ $x=\varepsilon$; тогда изъ уравненія (1) слѣдуетъ, что

$$\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3+\cdots+\varepsilon^{n-1}=-1. \tag{2}$$

Мы получаемъ, такимъ образомъ, теорему: сумма $n-1$ корней n-той степени изъ единицы, отличныхъ отъ 1, равна -1.

2. Уравненіе (1), въ виду своихъ характерныхъ особенностей часто можетъ быть разрѣшено до конца. Мы покажемъ это на нѣкоторыхъ примѣрахъ.

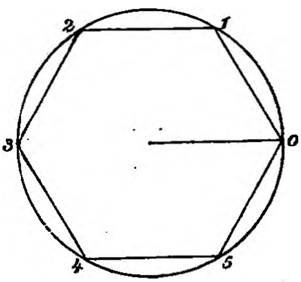
Для $n=3$ равенство (2) даетъ:

$$\varepsilon^2+\varepsilon+1=0,$$

или

$$\varepsilon+\varepsilon^{-1}=-1.$$

Въ виду соотношенія (3) § 105-го это равенство выражаетъ, что сторона правильнаго шестиугольника равна 1, т. е. радіусу (фиг. 22).



Фиг. 22.

Такимъ образомъ, въ виду равенства (a) § 105-го,

$$\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2},\quad \sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

и, слѣдовательно (§ 105, 4),

$$\varepsilon=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\quad \varepsilon^{-1}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

[8]) Это значитъ, что корнями уравненія (1) служатъ $(n-1)$ чиселъ:

$$\varepsilon,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^3,\ \ldots,\ \varepsilon^{n-1}.$$

3. При $n = 5$

$$y = \varepsilon + \varepsilon^{-1}$$

есть, согласно равенству (3) § 105-го, сторона десятиугольника. Изъ соотношенія же (2) для этого случая получимъ:

$$\varepsilon^4 + \varepsilon^3 + \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0,$$

а такъ какъ $\varepsilon^4 = \varepsilon^{-1}$, $\varepsilon^3 = \varepsilon^{-2}$, то

$$\varepsilon + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^2 + \varepsilon^{-2} = -1.$$

Но $\varepsilon^2 + \varepsilon^{-2} = (\varepsilon + \varepsilon^{-1})^2 - 2 = y^2 - 2$; поэтому для опредѣленія стороны десятиугольника мы получаемъ уравненіе:

$$y^2 = 1 - y, \quad y : 1 = (1 - y) : y. \tag{3}$$

Это уравненіе во второй своей формѣ показываетъ, что сторона десятиугольника равна большей части радіуса, раздѣленнаго въ крайнемъ и среднемъ отношеніи (§ 34, 6). Алгебраическое рѣшеніе уравненія (3) даетъ:

$$y = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = 2\cos\frac{2\pi}{5} \text{ [9]}. \tag{4}$$

Второй корень есть:

$$y_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} = 2\cos\frac{4\pi}{5} \text{ [10]}.$$

Что здѣсь подъ $\sqrt{5}$ нужно разумѣть положительное его значеніе, слѣдуетъ изъ того, что уголъ $2\pi/5$ лежитъ въ первой четверти и поэтому имѣетъ положительный косинусъ. Чтобы выяснить значеніе второго корня, обратимъ вниманіе на то, что

$$2\cos\frac{4\pi}{5} = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{5}\right) = -2\sin\frac{3\pi}{10}.$$

Слѣдовательно, $-y_1$ есть сторона звѣзднаго десятиугольника, который получится, если, раздѣливъ окружность на 10 равныхъ частей, соеди-

---

[9]) Ибо $y = \varepsilon + \varepsilon^{-1}$ (см. равенство (α) въ п. 10 § 105-го).

[10]) Ибо, согласно соотношенію (α) § 105-го, $\varepsilon^2 + \varepsilon^{-2} = 2\cos\frac{4\pi}{5}$, а изъ равенства $\varepsilon + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^2 + \varepsilon^{-2} = -1$ слѣдуетъ, что $\varepsilon^2 + \varepsilon^{-2} = 2\cos\frac{4\pi}{5} = -1 - (\varepsilon + \varepsilon^{-1}) = -1 - y = -1 - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$.

нять точки дѣленія черезъ двѣ (§ 105, 8). Если вершины этого звѣзднаго десятиугольника соединить черезъ одну, то получимъ звѣздный пятиугольникъ.

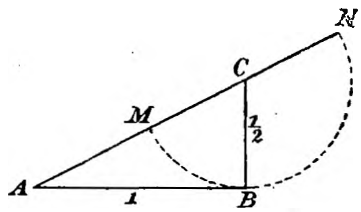
Изъ соотношенія (4) получимъ:

$$2\sin\frac{2\pi}{5} = \sqrt{4-y^2} = \frac{1}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

и, слѣдовательно,

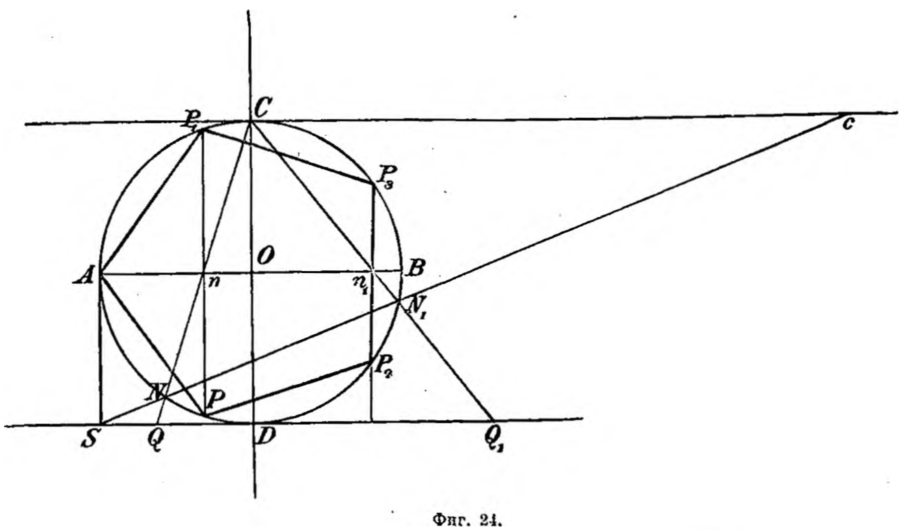
$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5}-1+i\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right).$$

4. Чтобы построить величины y и $-y_1$, обратимъ вниманіе на то, что $5 = 1^2 + 2^2$. Слѣдовательно, если въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC одинъ катетъ $= \frac{1}{2}$, а другой $= 1$, то гипотенуза равна $\frac{1}{2}\sqrt{5}$. Если отъ гипотенузы отнять $\frac{1}{2}$, то получимъ y, а если прибавить $\frac{1}{2}$, то получимъ $-y_1$. На чертежѣ (фиг. 23) отрѣзокъ $AM = y$, а отрѣзокъ $AN = -y_1$.



Фиг. 23.

5. Штаудтъ (v. Staudt) далъ очень изящное построеніе правильнаго пятиугольника. Это построеніе даетъ сразу всѣ пять вершинъ. Оно изображено на фиг. 24.



Фиг. 24.

Проведемъ въ кругѣ два взаимно перпендикулярныхъ діаметра AB и CD и въ точкахъ A, C, D проведемъ касательныя къ кругу, т. е. перпендикуляры къ діаметрамъ.

Отложимъ отрѣзокъ Cc, равный двойному діаметру, т. е., если радіусъ $= 1$. то $Cc = 4$; затѣмъ проведемъ прямую cS. Она пересѣчетъ окружность въ двухъ точкахъ N и N_1. Затѣмъ соединимъ прямыми точки C и N, C и N_1; эти прямыя пересѣкутъ діаметръ AB въ точкахъ n и n_1. Если въ этихъ точкахъ возставимъ къ AB перпендикуляры, то пересѣчемъ окружность въ четырехъ точкахъ P, P_1, P_2 и P_3, которыя вмѣстѣ съ A будутъ вершинами правильнаго пятиугольника.

Доказательство:

Треугольникъ SNQ подобенъ треугольнику cNC (вслѣдствіе равенства соотвѣтствующихъ угловъ). Слѣдовательно,

$$SQ : Cc = NQ : NC;$$

по теоремѣ относительно касательной и сѣкущей

$$QD^2 = NQ \cdot QC,$$

откуда

$$SQ : Cc = QD^2 : NC \cdot QC,$$

или

$$SQ : QD = Cc \,.\, QD : NC \,.\, QC.$$

Хорда DN (не обозначенная на чертежѣ) перпендикулярна къ QC, а потому изъ прямоугольнаго треугольника QDC получимъ:

$$DC^2 = NC \,.\, QC.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ:

$$SQ : QD = QD \,.\, Cc : DC^2.$$

Съ другой стороны, по построенію, $Cc = 2\,DC = 4\,SD$; поэтому

$$DC : Cc = SD : DC, \quad DC^2 = Cc \,.\, SD;$$

слѣдовательно:

$$SQ : QD = QD : SD,$$

т. е. отрѣзокъ SD дѣлится въ точкѣ Q въ крайнемъ и среднемъ отношеніи. Если $SD = 1$, то

$$QD = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Такъ какъ $QD = 2On$ (изъ подобія треугольниковъ CQD и CnO), то

$$On = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} = \cos\frac{2\pi}{5}.$$

Такимъ образомъ, уголъ AOP_1 равенъ $2\pi/5$, а AP_1 есть сторона правильнаго пятиугольника. Точно такимъ же образомъ выводимъ, исходя изъ подобія треугольниковъ SQ_1N_1 и cCN_1, что

$$On_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{4} = \cos\frac{\pi}{5},$$

и, слѣдовательно, уголъ $P_3OB = \pi/5$.

6. Для дѣленія окружности на 7 частей имѣемъ прежде всего уравненіе:

$$\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-3} = -1,$$

$$\varepsilon + \varepsilon^{-1} = y, \quad \varepsilon^2 + \varepsilon^{-2} = y_1, \quad \varepsilon^3 + \varepsilon^{-3} = y_2.$$

Въ виду соотношеній (3) § 105-го — y_1 есть сторона правильнаго 14-угольника. Далѣе,

$$\varepsilon^2 + \varepsilon^{-2} = y^2 - 2,$$

$$\varepsilon^3 + \varepsilon^{-3} = y^3 - 3y;$$

слѣдовательно, для y получаемъ уравненіе 3-ей степени:

$$y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0,$$

корни котораго суть [11]):

$$y = 2\cos\frac{2\pi}{7},$$

$$y_1 = 2\cos\frac{4\pi}{7} = -2\cos\frac{3\pi}{7},$$

$$y_2 = 2\cos\frac{6\pi}{7} = -2\cos\frac{\pi}{7}.$$

Это уравненіе имѣетъ, такимъ образомъ, три вещественныхъ корня Корни наибольшій и наименьшій по абсолютной величинѣ имѣютъ отрицательныя значенія, а средній — положительное. Семиугольника нельзя по-

---

[11]) Чтобы убѣдиться въ томъ, что y, y_1 и y_2 суть корни кубическаго уравненія $y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0$, нужно вычислить выраженія $-(y + y_1 + y_2)$, $yy_1 + yy_2 + y_1y_2$, $-yy_1y_2$, принимая во вниманіе основное уравненіе $\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-3} = -1$; тогда эти выраженія окажутся равными коэффиціентамъ $1, -2, -1$ кубическаго уравненія.

строить циркулемъ и линейкой, такъ какъ рѣшеніе задачи приводится къ уравненію третьей степени [12]).

. Въ случаѣ девятиугольника дѣло обстоитъ нѣсколько иначе. Девять не есть простое число и при томъ каждый корень третьей степени изъ единицы есть въ то же время корень девятой степени изъ единицы.

Если ε есть корень девятой степени изъ единицы, то ε^3 есть корень третьей степени изъ единицы. Ясно, что, если этотъ корень третьей степени отличенъ отъ 1, то само ε не представляетъ собой корня третьей степени изъ единицы. Поэтому (п. 2)

$$\varepsilon^6 + \varepsilon^3 + 1 = 0.$$

Это равенство останется въ силѣ, если ε замѣнимъ черезъ ε^2, ε^4, ε^5, ε^7, ε^8 [13]). Мы получили уравненіе 6-ой степени съ 6-ью корнями. Но $\varepsilon^6 + \varepsilon^3 + 1 = \varepsilon^3 + \varepsilon^{-3} + 1$. Если положимъ

$$y = \varepsilon + \varepsilon^{-1},$$
$$y^3 = \varepsilon^3 + \varepsilon^{-3} + 3y,$$

то для y получимъ уравненіе третьей степени:

$$y^3 - 3y + 1 = 0.$$

Корни этого уравненія суть [14]):

$$y = 2\cos\frac{2\pi}{9}, \quad y_1 = 2\cos\frac{4\pi}{9},$$
$$y_2 = 2\cos\frac{8\pi}{9} = -2\cos\frac{\pi}{9};$$

---

[12]) Если конструктивная задача аналитически приводится къ уравненію 3-ей степени, то отсюда безъ дальнѣйшихъ оговорокъ еще нельзя заключить, что построеніе не можетъ быть выполнено циркулемъ и линейкой. Это видно уже изъ того, что уравненіе 3-ей степени можетъ имѣть и раціональный корень. Чтобы утверждать, что задача не можетъ быть рѣшена циркулемъ и линейкой, требуется болѣе глубокій анализъ соотвѣтствующаго уравненія. Объ этомъ подробнѣе въ слѣдующей главѣ.

[13]) Уравненію $\varepsilon^6 + \varepsilon^3 + 1 = 0$ удовлетворяютъ только тѣ корни девятой степени изъ единицы, которые не суть въ то же время корни кубическіе изъ единицы; поэтому изъ ряда 1, ε, ε^2, ε^3, ε^4, ε^5, ε^6, ε^7, ε^8 исключаются корни 1, ε^3 и ε^6, удовлетворяющіе равенствамъ $(\varepsilon^3)^3 = \varepsilon^9 = 1$ и $(\varepsilon^6)^3 = \varepsilon^{18} = (\varepsilon^9)^2 = 1$; для этихъ корней $1 + \varepsilon^3 + \varepsilon^6$ равно не нулю, а 3.

[14]) Уравненію $\varepsilon^6 + \varepsilon^3 + 1 = 0$ удовлетворяетъ значеніе

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{9} + i\sin\frac{2\pi}{9},$$

два изъ нихъ имѣютъ положительныя значенія, одинъ — отрицательное; согласно равенству (3) § 105-го, y_1 есть сторона правильнаго 18-угольника. Понятно, что и девятиугольника нельзя построить циркулемъ и линейкой. Еще хуже обстоитъ дѣло съ 11-угольникомъ: полагая въ этомъ случаѣ $y = \varepsilon + \varepsilon^{-1}$, мы приходимъ къ уравненію 5-ой степени:

$$y^5 + y^4 - 4y^3 - 3y^2 + 3y + 1 = 0.$$

8. Дѣленіе окружности на 13 частей приводится къ одному квадратному уравненію и одному кубическому. Къ этому результату приводитъ слѣдующій принципъ, примѣнимый и къ болѣе сложнымъ случаямъ. Корни 13-ой степени изъ единицы:

$$\begin{array}{llllll} \varepsilon, & \varepsilon^2, & \varepsilon^3, & \varepsilon^4, & \varepsilon^5, & \varepsilon^6, \\ \varepsilon^{-1}, & \varepsilon^{-2}, & \varepsilon^{-3}, & \varepsilon^{-4}, & \varepsilon^{-5}, & \varepsilon^{-6} \end{array}$$

могутъ быть расположены въ видѣ цикла такъ, что каждый изъ нихъ будетъ получаться изъ предыдущаго однимъ и тѣмъ же способомъ, именно возвышеніемъ въ квадратъ:

$$\varepsilon,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^4,\ \varepsilon^{-5},\ \varepsilon^3,\ \varepsilon^6,\ \varepsilon^{-1},\ \varepsilon^{-2},\ \varepsilon^{-4},\ \varepsilon^5,\ \varepsilon^{-3},\ \varepsilon^{-6};$$

послѣдній по возвышеніи въ квадратъ даетъ опять первый: $\varepsilon^{-12} = \varepsilon$ [15]). Если брать члены этого ряда черезъ одинъ, то получимъ два ряда, въ каждомъ изъ которыхъ послѣдующій членъ равенъ предыдущему, возвышенному въ 4-ую степень. Составимъ суммы этихъ членовъ

$$\varepsilon + \varepsilon^4 + \varepsilon^3 + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-4} + \varepsilon^{-3} = \eta,$$
$$\varepsilon^2 + \varepsilon^{-5} + \varepsilon^6 + \varepsilon^{-2} + \varepsilon^5 + \varepsilon^{-6} = \eta_1$$

и обозначимъ ихъ сокращенно такъ:

$$\eta = \Sigma\varepsilon^{\alpha}, \quad \eta_1 = \Sigma\varepsilon^{\beta},$$

гдѣ

$$\alpha = \pm 1,\ \pm 3,\ \pm 4, \quad \beta = \pm 2,\ \pm 5,\ \pm 6.$$

Обратимъ теперь вниманіе на слѣдующее важное обстоятельство: если a есть одно изъ чиселъ α, то числа $a\alpha$ и $a\beta$ сравнимы по модулю 13 соотвѣтственно съ числами α и β; если же b есть одно изъ чиселъ β, то, наоборотъ, числа $b\alpha$ сравнимы съ числами β, а числа $b\beta$ съ числами α.

а также квадратъ и четвертая степень этого выраженія; этому соотвѣтствуютъ три значенія выраженія $y = \varepsilon + \varepsilon^{-1}$, указанныя въ текстѣ. Ср. также примѣчаніе 11.

[15]) Возвышая, напримѣръ, ε^4 въ квадратъ, мы получимъ ε^8; но такъ какъ $\varepsilon^{13} = 1$, то $\varepsilon^8 = \varepsilon^{13} \cdot \varepsilon^{-5} = \varepsilon^{-5}$. Точно такъ же $(\varepsilon^{-6})^2 = \varepsilon^{-12} = \varepsilon^{-12} \cdot \varepsilon^{13} = \varepsilon$.

Эта теорема вытекаетъ, согласно § 81, изъ того, что α суть квадратичные вычеты, а β квадратичные невычеты по модулю 13. Въ данномъ случаѣ легко убѣдиться въ ея справедливости съ помощью испытанія чиселъ α и β [16]).

Назовемъ суммы η, η_1 **первыми періодами**. Обѣ эти суммы можно будетъ выразить въ квадратныхъ корняхъ, если будетъ извѣстна ихъ сумма $\eta+\eta_1$ и произведеніе $\eta\eta_1$. Но $\eta+\eta_1$ есть сумма всѣхъ ε^k, т. е, $\eta+\eta_1=-1$. Произведеніе $\eta\eta_1$ можно представить въ видѣ:

$$\eta\eta_1=\Sigma\varepsilon^{\alpha+\beta}.$$

Показатель $\alpha+\beta$, какъ легко убѣдиться непосредственно, никогда не равенъ нулю и никогда не дѣлится на 13. Слѣдовательно, въ число 36 слагаемыхъ суммы $\Sigma\varepsilon^{\alpha+\beta}$ не входитъ 1.

Въ суммѣ $\Sigma\varepsilon^{\alpha+\beta}$ различныхъ слагаемыхъ имѣется только 12; каждое изъ нихъ повторяется три раза. Въ этомъ можно убѣдиться, либо вычисляя всѣхъ показателей $\alpha+\beta$ непосредственно, либо съ помощью слѣдующаго простого разсужденія. Одного взгляда на значенія α и β достаточно, чтобы убѣдиться въ существованіи трехъ такихъ суммъ $\alpha+\beta$, $\alpha'+\beta'$, $\alpha''+\beta''$, что

$$\alpha+\beta\equiv\alpha'+\beta'\equiv\alpha''+\beta''\equiv k \text{ [17])}. \qquad (\mathrm{mod}\ 13)$$

Но тогда для любого числа n, не дѣлящагося на 13,

$$n\alpha+n\beta\equiv n\alpha'+n\beta'\equiv n\alpha''+n\beta''\equiv nk.$$

Всѣ эти три суммы заключаются между числами $\alpha+\beta$; дѣйствительно, оба числа $n\alpha$ и $n\beta$ не могутъ находиться одновременно ни среди чиселъ

---

[16]) Если, напримѣръ, $a=+3$, то числа $a\alpha$ и $a\beta$ будутъ:

$$\pm3,\ \pm9,\ \pm12;\quad \pm6,\ \pm15,\ \pm18.$$

Такъ какъ

$$\pm9\equiv\mp4,\ \pm12\equiv\mp1,\ \pm15\equiv\pm2,\ \pm18\equiv\pm5 \quad (\mathrm{mod}\ 13),$$

то числа $a\alpha$ сравнимы съ числами α, а числа $a\beta$ — съ числами β. Если же возьмемъ b равнымъ, скажемъ, -5, то получимъ:

$$\mp5,\ \mp15,\ \mp20;\ \mp10,\ \mp25,\ \mp30.$$

Такъ какъ

$$\mp15\equiv\mp2,\ \mp20\equiv\pm6,\ \mp10\equiv\pm3,\ \mp25\equiv\pm1,\ \mp30\equiv\mp4 \quad (\mathrm{mod}\ 13),$$

то числа $b\alpha$ сравнимы съ числами β, а числа $b\beta$ съ числами α.

[17]) Напримѣръ,

$$-1+2\equiv+3-2\equiv-4+5\equiv1 \quad (\mathrm{mod}\ 13).$$

Такимъ образомъ, въ этомъ разсужденіи можно принять $k=1$.

α, ни среди чиселъ β; слѣдовательно, одно изъ нихъ фигурируетъ среди чиселъ α, а другое среди чиселъ β [18]). Итакъ, если положимъ $\alpha + \beta = k$, то каждый членъ ε^{nk} долженъ повториться, по меньшей мѣрѣ, три раза [19]); но всѣхъ членовъ суммы $\Sigma \varepsilon^{\alpha+\beta}$ имѣется 36 [20]); слѣдовательно, каждый членъ повторяется какъ разъ три раза. Въ результатѣ $\eta\eta_1 = 3\Sigma\varepsilon^k = -3$. Числа η и η_1 опредѣляются изъ уравненій:

$$\eta + \eta_1 = -1,$$
$$\eta\eta_1 = -3.$$

Если первое изъ этихъ равенствъ возведемъ въ квадратъ и вычтемъ учетверенное второе, то получимъ:

$$(\eta + \eta_1)^2 - 4\eta\eta_1 = (\eta - \eta_1)^2 = 13,$$

откуда

$$\eta = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}, \quad \eta_1 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}.$$

---

[18]) Такъ какъ каждое число сравнимо со своимъ вычетомъ по любому модулю и такъ какъ въ ряду чиселъ ± 1, ± 3, ± 4, ± 2, ± 5, ± 6 фигурируютъ всѣ вычеты по модулю 13 (если пользоваться абсолютно наименьшими вычетами), то какъ число n, такъ и числа $n\alpha$ и $n\beta$ непремѣнно будутъ фигурировать либо среди чиселъ α, либо среди чиселъ β. Если же мы условимся обозначать число n черезъ a или черезъ b въ зависимости отъ того, принадлежитъ ли оно къ числамъ α или числамъ β, то въ силу разсужденій, приведенныхъ въ этомъ же пунктѣ относительно произведеній $a\alpha$, $a\beta$, $b\alpha$, $b\beta$, найдемъ, что, если одно изъ чиселъ $n\alpha$, $n\beta$ принадлежитъ къ числамъ α, то другое принадлежитъ къ числамъ β, и наоборотъ.

[19]) Пояснимъ это. Изъ примѣчанія 11-го слѣдуетъ, что можно выбрать три пары чиселъ $\alpha = -1$, $\beta = 2$, $\alpha' = 3$, $\beta' = -2$, $\alpha'' = -4$, $\beta'' = 5$ такъ, чтобы выполнялись сравненія

$$-1 + 2 \equiv 3 - 2 \equiv -4 + 5 \equiv 1,$$

гдѣ $k = 1$. Изъ этихъ сравненій вытекаетъ, что членъ ε^1 повторится, во всякомъ случаѣ, не менѣе трехъ разъ.

Умножая всѣ члены этихъ сравненій на $n = 2$ и замѣняя произведенія $n\alpha$, $n\beta$, $n\alpha'$, $n\beta'$, $n\alpha''$, $n\beta''$ ихъ абсолютно наименьшими вычетами, найдемъ:

$$-2 + 4 \equiv 6 - 4 \equiv 5 - 3 \equiv 2;$$

здѣсь $k = 2$, и мы видимъ, что членъ ε^2 также повторится не менѣе 3 разъ. Точно такъ же можно идти дальше, полагая $n = 3, 4, \ldots$ и приходя послѣдовательно къ членамъ ε^3, ε^4, ...

[20]) Среди которыхъ имѣется 12 различныхъ.

Изъ слѣдующихъ равенствъ легко видѣть, что мы правильно распредѣлили знаки при $\sqrt{13}$:

$$\eta = 2\cos\frac{2\pi}{13} + 2\cos\frac{6\pi}{13} + 2\cos\frac{8\pi}{13} =$$

$$= 2\cos\frac{2\pi}{13} + 2\cos\frac{6\pi}{13} - 2\cos\frac{5\pi}{13},$$

$$\eta_1 = 2\cos\frac{4\pi}{13} - 2\cos\frac{3\pi}{13} - 2\cos\frac{\pi}{13}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, въ первой четверти косинусъ имѣетъ положительное значенiе и большему углу соотвѣтствуетъ меньшiй косинусъ; слѣдовательно, η_1 имѣетъ отрицательное значенiе, а $\eta = -3/\eta_1$ — положительное.

9. Когда η и η_1 найдены, то y опредѣляется изъ кубическаго уравненiя. Дѣйствительно, пусть

$$y = \varepsilon + \varepsilon^{-1}, \quad y_1 = \varepsilon^4 + \varepsilon^{-4}, \quad y_2 = \varepsilon^3 + \varepsilon^{-3},$$

что даетъ:

$$y + y_1 + y_2 = \eta,$$

$$yy_1 + yy_2 + y_1y_2 = \Sigma\varepsilon^k = -1,$$

$$yy_1y_2 = 2 + \eta_1 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}.$$

Слѣдовательно, y, y_1 и y_2 суть корни кубическаго уравненiя

$$y^3 - \eta y^2 - y + \frac{\sqrt{13} - 3}{2} = 0.$$

Это уравненiе имѣетъ два положительныхъ корня и одинъ отрицательный, а именно:

$$2\cos\frac{2\pi}{13}, \quad -2\cos\frac{5\pi}{13}, \quad 2\cos\frac{6\pi}{13};$$

наименьшiй положительный корень $2\cos\frac{6\pi}{13} = 2\sin\frac{\pi}{26}$ даетъ сторону 26-угольника [21]).

10. Можно также сначала составить рацiональное уравненiе третьей степени. Пусть

$$\zeta = \varepsilon + \varepsilon^{-5} + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^5 = 2\cos\frac{2\pi}{13} - 2\cos\frac{3\pi}{13},$$

$$\zeta_1 = \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-3} = 2\cos\frac{4\pi}{13} + 2\cos\frac{6\pi}{13},$$

$$\zeta_2 = \varepsilon^4 + \varepsilon^6 + \varepsilon^{-4} + \varepsilon^{-6} = -2\cos\frac{5\pi}{13} - 2\cos\frac{\pi}{13}.$$

---

[21]) См. равенство (3) § 105-го ($n = 13 = 4 . 3 + 1$).

Непосредственное вычисленіе даетъ:

$$\zeta\zeta_1 = -1 + \zeta_1, \quad \zeta_1\zeta_2 = -1 + \zeta_2, \quad \zeta\zeta_2 = -1 + \zeta,$$

$$\zeta + \zeta_1 + \zeta_2 = -1,$$

$$\zeta\zeta_1 + \zeta\zeta_2 + \zeta_1\zeta_2 = -4,$$

$$\zeta\zeta_1\zeta_2 = -\zeta_2 + \zeta_1\zeta_2 = -1,$$

т. е. ζ, ζ_1 и ζ_2 суть корни уравненія:

$$\zeta^3 - \zeta^2 - 4\zeta + 1 = 0.$$

Если извѣстны корни ζ, ζ_1 и ζ_2 этого уравненія, то

$$y = \varepsilon + \varepsilon^{-1}, \quad y' = \varepsilon^5 + \varepsilon^{-5}$$

опредѣляются, какъ корни квадратнаго уравненія

$$y^2 - \zeta y + \zeta_2 = 0.$$

§ 107. Правильный семнадцатиугольникъ.

1. Доказавъ, что правильный семнадцатиугольникъ можно построить циркулемъ и линейкой, Гауссъ обогатилъ элементарную геометрію очень интереснымъ открытіемъ *).

Если мы захотимъ расположить корни 17-ой степени изъ единицы въ такомъ порядкѣ, чтобы каждый послѣдующій былъ равенъ квадрату предыдущаго, то найдемъ, что такимъ образомъ можно получить только восемь корней:

$$\varepsilon,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^4,\ \varepsilon^8,\ \varepsilon^{-1},\ \varepsilon^{-2},\ \varepsilon^{-4},\ \varepsilon^{-8},$$

ибо ε^{-16} опять равно ε.

Чтобы получить всѣ ε^k, составимъ подобный же рядъ, начинающійся, допустимъ, съ ε^3. Положимъ

$$\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^4 + \varepsilon^8 + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-4} + \varepsilon^{-8} = \eta,$$

$$\varepsilon^3 + \varepsilon^6 + \varepsilon^{-5} + \varepsilon^7 + \varepsilon^{-3} + \varepsilon^{-6} + \varepsilon^5 + \varepsilon^{-7} = \eta_1.$$

*) „Disq. arithmeticae", Sectio septima. Разсказываютъ, что Архимедъ завѣщалъ построить надъ своей могилой памятникъ въ видѣ шара и цилиндра. Подобно Архимеду, Гауссъ выразилъ желаніе, чтобы на его памятникѣ была увѣковѣчена фигура семнадцатиугольника. Этотъ маленькій разсказъ показываетъ, какое значеніе самъ Гауссъ приписывалъ своему открытію. Это желаніе Гаусса не было, однако, достойнымъ образомъ выполнено. На его могильномъ камнѣ этого рисунка нѣтъ, но на памятникѣ, воздвигнутомъ Гауссу въ Брауншвейгѣ, статуя стоитъ на семнадцатиугольникѣ, правда, едва замѣтномъ для зрителя.

Тогда $\eta + \eta_1 = -1$; для произведенія получимъ формулу

$$\eta\eta_1 = \Sigma\varepsilon^{\alpha+\beta},$$

гдѣ α принимаетъ значенія показателей перваго ряда, β — второго. Здѣсь числа α опять суть квадратичные вычеты, а числа β — неквадратичные вычеты по модулю 17. Σ содержитъ 64 члена. Совершенно тѣмъ же путемъ, какъ въ случаѣ 13-угольника, мы заключаемъ что въ суммѣ Σ каждый членъ ε^k повторяется четыре раза. Въ виду этого

$$\eta\eta_1 = -4, \quad \eta + \eta_1 = -1,$$

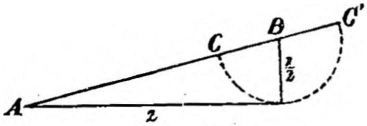
откуда $\eta - \eta_1 = \sqrt{17}$ и, слѣдовательно,

$$\eta = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, \quad \eta_1 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}.$$

Представляя η_1 въ видѣ

$$\eta_1 = 2\cos\frac{6\pi}{17} - 2\cos\frac{5\pi}{17} - 2\cos\frac{7\pi}{17} - 2\cos\frac{3\pi}{17},$$

убѣждаемся, что η_1 имѣетъ отрицательное, а η положительное значеніе. Слѣдовательно, знаки при $\sqrt{17}$ нами взяты правильно.



Фиг. 25.

2. Чтобы построить η и η_1, пользуемся (ср. § 106, 4) тѣмъ, что 17 есть сумма квадратовъ $4^2 + 1^2$. Построимъ прямоугольный треугольникъ съ катетами 2 и $\frac{1}{2}$. Его гипотенуза будетъ $\frac{1}{2}\sqrt{17}$. Прибавляя и отнимая отъ гипотенузы отрѣзокъ $\frac{1}{2}$, получимъ η и $-\eta_1$ ($AC = \eta$, $AC' = -\eta_1$ (фиг. 25)).

Суммы η, η_1 называются **первыми періодами**. При помощи ихъ можно составить четыре **вторыхъ періода**, суммируя члены черезъ одинъ:

$$\zeta = \varepsilon + \varepsilon^4 + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-4} = 2\cos\frac{2\pi}{17} + 2\cos\frac{8\pi}{17},$$

$$\zeta_1 = \varepsilon^2 + \varepsilon^8 + \varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-8} = 2\cos\frac{4\pi}{17} - 2\cos\frac{\pi}{17},$$

$$\zeta_2 = \varepsilon^3 + \varepsilon^{-5} + \varepsilon^{-3} + \varepsilon^5 = 2\cos\frac{6\pi}{17} - 2\cos\frac{7\pi}{17},$$

$$\zeta_3 = \varepsilon^6 + \varepsilon^7 + \varepsilon^{-6} + \varepsilon^{-7} = -2\cos\frac{5\pi}{17} - 2\cos\frac{3\pi}{17}.$$

Складывая и умножая, получимъ:

$$\zeta + \zeta_1 = \eta, \quad \zeta\zeta_1 = -1,$$

$$\zeta_2 + \zeta_3 = \eta_1, \quad \zeta_2\zeta_3 = -1.$$

Отсюда

$$\zeta = \frac{\eta + \sqrt{\eta^2 + 4}}{2}, \quad \zeta_1 = \frac{\eta - \sqrt{\eta^2 + 4}}{2},$$

$$\zeta_2 = \frac{\eta_1 + \sqrt{\eta_1{}^2 + 4}}{2}, \quad \zeta_3 = \frac{\eta_1 - \sqrt{\eta_1{}^2 + 4}}{2}.$$

Имѣя въ виду формулы для ζ въ зависимости отъ косинусовъ, убѣждаемся, что знаки при радикалахъ поставлены правильно. Числа ζ_1 и ζ_3 имѣютъ отрицательныя значенія, а ζ и ζ_2 — положительныя.

Чтобы построить ζ и ζ_1, возьмемъ прямоугольный треугольникъ съ катетами 1 и $\frac{1}{2}\eta$; его гипотенуза будетъ $\frac{1}{2}\sqrt{\eta^2 + 4}$; если прибавимъ къ гипотенузѣ $\frac{1}{2}\eta$ и отнимемъ отъ нея $\frac{1}{2}\eta$, то соотвѣтственно получимъ ζ и $-\zeta_1$. Подобнымъ же образомъ можно построить ζ_2 и ζ_3 по η_1.

Наконецъ, пусть

$$y = \varepsilon + \varepsilon^{-1} = 2\cos\frac{2\pi}{17},$$

$$y_1 = \varepsilon^4 + \varepsilon^{-4} = 2\cos\frac{8\pi}{17};$$

тогда

$$y + y_1 = \zeta, \quad yy_1 = \zeta_2,$$

откуда

$$y = \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 4\zeta_2}}{2}, \quad y_1 = \frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 4\zeta_2}}{2};$$

обѣ эти формулы легко построить. Сторона простого правильнаго 34-угольника есть y_1.

Штаудтъ (v. Staudt) далъ очень изящное построеніе семнадцатиугольника, аналогичное тому, которое онъ предложилъ для построенія правильнаго пятиугольника (Crelle's Journal, томъ 24).

ГЛАВА XIX.

Доказательства невозможности.

§ 108. Построенiе съ помощью циркуля и линейки.

1. Существуетъ цѣлый рядъ изстари знаменитыхъ геометрическихъ задачъ, относительно которыхъ было извѣстно или предполагалось, что онѣ не могутъ быть разрѣшены съ помощью циркуля и линейки. Къ числу этихъ задачъ принадлежатъ, прежде всего, трисекцiя угла, удвоенiе куба, построенiе правильнаго 7-угольника и квадратура круга.

Возможность геометрическаго построенiя съ помощью циркуля и линейки, какъ мы знаемъ (§ 105, 7), алгебраически сводится къ тому, чтобы искомая величина выражалась черезъ данныя съ помощью ряда квадратныхъ корней.

Этому условiю можно придать болѣе простую форму, опираясь на введенное нами въ п. 8 § 69-го понятiе объ области рацiональности и расширенiи этой области путемъ прiобщенiя иррацiональности. Подъ областью рацiональности мы разумѣемъ числовую область, въ предѣлахъ которой всѣ рацiональныя операцiи — сложенiе, вычитанiе, умноженiе и дѣленiе (за исключенiемъ дѣленiя на нуль) — всегда выполнимы и въ результатахъ своихъ даютъ числа, принадлежащiя той же области. Подъ прiобщенiемъ иррацiональности мы разумѣемъ присоединенiе къ данной области новаго числа, не содержащагося въ ней [1]). Такимъ путемъ получается расширенная область, въ которой предыдущая содержится, какъ ея часть. Такъ, съ присоединенiемъ $i = \sqrt{-1}$ къ области рацiональныхъ чиселъ получается область комплексныхъ чиселъ $x + yi$, гдѣ x и y суть рацiональныя числа.

---

[1]) См. примѣчанiе 7-ое на стр. 273, 274 и 275.

Послѣ этихъ замѣчаній свойство, характеризующее величины, построеніе которыхъ возможно съ помощью циркуля и линейки, можно выразить такъ:

Каждая величина x, которая можетъ быть построена при помощи циркуля и ленейки, должна содержаться въ области раціональности, которая получится, если къ области данныхъ величинъ послѣдовательно пріобщить рядъ квадратныхъ корней.

Порядокъ, въ которомъ пріобщаются эти квадратные корни, иногда не имѣетъ значенія. Такъ, напримѣръ, если дѣло идетъ о суммѣ $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$, то совершенно безразлично, какой изъ этихъ корней мы извлечемъ раньше; напротивъ, въ выраженіи $\sqrt{\alpha+\beta\sqrt{\gamma}}$ непремѣнно нужно сначала найти $\sqrt{\gamma}$ и тогда только можно найти $\sqrt{\alpha+\beta\sqrt{\gamma}}$.

Положимъ, что порядокъ пріобщенія установленъ. Назовемъ черезъ $\sqrt{\theta}$ тотъ корень, который пріобщается послѣднимъ. Область раціональности, въ которой еще не содержится $\sqrt{\theta}$, назовемъ предпослѣдней областью раціональности.

Такимъ образомъ, $\sqrt{\theta}$ въ предпослѣдней области раціональности не содержится, но всѣ четныя степени $\sqrt{\theta}$ содержатся въ ней; слѣдовательно, каждая построяемая циркулемъ и линейкой величина x можетъ быть представлена въ видѣ:

$$x=\frac{a+b\sqrt{\theta}}{c+d\sqrt{\theta}},$$

гдѣ a, b, c и d суть величины, содержащіяся въ предпослѣдней области раціональности. Помножая числителя и знаменателя этой дроби на $c-d\sqrt{\theta}$, получимъ:

$$x=\frac{(a+b\sqrt{\theta})(c-d\sqrt{\theta})}{c^2-d^2\theta}.$$

Если положимъ:

$$y=\frac{ac-bd\theta}{c^2-d^2\theta},\quad z=\frac{bc-ad}{c^2-d^2\theta},$$

то

$$x=y+z\sqrt{\theta},$$

гдѣ y и z суть величины, содержащіяся въ предпослѣдней области раціональности [2]). Знаменатель $c^2-d^2\theta$ не можетъ сводиться къ нулю, такъ

---

[2]) Въ примѣчаніи 7-омъ на стр. 273 это выяснено по отношенію къ радикалу $\sqrt{2}$.

какъ θ не можетъ быть квадратомъ величины, принадлежащей предпослѣдней области раціональности.

2. Изъ полученнаго для x выраженія слѣдуетъ, что x есть корень квадратнаго уравненія

$$x^2 - 2yx + (y^2 - \theta z^2) = 0,$$

которое мы обозначимъ также черезъ

$$f(x) = 0.$$

Коэффиціенты этого уравненія содержатся въ предпослѣдней области раціональности. Если $\sqrt{\theta_1}$ есть предпослѣдній изъ пріобщенныхъ корней, то уравненіе $f(x) = 0$ можно представить еще такъ:

$$f(x) = \varphi(x) + \sqrt{\theta_1}\,\psi(x) = 0.$$

Помноживъ это уравненіе на $\varphi - \sqrt{\theta_1}\,\psi$, получимъ уравненіе четвертой степени

$$f_1(x) = \varphi(x)^2 - \theta_1 \psi(x)^2 = 0,$$

въ которое не входитъ и предпослѣдній радикалъ $\sqrt{\theta_1}$. Послѣднее уравненіе, въ свою очередь, можетъ быть представлено въ видѣ:

$$f_1(x) = \varphi_1(x) + \sqrt{\theta_2}\,\psi_1(x) = 0,$$

гдѣ $\sqrt{\theta_2}$ есть предыдущій (предпредпослѣдній) квадратный корень. Подобно прежнему мы можемъ составить новое уравненіе 8-ой степени

$$f_2(x) = \varphi_1(x)^2 - \theta_2 \psi_1(x)^2 = 0.$$

Очевидно, мы можемъ такъ продолжать, пока не исключимъ всѣхъ пріобщенныхъ квадратныхъ корней. Мы пришли къ теоремѣ:

Каждая величина x, построяемая циркулемъ и линейкой, представляетъ собой корень нѣкотораго алгебраическаго уравненія, коэффиціенты котораго раціональны по отношенію къ даннымъ величинамъ.

Теорема эта, конечно, не обратима; въ самомъ дѣлѣ, не каждое алгебраическое уравненіе рѣшается съ помощью ряда квадратныхъ корней.

§ 109. Кубическое уравненіе не разрѣшается съ помощью квадратныхъ корней.

1. Какъ было показано раньше (§ 91, 3), кубическое уравненіе можно представить въ упрощенномъ видѣ:

$$x^3 + ax = b, \tag{1}$$

не прибѣгая къ извлеченію корня. Пусть a и b будутъ данныя раціональныя числа. Обозначимъ корни уравненія (1) черезъ x_1, x_2, x_3; тогда, согласно п. 1 § 70-го,

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0. \tag{2}$$

Предположимъ, что одинъ изъ этихъ корней — скажемъ, x_1 — выражается съ помощью ряда квадратныхъ корней. Пусть $\sqrt{\theta}$ будетъ послѣднимъ корнемъ. По предыдущему параграфу

$$x_1 = y + z\sqrt{\theta}, \tag{3}$$

гдѣ y, z, θ принадлежатъ предпослѣдней области раціональности. Напротивъ того, относительно радикала $\sqrt{\theta}$ мы можемъ предположить, что онъ не принадлежитъ этой области, и что z отлично отъ нуля.

Подставимъ выраженіе (3) въ уравненіе (1); мы получимъ равенство вида:

$$A + B\sqrt{\theta} = 0,$$

гдѣ

$$A = y^3 + 3yz^2\theta + ay - b,$$
$$B = 3y^2z + z^3\theta + az,$$

такъ что количества A и B выражаются раціонально черезъ предшествующіе квадратные корни. Но такъ какъ $\sqrt{\theta}$ не долженъ выражаться раціонально въ предыдущихъ радикалахъ, то $A = 0$ и $B = 0$. Отсюда слѣдуетъ, что уравненіе (1) имѣетъ также корень

$$x_2 = y - z\sqrt{\theta}\ ^{3)}.$$

Такъ какъ z отлично отъ 0, то этотъ корень не равенъ x_1. Изъ соотношенія (2) получаемъ:

$$x_3 = -(x_1 + x_2) = -2y.$$

Это значитъ, что третій корень x_3 зависитъ только отъ предшествующихъ радикаловъ.

Если x_3 не представляетъ собой раціональнаго числа, то долженъ существовать $\sqrt{\theta_1}$, предшествующій радикалу $\sqrt{\theta}$; вмѣстѣ съ тѣмъ

$$x_3 = y_1 + z_1\sqrt{\theta_1}.$$

---

[3]) Если бы мы подставили x_2 въ лѣвую часть уравненія (1), то мы получили бы $A - B\sqrt{\theta}$, а такъ какъ $A = B = 0$, то x_2 есть корень уравненія (1).

Совершенно такъ же, какъ это было сдѣлано выше, мы можемъ теперь обнаружить, что одинъ изъ двухъ другихъ корней — скажемъ, x_1 — равняется $-2y_1$, т. е. не зависитъ ни отъ $\sqrt{\theta}$, ни отъ $\sqrt{\theta_1}$; въ виду соотношенія (3), это противорѣчитъ нашему предположенію, что $\sqrt{\theta}$ не выражается раціонально черезъ предыдущіе радикалы. Наше разсужденіе привело къ слѣдующей теоремѣ:

Кубическое уравненіе съ раціональными коэффиціентами, не имѣющее раціональныхъ корней, не можетъ быть рѣшено съ помощью извлеченія квадратныхъ корней [1]).

2. Это теорема непосредственно прилагается къ задачѣ объ удвоеніи куба, которая приводится къ уравненію $x^3 = 2$, а также къ задачамъ о построеніи семиугольника и девятиугольника. Въ самомъ дѣлѣ, уравненія, къ которымъ приводятся эти задачи, суть (§ 106, 6, 7):

$$y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0, \quad y^3 - 3y + 1 = 0.$$

Согласно теоремѣ п. 1 § 68-го, раціональными корнями этихъ уравненій могли бы служить только числа $+1$ или -1, которыя имъ, однако, не удовлетворяютъ.

3. Трисекція угла приводитъ къ уравненію (§ 91, 1)

$$x^3 - 3x = 2\cos\vartheta. \tag{4}$$

Если $\cos\vartheta$ дано, то можно построить уголъ ϑ.

Пусть $2\cos\vartheta = a$; тогда уравненіе (4) приметъ видъ:

$$x^3 - 3x = a; \tag{5}$$

задачу можно понимать такъ: по двумъ произвольно заданнымъ отрѣзкамъ, изъ которыхъ одинъ есть единица длины, а другой равенъ a, построить отрѣзокъ x. Имѣется безконечное множество частныхъ значеній a, при которыхъ задача разрѣшима; напримѣръ, для $a = 0$ (трисекція

---

[1]) Укажемъ еще разъ для большей ясности основные моменты доказательства. Допуская, что уравненіе (1) имѣетъ корень вида (3), авторъ обнаруживаетъ, что оно необходимо имѣетъ корень $x_3 = -2y$, который отъ радикала $\sqrt{\theta}$ не зависитъ. Если бы уравненіе (1) разрѣшалось при помощи квадратныхъ корней, то x_3 либо было бы раціональнымъ числомъ, либо зависѣло бы отъ предыдущаго радикала $\sqrt{\theta_1}$. Но въ такомъ случаѣ одинъ изъ корней x_1, x_2 не зависѣлъ бы ни отъ $\sqrt{\theta_1}$, ни отъ $\sqrt{\theta}$; а это противорѣчитъ условію, такъ какъ

$$x_1 = y + z\sqrt{\theta}, \quad x_2 = y - z\sqrt{\theta},$$

гдѣ z отлично отъ нуля.

прямого угла), для $a = \sqrt{2}$ (трисекція угла въ 45^0) или для $a = 2\cos\frac{3\pi}{17}$; чтобы найти другіе случаи, при которыхъ можно построить x, нужно взять какой-нибудь отрѣзокъ α, построенный изъ нашей единицы длины, и взять a равнымъ $\alpha^3 - 3\alpha$. Тогда $x = \alpha$ будетъ корнемъ нашего уравненія.

Положимъ теперь, что a остается неопредѣленнымъ. Тогда уравненіе (5), какъ выше было доказано, разрѣшается посредствомъ извлеченія квадратнаго корня только въ томъ случаѣ, если оно имѣетъ **одинъ** корень, выражающійся раціонально черезъ a.

Что это обстоятельство въ общемъ случаѣ не имѣетъ мѣста, видно изъ того, что можно придумать безконечное множество раціональныхъ значеній для a, при которыхъ это уравненіе не имѣетъ раціональныхъ корней. Таково, напримѣръ, значеніе $a = -1$, для котораго $\vartheta = \pi/3$, а $x = 2\cos\pi/9$. Этотъ частный случай приводитъ насъ къ построенію правильнаго девятиугольника, что, какъ мы видѣли, невозможно.

Чтобы найти другіе случаи этого рода, положимъ

$$\cos\vartheta = m : n, \quad nx = y,$$

гдѣ m и n суть цѣлыя числа, не имѣющія общихъ дѣлителей. Тогда уравненіе (4) можно представить въ видѣ:

$$y^3 - 3n^2y = 2mn^2. \tag{6}$$

Если уравненіе (4) имѣетъ раціональный корень, то уравненіе (6) должно имѣть цѣлый корень. Это невозможно, напримѣръ, въ томъ случаѣ, если n дѣлится на нечетное простое число p, но не дѣлится на его квадратъ. Дѣйствительно, тогда y, а, слѣдовательно, и вся лѣвая часть уравненія (6) будетъ дѣлиться на p^3, а правая будетъ дѣлиться только на p^2.

§ 110. Разложеніе функціи съ помощью пріобщенія радикала.

1. Чтобы развить дальнѣйшія примѣненія этой теоріи къ алгебрѣ, докажемъ сначала слѣдующую теорему:

Если n есть простое число, а число a принадлежитъ области раціональности, въ которой мы оперируемъ, но не представляетъ собой n-ой степени другого числа, принадлежащаго этой области, то функція

$$\varphi(x) = x^n - a$$

неприводима въ этой области [5]).

[5]) См. примѣчаніе 7 на стр. 273, 274 и 275.

Для $n = 2$ теорема эта очевидна; дѣйствительно, для $n = 2$

$$\varphi(x) = (x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}).$$

Оба множителя раціональны только въ томъ случаѣ, если $\sqrt{a}$ есть число раціональное [6]).

Условимся при нечетномъ n подъ символомъ $\sqrt[n]{a} = r$ понимать какое-либо одно опредѣленное значеніе изъ n различныхъ значеній корня, —напримѣръ, если a есть вещественное число, то вещественное значеніе корня. Подъ ε будетъ разумѣть слѣдующій корень n-ой степени изъ единицы:

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}.$$

Въ такомъ случаѣ всѣ корни n-ой степени изъ a выразятся такимъ образомъ:

$$r,\ \varepsilon r,\ \varepsilon^2 r,\ \ldots,\ \varepsilon^{n-1} r. \tag{1}$$

Если $\varphi(x)$ разлагается на два множителя, именно, если $\varphi(x) = \varphi_1(x)\varphi_2(x)$, при чемъ степень μ функціи $\varphi_1(x) = x^\mu + b_1 x^{\mu-1} + \cdots + b_\mu$ ниже степени n функціи $\varphi(x)$, то корни функціи $\varphi_1(x)$ содержатся между корнями (1) функціи $\varphi(x)$. Такъ какъ $b = (-1)^\mu b_\mu$ равно произведенію корней функціи $\varphi_1(x)$ (§ 70), то

$$b = \varepsilon^k r^\mu, \quad a = r^n,$$

гдѣ k есть цѣлое число, а b принадлежитъ нашей области раціональности [7]). Возвысимъ въ n-ую степень первое изъ этихъ равенствъ. Принимая во вниманіе второе, получимъ:

$$b^n = a^\mu. \tag{2}$$

Такъ какъ μ меньше простого числа n, то оно представляетъ собой число простое относительно n. Можно поэтому найти два цѣлыхъ числа p и q, удовлетворяющихъ равенству $pn + q\mu = 1$ (§ 76). Сообразно этому, равенство (2) даетъ:

$$a = a^{pn} a^{q\mu} = (a^p b^q)^n,$$

т. е. a есть n-ая степень числа, принадлежащаго нашей области раціональности. Это и нужно было доказать.

---

[6]) Вѣрнѣе, если $\sqrt{a}$ принадлежитъ нашей области раціональности.

[7]) Въ самомъ дѣлѣ, числа (1) суть всѣ n корней уравненія $x^n - a = 0$; число же b равно произведенію μ изъ нихъ, т. е. число b можетъ быть представлено въ видѣ $\varepsilon^k r^\mu$.

2. Итакъ, пусть a будетъ число, которое не представляетъ собой n-ой степени никакого числа, принадлежащаго области раціональности; тогда функція $\varphi(x) = x^n - a$, слѣдовательно, будетъ неприводимой въ этой области. Если при этихъ условіяхъ $\chi(x)$ есть цѣлая функція отъ x, принадлежащая нашей области раціональности, то $\chi(r)$ только въ томъ случаѣ обращается въ нуль, если $\chi(x)$ дѣлится на $\varphi(x) = x^n - a$, ибо изъ равенства $\chi(r) = 0$, согласно п. 8 § 69-го, вытекаетъ, что $\chi(x)$ дѣлится на $\varphi(x)$. Если же $\chi(r)$ отлично отъ нуля и, стало быть, $\chi(x)$ и $\varphi(x)$ суть функціи взаимно-простыя, и если, кромѣ того, $\psi(x)$ есть любая цѣлая функція, принадлежащая области раціональности, то по п. 5 § 67-го можно опредѣлить двѣ функціи $F(x)$ и $F_1(x)$, удовлетворяющія равенству

$$F(x)\chi(x) + F_1(x)\varphi(x) = \psi(x); \tag{3}$$

слѣдовательно, если положимъ $x = r$, т. е. $\varphi(r) = 0$, то

$$\frac{\psi(r)}{\chi(r)} = F(r). \tag{4}$$

Такимъ образомъ, $F(r)$ есть общій видъ чиселъ, получающихся изъ r и чиселъ нашей области раціональности съ помощью первыхъ четырехъ дѣйствій. Кромѣ того, степени числа r, показатели которыхъ превышаютъ $n - 1$, могутъ быть выражены черезъ низшія степени съ помощью равенства $r^n = a$; слѣдовательно, каждое число ω, принадлежащее области раціональности, полученной изъ первоначальной пріобщеніемъ числа r, можетъ быть представлено въ видѣ:

$$\omega = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \cdots + a_{n-1} r^{n-1}, \tag{5}$$

гдѣ $a_0, \ldots, a_{n-1}$ суть числа, принадлежащія первоначальной области раціональности [8]). Это можно выполнить только однимъ способомъ; въ

---

[8]) Чтобы уяснить сущность и доказательство этого вывода, мы проведемъ разсужденіе въ нѣсколько иномъ порядкѣ.

Обозначимъ черезъ P нашу область раціональности, которой, по условію, принадлежитъ число a, но не принадлежитъ число $r = \sqrt[n]{a}$. Расширимъ теперь нашу область путемъ пріобщенія къ ней числа r. Какъ было выяснено въ примѣчаніи на стр. 274, это значитъ, что мы присоединимъ къ области P всѣ числа, которыя мы можемъ получить путемъ производства раціональныхъ дѣйствій надъ числомъ r и числами области P. Согласно этому опредѣленію, каждое число, принадлежащее расширенной области $P(r)$, имѣетъ видъ:

$$\frac{a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + a_3 r^3 + \cdots + a_p r^p}{b_0 + b_1 r + b_2 r^2 + b_3 r^3 + \cdots + b_q r^q},$$

самомъ дѣлѣ, если бы существовала другая система чиселъ a'_0, a'_1, a'_2, ..., a'_{n-1}, принадлежащихъ первоначальной области ирраціональности, отличная отъ первой и удовлетворяющая равенству

$$\omega = a'_0 + a'_1 r + a'_2 r^2 + \cdots + a'_{n-1} r^{n-1},$$

то, вычитая это равенство изъ предыдущаго, мы нашли бы, что существуетъ ур-іе $(n-1)$-ой или низшей степени, имѣющее корень r, что противорѣчитъ п. 1-му [9]).

3. Обозначимъ корни функціи $\varphi(x)$, т. е. числа (1), черезъ

$$r, \ r_1, \ r_2, \ \ldots, \ r_{n-1}.$$

Припомнимъ теперь Ньютоновы формулы, выражающія суммы одинаковыхъ степеней корней функціи (§ 71, (6)). Такъ какъ въ этомъ случаѣ коэффиціенты

$$a_1, \ a_2, \ \ldots, \ a_{n-1}$$

равны нулю, то формулы эти даютъ:

$$r^\nu + r_1^\nu + r_2^\nu + \cdots + r_{n-1}^\nu = 0 \, (\nu = 1, \ 2, \ \ldots, \ n-1). \tag{6}$$

гдѣ a_0, a_1, ..., a_p и b_0, b_1, ..., b_q суть числа, принадлежащія области P, а p и q суть цѣлыя числа, не превышающія $n-1$. Теперь положимъ

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_p x^p = \psi(x),$$
$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots + b_q x^q = \chi(x);$$

тогда наше число можетъ быть выражено дробью

$$\frac{\psi(r)}{\chi(r)}. \tag{α}$$

Замѣтимъ еще разъ (хотя это уже выяснено въ текстѣ), что ни одна изъ функцій $\psi(x)$ и $\chi(x)$ не дѣлится на $\varphi(x) = x^n - a$. Въ самомъ дѣлѣ, если бы функція $\psi(x)$ дѣлилась на $\varphi(x)$, то $\psi(r)$ было бы равно 0, а вмѣстѣ съ тѣмъ и дробь (α) обращалась бы въ нуль; если бы на $\varphi(x)$ дѣлилась функція $\chi(x)$, то $\chi(r)$ обращалось бы въ 0, и дробь (α) не имѣла бы смысла. Но если функціи $\psi(x)$ и $\chi(x)$ не дѣлятся на $\varphi(x)$, то онѣ и не имѣютъ съ послѣдней никакихъ общихъ множителей, такъ какъ функція $\varphi(x)$ неприводима въ области P. Поэтому можно удовлетворить уравненію (3), что ведетъ къ соотношенію (4). Итакъ, дробь (α) можетъ быть представлена въ видѣ

$$F(r) = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + a_3 r^3 + \cdots + a_{n-1} r^{n-1},$$

гдѣ числа a_0, a_1, a_2, ... принадлежатъ области P. Итакъ, всякое число ω, принадлежащее области $P(r)$, можетъ быть представлено въ формѣ (5), гдѣ a_0, a_1, ..., a_{n-1} суть числа области P.

[9]) Ибо, если бы нѣкоторая функція $F(x)$ имѣла одинъ изъ корней неприводимой функціи $\varphi(x)$, то функція $F(x)$ дѣлилась бы нацѣло на функцію $\varphi(x)$, и, слѣдовательно, степень функціи $F(x)$ не могла бы быть ниже степени функціи $\varphi(x)$.

Замѣнимъ въ выраженіи (5) r послѣдовательно черезъ

$$r, r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}.$$

Тогда мы получимъ n чиселъ

$$\omega, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}, \tag{7}$$

которыя мы назовемъ сопряженными относительно функціи $\varphi(x) = x^n - a$. Въ виду соотношеній (6) сумма

$$S(\omega) = \omega + \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_{n-1} = n a_0$$

есть величина раціональная. Эта сумма называется слѣдомъ числа ω. Съ другой стороны, такъ какъ ω^ν при цѣломъ показателѣ ν представляетъ собой число того же вида (5), что и ω, то и

$$S(\omega^\nu) = \omega^\nu + \omega_1^\nu + \omega_2^\nu + \cdots + \omega_{n-1}^\nu$$

представляетъ собой раціональную величину.

Отсюда мы заключаемъ далѣе, что всѣ коэффиціенты A_i произведенія

$$F(x) = (x - \omega)(x - \omega_1) \ldots (x - \omega_{n-1}) =$$
$$= x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \cdots + A_n,$$

выражающіеся съ помощью формулъ Ньютона раціонально черезъ суммы $S(\omega^\nu)$, принадлежатъ нашей области раціональности. Въ частности, произведеніе

$$N(\omega) = \omega\omega_1\omega_2 \ldots \omega_{n-1} = (-1)^n A_n,$$

называемое нормомъ числа ω, содержится въ области раціональности.

4. Въ частномъ случаѣ, когда

$$\omega = \omega_1 = \omega_2 = \cdots = \omega_{n-1},$$

то $S(\omega) = n\omega = n a_0$ и, стало быть, ω тоже содержится въ области раціональности; и наоборотъ, если ω содержится въ той же области раціональности, то $\omega = a_0$, а потому всѣ сопряженныя значенія (7) равны между собой [10]).

---

[10]) Если ω принадлежитъ той же области раціональности, то въ равенствѣ (5) правая часть приводится къ a_0, коэффиціенты же $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ всѣ равны нулю. Дѣйствительно, если бы эти коэффиціенты не обращались всѣ въ нуль, то число r было бы корнемъ уравненія

$$a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + (a_0 - \omega) = 0,$$

Необходимымъ и достаточнымъ условіемъ того, чтобы самое число ω содержалось въ области раціональности, является равенство всѣхъ сопряженныхъ значеній ω.

Замѣтимъ, что эта теорема представляетъ собой частный случай общей теоремы о симметрическихъ функціяхъ.

5. Напомнимъ, наконецъ, еще одну теорему, которая, въ силу п. 8 § 69-го, вытекаетъ изъ допущенія, что $\varphi(x) = x^n - a$ есть неприводимая функція. Эта теорема заключается въ слѣдующемъ: если имѣетъ мѣсто какое-нибудь равенство $F(r) = 0$ съ коэффиціентами, содержащимися въ области раціональности, то должны быть также справедливы равенства:

$$F(r_1) = 0, \quad F(r_2) = 0, \ \ldots, \ F(r_{n-1}) = 0$$ [11]).

6. Предположимъ, что нѣкоторая цѣлая функція $f(x)$ неприводима въ области раціональности, но становится приводимой, если къ этой области пріобщимъ одинъ изъ корней r функціи $\varphi(x)$. Мы предположимъ также, что степени функцій $f(x)$ и $\varphi(x)$ выражаются простыми числами m и n. Коэффиціентъ при высшей степени x въ функціи $f(x)$ положимъ равнымъ 1.

Разложеніе функціи $f(x)$ на двухъ множителей въ расширенной области раціональности представимъ въ такомъ видѣ:

$$f(x) = f_1(x, r) f_2(x, r);$$

здѣсь $f_1(x, r)$ и $f_2(x, r)$ суть цѣлыя функціи степеней m_1 и m_2; ихъ коэффиціенты выражаются раціонально черезъ r и, слѣдовательно, суть числа вида ω [12]). Пусть и въ функціяхъ f_1 и f_2 коэффиціенты при высшихъ степеняхъ x будутъ равны 1.

всѣ коэффиціенты котораго принадлежатъ той же области раціональности, а степень котораго ниже n. Но это невозможно, такъ какъ r есть корень уравненія n-ой степени $\varphi(x) = 0$, неприводимаго въ нашей области. Если же

$$a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_{n-1} = 0,$$

то всѣ сопряженпыя значенія (7) равны между собой.

[11]) Если $F(r) = 0$, то функціи $F(x)$ и $\varphi(x)$ имѣютъ общій корень. Но въ такомъ случаѣ $F(x)$ дѣлится на $\varphi(x)$ (§ 69, 8).

[12]) Если мы расширимъ нашу область раціональности P пріобщеніемъ корня r, то въ области $P(r)$ функція $f(x)$ разлагается на множителей f_1 и f_2. Коэффиціентами этихъ функцій служатъ числа области $P(r)$, которыя, какъ было сказано выше, приводятся къ виду (5). Вотъ почему эти функціи и могутъ быть обозначены символами $f_1(x, r)$ и $f_2(x, r)$.

По теоремѣ п. 5-го должны также имѣть мѣсто тождества:

$$f(x)=f_1(x;\ r_1)f_2(x,\ r_1),$$
$$f(x)=f_1(x,\ r_2)f_2(x,\ r_2),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f(x)=f_1(x,\ r_{n-1})f_2(x,\ r_{n-1}).$$

Перемножимъ всѣ эти равенства и положимъ

$$F_1(x)=f_1(x,\ r)f_1(x,\ r_1)\ \dots\ f_1(x,\ r_{n-1})=Nf_1(x,\ r),$$
$$F_2(x)=f_2(x,\ r)f_2(x,\ r_1)\ \dots\ f_2(x,\ r_{n-1})=Nf_2(x,\ r).$$

Въ результатѣ получимъ:

$$f(x)^n=F_1(x)\,F_2(x); \tag{8}$$

здѣсь $F_1(x)$ и $F_2(x)$ суть цѣлыя функцiи степеней nm_1, nm_2; ихъ коэффицiенты, какъ симметрическiя функцiи корней уравненiя $\varphi(x)=0$, содержатся въ нашей области рацiональности.

Мы предположили, что функцiя $f(x)$ неприводима; слѣдовательно, въ виду соотношенiя (8), $F_1(x)$ и $F_2(x)$ также должны быть степенями функцiи $f(x)$. Пусть

$$F_1(x)=f(x)^{p_1},\quad F_2(x)=f(x)^{p_2}.$$

Приравнивая показателей, получимъ:

$$mp_1=nm_1,\quad mp_2=nm_2,\quad m_1+m_2=m.$$

Такъ какъ числа m_1 и m_2 меньше m и, слѣдовательно, не дѣлятся на m, то n должно дѣлиться на m; а такъ какъ m и n суть числа простыя, то $m=n$. Мы доказали, такимъ образомъ, слѣдующую теорему:

Неприводимая функцiя $f(x)$, степень которой m есть простое число, можетъ стать приводимой благодаря прiобщенiю радикала, показатель котораго n также представляетъ собой простое число, только въ томъ случаѣ, если $m=n$.

§ 111. Неприводимый случай при рѣшенiи кубическаго уравненiя.

Если кубическое уравненiе имѣетъ три вещественныхъ корня, то послѣднiе, по формулѣ Кардана, выражаются въ видѣ суммы двухъ мнимыхъ радикаловъ. Это было замѣчено уже очень давно и потому этотъ случай кубическаго уравненія названъ неприводимымъ (casus irreducibilis); терминъ этотъ здѣсь нужно, конечно, понимать не въ томъ смыслѣ, въ какомъ его понимаютъ теперь.

Опираясь на предложеніе предыдущаго параграфа, не трудно доказать слѣдующую теорему:

Неприводимое кубическое уравненіе съ тремя вещественными корнями и раціональными коэффиціентами не можетъ быть разрѣшено съ помощью вещественныхъ радикаловъ.

Если неприводимое уравненіе, коэффиціенты котораго мы считаемъ раціональными, имѣетъ корень, выражающійся съ помощью ряда радикаловъ, то послѣдовательныхъ показателей этихъ корней мы можемъ считать простыми числами. Дѣйствительно, корень съ составнымъ показателемъ $r=\sqrt[m]{\theta}$, гдѣ $m=pq$, можно замѣнить черезъ $r=\sqrt[p]{\sqrt[q]{\theta}}$, т. е. мы можемъ его замѣнить нѣсколькими послѣдовательными радикалами съ простыми показателями. Будемъ пріобщать къ областн раціональности по порядку всѣ эти радикалы до предпослѣдняго; при этомъ уравненіе не разложится. Присоединивъ же послѣдній радикалъ r, мы получимъ разложеніе нашего уравненія. По п. 6 предыдущаго параграфа въ нашемъ случаѣ это должно наступить при пріобщеніи радикала третьей степени. Сообразно этому одинъ изъ корней нашего уравненія выразится такъ:

$$x_1=a+br+cr^2,$$

гдѣ a, b и c выражаются раціонально черезъ радикалы, введенные раньше, между тѣмъ какъ $r=\sqrt[3]{\theta}$ такимъ образомъ не выражается; слѣдовательно, θ не можетъ быть кубомъ нѣкотораго количества α, содержащагося въ области раціональности; дѣйствительно, изъ трехъ значеній α, $\varepsilon\alpha$ и $\varepsilon^2\alpha$, которыя въ этомъ случаѣ могъ бы имѣть корень r, вещественнымъ будетъ только α; и тогда вещественное число r должно было бы равняться α, а это противорѣчитъ предположенію. Изъ этого слѣдуетъ, что числа

$$x_2=a+\varepsilon rb+\varepsilon^2r^2c,$$
$$x_3=a+\varepsilon^2rb+\varepsilon r^2c$$

также будутъ корнями нашего кубическаго уравненія; дѣйствительно, изъ теоремы п. 5-го предыдущаго параграфа слѣдуетъ, что вмѣстѣ съ $f(x_1)$ должны обращаться въ нуль также $f(x_2)$ и $f(x_3)$. Далѣе,

$$\varepsilon=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2},\quad \varepsilon^2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2};$$

а такъ какъ a, b и c суть вещественныя числа, то x_2 и x_3 могутъ быть вещественными только въ томъ случаѣ, если

$$rb=r^2c.$$

Числа b и c не могутъ быть нулями, ибо тогда вышло бы, что $x_1 = a$, т. е. функція $f(x)$ дѣлилась бы на $x - a$, — иначе говоря, была бы приводимой еще до пріобщенія радикала r. Но въ такомъ случаѣ $r = b/c$, т. е. r выражается раціонально черезъ прежніе радикалы, что противорѣчитъ предположенію [13]).

§ 112. Выраженіе корней изъ единицы при помощи радикаловъ.

1. Въ п. 1 § 110-го было показано, что функція $\varphi(x) = x^n - a$, степень которой n есть число простое, неприводима въ той области, которой принадлежитъ число a, если послѣднее не представляетъ собой n-ой степени числа b, принадлежащаго той же области. При этихъ условіяхъ

---

[13]) Выяснимъ подробнѣе эго доказательство.

Положимъ, что коэффиціенты уравненія третьей степени $f(x) = 0$, имѣющаго три вещественныхъ корня, принадлежатъ нѣкоторой области раціональности P, содержащей исключительно вещественныя числа. Мы предполагаемъ уравненіе неприводимымъ и допускаемъ, что оно имѣетъ корень, который выражается при помощи ряда вещественныхъ радикаловъ. Это значитъ, что, если мы пріобщимъ къ области P послѣдовательно нѣкоторый рядъ радикаловъ съ простыми показателями

$$\sqrt[m_1]{\theta_1},\quad \sqrt[m_2]{\theta_2},\quad \sqrt[m_3]{\theta_3},\ \ldots,\quad \sqrt[m_{n-1}]{\theta_{n-1}},\quad \sqrt[m_n]{\theta_n},$$

имѣющихъ вещественныя значенія, то мы получимъ области $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{n-1}, P_n$; въ послѣдней изъ нихъ содержится корень нашего уравненія. Каждое количество θ_k есть число, принадлежащее области P_{k-1}, но $\sqrt[m_k]{\theta_k}$ этой области не принадлежитъ. Въ области P_n функція $f(x)$ разлагается на множителей, но въ области P_{n-1} она еще неприводима, иначе пріобщеніе корня $\sqrt[m_n]{\theta_n}$ было бы излишнимъ: уравненіе имѣло бы корень, который выражался бы при помощи предыдущихъ радикаловъ. Отсюда мы заключаемъ (§ 110, 6), что $m_n = 3$; вмѣстѣ съ тѣмъ, какъ было показано въ пунктѣ 2 предыдущаго параграфа, корень нашего уравненія, принадлежащій области P_n, выражается формулой

$$x_1 = a + br + cr^2,$$

гдѣ a, b и c суть числа области P_{n-1}, а $r = \sqrt[3]{\theta_n}$ есть послѣдній пріобщаемый радикалъ. Два другія значенія того же радикала r_1, r_2, какъ выяснено въ текстѣ, суть числа мнимыя, а вмѣстѣ съ тѣмъ и два другіе корня нашего уравненія

$$x_2 = a + br_1 + cr_1^2,$$
$$x_3 = a + br_2 + cr_2^2$$

уравненіе вида $x^n - a = 0$ называется двучленнымъ уравненіемъ [14]), а его корень $\sqrt[n]{a}$ называется радикаломъ n-ой степени этой области.

Говорятъ, что число можетъ быть выражено при помощи радикаловъ, если оно принадлежитъ области раціональности, которая получается путемъ послѣдовательнаго пріобщенія къ совокупности всѣхъ раціональныхъ чиселъ радикаловъ. принадлежащихъ каждый разъ соотвѣтственно предшествующей области.

Число, которое выражается въ радикалахъ, называется метациклическимъ числомъ; точно такъ же уравненіе, которое разрѣшается въ радикалахъ, называется метациклическимъ уравненіемъ.

2. Къ метациклическимъ числамъ принадлежатъ корни изъ единицы. Именно, мы докажемъ слѣдующую теорему:

Независимо отъ того, представляетъ ли собою m число простое или составное, корни m-ой степени изъ единицы выражаются въ радикалахъ, показатели которыхъ ниже m.

3. Корни m-ой степени изъ 1 суть корни уравненія m-ой степени

$$x^m - 1 = 0.$$

Какъ мы видѣли въ § 105, всѣ они содержатся въ формулѣ:

$$r^k = \cos\frac{2\pi k}{m} + i\sin\frac{2\pi k}{m},$$

гдѣ

$$r = \cos\frac{2\pi}{m} + i\sin\frac{2\pi}{m},$$

а k принимаетъ значенія $0, 1, 2, \ldots, m-1$.

Если числа k и m имѣютъ общаго наибольшаго дѣлителя d, который больше 1, при чемъ $k = dk'$, $m = dm'$, то

$$r^k = \cos\frac{2\pi k'}{m'} + i\sin\frac{2\pi k'}{m'}.$$

должны быть мнимыми числами, коль скоро r не принадлежитъ области P_{n-1}. Это противорѣчитъ условію, что наше уравненіе имѣетъ исключительно вещественные корни.

[14]) Авторъ употребляетъ терминъ „die reine Gleichung", принадлежащій Кронекеру и получившій въ послѣднее время распространеніе въ нѣмецкой литературѣ. Такъ какъ самъ Кронекеръ говоритъ „die reine oder binomische Gleichung" (Berichte der Berl. Acad. 1878, p.p. 151, 152), то мы предпочли терминъ „двучленное уравненіе".

Въ этомъ случаѣ r^k представляетъ собой также корень изъ 1 степени m'.

Если же k есть число простое относительно m, то

$$r^{kh} = \cos\frac{2\pi kh}{m} + i\sin\frac{2\pi kh}{m}$$

можетъ только въ томъ случаѣ равняться 1, если h равняется m или кратно числа m. Въ этомъ случаѣ r^k не является корнемъ изъ 1 болѣе низкой степени.

Сообразно этому различаютъ первообразные и непервообразные корни m-ой степени изъ 1. Подъ первообразными разумѣютъ тѣ корни m-ой степени изъ 1, которые не служатъ въ то же время корнями изъ 1 болѣе низкой степени. Чтобы ихъ получить, мы должны въ выраженіи r^k дать числу k всѣ значенія, простыя относительно m; ихъ имѣется, такимъ образомъ, $\varphi(m)$ (§ 73, 7).

4. Мы легко убѣждаемся въ справедливости предложенія пункта 2 въ простѣйшихъ случаяхъ: при $m = 1$ и $m = 2$ мы имѣемъ исключительно раціональныя значенія корней $+1$ и -1; при $m = 3$ мы имѣемъ корни

$$\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \quad \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2},$$

которые получаются при помощи двучленнаго уравненія $x^2 + 3 = 0$ [15]). Корни четвертой степени изъ 1, именно i и $-i$, получаются изъ двучленнаго уравненія $x^2 + 1 = 0$.

Мы можемъ поэтому воспользоваться совершенной индукціей, а именно допустить, что предложеніе доказано для всѣхъ показателей m_1, меньшихъ m. Если намъ удастся доказать нашу теорему въ этомъ предположеніи, то она будетъ доказана вполнѣ. Здѣсь нужно, однако, различать два случая.

5. Допустимъ сначала, что m есть число составное. А именно, пусть

$$m = pm_1,$$

гдѣ p есть простое число, а $m_1 > 1$, такъ что $m_1 < m$ и $p < m$.

Если r есть корень m-ой степени изъ 1, то число $r^p = a$ представляетъ собой корень изъ 1 степени m_1 и, слѣдовательно, согласно нашему предположенію, можетъ быть выражено въ радикалахъ. Но въ такомъ случаѣ r есть корень двучленнаго уравненія

$$x^p - a = 0;$$

[15]) Т. е. путемъ пріобщенія радикала $\sqrt{-3}$.

если только a не представляетъ собой p-ой степени числа, принадлежащаго послѣдней области раціональности, то это уравненіе неприводимо въ этой области. Такимъ образомъ, число r также выражается въ радикалахъ.

Если же $a = b^p$, т. е. представляетъ собой p-ую степень числа b, раціональнаго въ нашей области, и ϱ есть корень p-ой степени изъ 1, то $r = \varrho b$; а такъ какъ $p < m$, то ϱ, согласно допущенію, также выражается въ радикалахъ.

6. Остается изслѣдовать второй случай, когда m есть простое число. Въ этомъ случаѣ всѣ корни изъ 1, кромѣ 1, являются первообразными. Если, поэтому, обозначимъ одинъ изъ нихъ черезъ r, — напримѣръ, положимъ

$$r = \cos\frac{2\pi}{m} + i\sin\frac{2\pi}{m},$$

— то всѣ первообразные корни m-ой степени будутъ:

$$r,\ r^2,\ r^3,\ \ldots,\ r^{m-1}. \tag{1}$$

Если числа k и k' отличаются другъ отъ друга на число, кратное m, то $r^k = r^{k'}$. Мы получимъ поэтому всѣ корни (1) и въ томъ случаѣ, если составимъ рядъ

$$r^{k_1},\ r^{k_2},\ r^{k_3},\ \ldots,\ r^{k_{m-1}}, \tag{2}$$

гдѣ $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_{m-1}$ суть любыя $m - 1$ чиселъ, которыя своими вычетами по модулю m имѣютъ числа $1, 2, 3, \ldots, m - 1$. Числа (2) представляютъ собой корни уравненія $(m - 1)$-ой степени

$$\frac{x^m - 1}{x - 1} = x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + x + 1 = 0. \tag{3}$$

Корни этого уравненія можно расположить въ такомъ порядкѣ, что каждый изъ нихъ представитъ одну и ту же степень предыдущаго корня, а первый корень представитъ такую же степень послѣдняго. Такое расположеніе называется **циклическимъ**.

Чтобы это доказать, возьмемъ первообразный корень g по простому модулю m, который, согласно § 78, всегда существуетъ. Тогда между вычетами степеней числа g

$$1,\ g,\ g^2,\ g^3,\ \ldots,\ g^{m-2}$$

каждое изъ чиселъ $1, 2, 3, \ldots, m - 1$ содержится **одинъ** разъ. Сообразно этому, числа (1) отличаются развѣ только порядкомъ отъ чиселъ

$$r,\ r^g,\ r^{g^2},\ r^{g^3},\ \ldots,\ r^{g^{m-2}}. \tag{4}$$

Послѣднія числа въ томъ же порядкѣ мы для краткости будемъ обозначить черезъ

$$r,\ r_1,\ r_2,\ r_3,\ \ldots,\ r_{m-2}. \tag{5}$$

Въ этомъ ряду каждое число представляетъ собой g-ую степень предыдущаго, а первое опять-таки g-ую степень послѣдняго, такъ какъ по теоремѣ Фермата $g^{m-1} \equiv 1 \pmod{m}$.

7. Пусть теперь ε будетъ одинъ изъ корней $(m-1)$-ой степени изъ 1. Такъ какъ $m-1 < m$, то, въ силу нашего допущенія, ε выражается въ радикалахъ.

Мы пріобщимъ число ε къ области раціональности и разсмотримъ функцію

$$\psi(r) = r + \varepsilon r_1 + \varepsilon^2 r_2 + \cdots + \varepsilon^{m-2} r_{m-2};$$

въ виду значенія (4) чиселъ (5) это есть раціональная функція отъ r.

Если мы здѣсь замѣнимъ r черезъ $r_1 = r^g$, то r_1 перейдетъ въ $r_1^g = r_2$, r_2 перейдетъ въ $r_2^g = r_3, \ldots, r_{m-2}$ перейдетъ въ $r_{m-2}^g = r$; мы получаемъ такимъ образомъ:

$$\psi(r_1) = r_1 + \varepsilon r_2 + \varepsilon^2 r_3 + \cdots + \varepsilon^{m-2} r;$$

а такъ какъ $\varepsilon^{m-1} = 1$, то

$$\psi(r) = \varepsilon \psi(r_1).$$

Такимъ же образомъ

$$\psi(r_1) = \varepsilon \psi(r_2), \quad \psi(r_2) = \varepsilon \psi(r_3), \ \ldots$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$\psi(r)^{m-1} = \psi(r_1)^{m-1} = \cdots = \psi(r_{m-2})^{m-1},$$

а потому

$$\psi(r)^{m-1} = \frac{1}{m-1}\left[\psi(r)^{m-1} + \psi(r_1)^{m-1} + \cdots + \psi(r_{m-2})^{m-1}\right].$$

Правая часть этого равенства представляетъ собой симметрическую функцію корней $r, r_1, r_2, \ldots, r_{m-2}$ уравненія (3); въ силу основной теоремы о симметрическихъ функціяхъ (§ 70, 3) она можетъ быть выражена раціонально въ коэффиціентахъ уравненія. Но выраженіе это, кромѣ раціональныхъ чиселъ, содержитъ также количество ε. Такимъ образомъ,

$$\psi(r)^{m-1} = A,$$

гдѣ A есть число, принадлежащее области раціональныхъ чиселъ, расширенной пріобщеніемъ къ ней числа ε. Вмѣстѣ съ тѣмъ опредѣленіе числа $\psi(r)$ приводится къ извлеченію корней, показателями которыхъ служатъ простые множители p числа $m-1$. Если бы одно изъ двучленныхъ уравненій вида $x^p - a = 0$, къ которымъ мы такимъ образомъ приходимъ, оказалось приводимымъ, то вмѣсто радикала $\sqrt[p]{a}$, какъ показано въ п. 5, появилось бы одно изъ значеній p-аго корня изъ 1, которое, по допущенію, выражается въ радикалахъ.

Изъ всего сказаннаго вытекаетъ, что **числа $\psi(r)$ выражаются въ радикалахъ.**

8. Существуетъ $m-1$ корней $(m-1)$-ой степени изъ 1, въ числѣ которыхъ имѣется и 1; это суть корни уравненія $x^{m-1} - 1 = 0$.

Въ этомъ уравненіи всѣ коэффиціенты, кромѣ перваго и послѣдняго, равны нулю. Сообразно этому изъ формулъ Ньютона (§ 71, (6)) слѣдуетъ, что и суммы одинаковыхъ степеней корней этого уравненія $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_{m-2}$ равны нулю, такъ что

$$\Sigma\varepsilon = 0, \quad \Sigma\varepsilon^2 = 0, \ldots, \Sigma\varepsilon^{m-2} = 0, \tag{6}$$

гдѣ суммованія распространяются на всѣ значенія корней ε. Теперь, чтобы подчеркнуть зависимость числа $\psi(r)$ отъ ε, положимъ:

$$r + \varepsilon r_1 + \varepsilon^2 r_2 + \cdots + \varepsilon^{m-2} r_{m-2} = \psi(r, \varepsilon). \tag{7}$$

Если мы теперь дадимъ ε всѣ его $(m-1)$ значеній и составимъ сумму $\Sigma\psi(r, \varepsilon)$, то, въ виду соотношеній (6), мы получимъ:

$$r = \frac{1}{m-1}\Sigma\psi(r, \varepsilon)\ [16]; \tag{8}$$

---

[16]) Если $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{m-2}$ суть корни $(m-1)$-ой степени изъ 1, то, согласно обозначенію (7),

$$r + \varepsilon r_1 + \varepsilon^2 r_2 + \cdots + \varepsilon^{m-2} r_{m-2} = \psi(r, \varepsilon),$$
$$r + \varepsilon_1 r_1 + \varepsilon_1^2 r_2 + \cdots + \varepsilon_1^{m-2} r_{m-2} = \psi(r, \varepsilon_1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$r + \varepsilon_{m-2} r_1 + \varepsilon_{m-2}^2 r_2 + \cdots + \varepsilon_{m-2}^{m-2} r_{m-2} = \psi(r, \varepsilon_{m-2}).$$

Складывая эти равенства и принимая во вниманіе соотношенія (6), мы и получимъ равенство (8). Такъ какъ каждое изъ чиселъ $\psi(r, \varepsilon)$ выражается въ радикалахъ, то и r выражается въ радикалахъ.

число r выражается, слѣдовательно, въ радикалахъ, и наше предложенiе, такимъ образомъ, доказано.

9. Сообразно этому опредѣленiе п. 1-го можно развить слѣдующимъ образомъ.

Число называется метациклическимъ или выражающимся въ радикалахъ, если оно можетъ быть получено помощью послѣдовательнаго прiобщенiя корней двучленныхъ уравненiй вида $x^n = a$, независимо отъ того, приводимы ли послѣднiя или нѣтъ.

Въ самомъ дѣлѣ, если $a = b^n$, гдѣ b есть число предшествующей области рацiональности, то мы положимъ $x = by$ и тогда получимъ уравненiе $y^n - 1 = 0$, которое рѣшается въ радикалахъ.

§ 113. Уравненiе пятой степени въ общемъ видѣ не разрѣшается въ радикалахъ.

1. Пусть $f(x)$ будетъ неприводимая функцiя съ рацiональными коэффицiентами, степень которой выражается нечетнымъ простымъ числомъ n. Предположимъ, что функцiя эта разлагается на множителей по прiобщенiи ряда радикаловъ (которые въ данномъ случаѣ могутъ имѣть какъ вещественныя, такъ и мнимыя значенiя). Составимъ область рацiональности, прiобщивъ всѣ необходимые для разложенiя радикалы, кромѣ послѣдняго. Въ этой области функцiя $f(x)$ еще остается неприводимой. Если область, составленная такимъ образомъ, не содержитъ корня n-ой степени изъ 1 (ε), то мы прiобщимъ и его [17]. Однако, и послѣ этого функцiя останется еще неприводимой. Въ самомъ дѣлѣ, какъ показано въ п. 2 предыдущаго параграфа, корни ε выражаются въ радикалахъ, показатели которыхъ ниже n; между тѣмъ, согласно п. 6 § 110-го, разложенiе функцiи n-ой степени можетъ быть обусловлено только прiобщенiемъ радикала n-ой же степени. Прiобщенiе же лишняго радикала никогда не можетъ помѣшать дѣлу [18].

---

[17]) Замѣтимъ, что прiобщенiе одного корня n-ой степени изъ 1 влечетъ за собой прiобщенiе остальныхъ, такъ какъ при простомъ n всѣ n-ые корни изъ 1 (кромѣ 1) первообразные и потому представляютъ собой степени любого изъ нихъ.

[18]) Мы прiобщаемъ иррацiональность ε; это, можетъ быть, и не нужно для того, чтобы функцiя разложилась на множители, но мы производимъ это расширенiе области въ видахъ дальнѣйшихъ разсужденiй. Дѣлу же это не мѣшаетъ: если функцiя окажется разложимой въ нѣкоторой области, то это разложенiе, конечно, останется въ силѣ, если область будетъ расширена прiобщенiемъ нѣсколькихъ лишнихъ радикаловъ.

Итакъ, число ε мы относимъ къ „предшествующимъ радикаламъ". Послѣднiй же радикалъ, обусловливающiй разложенiе функцiи, какъ уже было сказано выше, долженъ быть n-ой степени. Пусть это будетъ

$$r = \sqrt[n]{\theta}.$$

Радикалъ r не выражается рацiонально въ предыдущихъ радикалахъ, а потому θ не представляетъ собой n-ой степени нѣкотораго числа α нашей области, ибо иначе число $r = \varepsilon^k \alpha$ также принадлежало бы этой области.

2. Такъ какъ функцiя $x^n - \theta$ неприводима, то, въ силу предложенiя п. 5 § 110-го, мы можемъ въ каждомъ уравненiи, содержащемъ, кромѣ чиселъ области рацiональности, также число r, замѣнить r черезъ εr, $\varepsilon^2 r$, . . ., $\varepsilon^{n-1} r$.

Если поэтому, въ частности, для какой-либо рацiональной функцiи ψ

$$\psi(r) = \psi(\varepsilon r),$$

то имѣютъ мѣсто также соотношенiя:

$$\psi(\varepsilon r) = \psi(\varepsilon^2 r) = \psi(\varepsilon^3 r) = \cdots = \psi(\varepsilon^{n-1} r),$$

а потому число $\psi(r)$ также принадлежитъ той же области рацiональности (§ 110, 4).

3. Итакъ, согласно нашему допущенiю, функцiя $f(x)$ разлагается на множителей по прiобщенiи радикала r; пусть $f(x, r)$ будетъ одинъ изъ множителей функцiи $f(x)$ [19]), который неприводимъ и послѣ прiобщенiя радикала r. Коэффицiентъ при высшемъ членѣ мы будемъ постоянно считать равнымъ 1.

Но если $f(x, r)$ есть дѣлитель функцiи $f(x)$, то, какъ было показано въ п. 5. § 110-го, функцiи

$$f(x, r),\quad f(x, \varepsilon r),\quad f(x, \varepsilon^2 r),\ \ldots,\ f(x, \varepsilon^{n-1} r) \tag{1}$$

также суть дѣлители функцiи $f(x)$. Всѣ онѣ, какъ и $f(x, r)$, неприводимы [20]);

---

[19]) Такъ какъ разложенiе наступаетъ только послѣ прiобщенiя радикала r, то каждый множитель необходимо зависитъ отъ r, почему одинъ изъ нихъ и обозначенъ черезъ $f(x, r)$.

[20]) Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ, что функцiя $f(x, \varepsilon^k r)$ разлагается на множителей, т. е. что

$$f(x, \varepsilon^k r) = f_1(x, r) f_2(x, r).$$

кромѣ того, между ними нѣтъ тождественныхъ, ибо, если бы между ними были двѣ тождественныя функціи, то онѣ, согласно п. 2, были бы всѣ тождественны [21]) и потому принадлежали бы къ области, еще не содержащей радикала r; между тѣмъ это противорѣчитъ допущенію, что функція $f(x)$ допускаетъ разложеніе только по пріобщеніи радикала r. Отсюда вытекаетъ, что никакія двѣ изъ функцій (1) не могутъ имѣть общаго дѣлителя, ибо таковой выражался бы раціонально въ зависимости отъ r [22]) и входилъ бы въ составъ одной изъ неприводимыхъ функцій (1). Произведеніе же

$$F(x) = Nf(x, r) = f(x, r)f(x, \varepsilon r)f(x, \varepsilon^2 r)f(x, \varepsilon^3 r) \ldots f(x, \varepsilon^{n-1} r) \quad (2)$$

имѣетъ раціональное значеніе (§ 110, 3), а потому дѣлится на $f(x)$, а такъ какъ оно не имѣетъ никакихъ иныхъ множителей, кромѣ тѣхъ, которые содержатся въ функціи $f(x)$, то оно представляетъ собой степень функціи $f(x)$ [23]). При этомъ мы предполагаемъ, какъ и раньше, что коэффиціентъ при высшемъ членѣ функцій $f(x)$ и $f(x, r)$ равенъ 1.

Но въ данномъ случаѣ это должна быть **первая** степень функціи $f(x)$, ибо линейный множитель, который входилъ бы въ составъ функціи $F(x)$ нѣсколько разъ, долженъ былъ бы принадлежать, по крайней мѣрѣ, двумъ функціямъ (1), что не можетъ имѣть мѣста. Итакъ,

$$f(x) = f(x, r)f(x, \varepsilon r)f(x, \varepsilon^2 r) \ldots f(x, \varepsilon^{n-1} r); \quad (3)$$

Въ такомъ случаѣ, замѣняя здѣсь r черезъ $\varepsilon^{n-k} r$ (§ 110, 5), мы получимъ:

$$f(x, r) = f_1(x, \varepsilon^{n-k} r) f_2(x, \varepsilon^{n-k} r),$$

что противно условію.

[21]) Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ, что имѣетъ мѣсто тождество

$$f(x, \varepsilon^i r) = f(x, \varepsilon^j r).$$

Замѣняя здѣсь r черезъ $\varepsilon^{n-i} r$, получимъ:

$$f(x, r) = f(x, \varepsilon^k r),$$

гдѣ $k = n + j - i$. Замѣняя здѣсь вновь r черезъ $\varepsilon^k r$, получимъ:

$$f(x, r) = f(x, \varepsilon^k r) = f(x, \varepsilon^{2k} r) = f(x, \varepsilon^{3k} r) = \cdots = f(x, \varepsilon^{(n-1)k} r).$$

Такъ какъ вычеты чиселъ $k, 2k, 3k, \ldots, (n-1)k$ по модулю n проходятъ черезъ всѣ значенія $1, 2, 3, \ldots, (n-1)$, то послѣднее равенство обнаруживаетъ, что всѣ функціи (1) тождественны между собой.

[22]) Такъ какъ его можно было бы найти послѣдовательнымъ дѣленіемъ.

[23]) Такъ какъ функція $F(x)$ не имѣетъ, какъ указано въ текстѣ, иныхъ множителей кромѣ такихъ, которые входятъ въ составъ функціи $f(x)$, то $F(x)$ имѣетъ съ $f(x)$ общіе корни; а такъ какъ функція $f(x)$ неприводима въ области раціональности, то $F(x)$ дѣлится на $f(x)$ (§ 69, 8); но, если частное не сводится къ постоянному количеству, то оно по той же причинѣ также дѣлится на $f(x)$ и т. д.

множители же $f(x, r)$ суть линейныя функцiи относительно x. Мы получимъ поэтому корни функцiи $f(x)$, если приравняемъ нулю множителей $f(x, r)$; такимъ образомъ, напримѣръ:

$$x_1 = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + a_3 r^3 + \cdots + a_{n-1} r^{n-1}, \qquad (4)$$

гдѣ $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ суть числа, принадлежащiя предпослѣдней области рацiональности.

4. Функцiя n-ой степени $f(x)$ должна имѣть, по крайней мѣрѣ, одинъ вещественный корень, такъ какъ n есть число нечетное, а мнимые корни распадаются на сопряженныя пары; она можетъ поэтому имѣть либо только вещественные корни, либо два мнимыхъ и $n-2$ вещественныхъ, либо четыре мнимыхъ и $n-4$ вещественныхъ и т. д.

5. Мы предположимъ, что послѣдовательное прiобщенiе радикаловъ происходитъ такимъ образомъ, что вслѣдъ за каждымъ радикаломъ ϱ, не вызывающимъ еще разложенiя функцiи и имѣющимъ мнимое значенiе, прiобщается сопряженный съ нимъ радикалъ ϱ'. Это всегда можно сдѣлать, такъ какъ прiобщенiе радикала, который можетъ оказаться лишнимъ, дѣлу не вредитъ.

Въ этомъ предположенiи, если $r = \sqrt[n]{\theta}$ есть первый радикалъ, обусловливающiй уже разложенiе функцiи, то здѣсь могутъ представиться слѣдующiе случаи:

1) θ есть число вещественное; такъ какъ ε принадлежитъ области рацiональности, то и r можно считать вещественнымъ [24]).

Если тогда x_1 есть вещественный корень функцiи $f(x)$, то и коэффицiенты $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ въ выраженiи (4) должны имѣть вещественныя значенiя; въ самомъ дѣлѣ, если бы это были комплексныя числа и $a_0', a_1', a_2', \ldots, a'_{n-1}$ были бы сопряженныя съ ними числа, которыя, въ силу нашего предположенiя, также принадлежатъ области рацiональности, то мы имѣли бы также:

$$x_1 = a_0' + a_1' r + a_2' r^2 + a_3' r^3 + \cdots + a'_{n-1} r^{n-1} \text{ [25])},$$

---

[24]) Если Θ есть абсолютное значенiе (модуль) числа θ, то любое значенiе r радикала $\sqrt[n]{\theta}$ можетъ быть представлено въ видѣ $\varepsilon^k \sqrt[n]{\Theta}$; такъ какъ ε принадлежитъ области рацiональности, то прiобщить приходится лишь $\sqrt[n]{\Theta}$, т. е. вещественное число.

[25]) Равенство (4), какъ и всякое численное равенство, остается въ силѣ, если въ немъ замѣнить i черезъ $-i$.

а вслѣдствіе этого было бы:

$$(a_0-a_0')+(a_1-a_1')r+(a_2-a_2')r^2+(a_3-a_3')r^3+\cdots+(a_{n-1}-a'_{n-1})r^{n-1}=0.$$

Но такъ какъ функція $x^n-\theta$ неприводима, то это равенство можетъ имѣть мѣсто только въ томъ случаѣ, если

$$a_0-a_0'=a_1-a_1'=a_2-a_2'=\cdots=a_{n-1}-a'_{n-1}=0,$$

т. е. когда всѣ коэффиціенты a_i имѣютъ вещественныя значенія [26]).

Остальные корни выражаются тогда формулами:

$$\begin{aligned}
x_2 &= a_0+\varepsilon\, a_1 r+\varepsilon^2 a_2 r^2+\varepsilon^3 a_3 r^3+\cdots+\varepsilon^{n-1}\, a_{n-1}r^{n-1},\\
x_3 &= a_0+\varepsilon^2 a_1 r+\varepsilon^4 a_2 r^2+\varepsilon^6 a_3 r^3+\cdots+\varepsilon^{2(n-1)} a_{n-1}r^{n-1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (5)\\
x_n &= a_0+\varepsilon^{n-1} a_1 r+\varepsilon^{2(n-1)} a_2 r^2+\varepsilon^{3(n-1)} a_3 r^3+\cdots+\varepsilon^{(n-1)(n-1)} a_{n-1}r^{n-1};
\end{aligned}$$

всѣ эти корни, какъ показано въ п. 3, отличны другъ отъ друга и отъ x_1.

Съ другой стороны,

$$\varepsilon,\ \varepsilon^2,\ \ldots,\ \varepsilon^{\frac{n-1}{2}}$$

суть мнимыя числа, соотвѣтственно сопряженныя [27]) съ числами:

$$\varepsilon^{n-1},\ \varepsilon^{n-2},\ \ldots,\ \varepsilon^{\frac{n+1}{2}};$$

Поэтому и

$$x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_{\frac{n+1}{2}}$$

суть мнимыя числа, соотвѣтственно сопряженныя съ числами:

$$x_n,\ x_{n-1},\ \ldots,\ x_{\frac{n+3}{2}}.$$

Итакъ, въ этомъ случаѣ функція $f(x)$ имѣетъ 1 вещественный и $n-1$ попарно сопряженныхъ мнимыхъ корней.

2) Если θ есть число мнимое, а θ' есть число, сопряженное съ θ, то функція $x^n-\theta$ имѣетъ исключительно мнимые корни; каждому изъ

---

[26]) Это вытекаетъ изъ основной теоремы, доказанной въ пунктѣ 8 § 69-го. Если бы всѣ коэффиціенты этого равенства не обращались въ нуль, то корень неприводимой функціи $x^n-\theta$ служилъ бы корнемъ функціи низшей степени, что не можетъ имѣть мѣста.

[27]) Ибо произведенія соотвѣтствующихъ чиселъ равны 1.

этихъ корней r отвѣчаетъ опредѣленное сопряженное число r', которое служитъ корнемъ уравненія $x^n - \theta' = 0$; вмѣстѣ съ тѣмъ

$$rr' = r_1 r_1' = r_2 r_2' = \cdots = r_{n-1} r'_{n-1} = \sqrt[n]{\theta\theta'} = R. \qquad (6)$$

Если мы въ виду этого положимъ, согласно § 51,

$$\theta = a(\cos\alpha + i\sin\alpha), \quad \theta' = a(\cos\alpha - i\sin\alpha),$$

гдѣ a есть число положительное, то получимъ:

$$r = \sqrt[n]{a}\left(\cos\frac{\alpha}{n} + i\sin\frac{\alpha}{n}\right), \quad r' = \sqrt[n]{a}\left(\cos\frac{\alpha}{n} - i\sin\frac{\alpha}{n}\right), \quad R = \sqrt[n]{a^2}.$$

Имѣя это въ виду, мы вмѣсто радикала r пріобщимъ сначала вещественное число R, если оно уже не содержится въ области раціональности. Здѣсь вновь приходится различать два случая:

a) Пріобщеніе числа R уже вызываетъ разложеніе функціи $f(x)$. Тогда пріобщеніе числа r уже излишне, а такъ какъ R есть вещественный радикалъ, то мы находимся вновь въ условіяхъ случая 1).

b) Пріобщеніе числа R еще не вызываетъ разложенія функціи $f(x)$; сюда относится и тотъ случай, когда R имѣетъ раціональное значеніе (какъ это, напримѣръ, имѣетъ мѣсто въ формулѣ Кардана для кубическаго уравненія).

Тогда пріобщеніе радикала r еще необходимо для рѣшенія уравненія; но вмѣстѣ съ радикаломъ r пріобщается и сопряженное съ нимъ число $r' = R/r$.

Если въ этомъ случаѣ $x_1 = \psi(r)$ имѣетъ вещественное значеніе, то

$$\psi(r) = \psi'(r') = \psi'\left(\frac{R}{r}\right) \text{ [28]}; \qquad (7)$$

здѣсь ψ' обозначаетъ функцію, которая получается изъ функціи ψ такимъ образомъ, что мы замѣняемъ всѣ ея коэффиціенты соотвѣтственно сопряженными числами, которыя, согласно нашимъ условіямъ, принадлежатъ той же области раціональности.

Но равенство (7) остается въ силѣ, если въ немъ замѣнить r любымъ изъ корней $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_{n-1}$ функціи $x^n - \theta$; а такъ какъ, въ силу соотношеній (6), и $R : r_1 = r_1', \ldots$, то

$$\psi(r_1) = \psi'(r_1'), \quad \psi(r_2) = \psi'(r_2'), \ldots, \psi(r_{n-1}) = \psi'(r'_{n-1});$$

---

[28]) Ибо $\psi'(r')$ есть число, сопряженное съ вещественнымъ числомъ x_1, т. е. $\psi'(r') = x_1 = \psi(r)$.

это значитъ, что всѣ n чиселъ $\psi(r)$, $\psi(r_1)$, $\psi(r_2)$, ..., $\psi(r_{n-1})$ имѣютъ вещественныя значенія [29]). Функція $f(x)$ имѣетъ въ этомъ случаѣ n вещественныхъ корней.

Метациклическое уравненіе, показатель степени котораго есть простое число n, имѣетъ либо 1, либо n вещественныхъ корней *).

Для случая $n = 5$ мы получаемъ, такимъ образомъ, слѣдующее предложеніе.

6. Неприводимое уравненіе 5-ой степени съ вещественными коэффиціентами, разрѣшимое въ радикалахъ, имѣетъ либо 5 вещественныхъ корней, либо 1 вещественный и 4 мнимыхъ корня, но никогда не можетъ имѣть 3 вещественныхъ и 2 мнимыхъ корня.

7. Чтобы доказать, что не всякое уравненіе 5-ой степени разрѣшается въ радикалахъ, намъ остается только обнаружить, что существуютъ неприводимыя уравненія 5-ой степени съ раціональными коэффиціентами, имѣющія 3 вещественныхъ и 2 сопряженныхъ мнимыхъ корня. Это можно показать на безчисленныхъ примѣрахъ, которые очень легко составляются.

Такъ, напримѣръ, какъ мы раньше убѣдились съ помощью критерія Айзенштейна (§ 69, 6), функція

$$f(x) = x^5 - 4x - 2$$

неприводима. Кромѣ того, функція $f(x)$ не можетъ имѣть исключительно вещественные корни. Въ самомъ дѣлѣ, въ функціи $f(x)$ отсутствуютъ четвертая и третья степени x; слѣдовательно, по формуламъ Ньютона, не только сумма корней, но и сумма ихъ квадратовъ равна нулю. Это не могло бы имѣть мѣста, если бы всѣ корни были вещественными числами. Съ другой стороны,

$$f(-2) = -26, \quad f(-1) = +1, \quad f(1) = -5, \quad f(2) = +22.$$

Для $x = -2, -1, +1, +2$ функція $f(x)$ имѣетъ попеременно то отрицательныя, то положительныя значенія; слѣдовательно, когда x переходитъ отъ -2 къ $+2$, функція $f(x)$ должна обращаться въ нуль три раза. Это значитъ, что $f(x)$ имѣетъ три вещественныхъ и два мнимыхъ сопряженныхъ корня; поэтому она неразрѣшима съ помощью радика-

---

[29]) Такъ какъ они не мѣняются, когда i мѣняется на $-i$.

*) Эта теорема принадлежитъ Л. Кронекеру (L. Kronecker).

ловъ. (Въ § 103 мы приближенно вычислили какъ дѣйствительные, такъ и мнимые корни функцiи $f(x)$).

8. Замѣчанiе. При такомъ доказательствѣ нѣтъ необходимости опираться на существованiе корня уравненiя пятой степени. Дѣйствительно, если бы уравненiе пятой степени не имѣло корня, то оно не было бы разрѣшимо въ радикалахъ; если же существуетъ одинъ корень, то существуютъ и четыре остальные, такъ какъ, если x_1 есть этотъ корень, то $\frac{f(x)}{x-x_1}=0$ есть уравненiе четвертой степени, которое разрѣшимо въ радикалахъ и имѣетъ четыре корня.

Существуютъ особыя уравненiя любой степени, которыя разрѣшимы съ помощью радикаловъ. Къ такого рода уравненiямъ принадлежатъ, между прочимъ, тѣ, къ которымъ приводится задача о дѣленiи окружности на равныя части.

9. Первое точное доказательство невозможности рѣшить уравненiе 5-ой степени въ общемъ видѣ дано было Абелемъ (Abel). Оно положило конецъ многочисленнымъ напраснымъ попыткамъ и обманутымъ ожиданiямъ найти это рѣшенiе. Упомянутое доказательство было первымъ научнымъ трудомъ великаго изслѣдователя.

Въ знаменитой своей статьѣ въ первомъ томѣ журнала Крелля Абель ставитъ вопросъ нѣсколько въ иномъ видѣ, чѣмъ у насъ. Онъ спрашиваетъ, можно ли съ помощью знака извлеченiя корня составить выраженiе для x_1 въ функцiи пяти неопредѣленныхъ чиселъ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, удовлетворяющее уравненiю

$$x^5+a_1x^4+a_2x^3+a_3x^2+a_4x+a_5=0, \tag{8}$$

и отвѣчаетъ на этотъ вопросъ отрицательно.

При этомъ остается невыясненнымъ, нельзя ли для всевозможныхъ цѣлыхъ значенiй a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 рѣшить уравненiе (8) помощью извлеченiя корня изъ рацiональныхъ чиселъ. У насъ же этотъ вопросъ рѣшается, одновременно съ главнымъ положенiемъ, въ отрицательномъ смыслѣ.

10. Легко найти условiя, при которыхъ неприводимое уравненiе, показатель степени котораго есть простое число n, разрѣшимо съ помощью ряда вещественныхъ радикаловъ. Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ предпослѣдняя область рацiональности, уже по предположенiю, содержитъ только вещественныя числа; поэтому послѣднiй вещественный радикалъ r даетъ намъ вещественный же корень вида (4):

$$x_1=a_0+a_1r+a_2r^2+\cdots+a_{n-1}r^{n-1}.$$

Какъ въ п. 5, отсюда вытекаетъ, что всѣ коэффиціенты a_i должны быть числами вещественными, и что остальные корни будутъ имѣть видъ (5), при чемъ они будутъ попарно сопряженными мнимыми числами. Итакъ:

Неприводимое уравненіе, показатель степени котораго есть простое число n и которое разрѣшимо въ вещественныхъ радикалахъ, имѣетъ 1 вещественный и $\frac{1}{2}(n-1)$ паръ сопряженныхъ мнимыхъ корней.

Отсюда еще разъ заключаемъ, что кубическое уравненіе, имѣющее три вещественныхъ корня, неразрѣшимо въ вещественныхъ радикалахъ (§ 111).

ГЛАВА XX.

Изъ исторіи алгебры.

---

§ 114. Основные моменты въ исторіи ученія объ алгебраическомъ рѣшеніи уравненій.

1. Въ древности было извѣстно много знаменитыхъ задачъ, которыя приводили, по современному выраженію, къ уравненіямъ высшихъ степеней и которыя не удавалось разрѣшить при помощи циркуля и прямой линейки. т.е. с помощью кв. корней Укажемъ здѣсь задачу объ удвоеніи куба, о трисекціи угла, задачу Архимеда о раздѣленіи шара плоскостью на двѣ части, объемы которыхъ находились бы между собою въ данномъ отношеніи. Всѣ эти задачи могутъ быть разрѣшены при помощи коническихъ сѣченій; къ тому же онѣ послужили поводомъ къ изученію еще другихъ кривыхъ: циссоида Діоклеса (ок. 180 г. до Р. Х.), конхоида Никомеда (ок. 180 г. до Р. Х.) и другія кривыя также примѣнялись для рѣшенія этихъ задачъ. Однако, самыя замѣчательныя работы въ этомъ направленіи касаются коническихъ сѣченій и принадлежатъ Аполлонію *). Въ нихъ мы въ первый разъ встрѣчаемся съ задачами, приводящими, согласно нашей терминологіи, къ уравненію четвертой степени. Ему уже извѣстно, что два коническихъ сѣченія могутъ пересѣкаться не болѣе, какъ въ четырехъ точкахъ, что коническія сѣченія, касающіяся другъ друга въ одной точкѣ, могутъ пересѣкаться не больше, чѣмъ въ двухъ точкахъ, что точекъ соприкосновенія двухъ коническихъ сѣченій не можетъ быть больше двухъ, — а также и другія подобныя свойства этихъ кривыхъ. Это, въ сущности, не что иное, какъ теоремы относительно корней уравненія четвертой степени и совпаденія двухъ такихъ корней. Особенный интересъ представляетъ собою пятая книга Аполлонія, дошедшая до насъ не на греческомъ языкѣ, а въ арабскомъ переводѣ, найденномъ въ серединѣ XVII вѣка Борелли (Borelli). (Флорентійское изданіе этой книги на латинскомъ языкѣ появилось въ 1661 году).

---

*) Аполлоній изъ города Перги въ Памфиліи жилъ и работалъ въ Александріи. Періодъ его расцвѣта относится къ эпохѣ царствованія Птоломея Филопатора, умершаго въ 205-омъ году до Р. Х.

Въ этой книгѣ Аполлоній разсматриваетъ задачу о наибольшихъ и наименьшихъ разстояніяхъ данной точки отъ периферіи коническаго сѣченія, или, другими словами, задачу о проведеніи нормалей къ коническому сѣченію; задача эта имѣетъ, такимъ образомъ, интересъ, прежде всего, для ученія о наибольшихъ и наименьшихъ величинахъ. Алгебраически эта задача приводитъ къ уравненію четвертой степени; у Аполлонія это выражается въ томъ, что основанія нормалей опредѣляются имъ, какъ точки пересѣченія даннаго коническаго сѣченія съ равнобочной гиперболой. Однако, Аполлоній знаетъ и примѣняетъ въ этихъ изслѣдованіяхъ также и дискриминантъ этого уравненія четвертой степени: т. е. ему извѣстно геометрическое мѣсто точекъ, для которыхъ двѣ нормали совпадаютъ въ одну. Совершенно въ смыслѣ современной аналитической геометріи онъ даетъ для каждой абсциссы нѣкоторую ординату, до которой можетъ доходить точка, если изъ нея еще можно провести четыре нормали къ коническому сѣченію; если его построеніе перевести на нашъ языкъ, то получится уравненіе развертки коническаго сѣченія. Это построеніе зависитъ отъ кубическаго корня, который, какъ въ задачѣ Гиппократа *) объ удвоеніи куба, опредѣляется двумя средними пропорціональными. Въ дошедшемъ до насъ текстѣ нѣтъ никакихъ указаній на то, чтобы Аполлоній считалъ совокупность этихъ точекъ кривой линіей. Но, можетъ быть, въ нашемъ распоряженіи находится не все, что оставилъ послѣ себя Аполлоній; такое предположеніе подтверждается тѣмъ обстоятельствомъ, что въ концѣ пятой книги минимальныя линіи разсматриваются очень подробно, тогда какъ максимальнымъ линіямъ, получающимся тѣмъ же самымъ построеніемъ, удѣлено очень мало мѣста. Это вообще не отвѣчаетъ обыкновенію грековъ, которые при изслѣдованіи задачи всегда разсматриваютъ всѣ возможные случаи съ одинаковой тщательностью.

обратить
вним.

2. Мы обходимъ постепенное развитіе понятія объ алгебраическомъ уравненіи и лишь попутно упомянемъ объ открытіи рѣшенія уравненія 3-ей и 4-ой степени въ XVI столѣтіи **). Нужно, однако, назвать

---

*) Гиппократъ родился на о-вѣ Хіосѣ; жилъ въ Аѳинахъ во второй половинѣ V-го столѣтія до Р. Х.

**) Первымъ открылъ рѣшеніе уравненій 3-ей и 4-ой степени С. Ферро (Scipione del Ferro), бывшій профессоромъ въ Болоньѣ отъ 1496 до 1526 г. Однако, на этой почвѣ разгорѣлся рѣзкій и некрасивый споръ о пріоритетѣ между Іеронимомъ Карданомъ (Hieronymus Cardanus, 1501—1576, Павія, Римъ) и Николаемъ Тарталья (1500—1557, Брешія, Венеція). Карданъ въ своемъ сочиненіи „Ars magna“ (Nürnberg, 1545) опубликовалъ рѣшеніе уравненія третьей степени; отсюда сохранившееся еще по настоящее время выраженіе „формула Кардана“. Ученикъ Кардана Луиджи Феррари (Luigi Ferrari, 1522—1565, Болонья, Миланъ) открылъ рѣшеніе уравненія четвертой степени.

Віета *), предшественника современной алгебры, который первый высказалъ предложеніе, что каждая задача, приводящая къ уравненію третьей степени, либо рѣшается при помощи двухъ среднихъ пропорціональныхъ, либо сводится къ трисекціи угла. Къ первому классу относятся уравненія третьей степени, которыя имѣютъ одинъ вещественный корень и могутъ быть рѣшены при помощи кубическаго корня изъ вещественнаго числа. (Уже древніе привели Делійскую задачу къ нахожденію двухъ среднихъ пропорціональныхъ: $a : x = x : y = y : b$, откуда $x^3 = a^2 b$). Ко второму классу относятся уравненія съ тремя вещественными корнями (casus irreducibilis), которыя не могутъ быть рѣшены при помощи вещественныхъ радикаловъ, но приводятся, какъ показалъ Віета, къ трисекціи угла. Такъ какъ, съ другой стороны, уже тогда было извѣстно, что уравненіе четвертой степени приводится къ квадратнымъ и кубическимъ уравненіямъ, то тотъ же выводъ былъ распространенъ и на уравненіе четвертой степени.

Этимъ былъ выясненъ трудный вопросъ о томъ, какимъ образомъ можно отъ кубичныхъ корней изъ мнимыхъ чиселъ придти къ вещественнымъ числамъ. Всѣ эти предложенія позже были значительно обобщены Абелемъ (Abel) и распространены на большую категорію уравненій болѣе высокихъ степеней, которыя въ настоящее время извѣстны подъ названіемъ „Абелевыхъ уравненій".

3. Съ этого времени дальнѣйшее развитіе ученія объ алгебраическихъ уравненіяхъ все болѣе расчленяется въ два различныхъ направленія. Первое направленіе имѣетъ своею цѣлью дать способы вычислить съ любымъ приближеніемъ численное значеніе корней уравненія, коэффиціенты котораго численно заданы; для практическаго примѣненія алгебры эта сторона дѣла имѣетъ наиболѣе важное значеніе. Уже давно было извѣстно, что функція $f(x)$, имѣющая при $x = a$ и $x = b$ значенія противоположныхъ знаковъ, обращается между a и b въ нуль, т. е. имѣетъ въ этомъ интервалѣ, по крайней мѣрѣ, одинъ, вообще же нечетное число корней; въ этомъ содержится уже принципъ, по которому путемъ послѣдовательнаго дѣленія интервала можно неопредѣленно приблизиться къ корнямъ. Однако, чтобы избѣжать лишнихъ вычисленій, было существенно важно отдѣлить корни, т. е. установить интервалы, въ каждомъ изъ которыхъ содержится только по одному корню, или, по крайней мѣрѣ, точно установить, сколько корней содержится въ данномъ интервалѣ. Это, однако, долго не удавалось.

Правда, можно было указать верхній и нижній предѣлъ положительныхъ корней; былъ также извѣстенъ рядъ теоремъ, опредѣлявшій

*) Віета (François Viète, Seigneur de la Rigotière; латинская транскрипція — Vieta) родился въ 1540 г. въ Фонтенэ-Леконтъ въ Пуату, умеръ въ 1603 г. въ Парижѣ.

число корней, содержащихся въ данномъ интервалѣ, съ точностью до нѣкотораго четнаго числа, которое лишь въ частныхъ случаяхъ обращается въ нуль. Сюда относится правило Декарта, которое мы изложили въ § 100, далѣе — болѣе сложная теорема Ньютона, теорема Бюдана и Фурье, теорема Ролля *).

Точный, хотя практически врядъ ли примѣнимый, прiемъ рѣшенiя этой задачи былъ указанъ Варингомъ **), а позднѣе былъ вновь открытъ Лагранжемъ ***). Прiемъ этотъ основывается на томъ, что составляется уравненiе, корнями котораго служатъ разности корней даннаго уравненiя, а затѣмъ разыскивается нижнiй предѣлъ положительныхъ корней этого уравненiя. Если Δ есть этотъ нижнiй предѣлъ, то интервалъ длины Δ можетъ содержать не болѣе одного корня даннаго уравненiя.

Вполнѣ удовлетворительное рѣшенiе задачи представляетъ собою теорема Штурма ****), которую мы изложили въ § 101-омъ. Работа Штурма написана по побужденiю Фурье и стоитъ въ связи съ нѣкоторыми изслѣдованiями въ области математической физики, — напримѣръ, съ вопросомъ, о томъ, сколько узловъ можетъ имѣть натянутая колеблющаяся струна; связь между этимъ вопросомъ и задачей объ опредѣленiи числа корней алгебраическаго уравненiя совершенно очевидна. § 101. ст.

Кронекеръ, который, какъ мы уже упоминали въ § 29, изъ принципiальныхъ соображенiй вовсе не употребляетъ ирраціональныхъ чиселъ, вынужденъ дать задачѣ другое выраженiе, такъ какъ онъ не только не можетъ пользоваться теоремой о существованiи корня, но и вообще не можетъ говорить о корнѣ уравненiя. Онъ поэтому только обнаруживаетъ, что при помощи раціональныхъ операцiй можно найти такое цѣлое число s, что въ интервалѣ, имѣющемъ длину $1/s$, функцiя $f(x)$ можетъ перемѣнить знакъ не болѣе одного раза. Этимъ достигнута та же цѣль, что и методомъ Варинга-Лагранжа *****).

---

*) Ньютонъ, „Arithmetica universalis"; теорема доказана Сильвестромъ (Sylvester), „Transactions of the R. Irish. Academy", t. 24 (1871); Бюданъ (Budan), „Nouvelle méthode pour la résolution des équations numériques" (1803); Фурье (Fourier), „Analyse des équations determinées" (1831); Ролль (Rolle), 1652 — 1719, „Traité d'Algèbre" 1690.

**) Варингъ (E. Waring), „Medit. algebr." Cambridge 1770.

***) Лагранжъ (L. Lagrange), „De la resolution des équations numériques de tous les degrés", Paris 1798. Собранiе сочиненiй, т. III.

****) Штурмъ (Jacob Karl Franz Sturm) родился въ Женевѣ въ 1803 году, умеръ въ Парижѣ въ 1855 году. Работа Штурма появилась сначала въ журналѣ „Bulletin de Férussac" 1829, а затѣмъ въ „Отчетахъ Парижской Академiи" за 1835 г. Нѣмецкiй переводъ, принадлежащiй Леви (Loewy), вошелъ въ составъ Оствальдовскаго изданiя классиковъ (Ostwalds Klassiker, № 143, 1904).

*****) Кронекеръ (L. Kronecker), „Ueber den Zahlbegriff". Crelles Journal, Bd. 101, 1887.

4. Другая цѣль, которую алгебра себѣ ставитъ, имѣетъ болѣе теоретическое значенiе и относится къ алгебраическимъ законамъ, выражающимъ зависимость корней уравненiя отъ коэффицiентовъ. Совершенно естественно, что успѣхъ, достигнутый при рѣшенiи уравненiй третьей и четвертой степени, постоянно побуждалъ математиковъ искать разрѣшенiя уравненiй болѣе высокихъ степеней и, прежде всего, уравненiй пятой степени; задача заключалась, конечно, въ томъ, чтобы привести рѣшенiе уравненiя къ радикаламъ. Извѣстно, что этимъ вопросомъ занимался Лейбницъ; въ связи съ этимъ стоитъ, очевидно, попытка рѣшенiя этой задачи, которую Чирнгаузъ опубликовалъ въ 1683 году *).

Онъ вводитъ въ уравненiе новое неизвѣстное; именно, если x есть корень уравненiя $f(x)=0$, то онъ полагаетъ $y=\varphi(x)$, гдѣ $\varphi(x)$ есть функцiя $(n-1)$-ой степени. Въ такомъ случаѣ y, въ свою очередь, удовлетворяетъ нѣкоторому уравненiю n-ой степени, коэффицiенты котораго зависятъ отъ n произвольныхъ коэффицiентовъ функцiи φ. Затѣмъ онъ старается опредѣлить эти коэффицiенты такимъ образомъ, чтобы уравненiе для y приняло форму $y^n=a$. Этотъ прiемъ дѣйствительно ведетъ къ цѣли для уравненiй 3-ей и 4-ой степени; но при уравненiяхъ болѣе высокихъ степеней онъ не даетъ результата. Тѣмъ не менѣе прiемъ Чирнгауза сохранилъ значенiе для современной алгебры, такъ какъ онъ даетъ средства приводить уравненiя болѣе высокихъ степеней къ нѣкоторымъ нормальнымъ формамъ. Такъ, напримѣръ, уравненiя 5-ой степени приводятся къ такъ называемой Брингъ-Жерардовой формѣ $x^5+x+a=0$ (Ср. F. Klein, „Vorlesungen über das Ikosaeder“, Leipzig, 1884).

5. Новый толчекъ къ изслѣдованiю алгебраическихъ уравненiй далъ обширный мемуаръ Лагранжа, помѣщенный въ трудахъ Берлинской Академiи за 1770 — 71 г., подъ заглавiемъ „Réflexions sur la résolution algébrique des équations“. Здѣсь прежде всего сопоставляются методы, которые служатъ для рѣшенiя уравненiй 3-ей и 4-ой степени и къ которымъ привели изслѣдованiя Эйлера, Безу (Bézout, 1765) и Варинга (1736 — 1798), и оцѣнивается внутреннее значенiе этихъ методовъ. Затѣмъ авторъ обобщаетъ эти методы и показываетъ, почему они непримѣнимы къ уравненiямъ болѣе высокихъ степеней. Лагранжъ приходитъ при этомъ къ понятiю о резольвентахъ, которыя обыкновенно зависятъ, правда, отъ уравненiй болѣе высокихъ степеней, нежели данныя, но въ извѣстномъ смыслѣ все-таки даютъ упрощенiе задачи.

Функцiя корней уравненiя, которая при перестановкахъ корней получаетъ опредѣленное число различныхъ значенiй, удовлетворяетъ уравненiю, степень котораго зависитъ отъ числа этихъ значенiй. Такъ какъ

*) Чирнгаузъ (Ehrenfried Walter von Tschirnhaus), 1651 — 1708, былъ въ дружескихъ отношенiяхъ съ Лейбницемъ.

число перестановокъ изъ n элементовъ равно $n!$, то функція n корней уравненія n-ой степени имѣетъ не болѣе $n!$ значеній и удовлетворяетъ уравненію соотвѣтствующей степени. Но примѣненіе резольвентъ понижаетъ степень этого уравненія до $(n-2)!$, т. е. для уравненія 5-ой степени до 6-ой степени. Эта работа дѣлаетъ Лагранжа предшественникомъ современной алгебры, которая покоится на теоріи группъ перестановокъ и симметрическихъ функцій.

6. Въ виду продолжительныхъ и многочисленныхъ безплодныхъ попытокъ найти рѣшеніе уравненія 5-ой степени, становилось все болѣе и болѣе сомнительнымъ, можетъ ли эта задача вообще быть разрѣшена, правильно ли поставленъ вопросъ. Уже Гауссъ въ своей докторской диссертаціи (1799; полное собраніе соч., т. III, стр. 17), въ которой онъ въ первый разъ даетъ доказательство существованія корня алгебраическаго уравненія, высказывается по этому поводу очень опредѣленно. Онъ подчеркиваетъ, что рѣшеніе уравненія въ томъ видѣ, какъ его до сихъ поръ понимаютъ, представляетъ собой не что иное, какъ приведеніе уравненія къ ряду двучленныхъ уравненій, и что двучленныя уравненія отличаются отъ остальныхъ только большею легкостью численнаго ихъ разрѣшенія. Гауссъ указываетъ вмѣстѣ съ тѣмъ, что нѣтъ никакихъ основаній допускать возможность такого пріема для уравненія любой степени. Онъ даже сообщаетъ здѣсь о дальнѣйшихъ своихъ изслѣдованіяхъ въ этомъ направленіи, которыхъ, однако, не оказалось ни въ опубликованныхъ имъ работахъ ни въ бумагахъ, оставшихся послѣ его смерти. Но зато уже въ 1801-омъ году въ своихъ „Disquisitiones arithmeticae", въ главѣ о дѣленіи окружности на равныя части, Гауссъ даетъ уже важный примѣръ глубокаго анализа алгебраическаго уравненія. Но такъ какъ уравненія, съ которыми авторъ имѣетъ дѣло, разрѣшаются въ радикалахъ, то вопросъ, поставленный Гауссомъ, остается здѣсь на заднемъ планѣ, тогда какъ на первое мѣсто выступаетъ рядъ выводовъ, относящихся къ алгебрѣ и къ теоріи чиселъ; въ частности, въ первой очереди стоитъ вопросъ о послѣдовательномъ приведеніи даннаго уравненія къ ряду уравненій возможно низшей степени. Гауссова теорія дѣленія окружности на равныя части сдѣлалась образцомъ для всѣхъ общихъ алгебраическихъ изысканій. Изъ замѣтки, помѣщенной въ „Disquisitiones", видно, что Гауссъ получилъ тѣ же результаты и въ другихъ отдѣлахъ, напримѣръ, при дѣленіи эллиптическихъ функцій; замѣчаніе это было понято и оцѣнено лишь спустя нѣсколько десятилѣтій, когда Абель и Якоби разработали теорію эллиптическихъ функцій.

7. Между тѣмъ въ Италіи была уже сдѣлана серьезная попытка доказать невозможность рѣшенія уравненій 5-ой степени. Попытка эта принадлежитъ Руффини и опубликована имъ въ 1799-омъ году въ учеб-

Заслуге
Гаусса
и в до
теор. о
решен
алгебр.
в обл.
чисел.

никѣ „Teoria generale delle Equazioni, in cui si dimostra impossibile la resoluzione algebraica delle equazioni generali di grado superiore al quarto“ *); въ пяти дальнѣйшихъ сочиненіяхъ, послѣднее изъ которыхъ появилось въ 1813 г., онъ постоянно возвращается къ тому же вопросу.

Руффини въ общемъ находится на правильномъ пути, такъ какъ онъ исходитъ отъ изслѣдованія числа значеній, которыя можетъ принимать функція отъ корней уравненія при перестановкахъ этихъ корней; благодаря этому онъ является первымъ обоснователемъ теоріи группъ. Однако, его доказательства еще вызываютъ рядъ сомнѣній; и вскорѣ послѣ появленія этихъ работъ Мальфати высказалъ эти сомнѣнія и оспаривалъ полученные имъ результаты. Сверхъ того, изложеніе Руффини мало доступно, а за предѣлами Италіи его работы почти вовсе не были извѣстны.

Въ 1815 г. Коши опубликовалъ работу „Sur le nombre des valeurs qu'une fonction peut acquérir, lorsqu'on y permute de toutes les manières possibles les quantités qu'elle renferme“, за которымъ позже (1844) послѣдовалъ болѣе обширный мемуаръ, посвященный тому же предмету. Здѣсь въ первый разъ установлено понятіе о составленіи перестановокъ и о группахъ (Système conjuguée) и выработаны терминологія и обозначенія; хотя эти понятія встрѣчаются уже у Руффини, о которомъ Коши попутно упоминаетъ, но только здѣсь они дѣйствительно положены въ основу цѣльной теоріи **).

Sp. 276

8. Значительный шагъ впередъ алгебра сдѣлала благодаря трудамъ Абеля (Niels Henrik Abel).

Абель родился въ деревнѣ Финнё (Finnö) близъ г. Ставангера въ Норвегіи 5-го августа 1802 года и скончался 6-го апрѣля 1829 года. По поводу столѣтняго юбилея со дня его рожденія его соотечественники Гольстъ, Штёрмеръ и Силовъ (Holst, Störmer, Sylow) опубликовали его письма, которыя воспроизводятъ чудный образъ этого юнаго ученаго. То была мягкая натура съ жизнерадостнымъ, общительнымъ характеромъ, загубленная заботами, нуждой и недугомъ. Впрочемъ, уже раньше (1885) его жизнь и научныя работы нашли себѣ достаточно полную оцѣнку въ

---

*) Руффини (Paolo Ruffini, 1765—1822) былъ, собственно, по призванію врачемъ, но впослѣдствіи занималъ ученую должность по математикѣ при университетѣ въ Моденѣ. Ср. весьма достопримѣчательную статью Буркгардта „Начало теоріи группъ и Паоло Руффини“ въ „Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik“, Leipzig 1892.

**) Коши (Augustin Louis Cauchy) родился въ Парижѣ въ 1789 г. Послѣ іюльской революціи онъ жилъ въ Прагѣ въ качествѣ воспитателя герцога Бордосскаго, позднѣе вновь работалъ въ Парижѣ и умеръ въ 1857 г. Это одинъ изъ наиболѣе разностороннихъ изслѣдователей и плодовитыхъ писателей во всѣхъ почти отрасляхъ математики и математической физики. Его произведенія издаются Парижской Академіей во многихъ томахъ.

біографіи Абеля, составленной Бьеркнесомъ (Bjerknes). Безъ всякаго побужденія извнѣ, среди разнообразныхъ затрудненій изъ него развился во время своего короткаго пребыванія въ Германіи и Франціи рядъ работъ, которыя уже на 27-омъ году его жизни обезсмертили его имя. Смерть похитила его въ тотъ моментъ, когда приглашеніе на берлинскую каѳедру должно было освободить его отъ всякихъ заботъ о насущныхъ нуждахъ. Это приглашеніе было дѣломъ извѣстнаго Крелля (Crelle), основателя „Журнала чистой и прикладной математики" („Journal für reine und angewandte Mathematik"). Крелль съ отеческой заботливостью отнесся къ молодому Абелю, пріѣхавшему въ Германію чужимъ и неизвѣстнымъ юношей, всячески поддерживалъ его и уже этимъ заслужилъ благодарность ученаго міра.

Абель началъ свои научныя изслѣдованія съ рѣшенія уравненія 5-ой степени, которое, какъ ему казалось, ему удалось найти. Это было заблужденіе, въ чемъ онъ самъ скоро убѣдился; но оно имѣло ту хорошую сторону, что обратило на него вниманіе норвежскихъ математиковъ, въ особенности Ганстена (Hansteen), и обезпечило ему ихъ поддержку, которой онъ пользовался всю жизнь. Руководящую роль по отношенію къ Абелю сыгралъ Дегенъ (Degen) въ Копенгагенѣ: Дегенъ, правда, не усмотрѣлъ ошибки въ рѣшеніи уравненія 5-ой степени, предложенномъ Абелемъ, но все же относился къ этому рѣшенію съ недовѣріемъ и указалъ Абелю область, въ которой послѣдній вскорѣ сдѣлалъ такія великія открытія, именно теорію эллиптическихъ функцій. Но и алгебры онъ не потерялъ изъ виду и именно въ связи съ теоріей эллиптическихъ функцій онъ сдѣлалъ въ ней наиболѣе замѣчательныя открытія.

Когда рѣшеніе уравненія 5-ой степени, какъ это и должно было быть, ему не удалось, онъ поставилъ себѣ цѣлью рѣшить, возможно ли вообще такое рѣшеніе. Не имѣя никакихъ свѣдѣній о работахъ Руффини, онъ далъ первое полное доказательство невозможности (1824—1826). Но, будучи далекъ отъ мысли, что этимъ задача исчерпывается, онъ ставитъ вопросъ о характерѣ всѣхъ спеціальныхъ уравненій высшихъ степеней, допускающихъ алгебраическое рѣшеніе. Уже Гауссъ, какъ мы видѣли, указалъ классъ такого рода уравненій въ своей теоріи дѣленія окружности на равныя части. Упомянутое же выше таинственное замѣчаніе Гаусса, загадочный смыслъ котораго также раскрылъ Абель, указывало на дальнѣйшія области, въ которыхъ являются такого рода уравненія. Эти идеи привели къ дѣленію эллиптическихъ функцій, а также къ теоріи комплекснаго умноженія эллиптическихъ функцій. Такимъ образомъ, Абель открылъ большой классъ алгебраическихъ уравненій, которыя разрѣшаются въ радикалахъ и, помимо того, обладаютъ рядомъ замѣчательныхъ свойствъ; эти уравненія сохранили названіе „Абелевыхъ уравненій".

Абель поставилъ себѣ, однако, и болѣе общую задачу, именно слѣдующую: найти всѣ уравненія опредѣленной степени, которыя допускаютъ алгебраическое рѣшеніе, а также рѣшить, допускаетъ ли заданное уравненіе алгебраическое рѣшеніе или нѣтъ; кромѣ того, въ связи съ этимъ найти наиболѣе общую форму алгебраическаго выраженія, которое удовлетворяетъ алгебраическому уравненію.

Въ незаконченной работѣ, опубликованной лишь много лѣтъ послѣ его смерти, сохранились важныя предложенія, которыя послужили для Кронекера точкой отправленія дальнѣйшихъ изслѣдованій въ этой области *).

9. Совершенно своеобразное явленіе въ исторіи алгебры представляетъ собой Эваристъ Галуа (Evariste Galois). Онъ родился 26 октября 1811 года вблизи Парижа и погибъ на дуэли въ маѣ 1832 года, не достигши, такимъ образомъ, и 21 года. Въ возрастѣ около 16-ти лѣтъ, будучи еще ученикомъ колледжа Людовика Великаго, Галуа сталъ заниматься болѣе глубокими вопросами алгебры и нѣкоторыя изъ своихъ работъ представилъ въ Парижскую Академію и опубликовалъ въ журналахъ „Annalen von Gergonne“ и „Bulletin des sciences mathématiques de Férussac“.

Важнѣйшіе результаты своихъ изслѣдованій онъ изложилъ въ письмѣ, которое онъ наканунѣ роковой дуэли, предчувствуя смерть, написалъ своему другу Августу Шевалье (Auguste Chevalier); это письмо было позднѣе опубликовано въ „Revue encyclopédique“ и потомъ еще разъ въ журналѣ Ліувиля. Въ журналѣ „Annales de l'Ecole Normale“ за 1896 г. имѣется біографія Галуа, принадлежащая П. Дюпюи (P. Dupui).

Галуа въ извѣстномъ смыслѣ закончилъ теорію группъ перестановокъ и ихъ приложеніе къ алгебрѣ; именно, онъ показалъ, что всѣ вопросы, которые могутъ быть поставлены относительно алгебраическихъ уравненій, необходимо приводятся къ этой теоріи. Установивши точно, что нужно разумѣть подъ областью раціональности, онъ показываетъ, что вся природа алгебраическаго уравненія зависитъ отъ особой группы перестановокъ, (из 24 перест. урав. 4-ой ст). которая съ того времени сохранила названіе группы Галуа. Этимъ путемъ онъ находитъ простѣйшія условія, при которыхъ уравненіе простой степени разрѣшается въ радикалахъ. Условіе это въ его формулировкѣ сводится къ тому, чтобы всѣ корни уравненія выражались раціонально черезъ два изъ нихъ. Но онъ разбираетъ и другіе вопросы, напримѣръ, вопросъ о томъ, при какихъ условіяхъ уравненіе можетъ

*) Сочиненія Абеля, включая и посмертныя работы, вышли въ двухъ изданіяхъ; первое изданіе выпустилъ Гольмбоэ (Holmboe), учитель и другъ Абеля, въ 1839 году; второе изданіе выпущено въ 1881 году издательствомъ Тейбнера подъ руководствомъ Силова и Ли.

быть приведено къ уравненію болѣе низкой степени, а также, какимъ образомъ можно достигнуть пониженія группы пріобщеніемъ ирраціональности; по всѣмъ этимъ вопросамъ онъ даетъ приложенія къ теоріи эллиптическихъ функцій, въ то время только-что развернувшейся.

10. Во всѣхъ этихъ изслѣдованіяхъ не содержится какихъ-либо спеціальныхъ предположеній объ области раціональности. Она можетъ состоять изъ раціональныхъ и ирраціональныхъ чиселъ; она можетъ содержать также перемѣнныя величины. Такимъ образомъ, всѣ эти предложенія относятся какъ къ числамъ, такъ и къ алгебраическимъ функціямъ, теорія которыхъ, въ связи съ проистекающими изъ нихъ путемъ интегрированія трансцендентными функціями, въ рукахъ Абеля, Римана и Вейерштрасса достигла высокой степени совершенства.

11. Въ теоріи алгебраическихъ чиселъ задачи, относящіяся къ этимъ общимъ теоріямъ, въ сущности, только поставлены и ждутъ еще своего разрѣшенія; съ этими задачами особенно связано имя Кронекера. Ближайшая цѣль заключается въ томъ, чтобы изучить свойства спеціальныхъ категорій алгебраическихъ чиселъ; изслѣдователю открывается здѣсь неизмѣримое поле для дальнѣйшихъ изысканій. Въ настоящее время мы имѣемъ болѣе или менѣе точныя свѣдѣнія только о тѣхъ алгебраическихъ числахъ, къ которымъ приводитъ дѣленіе окружности на равныя части и комплексное умноженіе эллиптическихъ функцій.

Для решения неопред. ур-ий 2-ой ст.

Книга III.

АНАЛИЗЪ.

ГЛАВА XXI.

Безконечные ряды.

§ 115. Ряды съ положительными членами.

1. Подъ числовымъ рядомъ мы разумѣемъ составленную по какому-либо закону послѣдовательность чиселъ

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$$

какого угодно рода. Эти числа называютъ также членами ряда. Рядъ называется безконечнымъ, если законъ таковъ, что его можно примѣнять неограниченно, такъ что для любого индекса ν можно вычислить соотвѣтствующее число a_ν.

Такой безконечный рядъ образуютъ, напримѣръ, натуральныя числа $1, 2, 3, \ldots$ и, вообще, члены какой-либо ариѳметической прогрессіи $a, a+b, a+2b, a+3b, \ldots$ или члены геометрической прогрессіи $1, a, a^2, a^3, \ldots$ Другими примѣрами могутъ служить системы чиселъ:

$$1^k, 2^k, 3^k, \ldots, n^k,$$

гдѣ показатель k можетъ быть произвольнымъ положительнымъ или отрицательнымъ числомъ.

Но встрѣчаются и такіе числовые ряды, которые составлены по гораздо болѣе сложнымъ законамъ, какъ, напримѣръ, рядъ послѣдовательныхъ приближенныхъ значеній безконечной десятичной дроби или непрерывной дроби.

2. Мы разсмотримъ сначала ряды, члены которыхъ суть положительныя числа. Изъ такого ряда

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

мы можемъ составить другой рядъ, составляя суммы двухъ, трехъ, четырехъ, ... начальныхъ членовъ перваго ряда. Если мы присоединимъ еще, въ качествѣ перваго члена новаго ряда, первый членъ a_1, то получимъ числа:

$$\begin{aligned} A_1 &= a_1, \\ A_2 &= a_1 + a_2, \\ A_3 &= a_1 + a_2 + a_3, \\ A_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

n-ое изъ которыхъ есть

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Рядъ чиселъ A_n также безконеченъ; его члены также положительны, но онъ имѣетъ еще ту особенность, что члены его возрастаютъ вмѣстѣ съ n, такъ что

$$A_1 < A_2 < A_3 < A_4 < \cdots$$

Ибо каждый членъ A_{n+1} получается изъ предыдущаго прибавленіемъ положительнаго числа a_{n+1}.

Рядъ чиселъ A_ν называется **рядомъ суммъ**, соотвѣтствующимъ ряду чиселъ a_ν.

Наоборотъ, когда имѣемъ числовой рядъ $A_1, A_2, A_3, \ldots$ съ положительными членами, возрастающими вмѣстѣ съ индексомъ, то этотъ рядъ будетъ рядомъ суммъ для ряда чиселъ $a_1, a_2, a_3, \ldots$, если положимъ

$$a_1 = A_1, \quad a_2 = A_2 - A_1, \quad a_3 = A_3 - A_2, \ldots$$

Такъ, рядъ натуральныхъ чиселъ есть рядъ суммъ для ряда, состоящаго исключительно изъ единицъ.

Рядъ

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{4}{5}, \ldots$$

есть рядъ суммъ для ряда

$$\frac{1}{1\cdot 2}, \quad \frac{1}{2\cdot 3}, \quad \frac{1}{3\cdot 4}, \quad \frac{1}{4\cdot 5}, \ldots$$

и т. д.

3. Относительно ряда суммъ слѣдуетъ различать два случая. Если есть такое число K, что всѣ числа A_n постоянно остаются меньше K, то, по § 25, числа A_n имѣютъ **верхнюю границу**, которую мы обозначимъ черезъ A, т. е., всѣ числа A_n меньше A. Если же $\varDelta$ есть произвольное, сколь угодно малое положительное число, то между

A и $A - \varDelta$ имѣются числа A_n; а такъ какъ числа A_n увеличиваются вмѣстѣ съ n, то въ этомъ интервалѣ находятся всѣ числа A_n, для которыхъ $n > m$, если только число A_m лежитъ въ этомъ интервалѣ.

Въ этомъ случаѣ рядъ суммъ A_n называется сходящимся. Онъ стремится къ числу A, и сходимость считается тѣмъ лучшею, чѣмъ быстрѣе мы, при данномъ $\varDelta$, попадаемъ въ интервалъ $(A - \varDelta, A)$. Число A называютъ суммою ряда чиселъ a_n. Пишутъ также:

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ говорятъ, что рядъ $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ сходится и стремится къ предѣлу A.

Часто употребляютъ знакъ Σ (сумма) и пишутъ:

$$A = \sum^{h} a_h,$$

гдѣ индексъ h при Σ означаетъ, что h проходитъ черезъ значенія 1, 2, 3, . . . до безконечности.

4. Для обозначенія предѣла ряда чиселъ употребляютъ знакъ Lim (сокращеніе слова limes = предѣлъ) и пишутъ, такимъ образомъ,

$$\lim_{n=\infty} A_n = A, \tag{1}$$

при чемъ знакъ $n = \infty$ (n равно безконечности), написанный подъ знакомъ Lim, выражаетъ, что величина A_n становится сколь угодно близкою къ A, когда n растетъ выше всякихъ границъ. Выражаясь нѣсколько неточно, называютъ число A суммой безконечнаго множества слагаемыхъ a_h. Мы можемъ сказать точнѣе:

Сумма безконечнаго ряда положительныхъ членовъ есть верхняя граница всѣхъ суммъ, составленныхъ изъ конечнаго числа этихъ членовъ [1]).

---

[1]) Хотя число A было опредѣлено, какъ верхняя граница суммъ A_n, составленныхъ изъ конечнаго числа начальныхъ членовъ ряда $a_1, a_2, \ldots, a_h, \ldots$, взятыхъ по порядку безъ пропусковъ, но A будетъ верхнею границею всѣхъ вообще суммъ s, составленныхъ изъ членовъ a_h. Дѣйствительно, пусть s будетъ какая-либо сумма членовъ a_h, и пусть m будетъ наибольшій индексъ членовъ a_h въ суммѣ s. Если $s \neq A_m$, то члены суммы s составляютъ часть членовъ суммы A_m, такъ что $s \leqq A_m < A$. Поэтому въ комплексѣ всѣхъ суммъ s каждый членъ меньше A, и, такъ какъ между суммами s имѣются суммы A_n, сколь угодно мало отличающіяся отъ A, то A есть верхняя граница всѣхъ s.

Если сумма сходится, то, составляя сумму A_n для достаточно большого n, можно вычислить A съ какою угодно степенью точности; на этомъ именно и основано столь частое употребленіе безконечныхъ рядовъ.

Слѣдуетъ замѣтить, что при составленіи суммы A_n члены $a_1, a_2, a_3, \ldots$ берутся по порядку, т. е. ни одного изъ слагаемыхъ не должно недоставать. Но если n уже настолько велико, что A_n уже находится въ предписанномъ интервалѣ $(A - \Delta, A)$, то мы останемся въ этомъ интервалѣ, если будемъ прибавлять послѣдующіе члены $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$ и не по порядку, а опуская нѣкоторые изъ нихъ, такъ какъ при этомъ числа A_n все возрастаютъ, оставаясь, однако, постоянно меньше A.

5. Если же нѣтъ такого числа, меньше котораго остаются всѣ суммы A_n, — если, слѣдовательно, для достаточно большихъ значеній n суммы A_n превышаютъ всякое данное число, то рядъ суммъ чиселъ a_n расходится. Комплексъ чиселъ a_n въ этомъ случаѣ не имѣетъ суммы. Однако, и въ этомъ случаѣ пишутъ

$$\lim_{n=\infty} A_n = \infty, \tag{2}$$

гдѣ знакъ ∞ (безконечность) не означаетъ опредѣленнаго числа, а выражаетъ только, что числа A_n превосходятъ любое число, когда n неограниченно возрастаетъ.

6. Очень важное значеніе имѣетъ слѣдующее необходимое условіе сходимости ряда: если ε есть произвольно малое данное положительное число, то всѣ члены a_n должны быть меньше ε, коль скоро n больше, чѣмъ нѣкоторое достаточно большое число m, зависящее отъ ε; т. е. нижнею границею чиселъ a_n долженъ быть нуль; въ знакахъ это выражаютъ такъ:

$$\lim_{n=\infty} a_n = 0. \tag{3}$$

Въ самомъ дѣлѣ, если допустить, что, какъ бы велико ни было число m, все еще существуютъ превосходящія его значенія n, для которыхъ $a_n > \varepsilon$, то можно взять n столь большимъ, чтобы въ суммѣ A_n заключалось произвольно большое число h членовъ, большихъ ε, и чтобы такимъ образомъ было $A_n > h\varepsilon$; но при всякомъ данномъ ε произведеніе $h\varepsilon$ можно сдѣлать произвольно большимъ, если взять h достаточно большимъ.

Такимъ образомъ, условіе (3) есть необходимое, но отнюдь не достаточное условіе сходимости.

Позже мы познакомимся съ примѣрами рядовъ, въ которыхъ условіе (3) выполняется, хотя эти ряды расходящіеся.

§ 116. Безконечные геометрическіе ряды.

1. Какъ первый примѣръ безконечнаго ряда, разсмотримъ геометрическій рядъ

$$1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ x^4,\ \ldots,$$

въ которомъ x есть положительное число. Для суммы A_n мы, по § 63, получаемъ:

$$A_n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1} \tag{1}$$
$$= \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}.$$

Такимъ образомъ, если $x < 1$, то всѣ суммы A_n меньше, чѣмъ $1/(1-x)$ и, вмѣстѣ съ тѣмъ, $1/(1-x)$ есть верхняя граница всѣхъ суммъ A_n, потому что x^n, при неограниченномъ возрастаніи числа n, падаетъ ниже всякой границы. Въ этомъ предположеніи $(x < 1)$ рядъ суммъ A_n сходится, и мы можемъ положить

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}. \tag{2}$$

Если же $x > 1$, то вмѣстѣ съ n сумма A_n возрастаетъ выше всякихъ границъ, такъ какъ въ этомъ случаѣ x^n возрастаетъ выше всякихъ границъ. Наконецъ, для $x = 1$

$$A_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = n;$$

и въ этомъ случаѣ A_n возрастаетъ вмѣстѣ съ n выше всякихъ границъ, Рядъ $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ есть поэтому рядъ сходящійся, когда $x < 1$. и расходящійся, когда $x \geqq 1$.

2. Къ сходящимся геометрическимъ рядамъ принадлежатъ также десятичныя періодическія дроби, и данное нами въ п. 11 § 75-го доказательство того, что всякая десятичная періодическая дробь можетъ быть обращена въ обыкновенную, въ своей основѣ есть не что иное, какъ суммированіе этого безконечнаго геометрическаго ряда.

Именно, если безконечная десятичная дробь

$$\gamma = 0,\zeta_1\zeta_2\zeta_3\ \ldots$$

имѣетъ періодъ

$$\zeta_1\zeta_2\zeta_3\ \cdots\ \zeta$$

и если написанное въ десятичной системѣ число $\zeta_1\zeta_2\zeta_3 \ldots \zeta_f$ положить равнымъ m:

$$\zeta_1\zeta_2\zeta_3 \ldots \zeta_f = m,$$

то десятичная дробь будетъ имѣть значенie

$$\gamma = m10^{-f} + m10^{-2f} + m10^{-3f} + \cdots$$
$$= m10^{-f}(1 + 10^{-f} + 10^{-2f} + \cdots),$$

такъ что, положивъ $x = 10^{-f}$ и помноживъ члены дроби (2) на 10^f, получимъ:

$$\gamma = \frac{m}{10^f - 1};$$

это же есть рацiональная дробь, знаменатель которой есть цѣлое число и можетъ быть написанъ при помощи однѣхъ только девятокъ.

3. Но и неперiодическая безконечная десятичная дробь есть сумма сходящагося безконечнаго ряда, ибо, если

$$\gamma = 0, \zeta_1\zeta_2\zeta_3 \ldots,$$

то, положивъ

$$\gamma_n = \zeta_1 10^{-1} + \zeta_2 10^{-2} + \zeta_3 10^{-3} + \cdots + \zeta_n 10^{-n},$$

найдемъ, что всѣ числа γ_n меньше 1; слѣдовательно, рядъ γ сходится.

§ 117. Дальнѣйшie примѣры сходящихся и расходящихся рядовъ.

1. Въ качествѣ слѣдующаго примѣра, разсмотримъ безконечный рядъ

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots, \tag{1}$$

котораго члены $a_n = 1/n$ удовлетворяютъ условiю п. 6 § 115-го, но который, какъ мы сейчасъ увидимъ, все же есть рядъ расходящiйся [2]).

---

[2]) Рядъ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ называется гармоническимъ.

Имѣемъ, именно,

$$1 > \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} > \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} > \frac{4}{8} = \frac{1}{2},$$

. . . .

и, такимъ образомъ, сумму (1) можно разложить на произвольно большое число отдѣльныхъ суммъ, изъ коихъ каждая больше $\frac{1}{2}$ и коихъ сумма можетъ поэтому стать произвольно большой.

2. Чтобы нѣсколько точнѣе изслѣдовать характеръ этого возрастанія, полагаемъ:

$$A_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

и для всякаго m:

$$\sigma_m = \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{2m-1}.$$

Если мы каждый изъ m членовъ послѣдней суммы замѣнимъ меньшимъ числомъ $1/2m$, то сумма уменьшится: если же замѣнить каждый изъ этихъ членовъ дробью $1/m$, то сумма увеличится. Поэтому

$$1 > \sigma_m > \frac{1}{2}.$$

Принимая $m = 1, 2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{\nu-1}$, получаемъ:

$$A_{2^\nu - 1} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_4 + \sigma_8 + \cdots + \sigma_{2^{\nu-1}}.$$

Такимъ образомъ,

$$\nu > A_{2^\nu - 1} > \frac{\nu}{2},$$

и если $n \geqq 2^\nu - 1$, то $A_n > \nu/2$ и возрастаетъ до безконечности вмѣстѣ съ n [3]). Слѣдовательно, рядъ (1) расходится.

---

[3]) Ибо ν можно выбрать сколь угодно большимъ.

. Мы разсмотримъ дальше рядъ

$$S_h = 1 + \frac{1}{2^h} + \frac{1}{3^h} + \frac{1}{4^h} + \frac{1}{5^h} + \cdots \tag{2}$$

гдѣ h есть показатель, который можетъ и не быть цѣлымъ числомъ.

Если $h = 1$, то рядъ S_h переходитъ въ только-что разсмотрѣнный рядъ A, расходимость котораго мы доказали. Если $h < 1$, то каждый членъ ряда S_h больше соотвѣтствующаго члена ряда A и, слѣдовательно, рядъ S_h будетъ расходиться.

Остается, такимъ образомъ, только тотъ случай, когда $h > 1$.

Чтобы изслѣдовать сходимость ряда въ этомъ случаѣ, мы замѣтимъ, что сумма

$$\sigma_m = \frac{1}{m^h} + \frac{1}{(m+1)^h} + \cdots + \frac{1}{(2m-1)^h}$$

увеличится, если замѣнить въ ней всѣ члены первымъ членомъ $1/m^h$. Сообразно съ этимъ

$$\sigma_m < \frac{1}{m^{h-1}}.$$

Примѣнимъ это неравенство къ нашему ряду, полагая $m = 1, 2, 4, 8, \ldots$:

$$1 = 1,$$

$$\frac{1}{2^h} + \frac{1}{3^h} < \frac{1}{2^{h-1}},$$

$$\frac{1}{4^h} + \frac{1}{5^h} + \frac{1}{6^h} + \frac{1}{7^h} < \frac{1}{2^{2(h-1)}},$$

$$\frac{1}{8^h} + \frac{1}{9^h} + \cdots + \frac{1}{15^h} < \frac{1}{2^{3(h-1)}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Если станемъ складывать эти отдѣльныя суммы до произвольнаго члена [4]) и положимъ

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^h} + \frac{1}{3^h} + \frac{1}{4^h} + \frac{1}{5^h} + \cdots + \frac{1}{n^h},$$

---

[4]) Пусть $\frac{1}{n^h}$ будетъ произвольный членъ ряда S_h. Цѣлое число n содержится между двумя послѣдовательными цѣлыми степенями числа 2. Пусть это бу-

то получимъ, что

$$S_n < 1 + \frac{1}{2^{h-1}} + \frac{1}{2^{2(h-1)}} + \frac{1}{2^{3(h-1)}} + \cdots,$$

при чемъ сумма на правой сторонѣ можетъ быть распространена до безконечности, такъ какъ отъ этого она только возрастаетъ.

Такъ какъ теперь $h > 1$, разность $h-1$ есть положительное число и $1/2^{(h-1)}$ есть правильная дробь, то сумма геометрическаго ряда, стоящаго въ правой части этого неравенства, можетъ быть найдена по правилу § 116-го, что даетъ

$$S_n < \frac{1}{1-2^{1-h}}.$$

Рядъ (2) будетъ, такимъ образомъ, сходящимся, если $h > 1$, и расходящимся, если $h \leqq 1$.

§ 118. Признаки сходимости.

1. Результаты послѣднихъ двухъ параграфовъ могутъ быть обобщены при помощи одной общей теоремы о сходимости рядовъ.

Эта теорема гласитъ:

Если

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$$

есть сходящійся безконечный рядъ (съ положительными членами) и если

$$k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n, \ldots$$

есть какой-либо рядъ положительныхъ чиселъ, которыя всѣ остаются меньше нѣкотораго конечнаго предѣла g, то и рядъ

$$K = k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 + k_4 a_4 + \cdots$$

есть рядъ сходящійся.

детъ $(\nu-1)$-ая и ν-ая степени, такъ что $2^{\nu-1} < n \leqq 2^\nu$. Тогда, полагая $m = 2^{\nu-1}$, имѣемъ:

$$\frac{1}{(2^{\nu-1})^h} + \frac{1}{(2^{\nu-1}+1)^h} + \cdots + \frac{1}{n^h} + \cdots + \frac{1}{(2^\nu-1)^h} < \frac{1}{(2^{\nu-1})^{(h-1)}}$$

и тѣмъ болѣе

$$\frac{1}{(2^{\nu-1})^h} + \frac{1}{(2^{\nu-1}+1)^h} + \cdots + \frac{1}{n^h} < \frac{1}{2^{(\nu-1)(h-1)}}.$$

Это и есть послѣднее въ ряду складываемыхъ неравенствъ.

Доказательство почти само собой напрашивается. Ибо, если положить:

$$A_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n,$$
$$K_n = k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 + \cdots + k_n a_n,$$

то изъ условій теоремы вытекаетъ, что

$$K_n < g A_n; \tag{1}$$

если поэтому всѣ суммы A_n остаются ниже границы A, то суммы K_n остаются ниже границы gA, а это (для рядовъ съ положительными членами) есть достаточное условіе сходимости.

2. Этотъ способъ разсужденія ни въ чемъ не измѣняется, если допустить, что между числами $k_1, k_2, k_3, \ldots$ фигурируютъ и нули, потому что тогда всѣ суммы K_n остаются положительными и неравенство (1) сохраняется. Суммы K_n все еще имѣютъ верхнюю границу. Отсюда слѣдуетъ:

Сумма, составленная изъ части членовъ сходящагося ряда, также сходится [5]).

3. Если въ безконечномъ ряду измѣнимъ какъ-либо нѣкоторое опредѣленное конечное число членовъ, то ничто не измѣнится въ отношеніи расходимости или сходимости ряда.

Ибо, если число m такъ велико, что сумма A_m содержитъ всѣ измѣненные члены, то, вслѣдствіе измѣненія членовъ, всѣ суммы A_n, въ которыхъ $n > m$, измѣнятся на одну и ту же конечную величину и послѣ измѣненія эти суммы имѣютъ верхнюю конечную границу или не имѣютъ ея, смотря по тому, имѣло ли мѣсто то или другое до ихъ измѣненія.

4. О сходимости или расходимости безконечнаго ряда можно въ нѣкоторыхъ случаяхъ судить по закону составленія членовъ a_n, и для этого служитъ теорема п. 1-аго въ связи съ примѣрами предыдущихъ параграфовъ. Первый изъ такихъ признаковъ заключается въ слѣдующемъ:

Если члены безконечнаго ряда

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

таковы, что отношеніе $a_{n+1} : a_n$, начиная съ опредѣленнаго значенія n, постоянно остается меньше нѣкоторой правильной дроби и, въ частности, если

---

[5]) Мы беремъ $k_n = 1$ или $k_n = 0$, смотря по тому, входитъ ли или не входитъ членъ a_n сходящагося ряда въ разсматриваемую часть.

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \theta$$

есть правильная дробь [6]), то рядъ сходится.

Для доказательства этой теоремы, возьмемъ число x, удовлетворяющее неравенству

$$\theta < x < 1,$$

и положимъ $a_n = k_n x^n$. Тогда

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{k_{n+1}}{k_n} x < \theta,$$

и, такъ какъ θ/x есть правильная дробь, то

$$k_{n+1} < k_n.$$

Числа k_n образуютъ, слѣдовательно, рядъ убывающихъ положительныхъ чиселъ и всѣ остаются поэтому меньше нѣкотораго конечнаго числа. Такъ какъ число x есть правильная дробь, то рядъ

$$x + x^2 + x^3 + \cdots$$

сходится; согласно же теоремѣ п. 1-го, сходится также и рядъ

$$k_1 x + k_2 x^2 + k_3 x^3 + \cdots = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

Если предѣлъ отношенія $a_{n+1} : a_n$ больше 1, то числа a_n увеличиваются вмѣстѣ съ n, а потому не могутъ имѣть предѣломъ нуля. Слѣдовательно, уже по п. 6 § 115-го рядъ расходится.

Предѣлъ частнаго $a_{n+1} : a_n$ можетъ быть равенъ 1 какъ для сходящихся, такъ и для расходящихся рядовъ.

Ряды вида

$$X = k_1 x + k_2 x^2 + k_3 x^3 + \cdots,$$

къ которымъ мы привели вопросъ, называются степенными рядами относительно x. Они сходятся, если числа $k_1, k_2, k_3, \ldots$ остаются конечными, а x есть правильная дробь. Къ этому классу принадлежатъ и безконечныя десятичныя дроби, которыя получаются, если положить $x = 1/10$, а подъ $k_1, k_2, k_3, \ldots$ разумѣть цифры, т. е. числа ряда $0, 1, \ldots, 9$.

---

[6]) Въ этомъ случаѣ отношеніе $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ при достаточно большомъ n становится и остается меньше любой правильной дроби, большей θ; поэтому онъ подходитъ подъ предыдущій случай.

5. Другой признакъ сходимости безконечнаго ряда съ положительными членами заключается въ слѣдующемъ:

Если члены безконечнаго ряда

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

таковы, что, начиная съ опредѣленнаго значенія n, числа $\sqrt[n]{a_n}$ постоянно остаются меньше нѣкоторой правильной дроби θ, то рядъ сходится.

Въ самомъ дѣлѣ, если

$$\sqrt[n]{a_n} < \theta,$$

то

$$a_n < \theta^n$$

и, слѣдовательно,

$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots < \theta^n (1 + \theta + \theta^2 + \cdots).$$

Но такъ какъ θ есть правильная дробь, то рядъ $1 + \theta + \theta^2 + \cdots$ сходится, и, слѣдовательно, сходится также и данный рядъ.

6. Между обоими признаками сходимости (п. п. 4 и 5) существуетъ связь, которая можетъ быть выражена съ помощью слѣдующей теоремы:

Если отношеніе $a_{n+1} : a_n$ при неограниченномъ возрастаніи n имѣетъ оредѣленный предѣлъ θ, то и $\sqrt[n]{a_n}$ имѣетъ тотъ же предѣлъ.

Возьмемъ для доказательства произвольно малый интервалъ, въ которомъ заключается θ:

$$\alpha < \theta < \beta. \tag{2}$$

Такъ какъ отношеніе $a_{n+1} : a_n$ неограниченно приближается къ предѣлу θ, то всѣ значенія этого отношенія, начиная съ нѣкотораго значенія m перемѣннаго n, лежатъ въ этомъ интервалѣ, такъ что имѣемъ:

$$\begin{aligned} \alpha a_m &< a_{m+1} < \beta a_m, \\ \alpha a_{m+1} &< a_{m+2} < \beta a_{m+1}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha a_{n-1} &< a_n \quad < \beta a_{n-1}; \end{aligned} \tag{3}$$

перемножая между собой всѣ эти неравенства и сокращая обѣ части произведенія на множителя $a_{m+1} a_{m+2} \dots a_{n-1}$, получимъ:

$$\alpha^{n-m} a_m < a_n < \beta^{n-m} a_m. \tag{4}$$

Извлекая корень n-той степени изъ всѣхъ членовъ этихъ неравенствъ, найдемъ:

$$\alpha \alpha^{-\frac{m}{n}} a_m^{\frac{1}{n}} < \sqrt[n]{a_n} < \beta \beta^{-\frac{m}{n}} a_m^{\frac{1}{n}}.$$

Такъ какъ при постоянномъ m выраженія $\alpha^{-\frac{m}{n}}$, $\beta^{-\frac{m}{n}}$, $a_m^{\frac{1}{n}}$ при неограниченно возрастающемъ n стремятся къ предѣлу 1, то для достаточно большихъ значеній n имѣемъ:

$$\alpha < \sqrt[n]{a_n} < \beta, \tag{5}$$

т. е. для достаточно большихъ значеній n число $\sqrt[n]{a_n}$ также лежитъ въ интервалѣ (2). Такъ какъ этотъ интервалъ можно взять сколь угодно малымъ, то мы и приходимъ къ выводу, что

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} \sqrt[n]{a_n} = \theta.$$

7. Этотъ признакъ сходимости непримѣнимъ къ ряду S_h въ п. 3 § 117-го, потому что, при $a_n = n^{-h}$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^h};$$

эти же частныя имѣютъ предѣломъ 1, каково бы ни было h. Между рядами S_h встрѣчаются, однако, какъ мы видѣли, какъ сходящіеся, такъ и расходящіеся.

Но именно изъ этого примѣра, который былъ нами изслѣдованъ непосредственно, мы можемъ вывести признакъ для такихъ случаевъ, для которыхъ первый признакъ не даетъ рѣшенія вопроса.

Если произведеніе na_n безгранично возрастаетъ вмѣстѣ съ n или имѣетъ отличный отъ нуля предѣлъ g, то $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ есть рядъ расходящійся.

Ибо при каждомъ изъ этихъ предположеній возможно взять такое положительное число c, чтобы, начиная съ нѣкотораго достаточно большого значенія m перемѣнной n, было

$$a_n > \frac{c}{n}\ ^{7)};$$

поэтому будетъ также:

$$a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots > c\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots\right),$$

и сумма въ правой части этого неравенства съ безконечнымъ возрастаніемъ числа членовъ неограниченно возрастаетъ (по п. 1 § 117-го).

8. Такъ, напримѣръ, въ силу этихъ теоремъ, рядъ

$$\frac{1}{\alpha+\beta} + \frac{1}{\alpha+2\beta} + \frac{1}{\alpha+3\beta} + \frac{1}{\alpha+4\beta} + \cdots,$$

въ которомъ β есть положительное число, расходится, ибо предѣлъ дроби

$$\frac{n}{\alpha+\beta n} = \frac{1}{\dfrac{\alpha}{n}+\beta}$$

равенъ $1:\beta$ и, слѣдовательно, отличенъ отъ нуля.

9. Если можно найти показателя h такого рода, что предѣлъ

$$\lim_{n=\infty} a_n n^h = g$$

есть конечное число, при чемъ $h > 1$, то рядъ $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ сходится.

Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ всѣ числа

$$a_n n^h = k_n$$

будутъ меньше нѣкотораго опредѣленнаго числа [8]), а такъ какъ, по п. 3 § 117-го, рядъ

$$1 + \frac{1}{2^h} + \frac{1}{3^h} + \frac{1}{4^h} + \cdots$$

---

[7]) Въ случаѣ, если $\lim\limits_{n=\infty} na_n = g$, за число c нужно взять число $g-\varepsilon$, гдѣ ε есть произвольно малое положительное число, ибо, начиная съ нѣкотораго достаточно большого значенія m перемѣнной n, произведеніе $na_n > g-\varepsilon$.

[8]) Если c есть произвольное положительное число, то можно указать такое значеніе m указателя n, что при $n \geqq m$ будетъ $a_n n^h = k_n < g + c$. Если же обо-

сходится, то, по теоремѣ п. 1-го, сходится и рядъ

$$k_1 + \frac{k_2}{2^h} + \frac{k_3}{3^h} + \cdots = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

10. Если

$$f(n) = an^h + a_1 n^{h-1} + a_2 n^{h-2} + \cdots + a_h,$$

гдѣ a, a_1, a_2, ..., a_h суть данныя числа, изъ коихъ a имѣетъ положительное значеніе, то

$$\frac{f(n)}{n^h} = a + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \cdots + \frac{a_h}{n^h},$$

и, слѣдовательно, предѣлъ этого выраженія, при безгранично возрастающемъ n, равенъ a. Поэтому числа

$$\frac{n^h}{f(n)} = k_n$$

остаются меньше нѣкотораго конечнаго числа [9]), и рядъ

$$\frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(3)} + \cdots = \frac{k_1}{1^h} + \frac{k_2}{2^h} + \frac{k_3}{3^h} + \cdots$$

сходится при $h > 1$ (согласно п. 3 § 117-го и п. 1 § 118-го).

11. Такъ, напримѣръ, сумма дробей, обратныхъ послѣдовательнымъ треугольнымъ числамъ:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{28} + \cdots,$$

въ которой общій членъ есть

$$a_n = \frac{2}{n(n+1)},$$

сходится. Здѣсь мы въ состояніи дѣйствительно разыскать сумму, ибо

$$a_n = \frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1},$$

значимъ черезъ C число, которое больше каждаго изъ чиселъ k_1, k_2, ..., k_{m-1}, $g + c$, то всѣ k_n будутъ меньше C.

9) Это число есть $\frac{1}{a} + \varepsilon$, гдѣ ε есть произвольно малое положительное число.

и, слѣдовательно,

$$A_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

$$= 2\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right),$$

что при $n=\infty$ стремится къ предѣлу 2.

§ 119. Основаніе системы натуральныхъ логариѳмовъ.

1. Мы видѣли выше, въ теоріи логариѳмовъ, какія соображенія привели Непера къ тому, чтобы за основаніе системы логариѳмовъ принять число $(1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}}$, гдѣ Δ есть число весьма малое (у Непера одна десятимилліонная). Положивъ $\Delta = 1/n$, мы приходимъ къ числу вида

$$N = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

гдѣ n есть весьма большое число. Чтобы уяснить себѣ природу чиселъ N, которыя всѣ суть положительныя числа, примемъ сначала за n цѣлое число и развернемъ N для неопредѣленнаго n по формулѣ бинома. Если мы въ формулѣ

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(n-1))}{n!}x^n$$

положимъ $x = 1/n$, то получимъ:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2 + \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{1}{3!} + \cdots$$
$$\cdots + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n!}, \qquad (1)$$

откуда прежде всего можемъ заключить, что всѣ числа N больше, чѣмъ 2, ибо всѣ члены, слѣдующіе за первымъ членомъ, суть положительныя числа. Съ другой стороны, замѣстивъ всѣ разности $1-\frac{1}{n}$, $1-\frac{2}{n}$, ..., $1-\frac{n-1}{n}$ числомъ 1, которое больше каждой изъ нихъ, найдемъ, что

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}; \qquad (2)$$

а такъ какъ

$$2! = 2, \quad 3! = 2 \cdot 3 > 2^2, \ \ldots, \ n! > 2^{n-1},$$

то тѣмъ болѣе

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}};$$

суммируя же геометрическій рядъ, имѣемъ по § 116:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3. \tag{3}$$

Всѣ эти числа N оказываются, такимъ образомъ, меньше, чѣмъ 3, и должны поэтому (по § 25) имѣть **верхнюю границу**, которую, по установившемуся обыкновенію, мы будемъ обозначать черезъ e.

2. Мы докажемъ дальше, что числа N **возрастаютъ вмѣстѣ** съ n. Для этой цѣли замѣтимъ, что въ правой части равенства (1) всѣ слагаемыя суть положительныя числа и что мы уменьшимъ, слѣдовательно, это выраженіе, если опустимъ часть членовъ. Такимъ образомъ, при $m < n$,

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2 + \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{1}{3!} + \cdots \\ \cdots + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\frac{1}{m!};\end{aligned} \tag{4}$$

далѣе, такъ какъ $m < n$, то

$$1-\frac{1}{n} > 1-\frac{1}{m}, \quad 1-\frac{2}{n} > 1-\frac{2}{m}, \ \ldots,$$

и вмѣстѣ съ этимъ a fortiori

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2 + \left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{1}{2!} + \left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\frac{1}{3!} + \cdots \\ \cdots + \left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)\frac{1}{m!}.\end{aligned}$$

Правая часть этого неравенства равна $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, какъ это вытекаетъ изъ формулы (1), если замѣнить въ ней n черезъ m, а потому, какъ это и нужно было доказать,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1+\frac{1}{m}\right)^m, \text{ если } n > m. \tag{5}$$

Мы заключаемъ отсюда, что для всякаго n

$$e > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \tag{6}$$

что N тѣмъ ближе къ предѣлу e, чѣмъ больше n, и что N, при достаточно большихъ значеніяхъ n, можетъ стать сколь угодно близкимъ къ предѣлу, не достигая его, однако, вполнѣ.

3. Можно было бы поэтому получить число e съ какою угодно степенью точности, вычисляя степени $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ для достаточно большихъ значеній n. Вслѣдствіе большой сложности этотъ способъ на практикѣ не примѣняется. Для опредѣленія числа e представляется гораздо болѣе простымъ слѣдующій путь.

Изъ формулъ (4) и (6) вытекаетъ, что для любого m и для каждаго $n > m$ будетъ:

$$\begin{aligned} e > 2 + \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{1}{3!} + \cdots \\ \cdots + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\frac{1}{m!}. \end{aligned} \tag{7}$$

А такъ какъ, взявъ n достаточно большимъ, можно для каждаго даннаго m сдѣлать множители

$$\left(1-\frac{1}{n}\right),\ \left(1-\frac{2}{n}\right),\ \left(1-\frac{3}{n}\right),\ \ldots,\ \left(1-\frac{m-1}{n}\right)$$

сколь угодно близкими къ единицѣ, то изъ неравенства (7) вытекаетъ, что при любомъ m

$$e > 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{m!},$$

откуда, въ силу неравенства (2), слѣдуетъ, что

$$e > 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{m!} > \left(1+\frac{1}{m}\right)^m.$$

Далѣе, изъ самаго опредѣленія числа e слѣдуетъ, что оба числа e и $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ могутъ быть сдѣланы сколь угодно близкими другъ къ другу, а вмѣстѣ съ тѣмъ сумма

$$2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{m!}, \tag{8}$$

содержащаяся между ними, станетъ, при достаточно большомъ m, сколь угодно близкой къ e. Эту же сумму легко обратить въ десятичную дробь.

Этимъ уже доказана сходимость безконечнаго ряда

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots$$

Она вытекаетъ также и изъ общаго признака сходимости (§ 118, 4), ибо здѣсь отношеніе

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n!}{(n+1)!}=\frac{1}{n+1}$$

имѣетъ предѣломъ нуль.

4. Чтобы оцѣнить величину погрѣшности, которую мы дѣлаемъ, вычисляя e при помощи выраженія (8), полагаемъ:

$$e=2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{m!}+\Delta_m,$$

и для всякаго $n>m$:

$$e=2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\Delta_n.$$

Отсюда путемъ вычитанія находимъ:

$$\Delta_m-\Delta_n=\frac{1}{(m+1)!}+\frac{1}{(m+2)!}+\cdots+\frac{1}{n!}=$$

$$=\frac{1}{(m+1)!}\left(1+\frac{1}{m+2}+\frac{1}{(m+2)(m+3)}+\cdots+\frac{1}{(m+2)(m+3)\dots n}\right).$$

Но

$$1+\frac{1}{m+2}+\frac{1}{(m+2)(m+3)}+\cdots+\frac{1}{(m+2)(m+3)\dots n}<$$

$$<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-m-1}};$$

послѣдняя же сумма равна $2\left(1-\frac{1}{2^{n-m}}\right)$ и, слѣдовательно, меньше, чѣмъ 2. Такимъ образомъ, получаемъ:

$$\Delta_m < \Delta_n + \frac{2}{(m+1)!},$$

и такъ какъ, согласно п. 3, можно сдѣлать Δ_n сколь угодно малымъ, взявъ число n достаточно большимъ, то отсюда заключаемъ, что

$$\Delta_m < \frac{2}{(m+1)!}. \tag{9}$$

Выраженіе (8) легко вычисляется, такъ какъ m-ый его членъ получается изъ $(m-1)$-го дѣленіемъ послѣдняго на m. Мы получимъ, напримѣръ, съ точностью до седьмого десятичнаго знака:

$$\begin{array}{l}
2\\
0{,}5\\
0{,}1666666667\\
0{,}0416666667\\
0{,}0083333333\\
0{,}0013888889\\
0{,}0001984127\\
0{,}0000248016\\
0{,}0000027557\\
0{,}0000002756\\
0{,}0000000251\\
\hline
2{,}7182818\quad .
\end{array}$$

Болѣе точное значеніе числа e будетъ:

$$e = 2{,}7\ 1828\ 1828\ 4590\ 45\ 23538\ 02874\ 71353.$$

5. Можно теперь освободиться отъ предположенія, что въ выраженія

$$N = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

величина n, постоянно возрастая, принимаетъ только цѣлыя значенія, и доказать, такимъ образомъ, общую теорему:

Предѣлъ выраженія

$$X = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

при произвольномъ и неограниченномъ возрастанiи x равенъ числу e.

Это вытекаетъ изъ слѣдующей, подлежащей доказательству вспомогательной теоремы:

Если $x < y$, то

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{y}\right)^y. \tag{10}$$

Въ п. 3 § 63-го мы для произвольнаго цѣлаго n доказали тождество:

$$\frac{a^n - b^n}{a-b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1},$$

въ которомъ a и b могутъ быть совершенно произвольными числами.

Если мы возьмемъ числа a и b положительными и $a > b$, то сумма въ правой части, состоящая изъ n положительныхъ слагаемыхъ, увеличится, когда замѣнимъ въ ней b на a, и потому

$$\frac{a^n - b^n}{a-b} < na^{n-1},$$

или

$$a^n - b^n < na^{n-1}(a-b), \tag{11}$$

откуда далѣе слѣдуетъ, что

$$a^{n-1}(a - n(a-b)) < b^n, \tag{12}$$

въ предположенiи, что $a > b$.

Будемъ разумѣть теперь подъ p цѣлое число и положимъ

$$a = 1 + \frac{p}{n-1}, \quad b = 1 + \frac{p}{n},$$

$$a - b = \frac{p}{n(n-1)}, \quad a - n(a-b) = 1;$$

тогда изъ неравенства (12) получимъ;

$$\left(1+\frac{p}{n-1}\right)^{n-1} < \left(1+\frac{p}{n}\right)^n.$$

Примѣняя повторно эту формулу [10]), находимъ, что

$$\left(1+\frac{p}{m}\right)^m < \left(1+\frac{p}{n}\right)^n,$$

когда m и n суть цѣлыя положительныя числа и

$$m < n.$$

Это неравенство сохраняется, когда извлечемъ изъ обѣихъ частей корни p-ой степени, при чемъ получимъ

$$\left(1+\frac{p}{m}\right)^{\frac{m}{p}} < \left(1+\frac{p}{n}\right)^{\frac{n}{p}}. \tag{13}$$

Каждыя два раціональныхъ числа x, y могутъ быть представлены въ видѣ дробей, имѣющихъ одинъ и тотъ же знаменатель; при $x < y$ мы можемъ поэтому положить:

$$x = \frac{m}{p}, \quad y = \frac{n}{p}.$$

Но тогда неравенство (13) переходитъ въ неравенство (10), которое, такимъ образомъ, доказано для раціональныхъ значеній x и y.

Что оно вѣрно также и для ирраціональныхъ значеній x и y, слѣдуетъ изъ основной теоремы о непрерывности (§ 26, 5 и § 36, 8).

Отсюда непосредственно вытекаетъ справедливость нашей теоремы. Въ самомъ дѣлѣ, если m и n суть цѣлыя числа и

$$m < x < n,$$

то

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e;$$

если взять число m достаточно большимъ, то число $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ и, слѣдовательно, и число $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ будетъ сколь угодно близко къ числу e.

6. Мы можемъ еще расширить теорему п. 5-го, доказавъ что X имѣетъ предѣлъ e и въ томъ случаѣ, когда x есть отрицательное число, абсолютное значеніе котораго неограниченно возрастаетъ.

---

[10]) Складываемъ это неравенство со всѣми тѣми, которыя выводятся изъ него путемъ замѣщенія n черезъ $n-1$, $n-2$, ..., $m+1$.

Въ самомъ дѣлѣ, если въ неравенствѣ (11) положимъ

$$a = 1,\ b = 1 - \frac{p^2}{n^2},\ \ a - b = \frac{p^2}{n^2},$$

то найдемъ, что

$$1 - \left(1 - \frac{p^2}{n^2}\right)^n < \frac{p^2}{n},$$

и, слѣдовательно,

$$1 > \left(1 - \frac{p^2}{n^2}\right)^n > 1 - \frac{p^2}{n}.$$

Такъ какъ, при неограниченно возрастающемъ n и постоянномъ значенiи p, правая часть этого неравенства приближается къ предѣлу 1, то $\left(1 - \frac{p^2}{n^2}\right)^n$ и, слѣдовательно, и $\left(1 - \frac{p^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{p}}$ приближается, возрастая, къ предѣлу 1 при неограниченно возрастающемъ n. Поэтому, полагая

$$x = \frac{n}{p},$$

находимъ, что предѣлъ выраженiя $\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^x$, при неограниченно возрастающемъ x, равенъ 1.

Но

$$\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^x = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x,$$

а такъ какъ $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ имѣетъ предѣлъ e, а лѣвая часть имѣетъ предѣлъ 1, то $\left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$ имѣетъ предѣлъ $1 : e$ и, слѣдовательно,

$$\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-x}$$

имѣетъ предѣлъ e, что и требовалось доказать.

ГЛАВА XXII.

Степенные ряды.

§ 120. Общее опредѣленіе суммы безконечнаго ряда.

1. Въ примѣненіяхъ алгебры оказывается недостаточнымъ изученіе безконечныхъ рядовъ съ одними только положительными членами. Приходится распространить изслѣдованіе и на ряды, въ которыхъ встрѣчаются какъ положительные, такъ и отрицательные члены. Если число отрицательныхъ членовъ ограниченное, то вопросъ о сходимости приводится при помощи теоремы п. 3 § 118-го къ случаю однихъ только положительныхъ членовъ. Если же число членовъ какъ положительныхъ, такъ и отрицательныхъ неограниченное, то мы вынуждены избрать другой путь; въ этомъ случаѣ мы не можемъ уже ограничиться однимъ только понятіемъ о верхней границѣ, но должны установить болѣе общее понятіе о предѣлѣ.

2. Пусть теперь

$$c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ \ldots$$

будетъ безконечный рядъ членовъ, относительно знаковъ которыхъ не установлено никакихъ ограниченій. Полагаемъ, какъ и прежде:

$$C_n = c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n.$$

Пусть C будетъ нѣкоторое число, Δ — напередъ заданное произвольно малое положительное число и α, β — два числа такого рода, что

$$\alpha < C < \beta, \quad 0 < \beta - \alpha < \Delta. \tag{1}$$

Число C называется предѣломъ чиселъ $C_1, C_2, C_3, \ldots C_n, \ldots$, если при сколь угодно маломъ Δ можно выбрать число m такимъ образомъ, что

$$\alpha < C_n < \beta, \text{ коль скоро } n > m. \tag{2}$$

Поэтому числа C_n суть приближенныя значенія числа C въ томъ же смыслѣ, въ какомъ мы употребляли это выраженіе въ п. 4 § 26-го.

Если такое число C существуетъ, то мы полагаемъ $\lim\limits_{n=\infty} C_n = C$ и называемъ C суммой безконечнаго ряда.

Мы можемъ тогда также сказать, что величины C_n, при возрастающемъ n, колеблются около значенія C, но что колебанія становятся все меньше и меньше и падаютъ, наконецъ, ниже всякой границы, когда число n неограниченно возрастаетъ. Мы пишемъ въ этомъ случаѣ

$$C = c_1 + c_2 + c_3 + \cdots,$$

и рядъ, который мы будемъ также называть рядомъ C, называется въ этомъ случаѣ сходящимся. Въ случаѣ, когда числа $c_1, c_2, c_3, \ldots$ всѣ положительны, это опредѣленіе сходимости и суммы ряда совпадаетъ съ опредѣленіемъ, даннымъ выше.

3. Общій необходимый и достаточный признакъ сходимости ряда содержится въ слѣдующемъ предложеніи:

Обозначимъ черезъ m, n два какихъ-нибудь натуральныхъ числа и положимъ

$$R_{n,m} = c_{n+1} + c_{n+2} + \cdots + c_{n+m}. \tag{3}$$

Рядъ C сходится, если абсолютная величина числа $R_{n,m}$ становится меньше произвольно малаго числа ω, коль скоро оба числа n и $n+m$ становятся больше нѣкотораго достаточно большого числа N [1]).

При нашихъ обозначеніяхъ это условіе можно выразить и такъ:

$$\lim_{n=\infty} R_{n,m} = 0. \tag{4}$$

Оно не только достаточно, но и необходимо.

4. Легко видѣть, что условіе (4) необходимо. Ибо, если $R_{n,m}$ по абсолютной величинѣ будетъ становиться больше нѣкотораго положительнаго числа ω, какъ бы велико ни было при этомъ число n, то и разности

$$C_{n+m} - C_n = R_{n,m}$$

будутъ становиться больше ω, какимъ бы большимъ ни взять число n,

---

[1]) Т. е. если для всякаго напередъ заданнаго положительнаго числа ω можно указать такое положительное число N, чтобы изъ неравенства $n > N$ вытекало неравенство $|R_{n,m}| < \omega$, гдѣ $|R_{n,m}|$ означаетъ абсолютную величину числа $R_{n,m}$ и гдѣ $m = 1, 2, 3, \ldots$

и колебанія чиселъ C_n не оставались бы меньше ω, какое бы большое значеніе мы ни выбрали для n.

5. Чтобы доказать достаточность условія (4), мы должны изъ него вывести существованіе числа C, которое, конечно, будетъ вообще ирраціональнымъ даже и въ томъ случаѣ, когда числа c_n раціональны. Это число C мы должны поэтому опредѣлить при помощи сѣченія (§ 24).

Если возьмемъ какое-либо число z изъ ряда вещественныхъ чиселъ, то возможенъ только одинъ изъ двухъ случаевъ:

α) Какъ бы велико ни было N, есть еще числа $n > N$, для которыхъ $C_n > z$. О такомъ числѣ z мы будемъ говорить, что оно есть „число a".

β) Можно выбрать число N столь большимъ, что, при $n > N$, будетъ постоянно $C_n \leqq z$. Пусть такое число z называется „числомъ b".

При наличности соотношеній (4) существуютъ какъ числа a, такъ и числа b. Ибо, согласно равенству (4), мы можемъ для любого напередъ выбраннаго положительнаго числа ω взять число n_0 столь большимъ, что, каково бы ни было число m, будетъ

$$R_{n_0, m} = C_{n_0+m} - C_{n_0} < \omega \text{ (по абсолютной величинѣ).}$$

Поэтому, если фиксировать значеніе n_0 и положить $n = n_0 + m$, то для каждаго произвольнаго m будетъ:

$$C_{n_0} - \omega < C_n < C_{n_0} + \omega.$$

Такимъ образомъ, если $z > C_{n_0} + \omega$, то z есть число b. Если же $z < C_{n_0} - \omega$, то z есть число a, и существуютъ, слѣдовательно, оба рода этихъ чиселъ. Сверхъ того, каждое число a меньше каждаго числа b и потому оба рода чиселъ отдѣляются другъ отъ друга сѣченіемъ. Этимъ сѣченіемъ производится число C, относительно котораго мы должны еще доказать, что оно служитъ предѣломъ чиселъ C_n. Это выводится слѣдующимъ образомъ.

Если α есть любое изъ чиселъ a, а β — любое изъ чиселъ b, то, исключивъ тотъ случай, когда $\alpha = C$ или $\beta = C$, найдемъ согласно понятію о сѣченіи, что

$$\alpha < C < \beta. \tag{5}$$

Возьмемъ теперь столь малое положительное число ω, чтобы было еще

$$\alpha + \omega < C < \beta - \omega, \tag{6}$$

— другими словами, чтобы $\alpha + \omega$ было еще числомъ a, а $\beta - \omega$ — числомъ b.

Далѣе, выберемъ N столь большимъ, чтобы было

$$R_{n,m} < \omega.$$

Въ виду опредѣленій α) и β) можно теперь выбрать число n такимъ образомъ, чтобы было

$$\alpha + \omega < C_n < \beta - \omega.$$

Въ виду этого при всякомъ положительномъ m будетъ:

$$\alpha < C_{n+m} < \beta \text{ [2]}. \qquad (7)$$

Но изъ неравенствъ (5) и (7) слѣдуетъ, что C есть предѣлъ чиселъ C_n, что и требовалось доказать.

6. Послѣ этого теорема п. 1 § 118-го можетъ быть обобщена такъ:

Если

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$$

есть сходящійся рядъ изъ положительныхъ членовъ и если

$$k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4,\ \ldots$$

суть положительныя или отрицательныя числа, которыя по своей абсолютной величинѣ остаются менѣе нѣкоторой конечной границы g, то и рядъ

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 + k_4 a_4 + \cdots$$

сходится.

Ибо число

$$k_n a_n + k_{n+1} a_{n+1} + \cdots + k_{n+m} a_{n+m}$$

по абсолютной величинѣ меньше числа

$$g\,(a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+m}),$$

откуда и вытекаетъ сходимость ряда $k_1 a_1 + k_2 a_2 + \cdots$

§ 121. Абсолютная и неабсолютная сходимость.

1. Пусть въ ряду

$$c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ \ldots \qquad (\mathfrak{C})$$

---

[2]) Это получается путемъ сопоставленія неравенства

$$|R_{n,m}| < \omega, \text{ т. е. } C_n - \omega < C_{n+m} < C_n + \omega,$$

съ неравенствами

$$\alpha + \omega < C_n < \beta - \omega,$$

которыя можно также представить въ видѣ:

$$\alpha < C_n - \omega \quad \text{и} \quad C_n + \omega < \beta.$$

будутъ какъ положительные, такъ и отрицательные члены. Изъ нихъ положительные мы обозначимъ черезъ

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots, \tag{$\mathfrak{A}$}$$

а отрицательные — черезъ

$$-b_1,\ -b_2,\ -b_3,\ -b_4,\ \ldots \tag{$\mathfrak{B}$}$$

Въ рядахъ ($\mathfrak{A}$) и ($\mathfrak{B}$) члены взяты въ той же послѣдовательности, въ которой они находятся въ ряду ($\mathfrak{C}$); оба ряда предполагаются безконечными.

Если обѣ суммы

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots,$$
$$B = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots.$$

сходятся, то сходится и сумма

$$C = c_1 + c_2 + c_3 + \cdots$$

и притомъ

$$C = A - B. \tag{1}$$

Въ самомъ дѣлѣ,

$$C_n = c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n$$

мы можемъ представить въ видѣ

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_\mu - b_1 - b_2 - \cdots - b_\nu = A_\mu - B_\nu,$$

и при безграничномъ возрастанiи n возрастаютъ безгранично также и числа μ и ν. Поэтому

$$\operatorname{Lim} C_n = \operatorname{Lim} A_\mu - \operatorname{Lim} B_\nu,$$

что приводитъ къ равенству (1). Нами доказана, такимъ образомъ, теорема:

Безконечный рядъ изъ положительныхъ и отрицательныхъ членовъ сходится, когда сходятся въ отдѣльности ряды, составленные изъ его положительныхъ и его отрицательныхъ членовъ.

Въ этомъ предположенiи будетъ также сходиться рядъ изъ исключительно положительныхъ членовъ, который получится замѣной членовъ $c_1, c_2, c_3, \ldots$ ихъ абсолютными величинами $c_1', c_2'\ c_3', \ldots$, т. е. замѣной членовъ $-b_i$ на b_i; при этомъ сумма

$$C' = c_1' + c_2' + c_3' + \cdots = A + B$$

наоборотъ, рядъ C' только тогда можетъ сходиться, когда сходятся ряды A и B. Рядъ, который остается сходящимся, когда всѣ его члены замѣняются ихъ абсолютными значеніями, называется абсолютно сходящимся. Къ этимъ рядамъ относятся, по существу, тѣ же законы, что и къ рядамъ, содержащимъ исключительно положительные члены.

2. Если изъ двухъ рядовъ A и B одинъ сходится, а другой расходится, то рядъ C не можетъ сходиться, ибо тогда разность $C_n = A_\mu - B_\nu$ дѣлается равной положительной или отрицательной безконечности, смотря по тому, расходится ли рядъ A или рядъ B. Не такъ будетъ, когда оба ряда A и B расходятся. Тогда рядъ C', члены котораго суть абсолютныя величины членовъ ряда C, навѣрное расходится. Несмотря на это, рядъ C все же можетъ сходиться, такъ какъ въ выраженіи $A_\mu - B_\nu$ безконечное возрастаніе въ положительную сторону можетъ компенсироваться безконечнымъ возрастаніемъ въ отрицательную сторону. Мы имѣемъ тогда дѣло съ особаго рода рядами, которые называются неабсолютно сходящимися. Причина этого названія станетъ еще яснѣе впослѣдствіи.

3. Для неабсолютной сходимости у насъ нѣтъ столь опредѣленныхъ признаковъ, какъ для абсолютной. Однако же имѣетъ мѣсто слѣдующая теорема.

Если въ ряду съ знакоперемѣнными членами:

$$P = p_1 - p_2 + p_3 - p_4 + p_5 - \cdots \tag{2}$$

$p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots$ суть положительныя постоянно убывающія числа, такъ что для всякаго n

$$p_n < p_{n-1}, \tag{3}$$

и если

$$\lim_{n=\infty} p_n = 0, \tag{4}$$

то рядъ P расходится.

Доказательство очень простое. Такъ какъ разности

$$p_1 - p_2, \quad p_3 - p_4, \quad p_5 - p_6, \ldots, p_{2m-1} - p_{2m}$$

всѣ положительны, то, положивъ

$$P_n = p_1 - p_2 + p_3 - p_4 + \cdots \pm p_n,$$

найдемъ, что всѣ суммы P_n суть положительныя числа, и что суммы

$$P_2, P_4, P_6, \ldots, P_{2m}$$

образуютъ рядъ возрастающихъ чиселъ; напротивъ, суммы

$$P_1,\ P_3,\ P_5,\ \ldots,\ P_{2m-1}$$

составляютъ рядъ убывающихъ чиселъ; такъ, напримѣръ,

$$P_1 = p_1;\quad P_3 = p_1 - (p_2 - p_3),\quad P_5 = p_1 - (p_2 - p_3) - (p_4 - p_5),\ \ldots$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ разности

$$P_{2m-1} - P_{2m} = p_{2m}$$

положительны, и потому

$$P_{2m} < P_{2m-1}.$$

Въ силу равенства (4), съ неограниченнымъ возрастаніемъ m разность $P_{2m-1} - P_{2m}$ приближается къ предѣлу нуль, а этимъ доказано, что оба ряда чиселъ P_{2m} и P_{2m-1} имѣютъ одинъ и тотъ же предѣлъ. (Ср. то же заключеніе въ § 88).

4. Если условіе (3) выполняется, но не выполняется условіе (4), т. е. если числа p_n при безконечно возрастающемъ n приближаются къ предѣлу, отличному отъ нуля, то числа P_{2m} имѣютъ верхнюю, а числа P_{2m-1} — нижнюю границу, но эти границы не равны между собою. Сумма P_n приближается поэтому къ двумъ различнымъ предѣламъ, смотря по тому, останавливаемся ли мы на четномъ или нечетномъ n. Такіе ряды, которые, впрочемъ, рѣдко встрѣчаются въ примѣненіяхъ, называютъ колеблющимися рядами, потому что ихъ значенія колеблются нѣкоторымъ образомъ между двумя значеніями. Простѣйшимъ примѣромъ этого ряда является рядъ

$$+1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots;$$

эта сумма имѣетъ значеніе 0 или 1, смотря по тому, складываемъ ли мы четное или нечетное число членовъ. Эти ряды не причисляются къ сходящимся.

5. Къ рядамъ, которые по п. 3 сходятся, принадлежатъ, между прочимъ, оба слѣдующіе:

$$P = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots, \tag{5}$$

$$Q = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots. \tag{6}$$

Рядъ P содержитъ всѣ дроби съ числителями 1 (основныя дроби): дроби съ нечетными знаменателями имѣютъ положительные, а съ четными знаменателями — отрицательные знаки. Рядъ Q содержитъ члены только съ нечетными знаменателями, но знаки членовъ также чередуются. Здѣсь обнаруживается особенное явленіе. Положимъ для краткости:

$$U_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1},$$

$$G_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n},$$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Тогда

$$S_n = 2G_n,$$

и сумма $2n$ первыхъ членовъ ряда P есть

$$P_{2n} = U_n - G_n;$$

далѣе,

$$S_{2n} = U_n + G_n = 2G_{2n}$$

и, слѣдовательно,

$$P_{2n} = U_n - G_n = 2(U_n - G_{2n}). \tag{7}$$

Съ другой стороны, $U_n - G_{2n}$ есть сумма $3n$ первыхъ членовъ ряда

$$R = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots, \tag{8}$$

который также содержитъ всѣ дроби съ числителемъ 1, при чемъ, какъ и въ ряду P, дроби съ нечетными знаменателями снабжены положительными знаками, а съ четными знаменателями — отрицательными знаками.

Члены ряда R расположены не по порядку ихъ величинъ, а такъ, что за каждымъ положительнымъ членомъ постоянно слѣдуютъ два отрицательныхъ, потомъ опять положительный и т. д. Равенство (7) показываетъ, что рядъ R сходится и что

$$R = \frac{1}{2} P.$$

Такимъ образомъ, рядъ R имѣетъ сумму, отличную отъ суммы ряда P, хотя каждый членъ, встрѣчающійся въ этомъ ряду, встрѣчается въ другомъ и наоборотъ. На первый взглядъ, этотъ результатъ кажется парадоксомъ, особенно же, когда позволяютъ себѣ (какъ это до сихъ поръ принято) выражаться такъ, что сумма такого ряда зависитъ отъ послѣдовательности суммированія, что противорѣчитъ перемѣстительному свойству сложенія. Истинное основаніе явленія состоитъ въ томъ, что въ суммѣ $R_{3n} = U_n - G_{2n}$, хотя и встрѣчаются всѣ члены, содержащіеся въ суммѣ P_{2n}, но встрѣчается еще опредѣленное число такихъ отрицательныхъ членовъ, которые только позже появляются въ ряду P, и число этихъ членовъ возрастаетъ безгранично вмѣстѣ съ n.

6. Эта особенность неабсолютно сходящихся рядовъ выясняется разсужденіями **Дирихле** (Dirichlet) *), которыя приводятъ къ замѣчательной теоремѣ.

Пусть

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots,$$

$$B = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots$$

будутъ два **расходящихся** ряда съ положительными членами. Мы предположимъ, однако, что

$$\operatorname{Lim} a_n = 0, \quad \operatorname{Lim} b_n = 0. \tag{9}$$

Въ § 117 мы видѣли, что такіе ряды существуютъ. Мы могли бы, напримѣръ, взять ряды

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots,$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots,$$

которыми мы уже раньше пользовались.

Составимъ рядъ

$$C = c_1 + c_2 + c_3 + \cdots,$$

котораго члены $c_1, c_2, \ldots$ суть тѣ же числа, что и $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$, расположенныя, однако, въ такомъ порядкѣ: сначала возьмемъ нѣкоторое число положительныхъ членовъ $a_1, a_2, \ldots$, затѣмъ нѣкоторое число отрицательныхъ членовъ $-b_1, -b_2, \ldots$, потомъ опять нѣкоторые положительные члены a, затѣмъ вновь нѣкоторые отрицательные члены $-b$,

---

*) Опубликованы въ первый разъ въ посмертномъ сочиненіи Riemann'a: „Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe".

при чемъ будемъ имѣть въ виду, чтобы какъ члены a, такъ и члены $-b$ вводились въ ихъ послѣдовательности безъ пропусковъ и повтореній.

Легко теперь показать, что возможно установить такой порядокъ введенія членовъ, при которомъ рядъ C будетъ имѣть любое напередъ заданное значеніе x. Это вытекаетъ изъ весьма простыхъ соображеній.

Если будемъ считать число x положительнымъ, то въ виду того, что рядъ A становится безконечнымъ, можно пойти такъ делеко въ суммированіи членовъ a, что сумма станетъ больше числа x и при томъ избытокъ ея надъ x будетъ меньше, чѣмъ послѣдній изъ введенныхъ членовъ a. Возьмемъ затѣмъ столько членовъ $-b$, чтобы сумма стала меньше числа x и чтобы она отличалась отъ x меньше, чѣмъ на абсолютную величину b послѣдняго прибавленнаго члена. Станемъ потомъ опять прибавлять члены a до тѣхъ поръ, пока вновь не перейдемъ черезъ x, и будемъ продолжать этотъ процессъ сколь угодно далеко. Разность между суммой и числомъ x, будучи постоянно меньше, чѣмъ послѣдній прибавленный членъ a или $-b$, можетъ поэтому, въ виду равенствъ (9), опуститься ниже всякой границы. Составленная по такому способу сумма приближается къ числу x, какъ къ предѣлу, и теорема, такимъ образомъ, доказана.

§ 122. Абелева теорема о непрерывности степенного ряда.

1. Въ § 118 мы уже разсматривали ряды вида

$$S(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots, \tag{1}$$

которые были нами названы степенными рядами; числа $a_1, a_2, a_3, \ldots$ называются коэффиціентами ряда; x — аргументомъ. Мы видѣли, что этотъ рядъ сходится, когда коэффиціенты $a_1, a_2, a_3, \ldots$ суть положительныя числа, которыя лежатъ ниже нѣкоторой конечной границы, а $x < 1$; согласно п. 6 § 120-го, сходимость ряда сохраняется, если нѣкоторые изъ коэффиціентовъ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ суть отрицательныя числа, лишь бы только они по абсолютной величинѣ оставались меньше нѣкотораго конечнаго предѣла.

Мы допустимъ теперь, что рядъ коэффиціентовъ

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \tag{2}$$

сходится и имѣетъ значеніе A. Такъ какъ это возможно въ томъ только случаѣ, когда числа a_n приближаются къ предѣлу нуль, то это допущеніе влечетъ за собой сходимость ряда (1) для $x < 1$.

2. При этомъ допущенiи имѣетъ мѣсто слѣдующая теорема:

Если, начиная со значенiй, меньшихъ единицы, число x приближается къ предѣлу 1, то A есть предѣлъ, къ которому сумма $S(x)$ приближается съ любою степенью точности. Въ знакахъ:

$$\operatorname*{Lim}_{x=1} S(x) = A. \tag{3}$$

Это предложенiе было впервые доказано Абелемъ и примѣнено къ выводу важныхъ слѣдствiй. Доказательство состоитъ въ слѣдующемъ:

3. Положимъ

$$A_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n, \tag{4}$$

такъ что, по допущенiю, предѣлъ

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} A_n = A$$

имѣетъ опредѣленное значенiе.

Съ помощью равенства (4) числа a_n можно выразить черезъ числа A_n такимъ образомъ:

$$\begin{aligned} a_1 &= A_1, \\ a_2 &= A_2 - A_1, \\ a_3 &= A_3 - A_2, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ a_n &= A_n - A_{n-1}, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n &= \\ = (1-x)(A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_{n-1} x^{n-1}) + A_n x^n. \end{aligned}$$

Если теперь $x < 1$, то x^n при безконечно возрастающемъ n имѣетъ предѣлъ 0, число же A_n остается конечнымъ. Согласно съ этимъ, пока $x < 1$, будетъ

$$S(x) = (1-x)(A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots), \tag{5}$$

и безконечный рядъ $S(x)$ преобразованъ такимъ образомъ въ другой рядъ, который также сходится при $x < 1$.

Будемъ разумѣть теперь подъ n нѣкоторое конечное число и, согласно равенству (5), положимъ:

$$S(x) = (1-x)\,F_n(x) + (1-x)\,R_n(x), \tag{6}$$

гдѣ

$$F_n(x) = A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_{n-1} x^{n-1},$$

$$R_n(x) = A_n x^n + A_{n+1} x^{n+1} + \cdots,$$

такъ что $R_n(x)$ опять есть безконечный рядъ, котораго коэффиціенты A_n, A_{n+1}, A_{n+2}, ... сколь угодно близко подходятъ къ A, если только число n взято достаточно большимъ. Полагая поэтому $A_n = A + a_n$; $A_{n+1} = A + a_{n+1}$, ... и принимая во вниманіе формулу для выраженія суммы членовъ геометрической прогрессіи:

$$x^n + x^{n+1} + x^{n+2} + \cdots = \frac{x^n}{1-x},$$

найдемъ, что

$$R_n(x) = \frac{Ax^n}{1-x} + \frac{\varrho}{1-x},$$

гдѣ

$$\frac{\varrho}{1-x} = a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + a_{n+2} x^{n+2} + \cdots$$

Мы можемъ теперь взять n столь большимъ, чтобы всѣ числа a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, ... были по абсолютной величинѣ меньше произвольно малой положительной величины $\varDelta$, и тогда по абсолютной же величинѣ будетъ:

$$\frac{\varrho}{1-x} < \varDelta\,(x^n + x^{n+1} + x^{n+2} + \cdots) = \frac{\varDelta x^n}{1-x},$$

такъ что

$$\varrho < \varDelta x^n < \varDelta.$$

Согласно равенству (6), будемъ теперь имѣть:

$$S(x) = (1-x)\,F_n(x) + Ax^n + \varrho,$$

$$S(x) - A = (1-x)\,F_n(x) - A(1-x^n) + \varrho. \tag{7}$$

Отсюда можно заключить, что x возможно взять столь близкимъ къ 1, чтобы разность $S(x) - A$ была меньше произвольно малой величины $2\varDelta$, а въ этомъ и заключается содержаніе равенства (3).

Въ самомъ дѣлѣ, въ правой части равенства (6) можно прежде всего взять произвольное число n столь большимъ, чтобы было $\varrho < \Delta$, и, когда это сдѣлано, можно далѣе взять разности $1-x$ и $1-x^n$ столь малыми (и положительными), чтобы было также

$$(1-x)F_n(x) - A(1-x^n) < \Delta,$$

и тогда будетъ $S(x) - A < 2\Delta$ (по абсолютной величинѣ).

Такимъ образомъ, Абелева теорема доказана. Она можетъ служить для опредѣленія суммы A, если мы можемъ найти сумму $S(x)$ при $x<1$ и ея предѣлъ при $x=1$.

§ 123. Ряды съ комплексными членами.

1. Если члены безконечнаго ряда

$$c_1,\ c_2,\ c_3,\ \ldots,\ c_n,\ \ldots$$

суть комплексныя числа, то они имѣютъ видъ

$$c_1 = a_1 + b_1 i, \quad c_2 = a_2 + b_2 i, \quad c_3 = a_3 + b_3 i, \ \ldots,$$

гдѣ a_1, b_1, a_2, b_2, ... суть вещественныя числа.

Сумма такого ряда

$$C = c_1 + c_2 + c_3 + \cdots$$

называется сходящейся, когда вещественныя и комплексныя части образуютъ въ отдѣльности сходящіеся ряды, т. е. когда, слѣдовательно, ряды

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots,$$
$$B = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots$$

сходятся; тогда

$$C = A + Bi$$

есть сумма ряда C.

Дѣйствительно, если A и B суть предѣлы для A_n и B_n, то $A+Bi$ есть предѣлъ для $A_n + B_n i$, и, наоборотъ, $A_n + B_n i$ не можетъ имѣть предѣла, если его не имѣетъ хоть одна изъ величинъ A_n и B_n.

2. Для сходимости такихъ рядовъ мы имѣемъ тотъ же общій признакъ, что и для рядовъ съ вещественными членами; именно, если положимъ

$$R_{n,m} = c_{n+1} + c_{n+2} + \cdots + c_{n+m},$$

то сумма $R_{n,m}$ по абсолютному значенію должна стать меньше любого малаго числа, когда числа n и $n+m$ будутъ больше нѣкотораго достаточно большого числа N.

Здѣсь содержится, какъ частный случай, требованіе, чтобы членъ c_n по абсолютному значенію сталъ меньше всякаго напередъ заданнаго положительнаго числа, что представляется необходимымъ, но не достаточнымъ условіемъ сходимости, какъ и въ п. 6 § 115-го.

Подъ абсолютнымъ значеніемъ комплекснаго числа $z = x + iy$ мы уже раньше (§ 51) условились понимать положительное число

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Теперь будетъ цѣлесообразно ввести въ употребленіе простой общій знакъ для абсолютнаго значенія комплекснаго числа z; слѣдуя Вейерштрассу, мы будемъ заключать для этой цѣли z въ двѣ вертикальныя черты. Такимъ образомъ,

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

3. Относительно сходимости ряда C съ комплексными членами имѣетъ мѣсто слѣдующая теорема:

Рядъ C сходится, если сходится рядъ

$$C' = |c_1| + |c_2| + |c_3| + |c_4| + \cdots$$

абсолютныхъ значеній его членовъ.

Доказательство выводится непосредственно изъ теоремы п. 5 § 51-го, по которой абсолютное значеніе суммы никогда не бываетъ больше суммы абсолютныхъ значеній слагаемыхъ; въ самомъ дѣлѣ, положивъ

$$R'_{n,m} = |c_{n+1}| + |c_{n+2}| + \cdot \cdot + |c_{n+m}|,$$

будемъ имѣть

$$|R_{n,m}| \leqq R'_{n,m},$$

и если $R'_{n,m}$ имѣетъ предѣломъ нуль, то то же справедливо и для $R_{n,m}$.

Эта теорема такъ же необратима, какъ и соотвѣтственная теорема, относящаяся къ вещественнымъ рядамъ съ положительными и отрицательными членами. Очень легко можетъ случиться, что рядъ C сходится, между тѣмъ какъ рядъ C' расходится. Мы и здѣсь различаемъ поэтому абсолютную и неабсолютную сходимость. Мы называемъ сходящійся рядъ съ комплексными членами абсолютно сходящимся, когда сходится рядъ абсолютныхъ значеній его членовъ, и неабсолютно сходящимся — въ противномъ случаѣ.

4. Отсюда выводится далѣе слѣдующая теорема:

Если рядъ

$$W = w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + \cdots$$

сходится абсолютно и если

$$c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ \ldots$$

есть какой-либо рядъ комплексныхъ чиселъ, коихъ абсолютныя значенія

$$|c_1|,\ |c_2|,\ |c_3|,\ |c_4|,\ \ldots$$

не возрастаютъ неограниченно, то и рядъ

$$c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_3 w_3 + c_4 w_4 + \cdots$$

сходится абсолютно.

Ибо, полагая

$$R_{n,m} = c_{n+1} w_{n+1} + c_{n+2} w_{n+2} + \cdots + c_{n+m} w_{n+m}$$

и принимая во вниманіе, что абсолютное значеніе произведенія равно произведенію абсолютныхъ значеній его множителей, находимъ:

$$|R_{n,m}| \leqq |c_{n+1}| \cdot |w_{n+1}| + |c_{n+2}| \cdot |w_{n+2}| + \cdots + |c_{n+m}| \cdot |w_{n+m}|.$$

Поэтому, если каждое изъ чиселъ $|c_{n+1}|,\ |c_{n+2}|,\ \ldots,\ |c_{n+m}|$ меньше нѣкотораго опредѣленнаго положительнаго числа g, то

$$|R_{n,m}| < g\{|w_{n+1}| + |w_{n+2}| + \cdots + |w_{n+m}|\};$$

если рядъ W сходится абсолютно, то правая часть этого неравенства становится меньше всякаго напередъ заданнаго числа. То же справедливо и относительно лѣвой части; слѣдовательно, теорема доказана.

§ 124. Степенные ряды. Кругъ сходимости.

1. Мы будемъ теперь разсматривать степенные ряды, въ которыхъ какъ аргументъ z, такъ и коэффиціенты c_ν могутъ быть комплексными числами. Присоединивъ еще членъ c_0, не зависящій отъ аргумента, обозначимъ такой рядъ черезъ

$$S(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots \tag{1}$$

Положимъ

$$z = x + iy = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta),$$

$$z^n = r^n(\cos n\vartheta + i\sin n\vartheta)$$

и станемъ изображать, согласно § 51, значенія аргумента z точками плоскости. Тогда r есть абсолютное значеніе $|z|$ аргумента z, и точки, изображающія всѣ тѣ значенія z, которыя имѣютъ одинаковыя абсолютныя значенія r, лежатъ на кругѣ (r), центръ котораго находится въ началѣ координатъ.

2. Существуютъ степенные ряды, сходящіеся при всякомъ значеніи аргумента z. Таковъ, напримѣръ, рядъ

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots,$$

потому что въ ряду

$$1 + \frac{r}{1!} + \frac{r^2}{2!} + \frac{r^3}{3!} + \frac{r^4}{4!} + \cdots,$$

составленномъ изъ абсолютныхъ значеній членовъ предыдущаго ряда, отношеніе $(n+1)$-го члена къ n-ому

$$\frac{r^n}{n!} : \frac{r^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{r}{n}$$

имѣетъ предѣломъ нуль, каково бы ни было значеніе r. Отсюда вытекаетъ сходимость ряда, согласно п. 4 § 118-го.

Существуютъ, наоборотъ, и такіе ряды, которые не сходятся ни при какомъ значеніи z (кромѣ $z = 0$). Таковъ, напримѣръ, рядъ

$$1 + 1!z + 2!z^2 + 3!z^3 + 4!z^4 + \cdots$$

Въ самомъ дѣлѣ, если c есть число, которое больше r, то по п. 2 § 52-го возможно взять число n столь большимъ, чтобы выполнялось неравенство $n!r^n > c^n$; такимъ образомъ, уже отдѣльные члены этого ряда неограниченно возрастаютъ вмѣстѣ съ n, и рядъ не можетъ быть сходящимся.

Вообще же степенной рядъ сходится для нѣкоторыхъ значеній z и расходится для другихъ значеній. Относительно такихъ рядовъ справедливы слѣдующія теоремы.

3. Если γ_n есть абсолютное значеніе числа c_n и r_1 есть такое положительное число, что при неограниченно возраста-

ющемъ n число $\gamma_n r_1^n$ не возрастаетъ безпредѣльно, то рядъ $S(z)$ сходится абсолютно для всякаго z, абсолютное значенiе котораго r меньше, чѣмъ r_1.

Дѣйствительно, когда $r : r_1$ есть правильная дробь, то рядъ

$$1 + \frac{r}{r_1} + \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{r}{r_1}\right)^3 + \cdots$$

сходится, а вмѣстѣ съ нимъ сходится (по § 123, 3, 4) и рядъ

$$\gamma_0 + \gamma_1 r_1 \frac{r}{r_1} + \gamma_2 r_1{}^2 \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 + \gamma_3 r_1{}^3 \left(\frac{r}{r_1}\right)^3 + \cdots,$$

члены котораго суть абсолютныя значенiя членовъ ряда $S(z)$. Такимъ образомъ, и рядъ $S(z)$ сходится абсолютно.

4. Если $\gamma_n r^n$ остается конечнымъ для всѣхъ значенiй r [3]), то рядъ $S(z)$ сходится при всѣхъ значенiяхъ z; обратное тоже, конечно, справедливо.

Если $\gamma_n r^n$ остается конечнымъ для нѣкотораго значенiя r, то то же имѣетъ мѣсто и для всѣхъ меньшихъ значенiй r. Если поэтому $\gamma_n r^n$ остается конечнымъ не для всѣхъ, а хотя бы только для нѣкоторыхъ значенiй r, то эти значенiя r имѣютъ верхнюю границу ϱ, и рядъ $S(z)$ сходится для всѣхъ z, коихъ абсолютныя значенiя меньше ϱ.

Кругъ, описанный радiусомъ ϱ изъ начала координатъ, какъ изъ центра, называется **кругомъ сходимости** степенного ряда $S(z)$, и мы имѣемъ теорему:

5. Рядъ $S(z)$ сходится абсолютно во всякой точкѣ внутри круга сходимости.

6. Наоборотъ, рядъ $S(z)$ не можетъ сходиться ни въ какой точкѣ внѣ круга сходимости.

Ибо, если рядъ $S(z)$ сходится, то $\operatorname{Lim} c_n z^n = 0$. Поэтому произведенiе $\gamma_n r^n$ должно оставаться конечнымъ, и r должно было бы быть меньше или, въ крайнемъ случаѣ, равно ϱ.

Если существуетъ число ϱ такого рода, что

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} \gamma_n \varrho^n = a,$$

гдѣ a есть опредѣленное число отличное отъ нуля, то ϱ есть радiусъ круга сходимости.

---

[3]) При неограниченномъ возрастанiи n.

Въ этомъ предположенiи

$$\lim_{n=\infty} \frac{\gamma_{n+1}\varrho^{n+1}}{\gamma_n \varrho^n} = 1,$$

или

$$\varrho = \lim_{n=\infty} \frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}}$$

есть радiусъ круга сходимости.

О сходимости ряда въ точкахъ, расположенныхъ на периферiи круга сходимости, нельзя установить никакого общаго предложенiя. Здѣсь, смотря по природѣ ряда, можетъ имѣть мѣсто сходимость или расходимость; можетъ также случиться, что въ одной части периферiи рядъ сходится, а въ другой — расходится.

Въ видѣ примѣра укажемъ геометрическiй рядъ:

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \cdots$$

Здѣсь оказывается $\varrho = 1$, и кругъ сходимости есть кругъ, описанный изъ начала координатъ радiусомъ, равнымъ единицѣ.

Въ этомъ случаѣ на кругѣ сходимости рядъ не можетъ сходиться, такъ какъ абсолютныя значенiя всѣхъ членовъ ряда, будучи равными единицѣ, не могутъ имѣть предѣла, равнаго нулю.

7. Если рядъ $S(z)$ сходится абсолютно для нѣкотораго значенiя z_1 величины z, то сходится абсолютно и рядъ

$$U(z) = a_0 c_0 + a_1 c_1 z + a_2 c_2 z^2 + a_3 c_3 z^3 + \cdots, \tag{2}$$

гдѣ a_0, a_1, a_2, ... есть рядъ положительныхъ вещественныхъ чиселъ, которыя не возрастаютъ неограниченно, при чемъ сходимость имѣетъ мѣсто для всякаго числа z, котораго абсолютное значенiе r меньше абсолютнаго значенiя r_1 числа z_1.

Чтобы это вывести, достаточно разсмотрѣть рядъ

$$a_0\gamma_0 + a_1\gamma_1 r + a_2\gamma_2 r^2 + a_3\gamma_3 r^3 + \cdots =$$

$$= a_0\gamma_0 + a_1\gamma_1 \frac{r}{r_1} r_1 + a_2\gamma_2 \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 r_1^2 + a_3\gamma_3 \left(\frac{r}{r_1}\right)^3 r_1^3 + \cdots,$$

который есть не что иное, какъ рядъ абсолютныхъ значенiй членовъ ряда $U(z)$, и который сходится по теоремѣ п. 1 § 118-го.

Для правильности этого вывода отнюдь не требуется, чтобы числа a_1, a_2, ..., a_n оставались конечными: достаточно, чтобы величина $a_n \left(\frac{r}{r_1}\right)^n$ не дѣлалась безконечной. По п. 8 § 19-го это имѣетъ мѣсто при каждомъ $r < r_1$, когда $a_n = n^k$ есть какая-либо степень величины n или, вообще, какая-либо цѣлая функція отъ n. Принявъ, напримѣръ, $a_n = nz^{-1}$ или $a_n = n^{-1}z$, получаемъ теорему:

8. **Три ряда**

$$S(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots,$$
$$T(z) = c_1 + 2c_2 z + 3c_3 z^2 + 4c_4 z^3 + \cdots,$$
$$U(z) = c_0 z + \frac{c_1 z^2}{2} + \frac{c_2 z^3}{3} + \frac{c_3 z^4}{4} + \cdots$$

имѣютъ одинъ и тотъ же кругъ сходимости.

§ 125. Дѣйствія надъ безконечными рядами.

1. Мы разсматриваемъ два безконечныхъ ряда съ вещественными или комплексными членами u_i, v_i и полагаемъ

$$\begin{aligned} U_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \\ V_n &= v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n. \end{aligned} \tag{1}$$

Первые члены мы обозначаемъ здѣсь не черезъ u_1, v_1, а черезъ u_0, v_0, а подъ U_n, V_n мы разумѣемъ суммы $n+1$ первыхъ членовъ, что при умноженіи рядовъ представляется особенно удобнымъ. Допустимъ что эти ряды сходятся и что U, V суть ихъ суммы, такъ что

$$\lim_{n=\infty} U_n = U; \quad \lim_{n=\infty} V_n = V.$$

Если положимъ

$$u_0 \pm v_0 = w_0, \quad u_1 \pm v_1 = w_1, \quad u_2 \pm v_2 = w_2, \ \ldots,$$

гдѣ всюду берется либо только верхній, либо только нижній знакъ, и

$$W_n = w_0 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n,$$

то

$$U_n \pm V_n = W_n.$$

Увеличивая здѣсь n неограниченно, найдемъ, что и сумма W_n сходится и что

$$W = U \pm V,$$

если предѣлъ W'_n есть W. Этимъ доказано слѣдующее предложенiе:

Складывая или вычитывая соотвѣтствующiе члены двухъ сходящихся рядовъ, мы складываемъ или вычитываемъ эти ряды.

Значенiе ряда U не измѣняется, когда мы присоединимъ въ началѣ или гдѣ-либо вставимъ члены, значенiя которыхъ равны нулю. Отсюда слѣдуетъ, что сумму W можно составить весьма разнообразными способами, относя различнымъ образомъ другъ къ другу члены u_n, v_n; такъ, напримѣръ:

$$W = v_1 + (v_2 + u_1) + (v_3 + u_2) + (v_4 + u_3) + \cdots$$

или

$$W = v_1 + (v_2 + u_1) + v_3 + (v_4 + u_2) + v_5 + \cdots.$$

2. Операцiя умноженiя представляется менѣе простою.

Пусть

$$\begin{aligned} U &= u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots, \\ V &= v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \cdots \end{aligned} \tag{2}$$

будутъ два сходящихся ряда. Пусть a_i и b_i будутъ абсолютныя значенiя величинъ u_i и v_i, и допустимъ сначала, что ряды

$$\begin{aligned} A &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots, \\ B &= b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \cdots \end{aligned} \tag{3}$$

сходятся, такъ что ряды U и V сходятся абсолютно.

3. Если при умноженiи A на B поступать такъ, какъ при умноженiи двухъ конечныхъ многочленовъ, то придется умножить каждый членъ одной суммы на каждый членъ другой суммы и затѣмъ взять сумму этихъ произведенiй. Всѣ эти произведенiя имѣютъ видъ $a_\mu b_\nu$. Мы соединяемъ эти произведенiя въ группы по суммѣ индексовъ $\mu + \nu$ и затѣмъ складываемъ эти группы, т. е. составляемъ числа

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 b_0, \\ c_1 &= a_0 b_1 + a_1 b_0, \\ c_2 &= a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_m &= a_0 b_m + a_1 b_{m-1} + a_2 b_{m-2} + \cdots + a_m b_0; \end{aligned} \tag{4}$$

наконецъ, беремъ ихъ общую сумму

$$C_m = c_0 + c_1 + c_2 + \cdots + c_m \tag{5}$$

и сравниваемъ эту сумму со значеніемъ произведенія $A_n B_n$.

Въ произведеніи $A_n B_n$ содержатся всѣ тѣ и только тѣ члены $a_\mu b_\nu$, для которыхъ выполняются сразу оба неравенства $\mu \leqq n$ и $\nu \leqq n$.

Въ суммѣ C_m содержатся всѣ тѣ и только тѣ члены $a_\mu b_\nu$, для которыхъ $\mu + \nu \leqq m$. Поэтому, если возьмемъ $m = 2n$, то сумма C_m будетъ содержать всѣ тѣ члены $a_\mu b_\nu$, для которыхъ $\mu \leqq n$, $\nu \leqq n$, и, сверхъ того, еще и другіе члены, въ которыхъ μ или ν больше n. Такъ какъ всѣ числа a_μ, b_ν суть положительныя числа, то

$$A_n B_n < C_{2n};$$

если же возьмемъ

$$n' > 2n,$$

то тѣмъ болѣе будетъ

$$A_n B_n < C_{n'}. \tag{6}$$

Съ другой стороны, среди членовъ $a_\mu b_\nu$ произведенія $A_n B_n$, наряду съ другими, содержатся и всѣ тѣ члены, въ которыхъ $\mu + \nu \leqq n$, ибо ни въ одномъ изъ этихъ членовъ μ или ν не можетъ быть больше n. Но эти члены суть члены суммы C_n; слѣдовательно,

$$C_n < A_n B_n;$$

а потому, замѣнивъ n на n', имѣемъ:

$$C_{n'} < A_{n'} B_{n'}; \tag{7}$$

изъ неравенствъ же (6) и (7) слѣдуетъ, что

$$A_n B_n < C_{n'} < A_{n'} B_{n'}.$$

Такъ какъ, далѣе, произведенія $A_n B_n$ и $A_{n'} B_{n'}$ имѣютъ, по допущенію, одинъ и тотъ же предѣлъ AB, то и $C_{n'}$, а, слѣдовательно, и C_n имѣетъ тотъ же предѣлъ.

Такимъ образомъ, рядъ

$$C = c_0 + c_1 + c_2 + \cdots$$

сходится и притомъ

$$C = AB. \tag{8}$$

4. Въ интересахъ послѣдующаго важно еще замѣтить, что разность

$$D_n = A_n B_n - C_n$$

есть сумма положительныхъ произведенiй вида $a_\mu b_\nu$, и что D_n при неограниченно возрастающемъ n имѣетъ предѣломъ нуль.

5. Составимъ теперь изъ рядовъ U, V новый рядъ W по тому же закону, по которому мы составили рядъ C изъ рядовъ A и B, т. е. полагаемъ:

$$\begin{aligned}
w_0 &= u_0 v_0, \\
w_1 &= u_0 v_1 + u_1 v_0, \\
w_2 &= u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
w_m &= u_0 v_m + u_1 v_{m-1} + u_2 v_{m-2} + \cdots + u_m v_0, \\
W_m &= w_0 + w_1 + w_2 + \cdots + w_m.
\end{aligned} \tag{9}$$

Составимъ далѣе разность

$$\varDelta_n = U_n V_n - W_n.$$

Эта разность отличается отъ разности D_n только обозначенiемъ. Она есть сумма произведенiй $u_\mu v_\nu$, и если замѣнить эти произведенiя ихъ абсолютными значенiями $a_\mu b_\nu$, то $\varDelta_n$ перейдетъ въ D_n. Согласно теоремѣ, по которой абсолютное значенiе суммы не больше суммы абсолютныхъ значенiй ея слагаемыхъ, находимъ, что

$$|\varDelta_n| \leqq D_n;$$

поэтому $|\varDelta_n|$, а, слѣдовательно, также и $\varDelta_n$, имѣетъ предѣломъ нуль. Отсюда вытекаетъ, что

$$W = UV.$$

Такимъ образомъ, и рядъ W сходится. Но

$$|w_n| \leqq a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 = c_n,$$

а такъ какъ рядъ C сходится, то и рядъ чиселъ $|w_i|$ сходится, т. е. рядъ W сходится абсолютно. Мы имѣемъ, такимъ образомъ, теорему:

Если изъ двухъ абсолютно сходящихся рядовъ U и V мы составимъ по формуламъ (9) рядъ W, то и этотъ послѣднiй будетъ абсолютно сходиться, и при томъ $W = UV$.

6. Абелева теорема (§ 122) даетъ возможность распространить только-что доказанную теорему такимъ образомъ, что уже не будетъ больше надобности дѣлать различіе между абсолютною и неабсолютною сходимостью.

Если U и V суть два сходящихся ряда и если составленный изъ нихъ по формуламъ (9) рядъ W также сходится, то $W = UV$.

Въ самомъ дѣлѣ, если r означаетъ положительную правильную дробь и ряды U и V сходятся [4]), то ряды

$$U(r) = u_0 + ru_1 + r^2u_2 + r^3u_3 + \cdots,$$
$$V(r) = v_0 + rv_1 + r^2v_2 + r^3v_3 + \cdots$$

сходятся абсолютно (§ 124); выводимый изъ нихъ по формуламъ (9) рядъ

$$W(r) = w_0 + rw_1 + r^2w_2 + r^3w_3 + \cdots,$$

согласно п. 5, сходится абсолютно, при чемъ

$$U(r)\,V(r) = W(r). \tag{10}$$

Если положить $r = 1$, то ряды $U(r)$, $V(r)$, $W(r)$ переходятъ въ ряды U, V, W, и когда эти послѣдніе сходятся, то по Абелевой теоремѣ:

$$\operatorname*{Lim}_{r=1} U(r) = U, \quad \operatorname*{Lim}_{r=1} V(r) = V, \quad \operatorname*{Lim}_{r=1} W(r) = W;$$

поэтому, если въ равенствѣ (10) будемъ приближать r къ предѣлу 1, то получимъ

$$UV = W,$$

что и требовалось доказать.

Въ § 122 мы доказали, однако, Абелеву теорему только въ предположеніи вещественныхъ коэффиціентовъ. Въ случаѣ комплексныхъ коэффиціентовъ достаточно примѣнить эту теорему къ вещественной и мнимой части въ отдѣльности, чтобы доказать ея справедливость и для этого случая.

---

[4]) Т. е. числа u_n и v_n не возрастаютъ безпредѣльно.

ГЛАВА XXIII.

Безконечные сходящіеся ряды для показательной и для тригонометрическихъ функцій.

---

§ 126. Рядъ для показательной функціи.

1. Примѣнимъ теперь общіе законы къ отдѣльнымъ спеціальнымъ рядамъ и, прежде всего, разсмотримъ рядъ

$$E(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

Какъ мы уже показали въ п. 2 § 124-го, онъ сходится абсолютно при всякомъ вещественномъ или комплексномъ значеніи z. Въ частности, при $z = 1$, мы изслѣдовали этотъ рядъ уже въ § 119 и нашли его значеніе, а именно:

$$E(1) = e = 2{,}7182818 \ldots \tag{1}$$

Равнымъ образомъ, непосредственно изъ опредѣленія мы получаемъ:

$$E(0) = 1.$$

2. На послѣднемъ равенствѣ необходимо, однако, остановиться нѣсколько подробнѣе. Если мы обозначимъ абсолютную величину z черезъ r, то получимъ

$$|E(z) - 1| \leqq \frac{r}{1!} + \frac{r^2}{2!} + \frac{r^3}{3!} + \cdots$$

А такъ какъ

$$\frac{1}{2!} < \frac{1}{1!}, \quad \frac{1}{3!} < \frac{1}{2!}, \quad \frac{1}{4!} < \frac{1}{3!}, \ldots,$$

то

$$|E(z)-1|<r\left(1+\frac{r}{1!}+\frac{r^2}{2!}+\frac{r^3}{3!}+\cdots\right)=rE(r).$$

Мы видимъ отсюда, что абсолютное значенiе выраженiя $E(z)-1$ становится менѣе всякаго даннаго числа, когда z стремится къ нулю, т. е.

$E(z)$ **непрерывно** приближается къ 1, если z непрерывно приближается къ 0, что формально выражается слѣдующимъ образомъ:

$$\lim_{z=0} E(z)=1. \tag{2}$$

. Другая особенность ряда $E(z)$ выводится изъ правила умноженiя рядовъ, изложеннаго въ п. 5 § 125-го.

Если мы обозначимъ черезъ x и y два произвольныхъ вещественныхъ или комплексныхъ числа и положимъ при положительномъ значенiи n

$$u_n=\frac{x^n}{n!},\quad v_n=\frac{y^n}{n!},\quad u_0=v_0=1,$$

то, согласно равенствамъ (9) § 125-го,

$$w_n=\frac{y^n}{n!}+\frac{y^{n-1}}{(n-1)!}\frac{x}{1!}+\frac{y^{n-2}}{(n-2)!}\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!},$$

а такъ какъ

$$B_k^{(n)}=\frac{n!}{(n-k)!k!}$$

есть не что иное, какъ биномiальный коэффицiентъ (§ 57, § 60), то отсюда слѣдуетъ:

$$\begin{aligned} w_n&=\frac{1}{n!}(y^n+B_1^{(n)}y^{n-1}x+B_2^{(n)}y^{n-2}x^2+\cdots+x^n)\\ &=\frac{1}{n!}(x+y)^n. \end{aligned}$$

Такимъ образомъ, рядъ W есть не что иное, какъ $E(x+y)$, и, слѣдовательно,

$$E(x+y)=E(x)E(y). \tag{3}$$

При этомъ x, y могутъ имѣть вещественныя или мнимыя значенiя. Мы знаемъ изъ § 19 и § 36, что для вещественныхъ значенiй x и y равенствами (1), (2), (3) выражаются характеристическiе признаки степеней e^x [1]), и потому для вещественнаго значенія x мы получаемъ результатъ

$$e^x = E(x).$$

Такъ какъ до сихъ поръ мы еще не дали опредѣленія степеней съ мнимыми показателями, то мы вправѣ теперь и для мнимаго z положить

$$e^z = E(z) \tag{4}$$

и такимъ образомъ опредѣлить степени числа e и для комплексныхъ значеній z. Опредѣленное такимъ образомъ выраженіе e^z или $E(z)$ называется показательной функціей. Основное свойство степеней, выраженное въ равенствѣ (3), сохраняется въ такомъ случаѣ и для комплексныхъ показателей x, y.

4. Показательная функція e^z есть предѣлъ выраженія

$$Z = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

при безконечномъ возрастаніи n.

Для доказательства этого предложенія, сначала будемъ понимать подъ n положительное цѣлое число, и въ такомъ случаѣ получимъ по формулѣ бинома (§ 119):

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = 1 + z + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{z^2}{2!} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\frac{z^3}{3!} + \cdots$$
$$\cdots + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)\frac{z^n}{n!}.$$

Разложимъ это выраженіе на двѣ части:

$$Z = Z_1 + Z_2,$$

гдѣ, при условіи $m < n$,

$$Z_1 = 1 + z + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{z^2}{2!} + \cdots + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{m-1}{n}\right)\frac{z}{m!}$$

$$Z_2 = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{m}{n}\right)\frac{z^{m+1}}{(m+1)!} + \cdots$$
$$\cdots + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)\frac{z^n}{n!}.$$

---

[1]) Это утвержденіе будетъ вполнѣ обосновано въ п. 4 § 130-го.

Если подъ r будемъ разумѣть абсолютную величину z и если число $k \leqq n$, то

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{r^k}{k!}<\frac{r^k}{k!}.$$

Примѣняя это неравенство къ отдѣльнымъ членамъ выраженія Z_2, получаемъ:

$$|Z_2|<\frac{r^{m+1}}{(m+1)!}+\frac{r^{m+2}}{(m+2)!}+\cdots+\frac{r^n}{n!}.$$

Если положимъ теперь вообще

$$E_n(z)=1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!},$$

то найдемъ, что

$$|Z_2|<E_n(r)-E_m(r)<E(r)-E_m(r).$$

Коэффиціенты въ выраженіи Z_1:

$$\left(1-\frac{1}{n}\right),\ \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right),\ldots,\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)$$

при постоянномъ значеніи m и достаточномъ возрастаніи n могутъ стать сколь угодно близкими къ 1, и, слѣдовательно, при достаточномъ увеличеніи n, абсолютное значеніе $|Z_1-E_m(z)|$ можетъ быть сдѣлано менѣе любой величины Δ.

Согласно съ этимъ,

$$Z-E(z)=(Z_1-E_m(z))-(E(z)-E_m(z))+Z_2$$

и, слѣдовательно,

$$|Z-E(z)|<|Z_1-E_m(z)|+|E(z)-E_m(z)|+E(r)-E_m(r).$$

Теперь возьмемъ прежде всего число m столь большимъ, чтобы каждое изъ чиселъ

$$|E(z)-E_m(z)| \quad \text{и} \quad E(r)-E_m(r)$$

было меньше произвольнаго числа Δ: это возможно сдѣлать въ виду сходимости ряда $E(z)$; затѣмъ припишемъ числу n столь большое значеніе, чтобы выполнялось и неравенство $|Z_1-E_m(z)|<\Delta$; тогда будетъ

$$|Z-E(z)|\leqq 3\Delta.$$

Можно, слѣдовательно, приписать числу n столь большое значеніе, что абсолютная величина разности $Z - E(z)$ станетъ меньше произвольно малаго числа, а вмѣстѣ съ этимъ доказана теорема п. 4 для любого значенія z:

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z, \tag{5}$$

но, разумѣется, пока только при условіи, что n есть возрастающее цѣлое число.

5. Положимъ теперь

$$Z = \left(1+\frac{z}{n+\nu}\right)^{n+\nu},$$

разумѣя подъ n цѣлое число, а подъ ν правильную дробь; мы найдемъ, что

$$Z = \left(1+\frac{z}{n+\nu}\right)^{\nu}\frac{(n+\nu+z)^n}{(n+\nu)^n}$$

$$= \left(1+\frac{z}{n+\nu}\right)^{\nu}\left(1+\frac{\nu+z}{n}\right)^n\left(1+\frac{\nu}{n}\right)^{-n}.$$

Если n здѣсь неограниченно возрастаетъ, оставаясь цѣлымъ числомъ, то

$$\lim\left(1+\frac{z}{n+\nu}\right)^{\nu} = 1,\quad \lim\left(1+\frac{\nu+z}{n}\right)^n = e^{\nu+z},\quad \lim\left(1+\frac{\nu}{n}\right)^n = e^{\nu};$$

слѣдовательно, и въ этомъ случаѣ предѣлъ Z равенъ e^z.

Подобно тому, какъ это было сдѣлано въ п. 6 § 119-го, можно сказать, что Z имѣетъ тотъ же предѣлъ, когда число n остается отрицательнымъ, между тѣмъ какъ его абсолютная величина безгранично возрастаетъ.

Это можно также вывести непосредственно изъ формулы (5), если положить въ ней $-z$ вмѣсто z и представить ее въ видѣ:

$$\left(1+\frac{-z}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{z}{-n}\right)^{-n}},$$

ибо, на основаніи формулы (5), отсюда слѣдуетъ, что

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{z}{-n}\right)^{-n} = e^z.$$

6. Положивъ $z = ix$, гдѣ x есть вещественное число, и принимая во вниманіе соотношенія

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = +1, \quad i^5 = i, \quad i^6 = -1, \ldots,$$

найдемъ, что

$$E(ix) = 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \ldots,$$

и мы можемъ теперь положить

$$E(ix) = A(x) + iB(x), \tag{6}$$

гдѣ

$$\left.\begin{aligned} A(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots \\ B(x) &= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Эти два ряда сходятся абсолютно при всѣхъ значеніяхъ x.

Мы знаемъ вмѣстѣ съ тѣмъ, что

$$A(x) + iB(x) = \lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{ix}{n}\right)^n. \tag{8}$$

Когда x и y суть два произвольныхъ вещественныхъ числа, то изъ теоремы, выражаемой равенствомъ (3), слѣдуетъ что

$$(A(x) + iB(x))(A(y) + iB(y)) = A(x+y) + iB(x+y),$$

или, отдѣляя вещественную часть формулы отъ мнимой, имѣемъ:

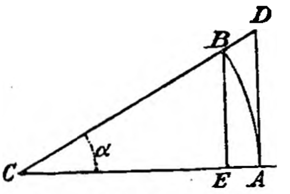
$$A(x+y) = A(x)A(y) - B(x)B(y),$$
$$B(x+y) = B(x)A(y) + B(y)A(x).$$

Эти формулы, очевидно, совпадаютъ вполнѣ съ формулами сложенія тригонометрическихъ функцій $\cos(x+y)$, $\sin(x+y)$ (§ 51, 3). Болѣе глубокое основаніе подобнаго совпаденія выяснится изъ нижеслѣдующихъ разсужденій.

§ 127. Тригонометрическія функціи, какъ суммы рядовъ.

1. Изслѣдованію связи, существующей между рядами и тригонометрическими функціями, необходимо предпослать слѣдующее разсужденіе.

Пусть AB (фиг. 27) будетъ дуга съ радіусомъ, равнымъ линейной единицѣ, и угломъ α, который мы измѣряемъ дуговой мѣрой, такъ что длина дуги AB также равна α. Опустимъ изъ B перпендикуляръ BE на CA, а въ точкѣ A возставимъ перпендикуляръ AD до пересѣченія его въ точкѣ D съ продолженіемъ радіуса CB. По правиламъ тригонометріи мы имѣемъ:



Фиг. 27.

$$\overline{BE} = \sin\alpha, \quad \overline{AD} = \operatorname{tg}\alpha, \quad \overline{CE} = \cos\alpha.$$

Какъ явствуетъ изъ чертежа, площадь сектора CAB менѣе площади треугольника CAD и болѣе площади треугольника CEB, но

$$\text{площадь } CAB = \frac{1}{2}\alpha,$$

$$\text{„} \quad CAD = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\text{„} \quad CEB = \frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha,$$

откуда вытекаетъ слѣдующее неравенство:

$$\sin\alpha\cos\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha; \qquad (1)$$

но $\operatorname{tg}\alpha = \sin\alpha/\cos\alpha$, а потому

$$\cos\alpha < \frac{\alpha}{\sin\alpha} < \frac{1}{\cos\alpha}\cdot \qquad (2)$$

Сравнивая длину синуса $\overline{BE}$ съ длиною дуги AB, находимъ:

$$\sin\alpha < \alpha. \qquad (3)$$

Такъ какъ $\cos\alpha$ приближается къ единицѣ съ уменьшеніемъ угла α, то отсюда слѣдуетъ:

2. Частное $\sin\alpha/\alpha$ приближается къ предѣлу 1, когда уголъ α приближается къ 0.

Такъ какъ $\cos\alpha$ становится равнымъ 1 при $\alpha = 0$, то и $\operatorname{tg}\alpha/\alpha$ имѣетъ предѣлъ 1 [2]):

$$\lim_{\alpha=0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1, \quad \lim_{\alpha=0}\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha} = 1. \tag{4}$$

Та же мысль можетъ быть выражена и такъ: функціи $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ при малыхъ значеніяхъ α становятся почти равными дугѣ α.

$\operatorname{Cos}\alpha$ больше $\frac{1}{2}$, когда уголъ α меньше $\pi/3$, потому что $\cos\alpha$ возрастаетъ съ уменьшеніемъ α, и равенъ $\frac{1}{2}$ при $\alpha = \pi/3$ (уголъ равносторонняго треугольника).

Слѣдовательно, когда $\alpha < \pi/3$, то, на основаніи неравенствъ (1) и (3):

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} < 2\sin\alpha < 2\alpha. \tag{5}$$

3. Если φ означаетъ произвольный уголъ, а n есть какое-нибудь цѣлое число, то по формулѣ Муавра (§ 51, 8):

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi,$$

откуда, положивъ $n\varphi = x$, выводимъ:

$$\cos x + i\sin x = \left(\cos\frac{x}{n} + i\sin\frac{x}{n}\right)^n. \tag{6}$$

Лѣвая часть этого равенства, очевидно, не зависитъ отъ n. Посмотримъ теперь, къ какому результату можно придти, когда n будетъ возрастать до безконечности.

Замѣтивъ, что

$$\left(\cos\frac{x}{n} + i\sin\frac{x}{n}\right)^n = \left(\cos\frac{x}{n}\right)^n\left(1 + i\operatorname{tg}\frac{x}{n}\right)^n, \tag{7}$$

разсмотримъ въ отдѣльности каждый изъ двухъ множителей правой части. Если въ тригонометрической формулѣ

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \tag{8}$$

---

[2]) Ибо $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}$.

положить $\alpha = x/2n$, то выйдетъ:

$$\left(\cos\frac{x}{n}\right)^n = \left(1 - 2\sin^2\frac{x}{2n}\right)^n.$$

Если же для краткости положимъ

$$2n\sin^2\frac{x}{2n} = \xi$$

и разложимъ полученное выраженіе по формулѣ бинома, то получимъ:

$$\left(\cos\frac{x}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{\xi}{n}\right)^n = \sigma + \varrho,$$

гдѣ, при m цѣломъ и меньшемъ числа n,

$$\sigma = 1 - \xi + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{\xi^2}{2!} - \cdots \pm \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{m-1}{n}\right)\frac{\xi^m}{m!},$$

$$\varrho = \mp\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{m}{n}\right)\frac{\xi^{m+1}}{(m+1)!} \pm \cdots$$

$$\cdots \pm \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)\frac{\xi^n}{n!}.$$

Въ выраженіяхъ σ и ϱ знаки $+$ и $-$ правильно чередуются. Но, согласно неравенству (3),

$$\xi < \frac{x^2}{2n};$$

стало быть, и подавно $\xi < x^2$, и ξ становится менѣе всякой данной положительной величины, когда n безконечно возрастаетъ. Отсюда слѣдуетъ, что σ имѣетъ предѣлъ 1 при постоянномъ m и безконечно возрастающемъ n. Абсолютная же величина второй части ϱ меньше, чѣмъ

$$\frac{x^{2m+2}}{(m+1)!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!} = E_n(x^2) - E_m(x^2),$$

и, въ силу сходимости ряда $E(x)$, становится менѣе всякой данной величины при достаточномъ возрастаніи чиселъ m и n.

Отсюда явствуетъ, что предѣлъ выраженія $\left(\cos\frac{x}{n}\right)^n$ равенъ 1.

4. Примѣняя тѣ же разсужденія ко второму множителю

$$\left(1+i\operatorname{tg}\frac{x}{n}\right)^n$$

произведенія (7), положимъ для краткости

$$n\operatorname{tg}\frac{x}{n}=t$$

и допустимъ сначала, что x есть положительное число. Если $m<n$, то мы снова получаемъ, по формулѣ бинома, равенство

$$\left(1+\frac{it}{n}\right)^n=S+R,$$

въ которомъ

$$S=1+it+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{(it)^2}{2!}+\cdots+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\frac{(it)^m}{m!},$$

$$R=\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m}{n}\right)\frac{(it)^{m+1}}{(m+1)!}+\cdots+\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\frac{(it)^n}{n!}.$$

Но, по п. 1, $\operatorname{tg}\frac{x}{n}\Big/\frac{x}{n}$ при безконечномъ возрастаніи n имѣетъ предѣломъ 1, и, слѣдовательно, t имѣетъ предѣломъ число x; далѣе, въ силу неравенства (5), $t<2x$, — по крайней мѣрѣ, когда $n>3x/\pi$.

Отсюда, какъ и раньше, выводится, что

$$|R|<E_n(2x)-E_m(2x), \tag{9}$$

и что S, при постоянномъ m и безконечно большомъ n, стремится къ величинѣ

$$1+ix+\frac{(ix)^2}{2!}+\frac{(ix)^3}{3!}+\cdots+\frac{(ix)^m}{m!}. \tag{10}$$

Но сумма (10), въ свою очередь, при достаточно большомъ значеніи числа m будетъ сколь угодно близка къ величинѣ $A(x)+iB(x)$ (§ 126, 6). А такъ какъ, кромѣ того, $|R|$ при тѣхъ же условіяхъ безпредѣльно уменьшается, то отсюда слѣдуетъ, что

$$\operatorname{Lim}\left(1+i\operatorname{tg}\frac{x}{n}\right)^n=A(x)+iB(x).$$

Согласно равенствамъ (6) и (7), мы отсюда получаемъ:

$$\cos x + i \sin x = A(x) + iB(x),$$
$$\cos x = A(x), \quad \sin x = B(x).$$

Такимъ образомъ, тригонометрическія функціи $\cos x$, $\sin x$ представляютъ собою суммы безконечныхъ рядовъ:

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots, \\ \sin x &= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots. \end{aligned} \tag{11}$$

По этимъ формуламъ можно вычислять $\cos x$ и $\sin x$. Но такъ какъ ряды эти сходятся тѣмъ лучше, чѣмъ меньше величина x, то ихъ цѣлесообразно примѣнять для вычисленія $\cos x$ и $\sin x$ лишь при малыхъ значеніяхъ x; въ другихъ же случаяхъ пользуются формулами сложенія.

Необходимо, однако, помнить, что при употребленіи этихъ формулъ уголъ долженъ измѣряться не въ градусахъ, а непремѣнно въ дуговой мѣрѣ.

Число $\pi = 3{,}141592\ldots$ можетъ быть въ такомъ случаѣ опредѣлено, какъ наименьшее положительное число, обращающее въ нуль рядъ, которымъ выражается синусъ.

Согласно равенству (6) § 126-го, мы получимъ для степени e^{ix} съ чисто мнимымъ показателемъ выраженія

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \cos x + i \sin x, \\ e^{-ix} &= \cos x - i \sin x. \end{aligned} \tag{12}$$

Складывая и вычитывая эти равенства, мы получаемъ функціи $\cos x$ и $\sin x$, выраженныя съ помощью показательной функціи съ мнимыми показателями:

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \\ \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \end{aligned} \tag{13}$$

Отсюда слѣдуетъ далѣе:

$$e^{\frac{i\pi}{2}} = i, \quad e^{i\pi} = -1, \quad e^{2i\pi} = +1, \tag{14}$$

Для того, чтобы комплексную величину $z = x + yi$ выразить черезъ ея абсолютное значенiе r и фазу ϑ, мы можемъ теперь, вмѣсто выраженiя

$$z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta),$$

пользоваться болѣе краткимъ:

$$z = re^{i\vartheta}.$$

5. Согласно равенствамъ (14) и равенству (3) § 126-го, функцiя e^z имѣетъ слѣдующую особенность:

$$e^{z+2\pi i} = e^z,$$

т. е. она не измѣняется, когда показатель z увеличивается на число $2\pi i$ или на кратное числа $2\pi i$. Это свойство называется периодичностью, а число $2\pi i$ называется перiодомъ функцiи e^z.

Итакъ, показательная функцiя такъ же перiодична, какъ и тригонометрическiя функцiи, но перiодъ у нея мнимый.

ГЛАВА XXIV.

Биноміальный рядъ.

§ 128. Биноміальный рядъ для цѣлыхъ отрицательныхъ показателей.

1. Въ § 60 мы вывели формулу бинома для цѣлаго положительнаго показателя. Если μ есть натуральное число, то по этой формулѣ

$$(1+z)^\mu = B_0^{(\mu)} + B_1^{(\mu)} z + B_2^{(\mu)} z^2 + B_3^{(\mu)} z^3 + \cdots, \tag{1}$$

гдѣ

$$B_0^{(\mu)} = 1, \quad B_1^{(\mu)} = \mu, \quad B_2^{(\mu)} = \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}, \ldots,$$
$$B_n^{(\mu)} = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)}{1.2.3\ldots n} \tag{2}$$

суть биноміальные коэффиціенты.

Выраженія $B_m^{(\mu)}$ сохраняютъ, однако, смыслъ и въ томъ случаѣ, когда μ не есть положительное цѣлое число, и даже тогда, когда μ есть число комплексное. Только ни одно изъ этихъ выраженій не дѣлается въ этихъ случаяхъ равнымъ нулю и сумма въ правой части равенства (1) не обрывается. Ея члены образуютъ безконечный рядъ.

Посмотримъ, будетъ ли эта сумма сходящейся.

2. Пусть z будетъ комплексное число и r абсолютное значеніе z. Въ ряду (1) отношеніе $(n+1)$-го члена къ n-му равно

$$B_n^{(\mu)} z^n : B_{n-1}^{(\mu)} z^{n-1} = \frac{\mu-n+1}{n} z = \left(\frac{\mu+1}{n} - 1\right) z,$$

и абсолютное значенiе этого отношенiя

$$\left|\frac{\mu+1}{n}-1\right| r$$

имѣетъ предѣлъ r при неограниченномъ возрастанiи n. Сообразно съ этимъ, рядъ (1) сходится абсолютно, когда $r<1$, и расходится, когда $r>1$ (§ 118, 4).

Поэтому, кромѣ того случая, когда μ есть цѣлое положительное число, рядъ (1) имѣетъ кругъ сходимости, радiусъ котораго равенъ 1 (§ 124).

. Въ § 60 мы познакомились съ выраженiемъ (10) для биномiальныхъ коэффицiентовъ, которое мы теперь, при нѣсколько измѣненныхъ обозначенiяхъ, представимъ такъ:

$$B_n^{(\mu+\nu)} = B_0^{(\mu)} B_n^{(\nu)} + B_1^{(\mu)} B_{n-1}^{(\nu)} + B_2^{(\mu)} B_{n-2}^{(\nu)} + \cdots + B_n^{(\mu)} B_0^{(\nu)}. \quad (3)$$

Тамъ мы вывели, однако, это равенство только въ томъ предположенiи, что μ, ν суть цѣлыя числа. Но при помощи выраженiй (2) мы можемъ доказать, что оно остается въ силѣ и въ общемъ случаѣ. Дѣйствительно, согласно формуламъ (2),

$$B_0^{(\mu+\nu)} = B_0^{(\mu)} B_0^{(\nu)}, \quad B_1^{(\mu+\nu)} = B_0^{(\mu)} B_1^{(\nu)} + B_1^{(\mu)} B_0^{(\nu)},$$

т. е равенство (3) справедливо при $n=0$ и $n=1$. Допустивъ, что это равенство вѣрно для нѣкотораго n, мы докажемъ, что оно также вѣрно для $n+1$. Для этой цѣли мы воспользуемся равенствомъ

$$(\mu-n) B_n^{(\mu)} = (n+1) B_{n+1}^{(\mu)}, \quad (4)$$

которое выводится непосредственно изъ равенствъ (2).

Помножимъ обѣ части равенства (3) на $\mu+\nu-n$ и въ отдѣльныхъ членахъ правой части разложимъ этотъ множитель слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{aligned}\mu+\nu-n &= (\nu-n)+\mu, \\ &= (\nu-n+1)+(\mu-1), \\ &= (\nu-n+2)+(\mu-2), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

Мы получимъ такимъ образомъ

$$(\mu+\nu-n) B_n^{(\mu+\nu)} =$$

$$B_0^{(\mu)}(\nu-n) B_n^{(\nu)} + B_1^{(\mu)}(\nu-n+1) B_{n-1}^{(\nu)} + B_2^{(\mu)}(\nu-n+2) B_{n-2}^{(\nu)} + \cdots$$

$$\cdots + \mu B_0^{(\mu)} B_n^{(\nu)} + (\mu-1) B_1^{(\mu)} B_{n-1}^{(\nu)} + \cdots$$

или, на основаніи равенства (4),

$$(n+1)B_{n+1}^{(\mu+\nu)} = (n+1)B_0^{(\mu)}B_{n+1}^{(\nu)} + nB_1^{(\mu)}B_n^{(\nu)} + (n-1)B_2^{(\mu)}B_{n-1}^{(\nu)} + \cdots$$
$$+ \quad B_1^{(\mu)}B_n^{(\nu)} + \qquad 2B_2^{(\mu)}B_{n-1}^{(\nu)} + \cdots.$$

Если мы сложимъ здѣсь члены, стоящіе другъ подъ другомъ, то множитель $(n+1)$ сократится, и мы получимъ:

$$B_{n+1}^{(\mu+\nu)} = B_0^{(\mu)}B_{n+1}^{(\nu)} + B_1^{(\mu)}B_n^{(\nu)} + B_2^{(\mu)}B_{n-1}^{(\nu)} + \cdots,$$

что въ сущности есть не что иное, какъ равенство (3), въ которомъ n замѣнено на $n+1$.

4. Обозначимъ теперь черезъ $\varphi(\mu)$ сумму ряда (1). Значеніе ея намъ, вообще говоря, пока неизвѣстно. Перемноживъ по правилу п. 5 § 125-го два подобныхъ ряда:

$$\begin{aligned} \varphi(\mu) &= B_0^{(\mu)} + B_1^{(\mu)}z + B_2^{(\mu)}z^2 + B_3^{(\mu)}z^3 + \cdots, \\ \varphi(\nu) &= B_0^{(\nu)} + B_1^{(\nu)}z + B_2^{(\nu)}z^2 + B_3^{(\nu)}z^3 + \cdots, \end{aligned} \tag{5}$$

въ предположеніи, что $|z| < 1$, мы получимъ слѣдующія выраженія:

$$\begin{aligned} &B_0^{(\mu)}B_0^{(\nu)}, \\ &(B_0^{(\mu)}B_1^{(\nu)} + B_1^{(\mu)}B_0^{(\nu)})z, \\ &(B_0^{(\mu)}B_2^{(\nu)} + B_1^{(\mu)}B_1^{(\nu)} + B_2^{(\mu)}B_0^{(\nu)})z^2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

для членовъ ряда, представляющаго собою произведеніе, и, согласно равенству (3), будемъ имѣть:

$$\varphi(\mu)\,\varphi(\nu) = \varphi(\mu+\nu). \tag{6}$$

5. Этимъ равенствомъ выражается характеристическая особенность степеней, изъ которой можно, какъ и раньше, вывести значеніе $\varphi(\mu)$. Если, напримѣръ, μ есть цѣлое положительное число и $\nu = -\mu$, то по формулѣ бинома для цѣлыхъ показателей

$$\varphi(0) = 1, \quad \varphi(\mu) = (1+z)^\mu,$$

и изъ равенства (6) слѣдуетъ, что

$$\varphi(-\mu) = \frac{1}{(1+z)^\mu} = (1+z)^{-\mu}.$$

Формула бинома остается, такимъ образомъ, справедливой для цѣлыхъ отрицательныхъ показателей, когда абсолютная величина z меньше 1. При $\mu = -1, \ -2, \ -3$ мы имѣемъ, напримѣръ,

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - \cdots,$$

$$\frac{1}{(1+z)^2} = 1 - 2z + 3z^2 - 4z^3 + 5z^4 - \cdots,$$

$$\frac{1}{(1+z)^3} = 1 - \frac{2 \cdot 3}{2} z + \frac{3 \cdot 4}{2} z^2 - \frac{4 \cdot 5}{2} z^3 + \cdots$$

Если μ есть число дробное, или ирраціональное, или даже комплексное, то $\varphi(\mu)$ все еще сохраняетъ свое значеніе, которое также слѣдуетъ искать между степенями; но такъ какъ эти степени многозначны, то нужно еще установить это значеніе.

Точное изслѣдованіе биноміальнаго ряда ведетъ начало отъ Абеля, который ясно показалъ значеніе этого ряда въ общемъ случаѣ, а также и для комплекснаго μ *).

Для простоты мы ограничимся здѣсь простѣйшимъ случаемъ, когда μ имѣетъ вещественное значеніе.

§ 129. Непрерывность биноміальнаго ряда.

1. Подъ функціей $\Phi(x)$ аргумента x разумѣютъ выраженіе, численное значеніе котораго опредѣляется нѣкоторыми правилами исчисленія, когда дано произвольное значеніе аргумента x. Такъ какъ аргументъ x способенъ принимать различныя значенія, то онъ называется также перемѣнною. Функціи и аргументъ могутъ принимать также комплексныя значенія. Примѣрами такихъ функцій могутъ служить цѣлыя функціи, которыя мы разсматривали въ одиннадцатой главѣ, далѣе — тригонометрическія функціи $\sin x$, $\cos x$ или показательная функція e^x. Употребляются также функціи отъ нѣсколькихъ перемѣнныхъ. Къ нимъ принадлежатъ симметрическія функціи (§ 70) или функціи X, Y въ § 72.

---

*) N. H. Abel, „Untersuchungen über die Reihe"

$$1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)}{1.2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} x^3 + \cdots,$$

„Crelles Journal", Bd. I (1826). Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 71.

2. Функція $\Phi(x)$ называется непрерывной, если она обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что абсолютное значеніе ея измѣненія $\Phi(x') - \Phi(x)$ становится меньше произвольнаго положительнаго числа Δ, когда разность $x' - x$ по абсолютному значенію дѣлается меньше нѣкотораго достаточно малаго числа δ. Короче это выражаютъ и такъ:

Непрерывною называется такая функція, у которой безконечно малому измѣненію аргумента соотвѣтствуетъ безконечно малое измѣненіе функціи.

Такимъ образомъ, для непрерывной функціи измѣненія скачками исключены.

Точно такъ же функція отъ нѣсколькихъ перемѣнныхъ называется непрерывной въ томъ случаѣ, если одновременнымъ безконечно-малымъ измѣненіямъ всѣхъ аргументовъ отвѣчаетъ безконечно малое измѣненіе функціи.

3. Если X и Y суть двѣ непрерывныя функціи аргумента x, то и ихъ соединенія $X + Y$, $X - Y$, XY суть непрерывныя функціи. Ибо, если α и β суть измѣненія X и Y, то соотвѣтствующія измѣненія вышеуказанныхъ соединеній будутъ $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$, $\alpha Y + \beta X + \alpha\beta$, а эти величины становятся всѣ три безконечно малыми, когда α и β суть безконечно малыя.

Примѣняя повторно эту теорему, найдемъ, что цѣлая функція непрерывныхъ функцій всегда есть непрерывная функція.

4. Обозначимъ черезъ u_0, u_1, u_2, u_3, ... члены безконечнаго ряда непрерывныхъ функцій аргумента x и допустимъ, что по своему абсолютному значенію онѣ остаются меньше нѣкотораго опредѣленнаго числа g, не зависящаго отъ x. Если r есть положительная правильная дробь, то, какъ мы видѣли въ п. 3 § 124-го,

$$U = u_0 + ru_1 + r^2u_2 + r^3u_3 + \cdots$$

есть абсолютно сходящійся безконечный рядъ, котораго сумма U есть функція отъ x. Покажемъ теперь, что это есть непрерывная функція отъ x.

Для этой цѣли возьмемъ цѣлое положительное число n и положимъ:

$$U_n = u_0 + ru_1 + r^2u_2 + \cdots + r^nu_n,$$

$$R_n = r^{n+1}u_{n+1} + r^{n+2}u_{n+2} + \cdots,$$

$$U = U_n + R_n;$$

тогда, согласно п. 3, U_n будетъ непрерывною функціею отъ x, а R_n — есть безконечный рядъ, сумма котораго [1]) удовлетворяетъ неравенству

$$|R_n| < g(r^{n+1} + r^{n+2} + r^{n+3} + \cdots) = \frac{g r^{n+1}}{1-r}.$$

Далѣе, такъ какъ r есть правильная дробь, то можно взять n столь большимъ, чтобы $|R_n|$ было меньше произвольно малой величины Δ, а тогда и измѣненіе R_n при измѣненіи x будетъ по абсолютной величинѣ меньше числа 2Δ, ибо, если R'_n означаетъ измѣненное значеніе R_n, то

$$|R_n| < \Delta, \quad |R'_n| < \Delta,$$
$$|R'_n - R_n| < |R_n| + |R'_n| < 2\Delta.$$

Такъ какъ, сверхъ, того, U_n есть непрерывная функція, то можно взять измѣненіе аргумента x столь малымъ, чтобы и измѣненіе $U'_n - U_n$ было меньше Δ, а тогда измѣненіе функціи U будетъ меньше, чѣмъ 3Δ, т. е. будетъ произвольно малымъ. Этимъ доказана непрерывность функціи U относительно аргумента x.

5. Мы можемъ также разсматривать U, какъ функцію отъ r, и, какъ таковая, она непрерывна, пока r остается меньше какой-либо опредѣленной правильной дроби. Отсюда мы заключаемъ, что степенной рядъ

$$S(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots$$

есть непрерывная функція отъ z внутри круга его сходимости. Въ самомъ дѣлѣ, если r есть абсолютное значеніе аргумента z, ϱ — радіусъ круга сходимости и $r < \varrho$, то въ интервалѣ между r и ϱ можно найти значеніе ϱ_0, удовлетворяющее условію

$$\sqrt{r\varrho} < \varrho_0 < \varrho;$$

а такъ какъ тогда

$$\frac{\varrho r}{\varrho_0} < \varrho_0 < \varrho,$$

то рядъ

$$c_0 + c_1 \frac{\varrho r}{\varrho_0} + c_2 \left(\frac{\varrho r}{\varrho_0}\right)^2 + \cdots$$

---

[1]) Для всѣхъ значеній аргумента x, для которыхъ опредѣлены функціи $u_0, u_1, u_2, \ldots$

сходится и

$$\lim_{n=\infty}\left|c_n\left(\frac{\varrho z}{\varrho_0}\right)^n\right| = 0.$$

Общій членъ $c_n z^n$ ряда $S(z)$ можно представить въ видѣ:

$$c_n\left(\frac{\varrho z}{\varrho_0}\right)^n\cdot\left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^n,$$

а потому, если мы въ теоремѣ п. 4 замѣнимъ r на ϱ_0/ϱ, u_n на $c_n(\varrho z)^n/\varrho_0^n$, то условія этой теоремы будутъ выполнены, откуда слѣдуетъ:

Степенной рядъ $S(z)$ есть непрерывная функція отъ z внутри круга сходимости.

Такъ, напримѣръ, по этой теоремѣ степенная функція e^z и тригонометрическія функціи $\sin z$ и $\cos z$, какъ степенные ряды, суть непрерывныя функціи отъ z.

Содержаніе теоремы Абеля въ § 122 состоитъ въ томъ, что, если и рядъ

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

сходится, то $U = u_0 + ru_1 + r^2u_2 + \cdots$ есть непрерывная функція отъ r также и при $r = 1$, если только измѣненія числа r ограничиваются его уменьшеніемъ.

6. Биноміальный рядъ

$$\varphi(\mu) = 1 + B_1^{(\mu)}z + B_2^{(\mu)}z^2 + B_3^{(\mu)}z^3 + \cdots$$

находится въ условіяхъ п. 4, пока абсолютное значеніе z меньше 1. Ибо, если правильная дробь r больше абсолютной величины перемѣнной z, то рядъ

$$1 + B_1^{(\mu)}\frac{z}{r} + B_2^{(\mu)}\left(\frac{z}{r}\right)^2 + \cdots,$$

согласно п. 2 § 128-го, сходится; поэтому, если положить

$$u_n = B_n^{(\mu)}\left(\frac{z}{r}\right)^n,$$

то u_n при неограниченномъ возрастаніи n остается меньше нѣкоторой опредѣленной границы. Такъ какъ биноміальные коэффиціенты $B_n^{(\mu)}$, будучи цѣлыми функціями отъ μ, непрерывны, то

$$\varphi(\mu) = 1 + u_1 r + u_2 r^2 + u_3 r^3 + \cdots,$$

согласно п. 4, есть непрерывная функція отъ μ.

Какъ уже было сказано, мы будемъ предполагать, что μ есть вещественное число, но z можетъ имѣть и комплексныя значенія.

§ 130. Сумма биноміальнаго ряда.

1. Если $z = x + yi$, то можно положить

$$z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta),$$

гдѣ r есть число положительное, а ϑ обозначаетъ уголъ, который опредѣленъ лишь до числа, кратнаго 2π. Чтобы опредѣлить этотъ уголъ вполнѣ точно, мы можемъ условиться брать уголъ ϑ между $-\pi$ и $+\pi$, такъ что

$$-\pi < \vartheta \leqq \pi. \tag{1}$$

Сверхъ того, мы въ послѣдующихъ разсужденіяхъ предполагаемъ, что

$$r < 1. \tag{2}$$

Сходящійся при этихъ допущеніяхъ биноміальный рядъ

$$\varphi(\mu) = 1 + B_1^{(\mu)} z + B_2^{(\mu)} z^2 + B_3^{(\mu)} z^3 + \cdots \tag{3}$$

имѣетъ вообще комплексныя значенія, и такъ какъ

$$z^n = r^n(\cos n\vartheta + i\sin n\vartheta),$$

а коэффиціенты $B_n^{(\mu)}$ суть вещественныя числа, то, положивъ

$$\varphi(\mu) = X + Yi,$$

имѣемъ:

$$\begin{aligned} X &= 1 + B_1^{(\mu)} r\cos\vartheta + B_2^{(\mu)} r^2\cos 2\vartheta + B_3^{(\mu)} r^3\cos 3\vartheta + \cdots, \\ Y &= \quad\;\; B_1^{(\mu)} r\sin\vartheta + B_2^{(\mu)} r^2\sin 2\vartheta + B_3^{(\mu)} r^3\sin 3\vartheta + \cdots. \end{aligned} \tag{4}$$

2. Положимъ

$$\begin{aligned} X = R\cos\theta, \quad Y = R\sin\theta, \\ Z = X + Yi = R(\cos\theta + i\sin\theta), \end{aligned} \tag{5}$$

гдѣ R есть вещественное положительное число, а θ есть уголъ, который опредѣленъ лишь до числа, кратнаго 2π.

Мы имѣемъ въ виду опредѣлить R и θ, какъ функціи отъ μ. Чтобы указать ихъ зависимость отъ μ, мы будемъ также писать $R = R(\mu)$, $\theta = \theta(\mu)$ и замѣтимъ, что R, $\cos\theta$, $\sin\theta$ — суть непрерывныя функціи отъ μ.

На функцію $\theta(\mu)$ также можно смотрѣть, какъ на непрерывную, но въ такомъ случаѣ мы не можемъ уже заключить $\theta(\mu)$ въ любой интервалъ длины 2π; напротивъ, если для нѣкотораго значенія μ, напримѣръ, для $\mu = 0$ указанъ опредѣленный интервалъ для $\theta(\mu)$, то при непрерывномъ измѣненіи μ и $\theta(\mu)$ уголъ $\theta(\mu)$ можетъ выйти за предѣлы этого интервала. Въ этомъ именно смыслѣ мы будемъ здѣсь разсматривать функцію $\theta(\mu)$, принимая ее за непрерывную функцію отъ μ.

Для $\mu = 0$ имѣемъ $X = 1$, $Y = 0$ и, слѣдовательно,

$$\cos\theta(0) = 1, \quad \sin\theta(0) = 0;$$

поэтому $\theta(0)$ есть кратное 2π, и, чтобы вполнѣ опредѣлить функцію $\theta(\mu)$, достаточно положить

$$\theta(0) = 0.$$

Для $R(0)$ получаемъ значеніе 1.

3. Для опредѣленія R и θ служитъ основное равенство (6) § 128-го

$$\varphi(\mu)\,\varphi(\nu) = \varphi(\mu + \nu),$$

гдѣ подъ μ и ν разумѣются два любыхъ вещественныхъ числа.

Примѣняя формулу Муавра, мы получаемъ:

$$\begin{aligned} R(\mu)\,R(\nu)\,&[\cos(\theta(\mu) + \theta(\nu)) + i\sin(\theta(\mu) + \theta(\nu))] \\ &= R(\mu + \nu)\,[\cos\theta(\mu + \nu) + i\sin\theta(\mu + \nu)]. \end{aligned}$$

Такъ какъ значеніями синуса и косинуса угла вполнѣ опредѣляется остатокъ отъ дѣленія этого угла на 2π, то отсюда вытекаетъ:

$$\begin{aligned} R(\mu + \nu) &= R(\mu)\,R(\nu), \\ \theta(\mu + \nu) &= \theta(\mu) + \theta(\nu). \end{aligned} \tag{6}$$

Ко второй части послѣдняго изъ этихъ равенствъ можно было бы, согласно п. 2, прибавить еще число, кратное 2π. Но такъ какъ $\theta(\mu)$ есть непрерывная функція, а это кратное могло бы измѣняться только скачкомъ, то оно не зависитъ отъ μ и ν и оказывается равнымъ нулю, если положимъ $\nu = 0$.

4. Изъ перваго изъ равенствъ (6) выводится прежде всего значенiе $R(\mu)$ совершенно такъ же, какъ и въ § 36. А именно, пользуясь повторно этимъ равенствомъ, находимъ, что, при цѣломъ n,

$$R(n\mu) = R(\mu)^n,$$

такъ что при $\mu = 1$

$$R(n) = R(1)^n,$$

а при $\mu = m/n$

$$R(m) = \left[R\left(\frac{m}{n}\right)\right]^n;$$

слѣдовательно,

$$R\left(\frac{m}{n}\right) = [R(1)]^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{R(1)^m},$$

подъ условiемъ, что радикалъ обозначаетъ единственное положительное значенiе корня n-ой степени. Если, далѣе, въ первомъ изъ равенствъ (6) положимъ сперва $\nu = 0$, а затѣмъ $\nu = -\mu$, то найдемъ, что $R(0) = 1$ и что, слѣдовательно,

$$R(-\mu) = \frac{1}{R(\mu)}.$$

Такъ какъ $R(\mu)$ есть непрерывная функцiя отъ μ, то мы приходимъ къ заключенiю, что то же равенство

$$R(\mu) = R(1)^\mu \tag{7}$$

имѣетъ мѣсто также и при ирраціональныхъ (положительныхъ и отрицательныхъ) значенiяхъ μ; при чемъ подъ $R(1)^\mu$ слѣдуетъ понимать, какъ и въ § 36, единственное вещественное положительное значенiе μ-той степени положительной величины $R(1)$ [2]).

5. Примѣняя повторно второе изъ равенствъ (6)

$$\theta(\mu + \nu) = \theta(\mu) + \theta(\nu),$$

найдемъ подобнымъ же образомъ:

$$\theta(n\mu) = n\theta(\mu),$$

---

[2]) Замѣняя здѣсь R, μ и ν соотвѣтственно на E, x, y, приходимъ къ слѣдующему выводу: если $E(z)$ есть непрерывная функцiя вещественнаго аргумента z, которая при произвольныхъ вещественныхъ значенiяхъ x и y удовлетворяетъ соотношенiю $E(x+y) = E(x)\,E(y)$, то $E(z) = |\,E(1)\,|^z$, и если $E(1) = e$, то $E(z) = e^z$ (см. § 126, 3).

такъ что при $\mu = 1$:

$$\theta(n) = n\theta(1),$$

а при $\mu = m/n$:

$$\theta(m) = n\theta\left(\frac{m}{n}\right) = m\theta(1).$$

Такимъ образомъ, для раціональныхъ значеній μ имѣетъ мѣсто равенство

$$\theta(\mu) = \mu\theta(1), \tag{8}$$

которое вслѣдствіе непрерывности остается справедливымъ и для каждаго ирраціональнаго значенія μ. Намъ остается, поэтому, опредѣлить еще величины $R(1)$ и $\theta(1)$, которыя также зависятъ отъ z, т. е. отъ r и ϑ.

6. Для опредѣленія $R(1)$ и $\theta(1)$ выводимъ изъ равенствъ (4) уравненія:

$$R(1)\cos\theta(1) = 1 + r\cos\vartheta,$$
$$R(1)\sin\theta(1) = r\sin\vartheta,$$

откуда, возводя въ квадратъ, складывая и принимая во вниманіе, что $R(1)$ есть положительное число, находимъ:

$$R(1) = \sqrt{1 + 2r\cos\vartheta + r^2}, \tag{9}$$

гдѣ радикалъ берется со знакомъ плюсъ.

Далѣе, путемъ дѣленія предыдущихъ уравненій, получаемъ:

$$\operatorname{tg}\theta(1) = \frac{r\sin\vartheta}{1 + r\cos\vartheta}.$$

Если тангенсъ угла данъ, то этимъ уголъ опредѣленъ до числа, кратнаго π; каждому значенію тангенса соотвѣтствуетъ **одинъ** и только одинъ уголъ, содержащійся между $-\frac{1}{2}\pi$ и $+\frac{1}{2}\pi$. Мы опредѣляемъ, такимъ образомъ, величину ω однозначно условіями:

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{r\sin\vartheta}{1 + r\cos\vartheta}, \quad -\frac{\pi}{2} < \omega < +\frac{\pi}{2}, \tag{10}$$

гдѣ границы $\pm\frac{1}{2}\pi$ исключены по той причинѣ, что знаменатель $1 + r\cos\vartheta$ не можетъ быть нулемъ, когда r есть правильная дробь. Тогда

$$\theta(1) = \omega + h\pi,$$

гдѣ h есть неизвѣстное цѣлое число, еще подлежащее опредѣленію.

7. Замѣтимъ для этого, что для значеній r, меньшихъ единицы, Y въ равенствѣ (4) есть непрерывная функція отъ r, переходящая въ нуль при $r = 0$, и что, при $r = 0$, ω также переходитъ въ 0, а $R(1)$ въ 1. Но, согласно равенствамъ (5), (7), (8),

$$Y = R(1)^{\mu} \sin \mu(\omega + h\pi);$$

при $r = 0$ отсюда получаемъ:

$$\sin \mu h \pi = 0.$$

Это равенство должно имѣть мѣсто при всякомъ произвольно выбранномъ значеніи μ, а это возможно только въ томъ случаѣ, когда цѣлое число $h = 0$. Ибо, если бы оно не было равно 0, то достаточно было бы положить $\mu = 1 : 2h$, чтобы получить $\sin \mu h \pi = 1$. Поэтому $h = 0$, и сумма биноміальнаго ряда такимъ образомъ вполнѣ опредѣлена въ предположеніи, что r есть правильная дробь. Мы имѣемъ:

$$\varphi(\mu) = (\sqrt{1 + 2r\cos\vartheta + r^2})^{\mu} (\cos \mu\omega + i \sin \mu\omega), \tag{11}$$

гдѣ ω опредѣляется соотношеніями (10).

Если z есть вещественное число, то либо $\vartheta = 0$, либо $\vartheta = \pi$ и, слѣдовательно, согласно соотношеніямъ (10), $\omega = 0$; кромѣ того, число $z = x$ будетъ положительнымъ при $\vartheta = 0$ и отрицательнымъ при $\vartheta = \pi$, а потому $x = r\cos\vartheta$, $x^2 = r^2$, и равенство (11) въ этомъ случаѣ даетъ намъ:

$$\varphi(\mu) = (1 + x)^{\mu}, \tag{12}$$

гдѣ подъ $(1 + x)^{\mu}$ разумѣется единственное вещественное положительное значеніе этой степени.

Если въ равенствѣ (11) отдѣлимъ вещественныя и мнимыя части, то получимъ вещественныя значенія рядовъ X и Y:

$$\left.\begin{aligned}
(\sqrt{1 + 2r\cos\vartheta + r^2})^{\mu} \cos\mu\omega &= 1 + B_1^{(\mu)} r\cos\vartheta + B_2^{(\mu)} r^2 \cos 2\vartheta + \\
&\quad + B_3^{(\mu)} r^3 \cos 3\vartheta + \cdots, \\
(\sqrt{1 + 2r\cos\vartheta + r^2})^{\mu} \sin\mu\omega &= \phantom{1 + {}} B_1^{(\mu)} r\sin\vartheta + B_2^{(\mu)} r^2 \sin 2\vartheta + \\
&\quad + B_3^{(\mu)} r^3 \sin 3\vartheta + \cdots.
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

8. Если возьмемъ $\mu = \frac{1}{2}$, то

$$B_1^{(\frac{1}{2})} = \frac{1}{2}, \quad B_2^{(\frac{1}{2})} = \frac{-1}{2.4}, \quad B_3^{(\frac{1}{2})} = \frac{1.3}{2.4.6}, \; \ldots,$$

$$B_n^{(\frac{1}{2})} = (-1)^{n-1} \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots 2n};$$

слѣдовательно, когда x есть вещественная правильная дробь, то

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2.4}x^2 + \frac{1.3}{2.4.6}x^3 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}x^4 + \cdots \quad (14)$$

Далѣе, при $\mu = -\frac{1}{2}$, находимъ:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^4 - \cdots$$

Можно примѣнять эти формулы для извлеченія квадратныхъ корней, при чемъ вычисленія представляются особенно простыми, когда корни извлекаются изъ чиселъ, которыя мало отличаются отъ ближайшихъ точныхъ квадратовъ. Такъ, напримѣръ,

$$\sqrt{99} = \sqrt{100-1} = 10\sqrt{1-0{,}01}.$$

Если въ равенствѣ (14) положимъ $x = -0{,}01$, то, найдемъ, что

$$\begin{array}{rl} -\frac{1}{2}x &= 0{,}005 \\ \frac{1}{8}x^2 &= 0{,}0000125 \\ -\frac{1}{16}x^3 &= 0{,}0000000625 \\ \hline & \ 0{,}0050125625 \end{array}$$

$$1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 = 0{,}9949874375,$$

$$\sqrt{99} = 9{,}949874375,$$

при чемъ послѣдній десятичный знакъ нѣсколько великъ. Дѣля на 3, находимъ:

$$\sqrt{11} = 3{,}31662479$$

съ точностью до девятаго десятичнаго знака.

§ 131. Биноміальный рядъ на границѣ сходимости.

1. Въ § 128 мы видѣли, что биноміальный рядъ имѣетъ кругъ сходимости радіуса 1. Нѣтъ смысла задаваться вопросомъ о значеніи этого ряда внѣ его круга сходимости. Однако же, представляется интереснымъ изслѣдовать, сходится ли этотъ рядъ въ точкахъ, принадлежащихъ кругу сходимости, т. е. для величинъ z, абсолютныя значенія которыхъ равны 1. Если это имѣетъ мѣсто, то можно будетъ опредѣлить сумму

ряда для этихъ значенiй по теоремѣ Абеля (§ 122), отыскавъ предѣлъ выраженiя $\varphi(\mu)$, найденнаго нами въ предыдущемъ параграфѣ, при $r = 1$.

2. Первый случай: $\mu > 0$.

Въ этомъ случаѣ биномiальный рядъ при $r = 1$ сходится абсолютно для всякаго значенiя ϑ.

Это было бы доказано, если бы мы могли показать, что рядъ биномiальныхъ коэффицiентовъ

$$1 + B_1^{(\mu)} + B_2^{(\mu)} + B_3^{(\mu)} + \cdots \tag{1}$$

сходится абсолютно при положительномъ μ, ибо, принимая во вниманiе, что $\sin n\vartheta$ и $\cos n\vartheta$ суть правильныя дроби, мы нашли бы, что, согласно п. 6 § 120-го, сходятся также оба ряда

$$\begin{aligned} X &= 1 + B_1^{(\mu)}\cos\vartheta + B_2^{(\mu)}\cos 2\vartheta + B_3^{(\mu)}\cos 3\vartheta + \cdots, \\ Y &= \phantom{1 + {}} B_1^{(\mu)}\sin\vartheta + B_2^{(\mu)}\sin 2\vartheta + B_3^{(\mu)}\sin 3\vartheta + \cdots. \end{aligned} \tag{2}$$

Согласно теоремѣ п. 7 § 118-го, сходимость ряда (1) будетъ доказана въ томъ случаѣ, если удастся найти такое число h, которое больше 1 и для котораго

$$\lim_{n=\infty} n^h B_n^{(\mu)} = 0. \tag{3}$$

3. Чтобы найти такой показатель, положимъ, понимая подъ n и $k < n$ два цѣлыхъ числа,

$$\begin{aligned} B_n^{(\mu)} &= \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)}{1.2.3\ldots n} \\ &= B_k^{(\mu)}\frac{(\mu-k)(\mu-k-1)\ldots(\mu-n+1)}{(k+1)(k+2)\ldots n}. \end{aligned}$$

Обозначая черезъ K абсолютное значенiе числа $B_k^{(\mu)}$ и полагая $k > \mu$, найдемъ отсюда абсолютное значенiе числа $B_n^{(\mu)}$:

$$|B_n^{(\mu)}| = K\frac{k-\mu}{k+1}\,\frac{k-\mu+1}{k+2}\cdots\frac{n-\mu-1}{n}, \tag{4}$$

гдѣ K есть положительное число, не зависящее отъ n.

Но если $m > 1$, то по формулѣ бинома имѣемъ:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-\mu-1}$$

$$=1-\frac{\mu+1}{m}+\frac{(\mu+1)(\mu+2)}{1.2}\frac{1}{m^2}-\frac{(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)}{1.2.3}\frac{1}{m^3}+\cdots$$

$$=\left(1-\frac{\mu+1}{m}\right)+\frac{(\mu+1)(\mu+2)}{1.2}\frac{1}{m^2}\left(1-\frac{\mu+3}{3m}\right)$$

$$+\frac{(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)(\mu+4)}{1.2.3.4}\frac{1}{m^4}\left(1-\frac{\mu+5}{5m}\right)+\cdots;$$

если $m > \mu + 1$, а l есть натуральное число, то

$$m(l-1) \geqq l-1, \quad ml \geqq m+l-1 > \mu+l;$$

слѣдовательно, разности

$$1-\frac{\mu+1}{m}, \quad 1-\frac{\mu+3}{3m}, \quad 1-\frac{\mu+5}{5m}, \ldots$$

всѣ имѣютъ положительныя значенія, такъ что

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-\mu-1} > 1-\frac{\mu+1}{m},$$

что можно записать и такъ:

$$\frac{m-\mu-1}{m} < \left(\frac{m}{m+1}\right)^{\mu+1}.$$

Полагая здѣсь $m = k+1, k+2, \ldots, n$, находимъ:

$$\frac{k-\mu}{k+1} < \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{\mu+1},$$

$$\frac{k-\mu+1}{k+2} < \left(\frac{k+2}{k+3}\right)^{\mu+1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{n-\mu-1}{n} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\mu+1};$$

сообразно съ этимъ получаемъ изъ равенства (4):

$$
\begin{aligned}
|B_n^{(\mu)}| &< K\left(\frac{k+1}{k+2}\,\frac{k+2}{k+3}\cdots\frac{n}{n+1}\right)^{\mu+1} \\
&< K\left(\frac{k+1}{n+1}\right)^{\mu+1},
\end{aligned}
\tag{5}
$$

такъ что, если h есть произвольное положительное число, то

$$
|n^h B_n^{(\mu)}| < K\,(k+1)^{\mu+1}(n+1)^{h-\mu-1}. \tag{6}
$$

Выраженіе же, стоящее въ правой части этого неравенства, будетъ приближаться къ предѣлу нуль при неограниченномъ возрастаніи n, если возьмемъ

$$
h < 1 + \mu.
$$

Такъ какъ допущеніе $h > 1$ при положительномъ μ совмѣстимо съ этимъ условіемъ, то, согласно равенству (3), для разсматриваемаго случая сходимость доказана.

Соотношеніе (5) показываетъ, что

$$
\operatorname*{Lim}_{n=\infty} B_n^{(\mu)} = 0 \tag{7}
$$

не только при положительномъ μ, но и тогда, когда $\mu + 1$ есть положительное число, т. е. и въ случаѣ, когда μ есть отрицательная правильная дробь. Но только въ этомъ случаѣ убываніе величины $B_n^{(\mu)}$ уже недостаточно для того, чтобы гарантировать абсолютную сходимость сряда (1), такъ какъ $h < 1 + \mu$ остается ниже 1.

4. Это приводитъ насъ къ второму случаю $-1 < \mu < 0$.

Въ этомъ случаѣ биноміальный рядъ сходится на кругѣ ходимости, кромѣ случая $z = -1$, хотя сходится вообще уже неабсолютно.

Доказательство основывается на общемъ равенствѣ (§ 57, (7))

$$
B_n^{(\mu+1)} = B_n^{(\mu)} + B_{n-1}^{(\mu)}, \tag{8}
$$

справедливость котораго для произвольнаго μ выводится изъ соотношеній

$$
B_n^{(\mu)} = \frac{\mu - n + 1}{n}\,B_{n-1}^{(\mu)}, \quad B_n^{(\mu+1)} = \frac{\mu+1}{n}\,B_{n-1}^{(\mu)}
$$

между биноміальными коэффиціентами. Положивъ теперь, при любомъ z,

$$
S_n^{(\mu)} = 1 + B_1^{(\mu)} z + B_2^{(\mu)} z^2 + \cdots + B_n^{(\mu)} z^n
$$

и умноживъ обѣ части этого равенства на $1+z$, получимъ, согласно равенству (8):

$$\begin{aligned}(1+z)\,S_n^{(\mu)} &= 1 + B_1^{(\mu)} z + B_2^{(\mu)} z^2 + \cdots + B_n^{(\mu)} z^n \\ &+ \quad z + B_1^{(\mu)} z^2 + \cdots + B_{n-1}^{(\mu)} z^n + B_n^{(\mu)} z^{n+1} \\ &= 1 + B_1^{(\mu+1)} z + B_2^{(\mu+1)} z^2 + \cdots + B_n^{(\mu+1)} z^n + B_n^{(\mu)} z^{n+1} \\ &= S_n^{(\mu+1)} + z^{n+1} B_n^{(\mu)}.\end{aligned}$$

Если абсолютное значенiе r величины z равно 1, то, при неограниченномъ возрастанiи n, величина z^{n+1} остается конечной, а число $B_n^{(\mu)}$, согласно соотношенiю (7), становится равнымъ нулю.

А такъ какъ $\mu+1>0$, то $S_n^{(\mu+1)}$, согласно п. 2, имѣетъ конечный предѣлъ, и, если $1+z \neq 0$, то и сумма $S_n^{(\mu)}$ имѣетъ конечный предѣлъ, т. е. рядъ $\varphi(\mu)$ сходится.

Однако же, при $z=-1$, нашъ рядъ въ этомъ случаѣ не можетъ сходиться, ибо при вещественномъ значенiи z, абсолютная величина котораго меньше единицы, функцiя $\varphi(\mu)$ дѣлается равной $(1+z)^\mu$, а это выраженiе обращается въ безконечность, когда μ есть отрицательное число и $z=-1$. Поэтому, согласно теоремѣ Абеля, рядъ не можетъ сходиться при $z=-1$.

5. Очень легко исчерпывается третiй случай: $\mu \leqq -1$.

Въ этомъ случаѣ $\mu+1$ есть либо отрицательное число, либо нуль, и, слѣдовательно, $n-\mu-1$ есть положительное число, которое больше n или, въ крайнемъ случаѣ, равно n. Поэтому

$$\frac{n-\mu-1}{n} \geqq 1,$$

и, слѣдовательно, биномiальные коэффицiенты $B_n^{(\mu)}$ не будутъ меньше 1 и не будутъ приближаться къ предѣлу нуль. Такимъ образомъ, и члены рядовъ X, Y:

$$B_m^{(\mu)} \cos m\vartheta, \quad B_m^{(\mu)} \sin m\vartheta$$

не будутъ безконечно малыми, и, слѣдовательно, эти ряды не могутъ сходиться. Единственнымъ исключенiемъ, не представляющимъ, однако, никакого интереса, является рядъ Y, когда $\vartheta=0$ или $\vartheta=\pi$, при чемъ $Y=0$.

6. Чтобы въ случаяхъ сходимости ряда опредѣлить его сумму, достаточно положить $r=1$ въ равенствахъ (9), (10) и (11) § 130-го. Тогда будетъ:

$$\sqrt{1+2r\cos\vartheta+r^2} = \sqrt{2(1+\cos\vartheta)} = 2\cos\tfrac{1}{2}\vartheta,$$

такъ какъ $\cos\frac{1}{2}\vartheta$ есть положительное число, ибо, по предположенію, ϑ лежитъ между $-\pi$ и $+\pi$. Далѣе,

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{\sin\vartheta}{1+\cos\vartheta} = \frac{2\sin\frac{1}{2}\vartheta\cos\frac{1}{2}\vartheta}{2(\cos\frac{1}{2}\vartheta)^2} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\vartheta$$

и, слѣдовательно,

$$\omega = \tfrac{1}{2}\vartheta,$$

и при чемъ ω, какъ это и требовалось, находится между $-\frac{1}{2}\pi$ и $+\frac{1}{2}\pi$. Отдѣляя въ равенствѣ (11) § 130-го вещественную часть отъ мнимой, мы такимъ образомъ найдемъ:

$$\left(2\cos\frac{1}{2}\vartheta\right)^{\mu}\cos\mu\frac{\vartheta}{2} = 1 + B_1^{(\mu)}\cos\vartheta + B_2^{(\mu)}\cos 2\vartheta + B_3^{(\mu)}\cos 3\vartheta + \cdots,$$

$$\left(2\cos\frac{1}{2}\vartheta\right)^{\mu}\sin\mu\frac{\vartheta}{2} = B_1^{(\mu)}\sin\vartheta + B_2^{(\mu)}\sin 2\vartheta + B_3^{(\mu)}\sin 3\vartheta + \cdots,$$

и эти равенства справедливы при $\mu > -1$; при положительномъ значеніи μ предѣльное значеніе $\vartheta = \pm\pi$ еще допустимо.

ГЛАВА XXV.

Логариѳмическiе и циклометрическiе ряды.

§ 132. Логариѳмическiе ряды.

1. Если въ биномiальномъ ряду

$$(1+x)^{\mu} = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}x^3 + \cdots, \quad (1)$$

гдѣ x есть положительная или отрицательная правильная дробь, положить $\mu = 0$, то обѣ части примутъ значенiе 1. Если же предварительно приведемъ равенство (1) къ виду:

$$\frac{(1+x)^{\mu}-1}{\mu} = x + \frac{\mu-1}{1.2}x^2 + \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{2.3}x^3 + \cdots \quad (2)$$

и затѣмъ станемъ приближать μ къ нулю, то правая часть преобразуется въ рядъ:

$$\lambda = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots, \quad (3)$$

который также сходится, когда x есть правильная дробь.

Но по п. 4 § 129-го рядъ (2) есть непрерывная функцiя отъ μ, когда x есть правильная дробь, и потому λ есть предѣлъ частнаго $((1+x)^{\mu}-1):\mu$ при $\mu = 0$.

Чтобы найти сумму ряда (3), достаточно представить этотъ предѣлъ не въ формѣ безконечнаго ряда.

Этого нельзя сдѣлать непосредственно, потому что при $\mu = 0$ уничтожается и числитель и знаменатель дроби $((1+x)^{\mu}-1):\mu$, а $0/0$ не имѣетъ опредѣленнаго значенiя. Мы можемъ, однако, найти косвеннымъ образомъ и этотъ предѣлъ, воспользовавшись уже найденными выше (§ 119) предѣлами.

Если положить

$$(1+x)^{\mu}-1=\frac{1}{y}, \tag{4}$$

то y будетъ возрастать до безконечности, когда μ будетъ приближаться къ нулю. Но изъ равенства (4) слѣдуетъ:

$$(1+x)^{\mu}=1+\frac{1}{y};$$

если мы возьмемъ логариѳмы обѣихъ частей при любомъ основанiи, то получимъ:

$$\mu=\frac{\log\left(1+\frac{1}{y}\right)}{\log(1+x)}. \tag{5}$$

Изъ равенствъ же (4) и (5) вытекаетъ, что

$$\frac{(1+x)^{\mu}-1}{\mu}=\frac{\log(1+x)}{y\log\left(1+\frac{1}{y}\right)}=\frac{\log(1+x)}{\log\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}}. \tag{6}$$

По п. 5 § 119-го

$$\operatorname*{Lim}_{y=\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}=e$$

(основанiе натуральной системы логариѳмовъ). Слѣдовательно, согласно равенству (6):

$$\operatorname*{Lim}_{\mu=0}\frac{(1+x)^{\mu}-1}{\mu}=\frac{\log(1+x)}{\log e}.$$

Это равенство получитъ наиболѣе простой видъ, если мы примемъ e за основанiе системы логариѳмовъ. Эти логариѳмы называются **натуральными логариѳмами**. Для отличiя ихъ отъ другихъ — напримѣръ, бригговыхъ — логариѳмовъ, употребляются различныя обозначенiя: $\log\operatorname{nat}x$ или lx. Мы здѣсь будемъ пользоваться также весьма употребительнымъ обозначенiемъ $\ln x$. Поэтому, если мы теперь положимъ въ основанiе систему натуральныхъ логариѳмовъ, то получимъ

$$\operatorname*{Lim}_{\mu=0}\frac{(1+x)^{\mu}-1}{\mu}=\ln(1+x).$$

Изъ равенства же (3) мы получимъ такимъ образомъ разложенiе:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\cdots. \tag{7}$$

Мы получимъ нѣсколько болѣе удобную форму, если замѣнимъ x на $-x$:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \cdots, \tag{8}$$

и затѣмъ вычтемъ равенство (8) изъ равенства (7):

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots. \tag{9}$$

Положивъ

$$\frac{1+x}{1-x} = y \text{ и, слѣдовательно, } x = \frac{y-1}{y+1},$$

найдемъ, что каждому положительному значенію величины y соотвѣтствуетъ значеніе x, меньшее единицы, а именно: x есть положительное число, когда $y > 1$, и отрицательное, когда $y < 1$, такъ что при помощи ряда (9) можно найти натуральный логариѳмъ каждаго положительнаго числа.

Изъ равенства (9), при $x = 1/3$, получаемъ

$$\frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \frac{1}{9 \cdot 3^9} + \frac{1}{11 \cdot 3^{11}} + \frac{1}{13 \cdot 3^{13}} + \cdots, \tag{10}$$

откуда находимъ, что натуральный логариѳмъ числа 2 равенъ

$$0{,}693147$$

съ точностью до шестого десятичнаго знака. Этотъ способъ довольно тягостенъ, когда требуется высокая степень точности.

2. Рядъ (7) расходится, когда $x = -1$, ибо при этомъ значеніи x онъ обращается въ

$$-\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots\right).$$

Напротивъ, при $x = +1$, получаемъ:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots,$$

и этотъ рядъ сходится, хотя и не абсолютно (§ 121, 5).

По теоремѣ о непрерывности степенного ряда (§ 122) мы можемъ опредѣлить сумму этого ряда, положивъ $x = 1$ въ суммѣ $\ln(1+x)$.

Такимъ образомъ находимъ:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots. \tag{11}$$

Этотъ рядъ сходится еще медленнѣе, чѣмъ рядъ (10); поэтому, если желаютъ получить степень точности въ нѣсколько десятичныхъ знаковъ, то требуется взять чрезвычайно большое число членовъ,

§ 133. Циклометрическіе ряды.

1. Если въ биноміальномъ ряду положимъ $z = ix$, то получимъ:

$$\varphi(\mu) = 1 + i\mu x - \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2 - i\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}x^3 + \cdots,$$

и значеніе этой суммы найдется изъ равенствъ (10) и (11) § 130-го, если въ нихъ положить $\vartheta = \pm \frac{1}{2}\pi$, при чемъ верхній знакъ относится къ положительнымъ, а нижній къ отрицательнымъ значеніямъ x. Если x есть правильная дробь и $r = |x|$, то

$$\operatorname{tg}\omega = x, \tag{1}$$

и, слѣдовательно,

$$\varphi(\mu) = (\sqrt{1+x^2})^\mu(\cos\mu\omega + i\sin\mu\omega).$$

Отдѣляя вещественную часть отъ мнимой, находимъ:

$$(\sqrt{1+x^2})^\mu\cos\mu\omega = 1 - \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{1.2.3.4}x^4 - \cdots,$$

$$(\sqrt{1+x^2})^\mu\sin\mu\omega = \mu x - \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}x^3 +$$

$$+ \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)(\mu-4)}{1.2.3.4.5}x^5 - \cdots;$$

дѣля второй изъ этихъ рядовъ на μ, получаемъ:

$$(\sqrt{1+x^2})^\mu\frac{\sin\mu\omega}{\mu} = x - \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}x^3 + \frac{(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)(\mu-4)}{1.2.3.4.5}x^5 - \cdots.$$

При $\mu = 0$ правая часть преобразуется въ безконечный рядъ

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots, \tag{2}$$

сходящійся при всякомъ значеніи x, равномъ правильной дроби; сумму же этого ряда мы найдемъ, какъ и въ логариѳмическомъ ряду, разыскавъ предѣлъ лѣвой части при $\mu = 0$.

Но по п. 2 § 127-го, $\sin\alpha : \alpha = 1$ при $\alpha = 0$, а потому, положивъ $\alpha = \mu\omega$, имѣемъ:

$$\lim_{\mu=0} \frac{\sin\mu\omega}{\mu} = \omega \lim_{\mu=0} \frac{\sin\mu\omega}{\mu\omega} = \omega,$$

а $(\sqrt{1+x^2})''$ дѣлается равнымъ 1; такимъ образомъ находимъ:

$$\omega = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots \tag{3}$$

2. Когда задано положительное или отрицательное число x, равное тангенсу нѣкотораго угла ω, то этимъ опредѣляется только остатокъ отъ дѣленія угла на π. Но уголъ будетъ опредѣленъ вполнѣ, если присоединить еще ограниченіе, что онъ долженъ заключаться между $-\frac{1}{2}\pi$ и $+\frac{1}{2}\pi$. Уголъ (выраженный въ дуговой мѣрѣ), опредѣленный какъ дуга, тангенсъ которой есть x, называютъ arcus tangens x (правильнѣе: arcus tangentis x) и пишутъ сокращенно:

$$\omega = \operatorname{arctg} x, \tag{4}$$

такъ что равенство (3) даетъ:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots \tag{5}$$

Такъ какъ формула (5) имѣетъ мѣсто только въ томъ случаѣ, когда x содержится между -1 и $+1$, то уголъ $\operatorname{arctg} x$ лежитъ между $-\frac{1}{4}\pi$ и $+\frac{1}{4}\pi$ (между -45^0 и $+45^0$).

3. Рядъ (5) остается сходящимся, когда x становится равнымъ 1; $\operatorname{arctg} x$ принимаетъ тогда значеніе $\frac{1}{4}\pi$, и мы получаемъ такимъ образомъ сумму извѣстнаго ряда Лейбница:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots \text{*)}. \tag{6}$$

Вслѣдствіе медленной сходимости, этотъ рядъ не пригоденъ, однако, для практическаго вычисленія числа π.

4. Чтобы получить ряды съ лучшей сходимостью, служащіе для вычисленія π, берутъ уголъ, который находится въ извѣстномъ отношеніи

---

*) Объ открытіи суммы этого ряда Лейбницемъ ср. Cantor, „Geschichte der Mathematik", Bd. III, Kapitel 86.

къ числу π и котораго тангенсъ равенъ извѣстной правильной дроби. Если возьмемъ, напримѣръ, уголъ, равный $\frac{1}{6}\pi$ (30^0, половину угла равносторонняго треугольника), то его тангенсъ равенъ $1/\sqrt{3}$, и изъ равенства (5) получаемъ:

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{3.3} + \frac{1}{5.3^2} - \frac{1}{7.3^3} + \frac{1}{9.3^4} - \frac{1}{11.3^5} + \cdots \tag{7}$$

Ниже будутъ найдены ряды, имѣющіе еще лучшую сходимость.

§ 134. Функція arc tg x.

1. Если въ ряду (9) § 132-го подставить ix вмѣсто x, то получимъ рядъ, который отличается отъ ряда (5) § 133-го только множителемъ i, и потому вполнѣ естественно, если мы положимъ

$$\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2i} \log \frac{1+ix}{1-ix}. \tag{1}$$

Это равенство представляетъ собою, прежде всего, только опредѣленіе логариѳма мнимой величины, но въ силу этого опредѣленія оба ряда ((9) § 132-го и (5) § 133-го) объединяются въ одномъ законѣ.

2. Основное свойство логариѳмовъ сохраняется согласно формулѣ (1), а именно: сумма двухъ логариѳмовъ равна логариѳму произведенія слагаемыхъ. Въ самомъ дѣлѣ, если положить

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} x, \quad \beta = \operatorname{arc\,tg} y,$$
$$x = \operatorname{tg} \alpha, \quad y = \operatorname{tg} \beta,$$

то имѣемъ по формулѣ сложенія для тангенсовъ:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} = \frac{x+y}{1-xy}; \tag{2}$$

поэтому

$$\alpha + \beta = \operatorname{arc\,tg} \frac{x+y}{1-xy},$$

или

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y = \operatorname{arc\,tg} \frac{x+y}{1-xy}. \tag{3}$$

При этомъ слѣдуетъ замѣтить, что къ лѣвой части необходимо еще прибавить π или отнять отъ нея π, когда сумма $\alpha + \beta$ выступаетъ изъ интервала $-\pi/2$, $+\pi/2$.

Изъ равенствъ (1) и (3) получаемъ:

$$\ln\frac{1+ix}{1-ix}+\ln\frac{1+iy}{1-iy}=\ln\frac{1-xy+i(x+y)}{1-xy-i(x+y)},$$

при чемъ

$$\frac{1-xy+i(x+y)}{1-xy-i(x+y)}=\frac{(1+ix)(1+iy)}{(1-ix)(1-iy)},$$

такъ что законъ логариѳмовъ сохраняется:

$$\ln\frac{1+ix}{1-ix}+\ln\frac{1+iy}{1-iy}=\ln\frac{1+ix}{1-ix}\cdot\frac{1+iy}{1-iy}.$$

3. Этимъ закономъ можно воспользоваться для преобразованія ряда для $\operatorname{arc\,tg} x$ въ сумму подобныхъ ему рядовъ, которые, имѣя гораздо болѣе высокую степень сходимости, могутъ служить для точнаго вычисленія π.

Если опредѣлить двѣ правильныя дроби x и y такъ, чтобы онѣ удовлетворяли равенству

$$\frac{x+y}{1-xy}=1, \tag{4}$$

то, принимая во вниманіе, что $\operatorname{arc\,tg} 1=\frac{1}{4}\pi$, найдемъ, по равенству (3), что

$$\frac{\pi}{4}=\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,tg} y,$$

и съ помощью равенства (5) § 133-го получимъ:

$$\frac{\pi}{4}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots,$$
$$+y-\frac{y^3}{3}+\frac{y^5}{5}-\frac{y^7}{7}+\cdots.$$

Для опредѣленія x и y равенству (4) даютъ видъ:

$$(x+1)(y+1)=2$$

и, положивъ $x=\frac{1}{2}$, находятъ, что $y=\frac{1}{3}$; такимъ образомъ получаютъ ряды Эйлера, имѣющіе лучшую сходимость:

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\frac{1}{2^3}+\frac{1}{5}\frac{1}{2^5}-\frac{1}{7}\frac{1}{2^7}+\cdots,$$
$$+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\frac{1}{3^5}-\frac{1}{7}\frac{1}{3^7}+\cdots.$$

Если къ обѣимъ частямъ равенства (3) прибавить еще третій уголъ $\operatorname{arctg} z$ и вновь примѣнить ту же формулу, то выйдетъ:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg} z = \operatorname{arctg} \frac{x+y+z-xyz}{1-xy-xz-yz};$$

если теперь опредѣлить правильныя дроби x, y, z такъ, чтобы онѣ удовлетворяли равенству

$$x+y+z-xyz = 1-xy-xz-yz,$$

то получимъ

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg} z$$

въ формѣ трехъ рядовъ, которые иногда еще лучше сходятся. Взявъ, напримѣръ, $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{8}$, $z = \frac{1}{5}$, получаемъ:

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \tfrac{1}{2} + \operatorname{arctg} \tfrac{1}{8} + \operatorname{arctg} \tfrac{1}{5}. \tag{5}$$

По этой формулѣ производилъ вычисленіе Дазе (Dahse), который опредѣлилъ число π съ 200 десятичными знаками.

Еще гораздо раньше (1706) Джонъ Машинъ (John Machin) далъ лучшую формулу, которою онъ пользовался для вычисленія π со 100 десятичными знаками. Выводъ ея основанъ на слѣдующихъ соображеніяхъ.

Если въ равенствѣ (3) положить $y = -1$, то при любомъ x будетъ:

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1}. \tag{6}$$

Если здѣсь взять для x значеніе, близкое къ 1, то $(1-x)/(1+x)$ будетъ малою дробью, и, согласно равенству (5) § 133-го, мы получимъ для второго члена правой части хорошо сходящійся рядъ. Для того же, чтобы и первый членъ представить въ видѣ хорошо сходящагося ряда, слѣдуетъ положить $\operatorname{arctg} x = n \operatorname{arctg} a$, гдѣ n есть произвольное цѣлое число. Чѣмъ больше n, тѣмъ меньше будетъ a при данномъ значеніи x. Взявъ $n = 4$ и положивъ $\alpha = \beta$ въ равенствѣ (2), получимъ:

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta}, \quad \operatorname{tg} 4\beta = \frac{2\operatorname{tg} 2\beta}{1-\operatorname{tg}^2 2\beta}. \tag{7}$$

Если же положить $a = \operatorname{tg}\beta$, $x = \operatorname{tg} 4\beta$, то изъ формулы (6) получимъ:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} 4\beta - 1}{\operatorname{tg} 4\beta + 1}.$$

Взявъ произвольное число a равнымъ $\frac{1}{5}$, находимъ изъ равенства (7): $\operatorname{tg} 2\beta = \frac{5}{12}$, $\operatorname{tg} 4\beta = x = \frac{120}{119}$, откуда, наконецъ, слѣдуетъ:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}. \tag{8}$$

Ясно, что равенство (8) болѣе пригодно для вычисленія, чѣмъ равенство (5), такъ какъ рядъ (5) § 133-го быстрѣе сходится при $x = \frac{1}{5}$, чѣмъ при $x = \frac{1}{2}$. Недавно Шенксъ (Shanks) примѣнилъ формулу (8) для вычисленія π съ 707 десятичными знаками *).

§ 135. Тригонометрическіе ряды.

1. Приближая въ общихъ выраженіяхъ для X, Y (§ 130, (13)) число μ къ нулю, мы получимъ новыя разложенія въ ряды, обладающіе замѣчательными особенностями. Принявъ въ соображеніе, что, при $\mu = 0$,

$$\frac{B_n^{(\mu)}}{\mu} = \frac{(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)}{1.2\ldots n} = \frac{(-1)^{n-1}}{n},$$

мы прежде всего найдемъ, что

$$\begin{aligned} \lim_{\mu=0} \frac{\varrho^\mu \cos\mu\omega - 1}{\mu} &= r\cos\vartheta - \tfrac{1}{2} r^2 \cos 2\vartheta + \tfrac{1}{3} r^3 \cos 3\vartheta - \cdots, \\ \lim_{\mu=0} \frac{\varrho^\mu \sin\mu\omega}{\mu} &= r\sin\vartheta - \tfrac{1}{2} r^2 \sin 2\vartheta + \tfrac{1}{3} r^3 \sin 3\vartheta - \cdots, \end{aligned} \tag{1}$$

если

$$\varrho = \sqrt{1 + 2r\cos\vartheta + r^2}, \quad \operatorname{tg}\omega = \frac{r\sin\vartheta}{1 + r\cos\vartheta}. \tag{2}$$

---

*) Знаки e для основанія системы натуральныхъ логариѳмовъ и π для отношенія окружности къ діаметру вошли во всеобщее употребленіе съ тѣхъ поръ, какъ Эйлеръ употребилъ ихъ въ сочиненіи „Variae observationes circa series infinitas", появившемся въ „Запискахъ Петербургской Академіи" въ 1738 году. Знакъ π былъ уже употребленъ въ 1706 г. В. Джонсомъ (Villiam Jones).

Число π называется Людольфовымъ числомъ по имени ученаго Ludolph van Ceulen, вычислившаго это число съ 35 десятичными знаками (умеръ въ 1610 г. профессоромъ въ Лейденѣ). Въ церкви Петра въ Лейденѣ въ 1840 г. была еще видна ненаходимая съ тѣхъ поръ надпись, указывавшая это число. Опредѣленія этого числа восходятъ до Архимеда. Cantor, Bd. II, S. 598 f.

Число Дазе имѣется въ журналѣ Крелля, т. 27 (1844); число Шенкса указано въ „Proceedings of the Royal Society in London", т. 21, съ поправкою въ т. 22 (1873).

Объ исторіи числа π см. т. II, кн. I, стр. 313 и сл. этой книги.

Но изъ равенства

$$\cos\mu\omega = 1 - 2\left(\sin\frac{\mu\omega}{2}\right)^2$$

слѣдуетъ, что

$$\frac{\varrho^\mu\cos\mu\omega - 1}{\mu} = \frac{\varrho^\mu - 1}{\mu} - 2\varrho^\mu\frac{\sin\frac{1}{2}\mu\omega}{\mu}\sin\tfrac{1}{2}\mu\omega. \tag{3}$$

А такъ какъ уже раньше было доказано, что

$$\operatorname*{Lim}_{\mu=0}\frac{\sin\mu\omega}{\mu} = \omega, \quad \operatorname*{Lim}_{\mu=0}\frac{\varrho^\mu - 1}{\mu} = \ln\varrho,$$

то второй членъ въ правой части равенства (3) исчезаетъ, и мы получаемъ изъ равенства (1):

$$\begin{aligned}\ln\sqrt{1+2r\cos\vartheta+r^2} &= r\cos\vartheta - \tfrac{1}{2}r^2\cos 2\vartheta + \tfrac{1}{3}r^3\cos 3\vartheta - \tfrac{1}{4}r^4\cos 4\vartheta + \cdots,\\ \operatorname{arctg}\frac{r\sin\vartheta}{1+r\cos\vartheta} &= r\sin\vartheta - \tfrac{1}{2}r^2\sin 2\vartheta + \tfrac{1}{3}r^3\sin 3\vartheta - \tfrac{1}{4}r^4\sin 4\vartheta + \cdots.\end{aligned} \tag{4}$$

2. Отсюда получаются интересные результаты при переходѣ къ границѣ сходимости, т. е. когда $r = 1$. Что ряды, находящіеся въ правыхъ частяхъ равенствъ (4), еще сходятся при $r = 1$, вытекаетъ изъ одной общей теоремы, доказательство которой мы здѣсь приведемъ.

Пусть $c_1, c_2, c_3, \ldots$ будутъ положительныя числа, удовлетворяющія условіямъ

$$c_1 > c_2 > c_3 > c_4 > \cdots, \quad \operatorname*{Lim}_{n=\infty} c_n = 0 \tag{5}$$

и составляющія, поэтому, рядъ убывающихъ чиселъ, которыя становятся меньше всякой границы. Пусть, далѣе,

$$u_1, u_2, u_3, \ldots$$

будетъ рядъ положительныхъ или отрицательныхъ чиселъ такого рода, что съ безграничнымъ возрастаніемъ n сумма

$$U_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n \tag{6}$$

по абсолютной величинѣ остается меньше нѣкоторой конечной границы g, при чемъ нѣтъ надобности, чтобы эта сумма приближалась къ опредѣленному предѣлу.

При этихъ предположеніяхъ сумма

$$S_n = c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3 + \cdots + c_nu_n \tag{7}$$

сходится, т. е. $\operatorname{Lim} S_n = S$ имѣетъ опредѣленное значеніе.

Для доказательства этой теоремы мы, согласно равенству (6), полагаемъ:

$$u_1 = U_1,$$
$$u_2 = U_2 - U_1,$$
$$u_3 = U_3 - U_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_n = U_n - U_{n-1}$$

и получаемъ отсюда:

$$\begin{aligned} S_n &= c_1 U_1 + c_2(U_2 - U_1) + c_3(U_3 - U_2) + \cdots + c_n(U_n - U_{n-1}) \\ &= U_1(c_1 - c_2) + U_2(c_2 - c_3) + \cdots + U_{n-1}(c_{n-1} - c_n) + U_n c_n. \end{aligned}$$

Безконечный рядъ

$$(c_1 - c_2) + (c_2 - c_3) + (c_3 - c_4) + \cdots = c_1$$

состоитъ изъ однихъ только положительныхъ членовъ и сходится; такъ какъ при этомъ абсолютныя величины всѣхъ чиселъ $U_1, U_2, U_3, \ldots$ меньше g, то и рядъ

$$U_1(c_1 - c_2) + U_2(c_2 - c_3) + U_3(c_3 - c_4) + \cdots$$

сходится (по п. 6 § 120-го), но въ такомъ случаѣ и сумма S_n сходится, ибо произведенiе $U_n c_n$ приближается къ нулю.

Взявъ въ этой теоремѣ для ряда $u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots$ числа $+1$, -1, $+1$, -1, ..., мы получимъ отсюда теорему п. 3 § 121-го.

3. Чтобы примѣнить эту теорему къ рядамъ (4), положимъ

$$c_1 = 1, \quad c_2 = \frac{1}{2}, \quad c_3 = \frac{1}{3}, \quad c_4 = \frac{1}{4}, \ldots,$$

чѣмъ требованiя (5) будутъ удовлетворены, и останется только показать, что суммы

$$U_n = \cos\vartheta - \cos 2\vartheta + \cos 3\vartheta - \cdots \pm \cos n\vartheta,$$
$$V_n = \sin\vartheta - \sin 2\vartheta + \sin 3\vartheta - \cdots \pm \sin n\vartheta$$

остаются ниже нѣкоторой конечной границы. Это легко выводится изъ тригонометрическихъ формулъ:

$$2\cos\tfrac{1}{2}\vartheta\cos n\vartheta = \cos(n - \tfrac{1}{2})\vartheta + \cos(n + \tfrac{1}{2})\vartheta,$$
$$2\cos\tfrac{1}{2}\vartheta\sin n\vartheta = \sin(n - \tfrac{1}{2})\vartheta + \sin(n + \tfrac{1}{2})\vartheta.$$

Примѣняя эти формулы къ отдѣльнымъ членамъ суммъ U_n и V_n, мы получимъ:

$$2\,U_n \cos\frac{1}{2}\vartheta = \left(\cos\frac{1}{2}\vartheta + \cos\frac{3}{2}\vartheta\right) - \left(\cos\frac{3}{2}\vartheta + \cos\frac{5}{2}\vartheta\right) + \cdots$$

$$\cdots \pm \left(\cos\frac{2n-1}{2}\vartheta + \cos\frac{2n+1}{2}\vartheta\right)$$

$$= \cos\frac{1}{2}\vartheta \pm \cos\frac{2n+1}{2}\vartheta,$$

$$2\,V_n \cos\frac{1}{2}\vartheta = \left(\sin\frac{1}{2}\vartheta + \sin\frac{3}{2}\vartheta\right) - \left(\sin\frac{3}{2}\vartheta + \sin\frac{5}{2}\vartheta\right) + \cdots$$

$$\cdots \pm \left(\sin\frac{2n-1}{2}\vartheta + \sin\frac{2n+1}{2}\vartheta\right)$$

$$= \sin\frac{1}{2}\vartheta \pm \sin\frac{2n+1}{2}\vartheta.$$

Мы должны теперь исключить тотъ случай, когда $\cos\frac{1}{2}\vartheta = 0$, т. е. когда $\vartheta = \pm\pi$. За этимъ исключенiемъ вышеприведенныя формулы показываютъ, что величины U_n и V_n никогда не переходятъ опредѣленной границы, такъ какъ при неограниченно возрастающемъ n величины $\sin(n+\frac{1}{2})\vartheta$ и $\cos(n+\frac{1}{2})\vartheta$, хотя и безпрестанно колеблются, но все же остаются положительными или отрицательными правильными дробями.

Въ случаѣ $\vartheta = \pm\pi$, который мы исключили, всѣ члены ряда U_n становятся равными -1, и U_n дѣлается равнымъ отрицательной безконечности. Члены же ряда V_n дѣлаются равными нулю, а, слѣдовательно, и самый рядъ V_n равенъ нулю.

4. Установивъ такимъ образомъ сходимость рядовъ (4), мы можемъ, по § 122, найти значенiя ихъ суммъ при $r = 1$, приближая въ лѣвыхъ частяхъ r къ 1. При этомъ получаемъ:

$$\sqrt{1 + 2r\cos\vartheta + r^2} = \sqrt{2(1+\cos\vartheta)} = 2\cos\frac{\vartheta}{2},$$

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{r\sin\vartheta}{1 + r\cos\vartheta} = \operatorname{arc\,tg}\frac{\sin\vartheta}{1+\cos\vartheta} = \operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\right) = \frac{\vartheta}{2}\cdot$$

Въ этихъ равенствахъ $-\pi < \vartheta < +\pi$ и, слѣдовательно, $\cos\frac{\vartheta}{2}$ есть положительное число, а $\frac{1}{2}\vartheta$ содержится между $-\frac{1}{2}\pi$ и $+\frac{1}{2}\pi$.

Такимъ образомъ мы изъ равенствъ (4) получаемъ разложенія:

$$
\begin{aligned}
\ln\left(2\cos\frac{\vartheta}{2}\right) &= \cos\vartheta - \frac{1}{2}\cos 2\vartheta + \frac{1}{3}\cos 3\vartheta - \frac{1}{4}\cos 4\vartheta + \ldots, \\
\frac{\vartheta}{2} &= \sin\vartheta - \frac{1}{2}\sin 2\vartheta + \frac{1}{3}\sin 3\vartheta - \frac{1}{4}\sin 4\vartheta + \ldots.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Въ случаѣ $\vartheta = \pi$, который мы исключили, первый изъ этихъ рядовъ перестаетъ быть сходящимся и вмѣстѣ съ тѣмъ правая часть становится безконечной. Второй рядъ еще сохраняетъ сходимость, но сумма его равна нулю, а не $\frac{1}{2}\pi$.

5. Положивъ во второмъ изъ равенствъ (8) $\vartheta = x$ и $\vartheta = \pi - x$, мы получимъ два равенства:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}x &= \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \ldots, \\
\frac{\pi - x}{2} &= \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{4}\sin 4x + \ldots,
\end{aligned} \tag{9}
$$

изъ коихъ первое имѣетъ мѣсто въ интервалѣ

$$
-\pi < x < +\pi. \tag{10}
$$

а второе — въ интервалѣ

$$
0 < x < 2\pi,
$$

Такимъ образомъ, оба равенства сохраняются въ общей области

$$
0 < x < \pi. \tag{11}
$$

Складывая эти равенства, получимъ для этого интервала

$$
\frac{\pi}{4} = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x + \ldots, \tag{12}
$$

и здѣсь мы приходимъ къ тому замѣчательному результату, что рядъ, который находится въ правой части и члены котораго суть непрерывныя функціи отъ x, имѣетъ сумму, не зависящую отъ x.

6. О природѣ этихъ рядовъ можно себѣ составить наглядное геометрическое представленіе.

Положимъ

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \ldots, \\
\varphi(x) &= \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x + \ldots,
\end{aligned} \tag{13}
$$

Такъ какъ ряды въ правыхъ частяхъ этихъ равенствъ сходятся не только въ интервалахъ (10) и (11), но при всѣхъ значеніяхъ x, то равенствами (13) опредѣляются двѣ функціи отъ x, значенія которыхъ въ интервалѣ (11) опредѣляются формулами (9) и (12).

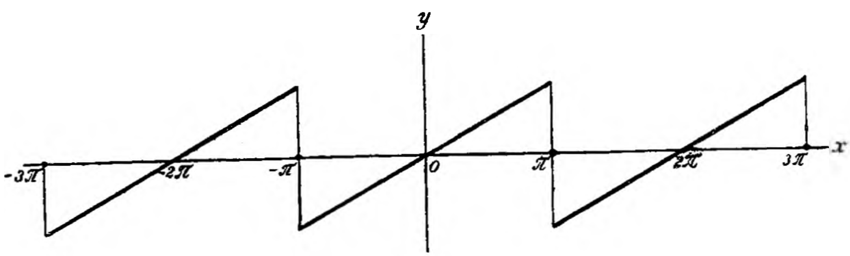
Но при всякомъ цѣломъ n

$$\sin(-nx) = -\sin nx, \quad \sin n(x + 2\pi) = \sin nx,$$

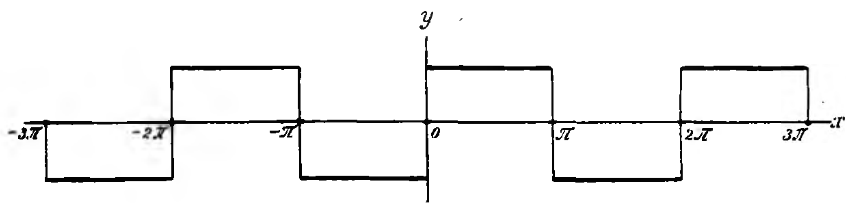
и, слѣдовательно, функціи $f(x)$, $\varphi(x)$ удовлетворяютъ условіямъ

$$f(-x) = -f(x), \quad \varphi(-x) = -\varphi(x),$$

$$f(x + 2\pi) = f(x), \quad \varphi(x + 2\pi) = \varphi(x).$$



Фиг. 28.



Фиг. 29.

Сверхъ того,

$$f(0) = 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad f(\pi) = 0, \quad \varphi(\pi) = 0$$

и

$$f(x) = \frac{1}{2}x, \quad \varphi(x) = \frac{\pi}{4}, \quad 0 < x < \pi.$$

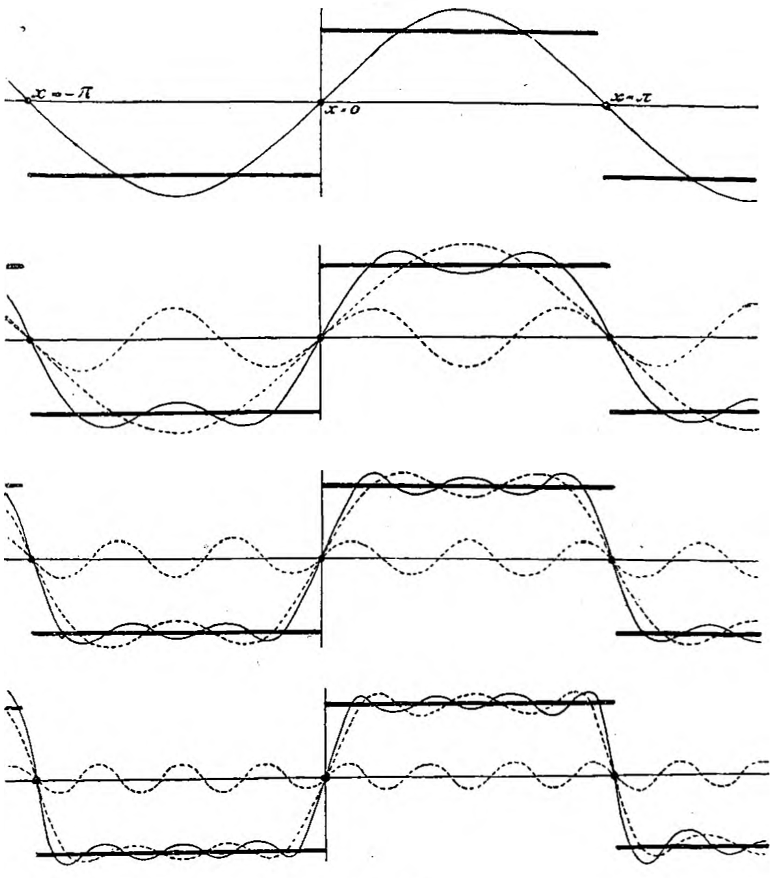
Такимъ образомъ, функціи $f(x)$ и $\varphi(x)$ опредѣлены при всѣхъ значеніяхъ x.

Если станемъ наносить значенія x, какъ абсциссы, а значенія

$$y = f(x) \quad \text{или} \quad y = \varphi(x),$$

какъ соотвѣтствующія ординаты, то мы получимъ, какъ и въ § 102, графическія представленія этихъ функцій, которыя даны для функціи $f(x)$ на фиг. 28, а для функціи $\varphi(x)$ на фиг. 29.

Ясно, что $f(x)$ и $\varphi(x)$ суть **разрывныя функціи**, хотя члены рядовъ, которыми онѣ опредѣлены, суть **непрерывныя функціи**.



Фиг. 30.

Ясное представленіе о происхожденіи такихъ разрывовъ дается фигурой 30, въ четырехъ частяхъ которой сплошными линіями представлены кривыя, выражаемыя уравненіями

$$y = \sin x, \quad y = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x, \quad y = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x,$$

$$y = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x;$$

пунктирными же кривыми представлены отдѣльные члены этихъ суммъ.

Всѣ эти кривыя проходятъ черезъ точки 0, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, . . .; каждая изъ нихъ въ этихъ точкахъ поднимается круче, чѣмъ предшествующая, и, волнообразно изгибаясь, весьма замѣтно приближается къ образцу, представленному на фиг. 29 *).

Эти ряды суть частные случаи разложенiй, извѣстныхъ подъ именемъ **рядовъ Фурье** и имѣющихъ частое примѣненiе въ математической физикѣ.

*) Фигуры этого рода изготовлены подъ руководствомъ Ф. Клейна (F. Klein) въ большомъ масштабѣ и разнообразныхъ видахъ. Фигура 30 заимствована изъ сочиненiя W. E. Byerly „An elementary treatise on Fouriers series" (Boston 1893) и находится также въ сочиненiи R. Fricke „Analytisch-funktionentheoretische Vorlesungen" (Leipzig 1900).

ГЛАВА XXVI.

Безконечныя произведенія.

---

§ 136. Сходимость безконечнаго произведенія.

1. Нѣкоторыя функціи, особенно тригонометрическія, можно представлять не только въ видѣ безконечныхъ рядовъ, но также въ формѣ безконечныхъ произведеній. Вопросъ о сходимости такихъ произведеній можно привести къ вопросу о сходимости безконечнаго ряда, ибо, взявъ логариѳмъ такого произведенія, мы получимъ безконечный рядъ, члены котораго суть логариѳмы множителей. Если рядъ этихъ логариѳмовъ сходится, то сходится также и безконечное произведеніе. Но если сумма логариѳмовъ стремится къ отрицательной безконечности, то произведеніе также сходится и именно — имѣетъ предѣломъ нуль. Мы изслѣдуемъ поэтому самыя произведенія и рѣшимъ вопросъ: могутъ ли они стремиться къ конечному предѣлу, отличному отъ нуля? Мы предпосылаемъ вспомогательную теорему.

2. Лемма. Если $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$ есть рядъ положительныхъ правильныхъ дробей и

$$Q_n = (1 - q_1)(1 - q_2) \ldots (1 - q_n),$$

то

$$1 > Q_n > 1 - (q_1 + q_2 + \cdots + q_n). \tag{1}$$

Что $Q_n < 1$, слѣдуетъ прямо изъ того, что всѣ множители $1 - q_1$, $1 - q_2, \ldots$ суть положительныя правильныя дроби. При $n = 2$ произведеніе Q_2 будетъ, очевидно, больше, чѣмъ $1 - q_1 - q_2$. Такимъ образомъ, при $n = 2$ неравенство (1) вѣрно. Мы считаемъ его поэтому доказаннымъ для нѣкотораго n и составляемъ

$$Q_{n+1} = Q_n(1 - q_{n+1}) > 1 - (q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_{n+1}) +$$
$$+ q_1 q_{n+1} + q_2 q_{n+1} + \cdots + q_n q_{n+1}.$$

Но $q_1 q_{n+1} + q_2 q_{n+1} + \cdots + q_n q_{n+1}$ есть положительное число, а потому

$$Q_{n+1} > 1 - (q_1 + q_2 + \cdots + q_{n+1}),$$

чѣмъ справедливость неравенства (1) доказана вообще.

3. Пусть положительныя правильныя дроби $q_1, q_2, q_3, q_4, \ldots$ образуютъ безконечный рядъ, сумма котораго

$$q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_n \tag{2}$$

сходится и при безконечномъ возрастанiи n имѣетъ опредѣленный предѣлъ g, который мы сперва будемъ считать правильной дробью; какъ бы велико ни было n, число Q_n будетъ, согласно леммѣ, больше, чѣмъ $1 - g$. Съ другой стороны, значенiя Q_n съ возрастанiемъ n постоянно убываютъ, такъ какъ $1 - q_{n+1}$ есть правильная дробь, и потому

$$Q_{n+1} = Q_n(1 - q_{n+1}) < Q_n.$$

Числа Q_n имѣютъ поэтому опредѣленную нижнюю границу Q и при любомъ n будетъ

$$Q_n > Q, \quad \lim_{n=\infty} Q_n = Q.$$

Въ этомъ случаѣ Q_n называется безконечнымъ сходящимся произведенiемъ, при чемъ, подобно тому, какъ это дѣлается въ рядахъ, пишутъ:

$$Q = (1 - q_1)(1 - q_2)(1 - q_3) \ldots \tag{3}$$

4. Разсматривая произведенiе

$$P_n = (1 + q_1)(1 + q_2) \ldots (1 + q_n) > 1,$$

при тѣхъ же предположенiяхъ относительно величинъ $q_1, q_2, q_3, \ldots$, мы получимъ путемъ умноженiя

$$P_n Q_n = (1 - q_1^2)(1 - q_2^2) \ldots (1 - q_n^2) < 1.$$

Слѣдовательно,

$$1 < P_n < \frac{1}{Q_n} < \frac{1}{Q},$$

и числа P_n имѣютъ поэтому верхнюю границу P:

$$\lim P_n = P.$$

Сообразно съ этимъ,

$$P = (1 + q_1)(1 + q_2)(1 + q_3) \ldots \tag{4}$$

есть сходящееся безконечное произведенiе.

Предположенiе, что предѣлъ суммы (2) меньше 1, можно уже опустить. Въ самомъ дѣлѣ, если сумма (2) сходится, то можно выбрать индексъ ν настолько большимъ, чтобы сумма

$$q_{\nu+1} + q_{\nu+2} + q_{\nu+3} + \cdots$$

была правильной дробью. Тогда, согласно доказанному выше, будутъ сходиться оба произведенiя

$$(1 - q_{\nu+1})(1 - q_{\nu+2})(1 - q_{\nu+3}) \ldots,$$
$$(1 + q_{\nu+1})(1 + q_{\nu+2})(1 + q_{\nu+3}) \ldots,$$

отъ которыхъ P и Q отличаются только конечными множителями

$$(1 - q_1)(1 - q_2) \ldots (1 - q_\nu),$$
$$(1 + q_1)(1 + q_2) \ldots (1 + q_\nu).$$

Въ виду этого имѣетъ мѣсто теорема:

Если $q_1, q_2, q_3, \ldots$ суть произвольныя положительныя или отрицательныя числа и если рядъ (2) сходится абсолютно, то безконечное произведенiе Q сходится и обращается въ нуль только въ томъ случаѣ, если какое-либо изъ чиселъ q равно 1.

Въ самомъ дѣлѣ, соединивъ въ одну группу множители съ положительными q и въ другую группу множители съ отрицательными q, мы получимъ одно произведенiе вида (3) и другое произведенiе вида (4), изъ коихъ каждое сходится въ отдѣльности.

5. Для произведенiя Q легко вывести тотъ же общiй признакъ сходимости, какой въ п. 3 § 120-го былъ установленъ для безконечныхъ рядовъ, а именно:

Если обозначимъ черезъ $R_{n,m}$ произведенiе

$$R_{n,m} = (1 - q_{n+1})(1 - q_{n+2}) \ldots (1 - q_{n+m}),$$

то произведенiе Q будетъ сходиться, когда произведенiе $R_{n,m}$ можетъ стать сколь угодно близкимъ къ единицѣ, какъ только каждое изъ двухъ чиселъ n и $n+m$ станетъ больше нѣкотораго достаточно большого числа N.

Доказательство легко получить изъ § 120-го, опираясь на то, что логариѳмъ абсолютной величины произведенiя Q равенъ суммѣ логариѳмовъ абсолютныхъ величинъ отдѣльныхъ множителей.

§ 137. Преобразованіе синуса въ безконечное произведеніе.

1. Примѣняя Ньютоновъ биномъ къ формулѣ Муавра

$$\cos ny + i \sin ny = (\cos y + i \sin y)^n$$

при цѣломъ и положительномъ n, находимъ:

$$(\cos y + i \sin y)^n = \cos^n y + iB_1^{(n)} \cos^{n-1} y \sin y - B_2^{(n)} \cos^{n-2} y \sin^2 y - iB_3^{(n)} \cos^{n-3} y \sin^3 y + \cdots,$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} \cos ny &= \cos^n y - B_2^{(n)} \cos^{n-2} y \sin^2 y + B_4^{(n)} \cos^{n-4} y \sin^4 y - \cdots, \\ \frac{\sin ny}{\sin y} &= B_1^{(n)} \cos^{n-1} y - B_3^{(n)} \cos^{n-3} y \sin^2 y + B_5^{(n)} \cos^{n-5} y \sin^4 y - \cdots \end{aligned}\right| \quad (1)$$

Если положимъ для краткости

$$z = \sin^2 y, \quad 1 - z = \cos^2 y$$

и допустимъ, что $n = 2m+1$ есть нечетное число, то $\cos^{n-1} y$, $\cos^{n-3} y$, $\cos^{n-5} y$, ... будутъ цѣлыми функціями отъ z степеней m, $m-1$, $m-2$, ..., и второе изъ равенствъ (1) дастъ намъ:

$$\frac{\sin ny}{\sin y} = F(z),$$

гдѣ $F(z)$ означаетъ цѣлую функцію отъ z степени m.

Если же мы знаемъ корни $z_1, z_2, \ldots, z_m$ функціи $F(z)$, то, согласно п. 9 § 66-го, можно положить

$$\frac{\sin ny}{\sin y} = a_0 (z_1 - z)(z_2 - z) \ldots (z_m - z),$$

гдѣ a_0 не зависитъ отъ z. Для опредѣленія числа a_0 положимъ $y = 0$: тогда $z = 0$, и, согласно равенству (1), $\sin ny : \sin y = n$; слѣдовательно,

$$a_0 z_1 z_2 \ldots z_m = n;$$

поэтому

$$\sin ny = n \sin y \left(1 - \frac{z}{z_1}\right)\left(1 - \frac{z}{z_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{z}{z_m}\right). \quad (2)$$

Но если y отлично отъ нуля, то $\sin ny$ обращается въ нуль въ томъ и только въ томъ случаѣ, когда ny есть кратное числа π; слѣдовательно, всѣ корни функціи $F(z)$ имѣютъ видъ

$$z_h = \left(\sin\frac{h\pi}{n}\right)^2, \tag{3}$$

гдѣ h есть цѣлое число [1]); но $h = 0$ не даетъ намъ корня функціи $F(z)$, ибо $F(0) = n$; сверхъ того,

$$z_h = z_{-h}, \quad z_h = z_{n-h}, \quad z_h = z_{n+h},$$

и мы получимъ, поэтому, всѣ различныя значенія z_h, положивъ въ равенствѣ (3) $h = 1, 2, 3, \ldots, m$.

2. Положивъ $ny = x$, мы найдемъ изъ равенства (2):

$$\sin x = n\sin\frac{x}{n}\left(1-\frac{z}{z_1}\right)\left(1-\frac{z}{z_2}\right)\cdots\left(1-\frac{z}{z_m}\right), \tag{4}$$

гдѣ

$$z = \left(\sin\frac{x}{n}\right)^2, \quad z_h = \left(\sin\frac{h\pi}{n}\right)^2.$$

Если дадимъ x опредѣленное значеніе и станемъ увеличивать n до безконечности, то по п. 2 § 127-го получимъ:

$$\operatorname{Lim} n\sin\frac{x}{n} = x \;{}^{2}), \quad \operatorname{Lim}\frac{z}{z_h} = \frac{x^2}{h^2\pi^2}.$$

Число множителей въ произведеніи (4) возрастаетъ при этомъ до безконечности, и мы получаемъ:

$$\sin x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{16\pi^2}\right)\cdots \tag{5}$$

---

[1]) Въ самомъ дѣлѣ, лѣвая часть равенства

$$\frac{\sin ny}{\sin y} = F(z) = F(\sin^2 y)$$

обращается въ нуль при $ny = h\pi$, т. е. при $y = \frac{h\pi}{n}$; слѣдовательно, и правая часть обращается въ нуль при тѣхъ же значеніяхъ y.

[2]) Ибо $n\sin\frac{x}{n} = x\cdot\dfrac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}$.

Такимъ образомъ, $\sin x$ выражается безконечнымъ произведенiемъ, которое несомнѣнно сходится. Въ самомъ дѣлѣ, если положить

$$q_h = \frac{x^2}{h^2\pi^2},$$

то

$$\sum q_h = \frac{x^2}{\pi^2}\sum^h \frac{1}{h^2},$$

и рядъ $\sum^h \frac{1}{h^2}$ сходится по п. 3 § 117-го, а потому произведенiе

$$\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{16\pi^2}\right)\cdots$$

сходится по п. 4 § 136-го.

3. Однако же правильность формулы (5) этимъ еще не доказана, ибо въ дальнѣйшихъ множителяхъ произведенiя (4) число h въ выраженiи $\sin\frac{h\pi}{n}$ становится безконечнымъ вмѣстѣ съ n, а потому нельзя безъ дальнѣйшихъ оговорокъ замѣнять въ этихъ множителяхъ синусъ дугою. Чтобы пополнить доказательство, мы полагаемъ:

$$Q(x) = \left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots,$$

$$Q_k(x) = \left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right),$$

$$R_k(x) = \left(1-\frac{x^2}{(k+1)^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(k+2)^2\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{m^2\pi^2}\right),$$

при чемъ, въ виду сходимости произведенiя $Q(x)$, произведенiе $R_k(x)$ становится сколь угодно близкимъ къ единицѣ, когда числа k и m дѣлаются достаточно большими.

Пусть теперь будетъ

$$Q_k'(x) = \left(1-\frac{z}{z_1}\right)\left(1-\frac{z}{z_2}\right)\cdots\left(1-\frac{z}{z_k}\right),$$

$$R_k'(x) = \left(1-\frac{z}{z_{k+1}}\right)\left(1-\frac{z}{z_{k+2}}\right)\cdots\left(1-\frac{z}{z_m}\right).$$

Если мы дадимъ сначала k опредѣленное значенiе и станемъ учеличивать n до безконечности, а затѣмъ станемъ также увеличивать k до безконечности, то получимъ

$$\lim_{n=\infty} Q'_k = Q_k, \quad \lim_{k=\infty} Q_k = Q. \tag{6}$$

4. Но, согласно соотношенію (1) § 127-го,

$$\sin\alpha < \alpha,$$

и легко можно показать, что

$$\sin\alpha > \tfrac{1}{2}\alpha,$$

когда α содержится между 0 и $\pi/2$. Въ самомъ дѣлѣ, согласно равенству (11) § 127-го,

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \left(1 - \frac{\alpha^2}{6}\right) + \frac{\alpha^4}{5!}\left(1 - \frac{\alpha^2}{6.7}\right) + \frac{\alpha^6}{7!}\left(1 - \frac{\alpha^2}{8.9}\right) + \cdots;$$

при $\alpha < \frac{1}{2}\pi$ будетъ:

$$1 - \frac{\alpha^2}{6} > 1 - \frac{\pi^2}{24} > \frac{1}{2},$$

$$1 - \frac{\alpha^2}{6.7} > 0, \quad 1 - \frac{\alpha^2}{8.9} > 0, \ \ldots,$$

а потому $\sin\alpha > \frac{1}{2}\alpha$. Сообразно съ этимъ, при $h < \frac{1}{2}n$ имѣемъ [3]):

$$\sin\frac{x}{n} < \frac{x}{n}, \quad \sin\frac{h\pi}{n} > \frac{h\pi}{2n};$$

слѣдовательно,

$$\frac{\sin\dfrac{x}{n}}{\sin\dfrac{h\pi}{n}} < \frac{2x}{h\pi};$$

поэтому,

$$1 - \frac{z}{z_h} > 1 - \frac{4x^2}{h^2\pi^2}.$$

Такимъ образомъ,

$$R'_k(x) > \left(1 - \frac{4x^2}{(k+1)^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{(k+2)^2\pi^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{4x^2}{m^2\pi^2}\right),$$

такъ что

$$1 > R'_k(x) > R_k(2x). \tag{7}$$

---

[3]) Полагая во второмъ неравенствѣ $\alpha = \dfrac{h\pi}{n}$.

Отсюда вытекаетъ, что выраженіе $R_k'(x)$ будетъ сколь угодно близко къ единицѣ, если взять числа k и n достаточно большими, а изъ точнаго равенства (4):

$$\sin x = n \sin \frac{x}{n} Q_k'(x) R_k'(x)'$$

и изъ соотношеній (6) и (7) слѣдуетъ, что $Q_k(x)$ можно сдѣлать сколь угодно близкимъ къ $\sin x : x$, взявъ числа k и n достаточно большими. Но при достаточно большомъ k выраженіе $Q_k(x)$ становится сколь угодно близкимъ къ $Q(x)$, а отсюда слѣдуетъ, что

$$\frac{\sin x}{x} = Q(x),$$

чѣмъ равенство (5) и доказано.

5. Положивъ въ равенствѣ (5) $x = \frac{1}{2}\pi$ и, слѣдовательно, $\sin x = 1$, мы получимъ число π въ видѣ произведенія безконечнаго ряда чиселъ. Прежде всего находимъ:

$$1 = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right)\left(1 - \frac{1}{36}\right) \cdots$$

Въ правой части всѣ множители, за исключеніемъ множителя $\pi/2$, имѣютъ форму

$$1 - \frac{1}{4n^2} = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)\left(1 + \frac{1}{2n}\right) = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n},$$

и если мы обѣ части помножимъ на выраженіе, обратное произведенію всѣхъ множителей этого вида, то получимъ:

$$\frac{\pi}{2} = \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1},$$

что можно представить и такъ:

$$\frac{\pi}{2} = \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \frac{2^2 . 4^2 . 6^2 \ldots (2n)^2}{3^2 . 5^2 . 7^2 \ldots (2n-1)^2} \frac{1}{2n+1}, \tag{8}$$

а такъ какъ дробь $2n : (2n+1)$ имѣетъ предѣлъ 1, то будетъ также:

$$\frac{\pi}{2} = \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \frac{2^2 . 4^2 . 6^2 \ldots (2n-2)^2}{3^2 . 5^2 . 7^2 \ldots (2n-1)^2} 2n.$$

Это выраженіе извѣстно подъ именемъ Валлисова числа *).

Дѣля обѣ части равенства (8) на $\frac{1}{2}\pi$, извлекая корень и принимая во вниманіе, что при безконечномъ n можно замѣнить $\frac{1}{2}(2n+1)$ черезъ n, мы получаемъ:

$$\lim_{n=\infty} \frac{2.4.6\ldots 2n}{3.5.7\ldots(2n-1)} \frac{1}{\sqrt{n\pi}} = 1,$$

или же, помножая числителя и знаменателя дроби на

$$2.4.6\ldots 2n = 2^n . n!,$$

находимъ:

$$\lim_{n=\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n\pi}} = 1. \tag{9}$$

§ 138. Безконечное произведеніе для косинуса.

1. Въ формулѣ (5) функція $\sin x$ разложена ближайшимъ образомъ не на линейные, а на квадратные множители, которые, по формулѣ $1-a^2=(1-a)(1+a)$, немедленно разлагаются на линейные множители, и тогда функція $\sin x$, подобно цѣлой раціональной функціи, разложена на линейные множители, изъ коихъ тотчасъ усматриваются ея „корни“, т. е. тѣ значенія x, для которыхъ $\sin x$ исчезаетъ. Различіе состоитъ только въ томъ, что число множителей безконечно.

Такимъ образомъ, $\sin x$ представляется, какъ предѣлъ произведенія

$$\begin{aligned} x\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{n\pi}\right) \times \\ \left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n\pi}\right) \end{aligned} \tag{1}$$

для безгранично возрастающаго n.

Оба произведенія

$$\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{n\pi}\right)$$

и

$$\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n\pi}\right)$$

*) John Wallis (1616—1703), сперва теологъ, а съ 1649 г. профессоръ математики въ Оксфордѣ. Формула

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3.3.5.5.7.7\ldots}{2.4.4.6.6.8\ldots}$$

имѣется въ книгѣ „Arithmetica Infinitorum“, напечатанной въ 1655 г.

не сходятся каждое въ отдѣльности, такъ какъ рядъ

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n},$$

согласно § 117, не сходится. Сходимость же обусловливается именно указанной выше связью этихъ произведеній.

2. Пользуясь формулой

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right),$$

можно вывести подобное же разложеніе для $\cos x$.

Если въ произведеніи (1) замѣнимъ x на $\frac{1}{2}\pi - x$, то получимъ:

$$\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{\pi}\right)\left(\frac{3}{4}+\frac{x}{2\pi}\right)\cdots\left(\frac{2n-1}{2n}+\frac{x}{n\pi}\right)\times$$
$$\left(\frac{3}{2}-\frac{x}{\pi}\right)\left(\frac{5}{4}-\frac{x}{2\pi}\right)\cdots\left(\frac{2n+1}{2n}-\frac{x}{n\pi}\right),$$

или

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n}\times \tag{2}$$
$$\left(1-\frac{2x}{\pi}\right)\left(1+\frac{2x}{\pi}\right)\left(1+\frac{2x}{3\pi}\right)\cdots\left(1+\frac{2x}{(2n-1)\pi}\right)\times$$
$$\left(1-\frac{2x}{3\pi}\right)\left(1-\frac{2x}{5\pi}\right)\cdots\left(1-\frac{2x}{(2n+1)\pi}\right).$$

Множитель

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n}$$

имѣетъ, согласно п. 5 § 137-го, предѣлъ 1. Остальные множители выраженія (2) можно соединить слѣдующимъ образомъ:

$$\left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{2x}{(2n+1)\pi}\right).$$

Если мы здѣсь станемъ увеличивать n до безконечности, то послѣдній множитель $1-\dfrac{2x}{(2n+1)\pi}$ будетъ приближаться къ предѣлу 1, и мы получимъ такимъ образомъ безконечное произведеніе для косинуса:

$$\cos x = \left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\cdots, \tag{3}$$

откуда опять непосредственно усматриваются корни функціи $\cos x$, а именно: $x = \frac{(2n-1)\pi}{2}$.

Можно было бы получить это произведеніе и такимъ путемъ, какимъ было найдено произведеніе для $\sin x$.

§ 139. Бернулліевы числа.

1. Если мы станемъ сравнивать другъ съ другомъ оба разложенія $\sin x$ въ безконечный рядъ и въ безконечное произведеніе и доведемъ аналогію между цѣлой раціональной функціей и функціей $\sin x$ до того, что станемъ вычислять суммы одинаковыхъ степеней корней послѣдней, то получимъ весьма замѣчательные результаты.

Раскрывъ скобки въ произведеніи

$$Q_n = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right),$$

получимъ:

$$Q_n = 1 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \cdots + a_n x^{2n}, \tag{1}$$

гдѣ

$$-a_1,\ +a_2,\ -a_3,\ +a_4,\ \ldots,\ (-1)^n a_n$$

суть основныя симметрическія функціи отъ величинъ

$$\frac{1}{\pi^2},\ \frac{1}{4\pi^2},\ \frac{1}{9\pi^2},\ \ldots,\ \frac{1}{n^2\pi^2}, \tag{2}$$

т. е. суммы ихъ произведеній по два, по три и т. д.

Если же положить

$$S_h^{(n)} = \frac{1}{1^{2h}} + \frac{1}{2^{2h}} + \frac{1}{3^{2h}} + \cdots + \frac{1}{n^{2h}},$$

то

$$s_1 = \frac{1}{\pi^2} S_1^{(n)},\quad s_2 = \frac{1}{\pi^4} S_2^{(n)},\ \ldots,\quad s_n = \frac{1}{\pi^{2n}} S_n^{(n)}$$

будутъ суммами одинаковыхъ степеней величинъ (2), при чемъ, согласно равенствамъ (6) § 71-го, имѣютъ мѣсто слѣдующія соотношенія:

$$\begin{aligned}
&S_1^{(n)} + \pi^2 a_1 = 0,\\
&S_2^{(n)} + \pi^2 a_1 S_1^{(n)} + 2\pi^4 a_2 = 0,\\
&S_3^{(n)} + \pi^2 a_1 S_2^{(n)} + \pi^4 a_2 S_1^{(n)} + 3\pi^6 a_3 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{3}$$

2. Если теперь увеличивать n до безконечности, то Q_n перейдетъ въ выраженіе $\sin x : x$, для котораго мы, согласно равенству (11) § 127-го имѣемъ слѣдующее разложеніе въ рядъ:

$$Q = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots,$$

а потому

$$\begin{aligned} \operatorname{Lim} a_1 &= -\frac{1}{3!}, \\ \operatorname{Lim} a_2 &= \frac{1}{5!}, \\ \operatorname{Lim} a_3 &= -\frac{1}{7!}, \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{4}$$

Съ другой стороны, суммы $S_h^{(n)}$ преобразуются въ безконечные ряды

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots, \\ S_2 &= \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots, \\ S_3 &= \frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \cdots, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{5}$$

которые, какъ мы видѣли въ п. 3 § 117-го, всѣ сходятся и имѣютъ поэтому опредѣленныя числовыя значенія. Эти послѣднія можно опредѣлить, увеличивая n до безконечности также въ равенствахъ (3). При этомъ, согласно соотношеніямъ (4) и (5), получаемъ:

$$\begin{aligned} S_1 - \frac{\pi^2}{3!} &= 0, \\ S_2 - \frac{\pi^2 S_1}{3!} + \frac{2\pi^4}{5!} &= 0, \\ S_3 - \frac{\pi^2 S_2}{3!} + \frac{\pi^4 S_1}{5!} - \frac{3\pi^6}{7!} &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{6}$$

откуда можно послѣдовательно опредѣлять суммы S_1, S_2, S_3, ... Мы получимъ, напримѣръ:

$$
\left.
\begin{aligned}
S_1 &= \frac{\pi^2}{6}, \\
S_2 &= \frac{\pi^4}{90}, \\
S_3 &= \frac{\pi^6}{945}, \\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right\} \tag{7}
$$

Мы опредѣлимъ теперь систему чиселъ B_n, называемыхъ **бернулліевыми числами**, равенствомъ

$$
B_n = \frac{2 \, . \, (2n)!}{(2\pi)^{2n}} S_n, \tag{8}
$$

такъ что въ простѣйшихъ случаяхъ получимъ:

$$
B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42}.
$$

Какъ видимъ, B_1, B_2, B_3, ... суть **раціональныя** числа; они сначала убываютъ съ возрастаніемъ индекса, но затѣмъ чрезвычайно быстро возрастаютъ до безконечности. Таблица этихъ чиселъ до числа B_{62} была вычислена Адамсомъ (Adams) (Журналъ Крелля, т. 85, 1878). Приведемъ для примѣра первыя 7 изъ этихъ чиселъ:

$$
\frac{1}{6}, \quad \frac{1}{30}, \quad \frac{1}{42}, \quad \frac{1}{30}, \quad \frac{5}{66}, \quad \frac{691}{2730}, \quad \frac{7}{6}.
$$

Число B_{62} имѣетъ знаменатель, равный 30, и числитель, содержащій 110 цифръ *).

---

*) Эти числа встрѣчаются впервые въ посмертномъ сочиненіи Якова Бернулли „Ars conjectandi", которое было издано племянникомъ автора Николаемъ I. Бернулли въ 1713 г. (Нѣмецкій переводъ съ примѣчаніями Haussner'а изданъ въ „Ostwald's Klassiker", Heft 107, 108, S. 99 первой части).

Архимедъ хотѣлъ вычислить число песчинокъ, помѣщающихся въ шарѣ, котораго радіусъ равенъ радіусу вселенной. Если вмѣсто песчинокъ мы возьмемъ тѣльца, каковы, напримѣръ, по новѣйшимъ воззрѣніямъ, электроны, число которыхъ въ одномъ кубическомъ миллиметрѣ равно 10^{31}, а за вселенную примемъ шаръ, радіусъ котораго равенъ удаленію Сиріуса, т. е. 10^{15} километрамъ, то количество этихъ тѣлецъ выразится числомъ, содержащимъ всего 95 знаковъ. Мы должны были бы умножить еще это число на сто билліоновъ, чтобы получить число одного порядка съ 62-мъ бернулліевымъ числомъ.

3. Съ бернулліевыми числами приходится встрѣчаться при обратномъ разложеніи безконечныхъ произведеній въ безконечные ряды. Мы приведемъ примѣръ такого разложенія. Взявъ натуральные логариѳмы обѣихъ частей равенства (3) § 138-го, мы получаемъ:

$$\ln\cos x = \sum^{\nu} \ln\left(1 - \left(\frac{2x}{\nu\pi}\right)^2\right),$$

гдѣ ν принимаетъ значенія, равныя членамъ ряда положительныхъ нечетныхъ чиселъ. При $x < \frac{1}{2}\pi$ всѣ логариѳмы въ правой части можно разложить въ степенные ряды, при чемъ, согласно равенству (8) § 132-го, находимъ:

$$-\ln\left(1 - \left(\frac{2x}{\nu\pi}\right)^2\right) = \sum^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{2x}{\nu\pi}\right)^{2n},$$

гдѣ n пробѣгаетъ рядъ натуральныхъ чиселъ. Взявъ сумму всѣхъ этихъ выраженій и соединивъ въ одинъ всѣ тѣ члены, которые помножаются на одну и ту же степень числа x, найдемъ:

$$-\ln\cos x = \sum^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{2x}{\pi}\right)^{2n} \sum^{\nu} \frac{1}{\nu^{2n}}.$$

Но если мы изъ всего ряда натуральныхъ чиселъ m выдѣлимъ рядъ четныхъ чиселъ $2m$, то останется рядъ нечетныхъ чиселъ ν. Поэтому

$$\sum^{\nu} \frac{1}{\nu^{2n}} = \sum^{m} \frac{1}{m^{2n}} - \sum^{m} \frac{1}{(2m)^{2n}},$$

или, согласно обозначеніямъ (5) и (8),

$$\sum^{\nu} \frac{1}{\nu^{2n}} = \frac{2^{2n}-1}{2^{2n}} S_n = \frac{(2^{2n}-1)\pi^{2n}}{2\,.\,(2n)!} B_n,$$

такъ что

$$-\ln\cos x = \sum^{n} \frac{(2x)^{2n}}{2n} \frac{2^{2n}-1}{(2n)!} B_n. \tag{9}$$

Какъ уже было замѣчено, этотъ рядъ сходится, пока $x < \frac{1}{2}\pi$. Можно получить еще много такихъ рядовъ и къ нимъ принадлежатъ ряды, въ которые разлагаются тригонометрическія функціи $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$. Для вывода этихъ разложеній цѣлесообразнѣе пользоваться правилами дифференціальнаго исчисленія. Примѣромъ можетъ служить рядъ

$$\operatorname{tg} x = \sum^{n} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!} B_n x^{2n-1}, \tag{10}$$

который легко получить, взявъ въ равенствѣ (9) производныя отъ обѣихъ частей. (Ср. ниже § 148).

4. Эти ряды можно также получить съ помощью метода неопредѣленныхъ коэффиціентовъ.

Разсмотримъ, напримѣръ, функцію $\operatorname{tg} x$ и допустимъ, что она развернута въ степенной рядъ

$$\operatorname{tg} x = a_1 x + a_2 x^3 + a_3 x^5 + a_4 x^7 + \cdots; \tag{11}$$

въ виду нечетности функціи $\operatorname{tg} x$ рядъ (11) содержитъ только нечетныя степени перемѣннаго x. Если мы умножимъ этотъ рядъ по правилу п. 5 § 125-го на рядъ

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots,$$

то произведеніе, въ виду равенства $\cos x \cdot \operatorname{tg} x = \sin x$, будетъ представлять собою рядъ (§ 127, (9))

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Сравнивая коэффиціенты обоихъ рядовъ, найдемъ для вычисленія количествъ a_1, a_2, a_3, ... слѣдующія рекуррентныя формулы:

$$\begin{aligned} &a_1 - 1 = 0, \\ &a_2 - \frac{a_1}{2!} + \frac{1}{3!} = 0, \\ &a_3 - \frac{a_2}{2!} + \frac{a_4}{4!} - \frac{1}{5!} = 0, \\ &a_4 - \frac{a_3}{2!} + \frac{a_2}{4!} - \frac{a_1}{6!} + \frac{1}{7!} = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{12}$$

что, въ согласіи съ равенствомъ (10), даетъ:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{3}, \quad a_3 = \frac{2}{15}, \quad a_4 = \frac{17}{315}, \ldots$$

Если же взять выраженія для коэффиціентовъ a_ν изъ ряда (10), то формулы (12) дадутъ для опредѣленія бернулліевыхъ чиселъ рекуррентныя формулы, не совпадающія съ формулами (6).

5. Мы уже раньше видѣли, что съ безконечнымъ возрастаніемъ n число $n!$ возрастаетъ быстрѣе, чѣмъ n-ая степень какого угодно произвольно большого числа (§ 52, 2). Въ Валлисовомъ числѣ мы имѣемъ вспомогательное средство для болѣе точнаго опредѣленія характера этого возрастанія *).

Мы исходимъ изъ формулы (§ 137, (9)):

$$\lim_{n=\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n\pi}} = 1. \tag{13}$$

Положивъ

$$\varphi(n) = \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}, \quad \varphi(2n) = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}n^{2n+\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}}, \tag{14}$$

находимъ:

$$\frac{\varphi(n)^2}{\varphi(2n)} = \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n\pi}},$$

и, слѣдовательно, согласно соотношенію (13),

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varphi(n)^2}{\varphi(2n)} = 1. \tag{15}$$

Съ другой стороны,

$$\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} = \frac{n!}{(n+1)!}\,\frac{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}.$$

Если же взять отъ обѣихъ частей натуральные логариѳмы, то выйдетъ:

$$\ln\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Но, согласно равенству (7) § 132-го,

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4} + \frac{1}{5n^5} - \frac{1}{6n^6} + \cdots$$

---

*) Элементарный выводъ этого предѣла принадлежитъ J. A. Serret.

и, слѣдовательно,

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}-\frac{1}{4n^3}+\frac{1}{5n^4}-\frac{1}{6n^5}+\cdots$$

$$+\frac{1}{2n}-\frac{1}{4n^2}+\frac{1}{6n^3}-\frac{1}{8n^4}+\frac{1}{10n^5}-\cdots$$

$$=1+\frac{1}{12n^2}-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)\frac{1}{n^3}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)\frac{1}{n^4}-\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{10}\right)\frac{1}{n^5}+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{12}\frac{1}{n^2}-\frac{2}{4.6}\frac{1}{n^3}+\frac{3}{5.8}\frac{1}{n^4}-\frac{4}{6.10}\frac{1}{n^5}+\cdots$$

Члены этого ряда

$$\frac{1}{3.4}\frac{1}{n^2},\quad \frac{2}{4.6}\frac{1}{n^3},\quad \frac{3}{5.8}\frac{1}{n^4},\quad \frac{4}{6.10}\frac{1}{n^5},\ \ldots,$$

суть значенія выраженія

$$\left(\frac{1}{\nu+1}-\frac{1}{2\nu}\right)\frac{1}{n^\nu}=\frac{\nu-1}{2\nu(\nu+1)}\frac{1}{n^\nu}\quad (\nu=2,3,4,\ldots).$$

Они имѣютъ перемѣнные знаки и убываютъ съ возрастаніемъ числа ν, ибо

$$\frac{\nu-1}{2\nu(\nu+1)}\cdot\frac{1}{n^\nu}-\frac{\nu}{2(\nu+1)(\nu+2)}\cdot\frac{1}{n^{\nu+1}}>\frac{1}{2n^\nu}\left(\frac{\nu-1}{\nu(\nu+1)}-\frac{\nu}{(\nu+1)(\nu+2)}\right)$$

и

$$\frac{\nu-1}{\nu(\nu+1)}-\frac{\nu}{(\nu+1)(\nu+2)}=\frac{\nu-2}{\nu(\nu+1)(\nu+2)}\geqq 0;$$

поэтому всѣ разности

$$\left(\frac{1}{12}\frac{1}{n^2}-\frac{2}{4.6}\frac{1}{n^3}\right),\quad \left(\frac{3}{5.8}\frac{1}{n^4}-\frac{4}{6.10}\frac{1}{n^5}\right),\ \ldots$$

а также и всѣ разности

$$\left(\frac{2}{4.6}\frac{1}{n^3}-\frac{3}{5.8}\frac{1}{n^4}\right),\quad \left(\frac{4}{6.10}\frac{1}{n^5}-\frac{5}{7.12}\frac{1}{n^6}\right),\ \ldots$$

суть положительныя числа. Такимъ образомъ, число $\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

получается изъ единицы путемъ прибавленія, а изъ числа $1+\frac{1}{12n^2}$ путемъ отниманія положительныхъ чиселъ, откуда вытекаетъ, что

$$1<\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1+\frac{1}{12n^2},$$

и, слѣдовательно,

$$1<\ln\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)}<1+\frac{1}{12n^2}.$$

Замѣщая n на $n+1,\ n+2,\ \ldots,\ 2n-1$, находимъ:

$$1<\ln\frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n+2)}<1+\frac{1}{12(n+1)^2}<1+\frac{1}{12n^2},$$

$$1<\ln\frac{\varphi(n+2)}{\varphi(n+3)}<1+\frac{1}{12(n+2)^2}<1+\frac{1}{12n^2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$1<\ln\frac{\varphi(2n-1)}{\varphi(2n)}<1+\frac{1}{12(2n-1)^2}<1+\frac{1}{12n^2};$$

складывая всѣ эти неравенства, получаемъ:

$$n<\ln\frac{\varphi(n)}{\varphi(2n)}<n+\frac{1}{12n},$$

откуда, переходя отъ логариѳма къ числу, имѣемъ:

$$1<e^{-n}\frac{\varphi(n)}{\varphi(2n)}<e^{\frac{1}{12n}},$$

и, слѣдовательно,

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} e^{-n}\frac{\varphi(n)}{\varphi(2n)}=1. \tag{16}$$

Отсюда выводимъ:

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty}\frac{e^n\varphi(2n)}{\varphi(n)}=\operatorname*{Lim}_{n=\infty} e^n\varphi(n)\frac{\varphi(2n)}{\varphi(n)^2}=1;$$

поэтому, согласно равенству (15),

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} e^n\varphi(n)=1,$$

или

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty}\frac{n!}{e^{-n}n^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}=1.$$

Такимъ образомъ, при большихъ значеніяхъ n, можно приблизительно считать

$$n! = e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi} = \sqrt{2\pi}\, e^{-n+(n+\frac{1}{2})\ln n}. \tag{17}$$

6. При неограниченномъ возрастаніи n сумма

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \cdots$$

приближается къ предѣлу 1; поэтому для большихъ значеній числа n изъ равенствъ (8) и (17) получается слѣдующее приближенное значеніе бернулліева числа B_n:

$$B_n = 4 e^{-2n} n^{2n+\frac{1}{2}} \pi^{\frac{1}{2}-2n}.$$

Взявъ бригговы логариѳмы по семизначной таблицѣ, получимъ приближенно:

$$\log B_n = 2\log 2 + \tfrac{1}{2}\log\pi + 2n(\log n - \log e - \log\pi) + \tfrac{1}{2}\log n,$$

откуда, при $n = 62$,

$$\log B_{62} = 108{,}50429.$$

Такимъ образомъ, въ согласіи съ таблицею Адамса, B_{62} есть 109-значное число, и первыя три его цифры дѣйствительно образуютъ число 319.

§ 140. Эйлерово доказательство неограниченности комплекса простыхъ чиселъ.

1. Эйлеръ далъ формулу, при помощи которой безконечное произведеніе преобразуется въ безконечный рядъ и которая при дальнѣйшихъ преобразованіяхъ представляетъ большую важность въ теоріи чиселъ. Эта формула можетъ быть, между прочимъ, примѣнена къ доказательству того положенія, что рядъ простыхъ чиселъ неограниченъ. Хотя данное Евклидомъ доказательство (§ 17, 3) по своей силѣ и строгости не оставляетъ желать ничего лучшаго, но зато это второе, Эйлерово доказательство имѣетъ тѣмъ большую важность, что оно поддается обобщенію и до настоящаго времени представляетъ единственный путь открытія другихъ, болѣе глубокихъ законовъ распредѣленія простыхъ чиселъ, какова, напримѣръ, теорема, по которой въ каждой ариѳметической прогрессіи

$$b,\ a+b,\ 2a+b,\ 3a+b,\ 4a+b,\ \ldots,$$

содержится неограниченный рядъ простыхъ чиселъ, когда a и b суть произвольныя взаимно-простыя числа *).

2. Мы исходимъ изъ формулы суммы геометрической прогрессіи

$$\frac{1}{1-p^{-s}} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \cdots \tag{1}$$

и разумѣемъ подъ p простое число, а подъ s положительный показатель, который больше 1.

Мы примѣняемъ эту формулу къ ряду простыхъ чиселъ $p, p_1, p_2, \ldots$ и составляемъ произведеніе

$$\frac{1}{1-p^{-s}} \cdot \frac{1}{1-p_1^{-s}} \cdot \frac{1}{1-p_2^{-s}} \cdots,$$

перемножая при этомъ ряды въ правыхъ частяхъ по правилу § 125. Положивъ

$$P = (1-p^{-s})(1-p_1^{-s})(1-p_2^{-s}) \ldots, \tag{2}$$

находимъ:

$$\frac{1}{P} = 1 + \sum^{m} \frac{1}{m^s}, \tag{3}$$

гдѣ сумма Σ распространяется на всѣ числа m, которыя мы можемъ получить, перемножая между собою любыя цѣлыя неотрицательныя степени простыхъ чиселъ $p, p_1, p_2, \ldots$, входящихъ въ составъ выраженія (2) Согласно п. 3 § 117-го, эта сумма сходится абсолютно, когда $s > 1$, и всѣ ея члены содержатся среди членовъ суммы $\sum \frac{1}{n^s}$, распространяющейся на всѣ цѣлыя и положительныя числа n [4]).

3. Если введемъ въ произведеніе P всѣ существующія простыя числа и допустимъ, что ихъ число безконечно велико, то P будетъ представлять собою безконечное произведеніе, которое, по § 136, сходится, когда $s > 1$.

Равенство (3) еще сохраняется въ этомъ случаѣ, и мы получаемъ:

$$\prod^{p} \left(\frac{1}{1-p^{-s}}\right) = \sum^{n} \frac{1}{n^s}, \tag{4}$$

---

*) Dirichlet, „Abhandlungen der Berliner Akademie“, 1837, Werke, Bd. I, Seite 313.

[4]) $1 = \sum \frac{1}{n^s}$ при $n = 1$.

гдѣ произведеніе, обозначенное знакомъ Π, распространяется на всѣ простыя числа p, а сумма въ правой части — на всѣ положительныя цѣлыя числа n. Чтобы убѣдиться въ этомъ, достаточно привести слѣдующія простыя соображенія. Сначала распространимъ произведеніе Π только на тѣ простыя числа, которыя меньше нѣкотораго конечнаго числа k. Въ такомъ случаѣ равенство (4) остается вѣрнымъ въ предположеніи, что n проходитъ только черезъ такія цѣлыя и положительныя значенія, которыя не способны дѣлиться безъ остатка ни на какое простое число, превосходящее число k. Если затѣмъ увеличивать k до безконечности, то оба выраженія будутъ приближаться къ предѣлу, указанному въ равенствѣ (4).

4. Посмотримъ теперь, во что превращаются выраженія (4), когда показатель s приближается къ предѣлу 1.

Обозначая черезъ r положительную правильную дробь, разсмотримъ разность

$$\frac{1}{n^r} - \frac{1}{(n+1)^r} = \frac{1}{n^r}\left(1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-r}\right) = \frac{1}{(n+1)^r}\left(\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-r} - 1\right).$$

Развертывая второе и третье изъ этихъ выраженій по формулѣ бинома, мы получимъ неравенства:

$$\frac{r}{(n+1)^{r+1}} < \frac{1}{n^r} - \frac{1}{(n+1)^r} < \frac{r}{n^{r+1}}. \tag{5}$$

Если теперь положимъ

$$S = 1 + \frac{1}{2^{r+1}} + \frac{1}{3^{r+1}} + \cdots = \sum \frac{1}{n^{r+1}}$$

и если сложимъ всѣ тѣ неравенства, которыя получаются изъ неравенствъ (5) при $n = 1, 2, 3, \ldots$, то получимъ:

$$1 < rS < 1 + r. \tag{6}$$

5. Такимъ образомъ, положивъ $r = s - 1$, найдемъ, что

$$\lim_{s=1} (s-1) \sum \frac{1}{n^s} = 1. \tag{7}$$

Отсюда, на основаніи равенства (4), слѣдуетъ:

$$\lim_{s=1} (s-1) \prod \frac{1}{1 - p^{-s}} = 1.$$

Поэтому, когда s переходитъ въ 1, то произведенiе

$$\prod \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = s - 1, \tag{8}$$

т. е. равно нулю. Это, однако, было бы невозможно, если бы число простыхъ чиселъ оказалось конечнымъ. Ибо тогда, при $s = 1$, произведенiе (8) перешло бы въ $\Pi(1 - p^{-1})$, т. е. въ произведенiе конечнаго числа множителей, изъ которыхъ каждый не исчезаетъ, въ то время какъ правая часть при $s = 1$ обращается въ нуль.

ГЛАВА XXVII.

Трансцендентность чиселъ e и π.

§ 141. Производныя цѣлой функціи.

1. Въ ариѳметикѣ различаютъ алгебраическія и трансцендентныя числа. Число ω называется алгебраическимъ, когда оно есть корень уравненія

$$C_0 + C_1\omega + C_2\omega^2 + \cdots + C_n\omega^n = 0, \tag{1}$$

въ которомъ коэффиціенты $C_0, C_1, \ldots, C_n$ суть раціональныя числа. Можно при этомъ допустить, что числа C_0 и C_n отличны отъ нуля и, сверхъ того, что $C_0, C_1, \ldots, C_n$ суть цѣлыя числа, не имѣющія общаго дѣлителя. Ибо, если эти числа имѣютъ знаменателей, то можно обѣ части уравненія умножить на общаго знаменателя, а если они имѣютъ общаго множителя, то можно на него раздѣлить обѣ части уравненія.

Число, не удовлетворяющее такого рода уравненію, называется трансцендентнымъ.

2. Каждое число можетъ быть разсматриваемо, какъ отношеніе двухъ прямолинейныхъ отрѣзковъ.

Если же, зная одинъ изъ этихъ отрѣзковъ, возможно геометрически построить другой, употребляя при построеніи только циркуль и линейку, то это число будетъ алгебраическимъ и при томъ особой природы. Въ самомъ дѣлѣ, оно должно опредѣляться цѣпью квадратныхъ уравненій, такъ какъ, съ одной стороны, всѣ пересѣченія круговъ между собою и круговъ съ прямыми опредѣляются квадратными уравненіями, а, съ другой стороны, всякое число, которое опредѣляется цѣпью квадратныхъ уравненій, есть корень уравненія вида (1) (§ 108).

Впослѣдствіи будетъ доказано, что числа e и π принадлежатъ къ трансцендентнымъ, а этимъ мы и исчерпаемъ древнюю задачу о квадратурѣ круга, доказавъ, что сторона квадрата, равновеликаго данному кругу, никоимъ образомъ не можетъ быть получена *) изъ діаметра круга путемъ геометрическихъ построеній [1]).

3. Пусть $f(x)$ будетъ произвольная цѣлая функція отъ x степени m съ коэффиціентами $c_m, c_{m-1}, \ldots, c_1, c_0$, которые пока могутъ оставаться совершенно неопредѣленными:

$$f(x) = c_m x^m + c_{m-1} x^{m-1} + \cdots + c_1 x + c_0. \tag{2}$$

Если замѣнить перемѣнную x биномомъ $x + h$ и развернуть каждую степень этого бинома, то функцію $f(x+h)$ можно будетъ расположить также по степенямъ h. Коэффиціенты этихъ степеней будутъ цѣлыми функціями отъ x. Имѣемъ:

$$\begin{array}{l|l}
c_0 & 1 = 1, \\
c_1 & x + h = x + h, \\
c_2 & (x+h)^2 = x^2 + 2hx + h^2, \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (3) \\
c_{m-1} & (x+h)^{m-1} = x^{m-1} + (m-1)hx^{m-2} + \dfrac{(m-1)(m-2)}{1 \,.\, 2} h^2 x^{m-3} + \cdots + h^{m-1}, \\
c_m & (x+h)^m = x^m + mhx^{m-1} + \dfrac{m(m-1)}{1 \,.\, 2} h^2 x^{m-2} + \cdots + h^m;
\end{array}$$

если сложить всѣ эти выраженія, помноживъ ихъ предварительно на соотвѣтствующіе коэффиціенты, указанные слѣва отъ вертикальной черты, то получимъ:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \cdots + \frac{h^m}{m!} f^{(m)}(x), \tag{4}$$

гдѣ

$$\begin{aligned}
f(x) &= c_m x^m + c_{m-1} x^{m-1} + c_{m-2} x^{m-2} + \cdots + c_0, \\
f'(x) &= m c_m x^{m-1} + (m-1) c_{m-1} x^{m-2} + (m-2) c_{m-2} x^{m-3} + \cdots + c_1, \\
f''(x) &= m(m-1) c_m x^{m-2} + (m-1)(m-2) c_{m-1} x^{m-3} + \cdots + 2 \,.\, 1\, c_2, \qquad (5) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
f^{(m)}(x) &= m(m-1)(m-2) \ldots 1 \,.\, c_m.
\end{aligned}$$

---

*) Доказательство трансцендентности числа e было найдено Эрмитомъ (Hermite) въ 1873 г. а числа π — Линдеманомъ (Lindemann) въ 1882 году.

[1]) Совершаемыхъ исключительно при помощи циркуля и линейки.

Полагая здѣсь $x = 0$, находимъ:

$$f(0) = c_0, \quad f'(0) = c_1, \quad f''(0) = 2!\,c_2, \; \ldots, \; f^{(m)}(0) = m!\,c_m. \qquad (6)$$

Функціи f', f'', f''', ..., степеней $m-1$, $m-2$, $m-3$, ..., называются соотвѣтственно первой, второй, третьей и т. д. **производной** функціи $f(x)$, а равенство (4) есть частный случай **теоремы Тейлора** (см. ниже § 149).

4. Производныя мы будемъ иногда обозначать буквою D, снабженною индексомъ, а именно такъ:

$$D_1 f(x) = f'(x), \quad D_2 f(x) = f''(x), \; \ldots, \; D_\nu f(x) = f^{(\nu)}(x). \qquad (7)$$

Равенствами (4) или способомъ полученія производныхъ непосредственно доказывается правильность равенствъ:

$$D_\nu A f(x) = A D_\nu f(x), \quad D_\nu(f(x) + A) = D_\nu f(x),$$
$$D_\nu(f(x) + \varphi(x)) = D_\nu f(x) + D_\nu \varphi(x),$$

гдѣ A есть постоянная, а $f(x)$ и $\varphi(x)$ суть цѣлыя функціи. Вообще, когда $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ ... суть цѣлыя функціи, а A, A_1, A_2, A_3, ... суть постоянныя, то

$$D_\nu(A + A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x) + A_3 f_3(x) + \cdots) = \qquad (8)$$
$$= A_1 D_\nu f_1(x) + A_2 D_\nu f_2(x) + A_3 D_\nu f_3(x) + \ldots$$

5. Положивъ въ равенствахъ (5) всѣ коэффиціенты c, кромѣ c_m, равными нулю, мы получимъ производныя отъ степени x^m:

$$D_1 x^m = m x^{m-1}, \quad D_2 x^m = m(m-1)\,x^{m-2},$$
$$D_3 x^m = m(m-1)(m-2)\,x^{m-3}, \; \ldots.$$

что мы можемъ вообще выразить такъ:

$$D_\nu x^m = m(m-1) \ldots (m-\nu+1)\,x^{m-\nu}.$$

Эта формула вѣрна, пока ν не больше m. Если $\nu < m$, то можно также писать

$$D_\nu x^m = \frac{m!}{(m-\nu)!}\,x^{m-\nu}.$$

Если же $\nu = m$, то

$$D_m x^m = m!,$$

а при $\nu > m$

$$D_\nu x^m = 0.$$

§ 142. Свойства показательной функцiи.

1. Въ § 26 мы видѣли, что при каждомъ вещественномъ или комплексномъ значенiи x степень e^x можетъ быть выражена суммой:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^\nu}{\nu!} + \cdots.$$

Разумѣя подъ ν любое натуральное число и помножая обѣ части этого равенства на $\nu!$, мы получаемъ:

$$\nu! e^x = \nu! + \frac{\nu!}{1!} x + \frac{\nu!}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\nu!}{(\nu-1)!} x^{\nu-1} + U_\nu, \tag{1}$$

гдѣ U_ν означаетъ сумму безконечнаго числа слагаемыхъ; при этомъ, такъ какъ

$$\frac{\nu!}{(\nu+1)!} = \frac{1}{\nu+1}, \quad \frac{\nu!}{(\nu+2)!} = \frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)}, \ \ldots,$$

то

$$U_\nu = x^\nu + \frac{x^{\nu+1}}{\nu+1} + \frac{x^{\nu+2}}{(\nu+1)(\nu+2)} + \frac{x^{\nu+3}}{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)} + \cdots. \tag{2}$$

Принимая во вниманiе п. 5 § 141-го, мы можемъ равенство (1) представить и въ такой формѣ:

$$\nu! e^x = D_\nu x^\nu + D_{\nu-1} x^\nu + \cdots + D_1 x^\nu + U_\nu,$$

или короче:

$$\nu! e^x = \sum_{s=1}^{\nu} D_s x^\nu + U_\nu,$$

Въ суммѣ Σ индексъ s измѣняется отъ 1 до ν. Но если m есть какое-либо цѣлое число, которое больше ν, то производныя $D_{\nu+1} x^\nu$, $D_{\nu+2} x^\nu$, ..., $D_m x^\nu$ равны нулю, и мы можемъ прибавить всѣ эти члены, такъ что

$$\nu! e^x = \sum_{s=1}^{m} D_s x^\nu + U_\nu. \tag{3}$$

2. Напишемъ теперь всѣ тѣ равенства, которыя получаются изъ равенства (3) при $\nu = 1, 2, \ldots, m$, помножимъ ихъ по порядку на неопредѣленные множители $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ и сложимъ. Тогда получимъ:

$$e^x(\gamma_1 1! + \gamma_2 2! + \gamma_3 3! + \cdots + \gamma_m m! = \tag{4}$$
$$= \sum_{s=1}^{m} D_s(\gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \cdots + \gamma_m x^m) + \gamma_1 U_1 + \gamma_2 U_2 + \cdots + \gamma_m U_m.$$

Если положимъ еще

$$\varphi(x) = \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \cdots + \gamma_m x^m,$$

то $\varphi(x)$ будетъ произвольная цѣлая функція, подчиненная только тому ограниченію, что $\varphi(0) = 0$.

Если затѣмъ положить

$$\varphi'(x) + \varphi''(x) + \varphi'''(x) + \cdots + \varphi^{(m)}(x) = \Phi(x), \tag{5}$$

то

$$\Phi(0) = \gamma_1 + \gamma_2 2! + \gamma_3 3! + \cdots + \gamma_m m!;$$

если, наконецъ, положимъ еще

$$U(x) = \gamma_1 U_1 + \gamma_2 U_2 + \cdots + \gamma_m U_m,$$

то равенство (4) можно будетъ представить такъ:

$$e^x \Phi(0) = \Phi(x) + U(x). \tag{6}$$

3. Въ послѣднемъ равенствѣ, составляющемъ фундаментъ всего дальнѣйшаго, $\Phi(0)$ не зависитъ отъ x, $\Phi(x)$ есть цѣлая функція отъ x степени $m - 1$, а U есть функція отъ x, выраженная безконечнымъ рядомъ.

Для абсолютнаго значенія $|U|$ этой функціи мы можемъ указать верхнюю границу, основываясь на томъ положеніи, что абсолютное значеніе суммы никогда не превышаетъ суммы абсолютныхъ значеній слагаемыхъ.

Именно, для каждаго положительнаго ν

$$\frac{1}{\nu+1} < \frac{1}{1}, \quad \frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)} < \frac{1}{1 \cdot 2}, \quad \frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)} < \frac{1}{3!}, \ldots,$$

и если мы обозначимъ черезъ r абсолютную величину x, т. е. положимъ

$$|x| = r,$$

то изъ равенства (2) будетъ слѣдовать, что

$$|U_\nu| < r^\nu\left(1 + \frac{r}{1!} + \frac{r^2}{2!} + \frac{r^3}{3!} + \cdots\right),$$

а потому

$$|U_\nu| < r^\nu e^r.$$

Если же мы обозначимъ черезъ

$$c_1, c_2, \ldots, c_m$$

абсолютныя значенія чиселъ

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m,$$

то изъ опредѣленія функціи $U(x)$ будетъ слѣдовать, что

$$|U(x)| < (c_1 r + c_2 r^2 + \cdots + c_m r^m) e^r,$$

или, полагая

$$F(r) = c_1 r + c_2 r^2 + \cdots + c_m r^m, \tag{7}$$

имѣемъ:

$$|U(x)| < F(r) e^r. \tag{8}$$

Здѣсь $F(r)$ получается изъ $\varphi(x)$ замѣною перемѣнной x и коэффиціентовъ $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ ихъ абсолютными значеніями $r, c_1, c_2, \ldots, c_m$.

§ 143. Трансцендентность числа e.

1. Теперь, чтобы доказать трансцендентность числа e, мы изберемъ слѣдующій косвенный путь. Допустимъ, что e есть корень алгебраическаго уравненія n-ой степени

$$C_0 + C_1 e + C_2 e^2 + \cdots + C_n e^n = 0, \tag{1}$$

въ которомъ коэффиціенты $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_n$ суть цѣлыя числа, изъ коихъ первое C_0 и послѣднее C_n отличны отъ нуля. Если бы мы допустили, что $C_0 = 0$, то слѣдовало бы только раздѣлить обѣ части равенства на нѣкоторую степень числа e, чтобы получить такого же вида равенство, въ которомъ членъ, не зависящій отъ e, былъ бы отличенъ отъ нуля.

2. Полагая въ основномъ равенствѣ (6) § 142-го $x = 1, 2, \ldots, n$, мы получимъ:

$$e\Phi(0) = \Phi(1) + U(1),$$
$$e^2\Phi(0) = \Phi(2) + U(2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$e^n\Phi(0) = \Phi(n) + U(n).$$

Помноживъ эти равенства соотвѣтственно на $C_1, C_2, \ldots, C_n$, складывая полученныя такимъ образомъ равенства и прибавляя къ обѣимъ частямъ полученнаго результата по $C_0\Phi(0)$, найдемъ, въ виду равенства (1):

$$\begin{aligned} &C_0\Phi(0)+C_1\Phi(1)+C_2\Phi(2)+\cdots+C_n\Phi(n)\\ &\quad +C_1U(1)+C_2U(2)+\cdots+C_nU(n)= \qquad (2)\\ &\quad =(C_0+C_1e+C_2e^2+\cdots+C_ne^n)\Phi(0)=0, \end{aligned}$$

что можно написать короче такъ:

$$\sum_{\nu=0}^{n} C_\nu\Phi(\nu)+\sum_{\nu=1}^{n} C_\nu U(\nu)=0, \qquad (3)$$

и здѣсь, согласно равенству (5) § 142-го,

$$\Phi(\nu)=\sum_{\mu=1}^{m}\varphi^{(\mu)}(\nu), \qquad (4)$$

при чемъ $\varphi(x)$ есть цѣлая функція, удовлетворяющая условію $\varphi(0)=0$, но произвольная во всемъ остальномъ, а $\varphi^{(\mu)}(x)$ есть μ-ая производная отъ функціи $\varphi(x)$.

3. Если теперь намъ удастся доказать, что при нѣкоторомъ выборѣ пока еще совершенно произвольныхъ коэффиціентовъ $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$, или, что то же, произвольной функціи $\varphi(x)$, равенство (3) невозможно, то отсюда будетъ слѣдовать, что допущеніе равенства вида (1) непріемлемо и что, слѣдовательно, e есть трансцендентное число.

Но это будетъ доказано, если намъ удастся распорядиться функціей $\varphi(x)$ такимъ образомъ, чтобы

1) первая сумма $\Sigma C_\nu\Phi(\nu)$ была цѣлымъ неисчезающимъ числомъ, имѣющимъ, слѣдовательно, абсолютную величину, которая, по меньшей мѣрѣ, равна 1, между тѣмъ какъ

2) вторая сумма $\Sigma C_\nu U(\nu)$ по абсолютной величинѣ была бы меньше единицы, ибо тогда сумма этихъ двухъ суммъ не могла бы быть нулемъ.

4. Согласно п. 3 § 17-го, существуютъ простыя числа, которыя больше произвольнаго напередъ заданнаго числа. Можно поэтому взять простое число p, превосходящее число n, и положить

$$\varphi(x)=\frac{x^{p-1}(x-1)^p(x-2)^p\ldots(x-n)^p}{(p-1)!},$$

чѣмъ условіе $\varphi(0)=0$ будетъ удовлетворено.

Степень m этой функціи равна $np+p-1$. Мы будемъ себѣ представлять эту функцію расположенною по возрастающимъ степенямъ перемѣнной x или по возрастающимъ степенямъ одной изъ разностей $x-1$, $x-2$, ..., $x-n$. При этомъ получаются слѣдующія разложенія:

$$\begin{aligned}(p-1)!\,\varphi(x) &= x^{p-1}(x-1)^p(x-2)^p\ldots(x-n)^p\\ &= a_{p-1}x^{p-1}+a_px^p+\cdots+a_mx^m\\ &= b_p(x-\nu)^p+b_{p+1}(x-\nu)^{p+1}+\cdots+b_m(x-\nu)^m,\\ &\qquad(\nu=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n).\end{aligned}\tag{5}$$

Низшихъ степеней перемѣнной x или разностей $x-\nu$ здѣсь нѣтъ, такъ какъ функція $\varphi(x)$ дѣлится безъ остатка на x^{p-1}, а также на $(x-1)^p$, ..., $(x-n)^p$. Числа a_{p-1}, a_p, ..., a_m, b_p, b_{p+1}, ..., b_m суть цѣлыя числа.

5. Изъ соотношеній (5) дѣленіемъ на x^{p-1} выводится:

$$(x-1)^p(x-2)^p\ldots(x-n)^p=a_{p-1}+a_px+\cdots+a_mx^{m-p+1};$$

полагая въ этомъ тождествѣ $x=0$, находимъ:

$$a_{p-1}=\pm 1^p.2^p\ldots n^p=\pm(n!)^p.$$

Это есть цѣлое число, не дѣлящееся на p безъ остатка, ибо простое число p, превосходящее число n, не есть дѣлитель какого-либо изъ чиселъ 1, 2, ..., n.

Далѣе, такъ какъ низшій членъ функціи $\varphi(x)$ содержитъ $(p-1)$-ую степень числа x, то

$$\gamma_1=0,\ \ldots,\ \gamma_{p-2}=0,$$

$$\gamma_{p-1}=\frac{a_{p-1}}{(p-1)!},\quad \gamma_p=\frac{a_p}{(p-1)!},\ \ldots,\ \gamma_m=\frac{a_m}{(p-1)!},$$

а потому, составивъ производныя отъ функціи $\varphi(x)$ при $x=0$, находимъ, согласно равенству (6) § 141-го:

$$\begin{gathered}\varphi(0)=0,\quad \varphi'(0)=0,\quad \varphi''(0)=0,\ \ldots,\ \varphi^{(p-2)}(0)=0,\\ \varphi^{(p-1)}(0)=a_{p-1},\\ \varphi^{(p)}(0)=\frac{p!\,a_p}{(p-1)!}=pa_p,\\ \varphi^{(p+1)}(0)=p(p+1)\,a_{p+1},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \varphi^{(m)}(0)=p(p+1)\ldots m a_m.\end{gathered}$$

Такимъ образомъ, производныя $\varphi^{(\mu)}(0)$ суть цѣлыя числа; $\varphi^{(p-1)}(0)$ не дѣлится безъ остатка на p, а всѣ прочія числа $\varphi^{(\mu)}(0)$ либо равны нулю, либо дѣлятся на p безъ остатка, а потому и сумма $\Phi(0) = \Sigma\varphi^{(\mu)}(0)$ есть цѣлое число, которое не дѣлится безъ остатка на p.

6. Положивъ въ равенствѣ (4) § 141-го

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + h\varphi'(x) + \frac{h^2}{2!}\varphi''(x) + \cdots + \frac{h^m}{m!}\varphi^{(m)}(x)$$

$x = \nu$, $h = x - \nu$, находимъ:

$$\varphi(x) = \varphi(\nu) + (x-\nu)\,\varphi'(\nu) + \frac{(x-\nu)^2}{2!}\,\varphi''(\nu) + \cdots + \frac{(x-\nu)^m}{m!}\,\varphi^{(m)}(\nu);$$

изъ третьяго же способа изображенія функціи $\varphi(x)$, указываемаго соотношеніями (5), слѣдуетъ, что при $\nu = 1, 2, \ldots, n$

$$\begin{aligned} &\varphi(\nu) = 0, \quad \varphi'(\nu) = 0, \ldots, \varphi^{(p-1)}(\nu) = 0, \\ &\varphi^{(p)}(\nu) \quad = p b_p, \\ &\varphi^{(p+1)}(\nu) = p(p+1)\,b_{p+1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\varphi^{(m)}(\nu) \quad = p(p+1)\ldots m b_m; \end{aligned}$$

поэтому каждое изъ чиселъ $\varphi^{(\mu)}(\nu)$ есть цѣлое число, которое либо равно нулю, либо дѣлится на p безъ остатка.

Такимъ образомъ, и каждая изъ суммъ

$$\Phi(1), \quad \Phi(2), \ldots, \Phi(\nu)$$

есть цѣлое число, дѣлящееся на p безъ остатка.

7. Отсюда слѣдуетъ, что и сумма

$$\sum_{\nu=0}^{n} C_\nu \Phi(\nu) = C_0\Phi(0) + C_1\Phi(1) + C_2\Phi(2) + \cdots + C_n\Phi(n)$$

есть цѣлое число, и если мы возьмемъ число p столь большимъ, чтобы число C_0 (отличное отъ нуля) не было кратнымъ числа p, то и эта сумма не будетъ дѣлиться на p безъ остатка и будетъ поэтому отлична отъ нуля.

Это, по п. 3, составляетъ первую часть доказательства, которое мы проводимъ.

. Вторую часть, относящуюся къ характеру функцiи U, можно теперь вести весьма просто на основанiи неравенства 8 § 142-го. Здѣсь нужно прежде всего составить функцiю $F(r)$, которая получается изъ функцiи $\varphi(x)$ замѣной чиселъ $x, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ ихъ абсолютными значенiями $r, c_0, c_1, \ldots, c_m$.

Если функцiю

$$x^k - a_1 x^{k-1} + a_2 x^{k-2} - \cdots,$$

члены которой имѣютъ перемѣнныя знаки, умножить на $x - \beta$, то получимъ функцiю

$$x^{k+1} - (a_1 + \beta) x^k + (a_2 + \beta a_1) x^{k-1} - \cdots$$

съ перемѣнными же знаками. Если же сдѣлать одинаковыми всѣ знаки въ обоихъ множителяхъ, т. е. помножить

$$x^k + a_1 x^{k-1} + a_2 x^{k-2} + \cdots \text{ на } x + \beta,$$

то полученное произведенiе

$$x^{k+1} + (a_1 + \beta) x^k + (a_2 + \beta a_1) x^{k-1} + \cdots$$

выведется изъ перваго, когда въ немъ сдѣлаемъ знаки всѣхъ членовъ одинаковыми.

. Изъ повторнаго примѣненiя этого простого положенiя слѣдуетъ, что въ вычисленномъ и расположенномъ произведенiи

$$\varphi(x) = \frac{x^{p-1}(x-1)^p (x-2)^p \ldots (x-n)^p}{(p-1)!}$$

члены имѣютъ перемѣнныя знаки и что это произведенiе переходитъ въ произведенiе

$$F(x) = \frac{x^{p-1}(x+1)^p (x+2)^p \ldots (x+n)^p}{(p-1)!},$$

если приписать всѣмъ коэффицiентамъ положительные знаки; другими словами, произведенiе

$$F(r) = \frac{r^{p-1}(r+1)^p (r+2)^p \ldots (r+n)^p}{(p-1)!}$$

и представляетъ собою искомую функцiю, такъ что, согласно неравенству (8) § 142-го,

$$|U(x)| < F(r) e^r. \tag{6}$$

10. Если положимъ для краткости

$$\nu(\nu+1)(\nu+2)\ \ldots\ (\nu+n) = \varrho_\nu,$$

то, согласно неравенству (6), будетъ

$$|U(\nu)| < \frac{\varrho_\nu^p}{\nu(p-1)!}\, e^\nu.$$

Такъ какъ рядъ, въ который разлагается функцiи e^x, сходится при всѣхъ значенiяхъ x, то его общiй членъ $x^m : m!$ при неограниченномъ возрастанiи m имѣетъ предѣломъ нуль при всякомъ x (ср. также § 52, 2). Можно поэтому взять простое число p столь большимъ, чтобы дробь

$$\frac{\varrho_\nu^{p-1}}{(p-1)!}$$

стала произвольно малой, а такъ какъ $e^\nu \varrho_\nu : \nu$ есть конечное число, то $|U(\nu)|$, а потому и абсолютная величина суммы $\Sigma C_\nu U(\nu)$ можетъ быть сдѣлана меньше всякаго напередъ заданнаго числа и, въ частности, меньше 1.

Въ этомъ по п. 3 состоитъ вторая часть доказательства; такимъ образомъ, доказано положенiе:

Число e есть трансцендентное число.

§ 144. Трансцендентность числа π.

1. На такихъ же основанiяхъ покоится доказательство трансцендентности числа π, а именно, оно опирается на соотношенiе между числами e и π, выражаемое равенствомъ (§ 127, (12))

$$1 + e^{i\pi} = 0. \tag{1}$$

Если π есть алгебраическое число, то и $i\pi$ есть алгебраическое число. Дѣйствительно, если $\xi(\pi) = 0$ есть рацiональное уравненiе, которому удовлетворяетъ число π, то и $\xi(\pi)\xi(-\pi) = 0$. Теперь, если $y = i\pi$, то $\xi(iy)\xi(-iy) = \psi(y) = 0$, и коэффицiенты функцiи $\psi(y)$ суть вещественныя рацiональныя числа.

2. Пусть ψ будетъ функцiя ν-ой степени и

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_\nu \tag{2}$$

пусть будутъ ея корнями. Среди нихъ имѣется, слѣдовательно, число πi. Сообразно съ этимъ, въ виду равенства (1), получаемъ:

$$(1+e^{y_1})(1+e^{y_2})(1+e^{y_3})\ \ldots\ (1+e^{y_\nu}) = 0,$$

или, по перемноженіи:

$$1 + \Sigma e^{y_i} + \Sigma e^{y_i + y_k} + \Sigma e^{y_i + y_k + y_l} + \cdots = 0, \tag{3}$$

при чемъ первая сумма Σe^{y_i} распространяется на всѣ корни (2), вторая $\Sigma e^{y_i + y_k}$ — на всѣ сочетанія по два вида $y_i + y_k$ (безъ повтореній), третья $\Sigma e^{y_i + y_k + y_l}$ — на всѣ сочетанія по три и т. д.

3. Симметрическія функціи ν величинъ y_i по нашимъ допущеніямъ суть раціональныя числа (цѣлыя или дробныя), а ν величинъ y_i удовлетворяютъ раціональному уравненію $\psi(x) = 0$.

Симметрическія функціи $\frac{1}{2}\nu(\nu - 1)$ величинъ $y_i + y_k$ (напримѣръ, суммы ихъ одинаковыхъ степеней), будучи въ то же время симметрическими функціями величинъ y_i, суть раціональныя числа, а суммы $y_i + y_k$ также суть корни нѣкотораго раціональнаго уравненія $\psi_1(x) = 0$.

То же относится и къ суммамъ $y_i + y_k + y_l$, число которыхъ равно $\frac{1}{6}\nu(\nu - 1)(\nu - 2)$ и которыя также суть корни нѣкотораго уравненія $\psi_2(x) = 0$ и т. д.

Произведеніе

$$\psi(x)\,\psi_1(x)\,\psi_2(x)\ \ldots \tag{4}$$

будетъ поэтому цѣлой функціей, которая будетъ уничтожаться, когда положимъ въ ней x равнымъ одному изъ чиселъ

$$y_i,\quad y_i + y_k,\quad y_i + y_k + y_l,\ \ldots. \tag{5}$$

4. Между этими числами нуль можетъ содержаться одинъ или нѣсколько разъ. Если допустимъ, что нуль содержится между ними $C - 1$ разъ, то C есть положительное цѣлое число, которое, по меньшей мѣрѣ, равно 1. Оно равно 1 только въ томъ случаѣ, когда среди величинъ (5) нѣтъ нуля.

Въ произведеніи (4) содержатся $C - 1$ множителей, равныхъ x. Исключивъ эти множители и обративъ затѣмъ всѣ коэффиціенты въ цѣлыя числа помноженіемъ на наименьшее кратное N всѣхъ знаменателей, мы получимъ функцію съ цѣлыми коэффиціентами:

$$\chi(x) = N x^{1-C}\,\psi(x)\,\psi_1(x)\,\psi_2(x)\ \ldots,$$

степень которой обозначимъ черезъ n. Ея корни

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n \tag{6}$$

соотвѣтственно равны тѣмъ изъ чиселъ (5), которыя отличны отъ нуля, и, согласно равенству (3), эти корни удовлетворяютъ уравненію

$$C\,^{2)} + e^{x_1} + e^{x_2} + e^{x_3} + \cdots + e^{x_n} = 0. \qquad (7)$$

Такъ какъ между корнями (6) нѣтъ нуля, то число $\chi(0)$ отлично отъ нуля.

Для насъ безразлично, встрѣчается ли одно и то же число одинъ или нѣсколько разъ между величинами (6); но число πi, во всякомъ случаѣ, имѣется между ними.

5. Теперь мы возвращаемся къ равенству (6) § 142-го

$$e^x \Phi(0) = \Phi(x) + U(x), \qquad (8)$$

полагаемъ въ немъ $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$, складываемъ полученныя равенства и прибавляемъ къ обѣимъ частямъ число $C\Phi(0)$. Тогда мы, въ силу равенства (7), получаемъ:

$$\begin{aligned} C\Phi(0) + \Phi(x_1) + \Phi(x_2) + \cdots + \Phi(x_n) + U(x_1) + U(x_2) + \cdots + U(x_n) = \\ = \Phi(0)\,(C + e^{x_1} + e^{x_2} + \cdots + e^{x_n}) = 0, \end{aligned} \qquad (9)$$

и основная идея доказательства будетъ та же самая, какъ и въ доказательствѣ трансцендентности числа e. Мы доказываемъ, что функціей $\varphi(x)$ можно такъ распорядиться, что

1) сумма $C\Phi(0) + \sum\limits_{\nu=1}^{n} \Phi(x_\nu)$ станетъ неисчезающимъ цѣлымъ числомъ,

2) число $\sum\limits_{\nu=1}^{n} U(x_\nu)$ по абсолютной величинѣ будетъ меньше 1.

Тогда равенство (9) окажется невозможнымъ, и допущеніе, будто π есть алгебраическое число, будетъ опровергнуто.

6. Функція $\chi(x)$ имѣетъ видъ

$$\chi(x) = ax^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n,$$

при чемъ коэффиціенты $a, a_1, a_2, \ldots, a_n$ суть цѣлыя числа, числа a и a_n отличны отъ нуля, а коэффиціентъ a можно считать положительнымъ. Помножая на a^{n-1} и полагая

$$ax = z, \quad a_1 = b_1, \quad aa_2 = b_2, \quad a^2 a_3 = b_3, \ \ldots, \ a^{n-1} a_n = b_n,$$

---

[2]) $C = 1 + (C - 1)\,e^0$.

мы получаемъ функцію

$$a^{n-1}\chi(x) = \theta(z) = z^n + b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} + \cdots + b_n \qquad (10)$$

съ цѣлыми коэффиціентами, которой корни

$$z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n \qquad (11)$$

соотвѣтственно равны произведеніямъ

$$ax_1, ax_2, ax_3, \ldots, ax_n. \qquad (12)$$

7. Что касается функціи $\varphi(x)$, которая служитъ для составленія функціи $\Phi(x)$, то мы опредѣлимъ ее такъ:

$$\varphi(x) = \frac{z^{p-1}(\theta(z))^p}{(p-1)!} = \frac{a^{np-1}x^{p-1}(\chi(x))^p}{(p-1)!}, \qquad (13)$$

гдѣ p есть достаточно большое простое число. Степень m функціи $\varphi(x)$ равна $np+p-1$ и, кромѣ того, $\varphi(0)=0$.

Пусть, по разложеніи по степенямъ z, будетъ

$$\begin{aligned}(\theta(z))^p &= A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \cdots \\ &= A_0 + A_1 ax + A_2 a^2 x^2 + \cdots,\end{aligned}$$

гдѣ A_0, A_1, A_2, ... суть цѣлыя числа. Полагая $z=0$, находимъ:

$$A_0 = b_n^p.$$

Такимъ образомъ, число A_0 отлично отъ нуля. Далѣе,

$$(p-1)!\,\varphi(x) = A_0 a^{p-1}x^{p-1} + A_1 a^p x^p + A_2 a^{p+1} x^{p+1} + \cdots;$$

слѣдовательно,

$$\begin{aligned}&\varphi'(0) = 0, \quad \varphi''(0) = 0, \ \ldots, \quad \varphi^{(p-2)}(0) = 0,\\ &\varphi^{(p-1)}(0) = A_0 a^{p-1} = b_n^p a^{p-1},\\ &\varphi^{(p)}(0) = pA_1 a^p,\\ &\varphi^{(p+1)}(0) = p(p+1)A_2 a^{p+1},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

8. Если поэтому приписать количеству p значеніе, большее наибольшаго изъ двухъ чиселъ a, b_n, то число $\varphi^{p-1}(0)$ не будетъ кратнымъ числа p, между тѣмъ какъ каждое изъ остальныхъ

чиселъ $\varphi^{(\nu)}(0)$ либо будетъ равно нулю, либо будетъ дѣлиться на p безъ остатка. Слѣдовательно,

$$\Phi(0) = \sum_{\nu=1}^{m} \varphi^{(\nu)}(0)$$

есть цѣлое число, не дѣлящееся на p безъ остатка.

9. Согласно п. 3 § 66-го,

$$\frac{\theta(z)}{z - z_1} = z^{n-1} + q_1 z^{n-2} + q_2 z^{n-3} + \cdots,$$

при чемъ коэффиціенты

$$q_1 = z_1 + b_1,$$
$$q_2 = z_1^2 + b_1 z_1 + b_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

суть цѣлыя функціи отъ z_1 съ цѣлыми коэффиціентами. Взявъ теперь p-ую степень отъ $\theta(z)$, помноживъ ее на

$$z^{p-1} = (z_1 + (z - z_1))^{p-1}$$

и расположивъ произведеніе по возрастающимъ степенямъ разности $z - z_1$, находимъ, согласно равенству (13):

$$\begin{aligned}(p-1)!\,\varphi(x) &= (z - z_1)^p B_1(z_1) + (z - z_1)^{p+1} B_2(z_1) + \cdots \\ &= a^p (x - x_1)^p B_1(z_1) + a^{p+1}(x - x_1)^{p+1} B_2(z_1) + \cdots,\end{aligned}$$

гдѣ коэффиціенты $B_1(z_1)$, $B_2(z_1)$, ... суть цѣлыя функціи отъ z_1; напримѣръ:

$$B_1(z_1) = \beta_1^{(0)} + \beta_1^{(1)} z_1 + \beta_1^{(2)} z_1^2 + \cdots,$$

$$B_2(z_1) = \beta_2^{(0)} + \beta_2^{(1)} z_1 + \beta_2^{(2)} z_1^2 + \cdots.$$

Отсюда, какъ и выше, выводимъ:

$$\varphi'(x_1) = 0, \quad \varphi''(x_1) = 0, \ \ldots, \ \varphi^{(p-1)}(x_1) = 0,$$
$$\varphi^{(p)}(x_1) = p a^p B_1(z_1),$$
$$\varphi^{(p+1)}(x_1) = p(p+1) a^{p+1} B_2(z_1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

и, слѣдовательно, положивъ

$$Q(z_1) = a^p B_1(z_1) + (p+1) a^{p+1} B_2(z_1) + \cdots,$$

имѣемъ:

$$\Phi(x_1) = \sum_{\nu=1}^{m} \varphi^{(\nu)}(x_1) = pQ(z_1), \tag{14}$$

гдѣ

$$Q(z_1) = Q_0 + Q_1 z_1 + Q_2 z_1^2 + Q_3 z_1^3 + \cdots$$

есть цѣлая функція отъ z_1, коэффиціенты которой Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, ... суть цѣлыя числа.

Эти равенства не нарушаются, если замѣнить въ нихъ x_1, z_1 на x_2, z_2, ..., x_n, z_n.

Сложивъ теперь всѣ тѣ равенства, которыя выводятся изъ равенства (14) путемъ такихъ замѣщеній, найдемъ, что

$$\sum_{\nu=1}^{n} Q(z_\nu) = nQ_0 + Q_1 s_1 + Q_2 s_2 + Q_3 s_3 + \cdots,$$

гдѣ $s_1 = \Sigma z_\nu$, $s_2 = \Sigma z_\nu^2$, $s_3 = \Sigma z_\nu^3$, ... суть суммы одинаковыхъ степеней чиселъ z. Но эти суммы опредѣляются по формуламъ Ньютона (§ 71, (6)):

$$\begin{aligned} &s_1 + b_1 = 0, \\ &s_2 + s_1 b_1 + 2b_2 = 0, \\ &s_3 + s_2 b_1 + s_1 b_2 + 3b_3 = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

и, слѣдовательно, представляютъ собою цѣлыя числа. Отсюда вытекаетъ:

10. Сумма

$$\sum_{\nu=1}^{n} \Phi(x_\nu) = p \sum_{\nu=1}^{n} Q(z_\nu)$$

есть цѣлое число, дѣлящееся на p безъ остатка.

Поэтому, если взять число p бо́льшимъ, чѣмъ (отличное отъ нуля) число C, то изъ п. п. 8 и 10 будетъ слѣдовать:

11. Сумма

$$C\Phi(0) + \Phi(x_1) + \Phi(x_2) + \cdots + \Phi(x_n)$$

есть цѣлое число, не дѣлящееся на p безъ остатка, и потому ея абсолютная величина, по меньшей мѣрѣ, равна 1.

Этимъ, по п. 5, оправдана первая часть доказательства.

12. Чтобы исчерпать и вторую часть, мы должны разсмотрѣть функцію $F(r)$, которую получимъ, когда въ функціи $\varphi(x)$, расположен-

ной по степенямъ x, замѣнимъ перемѣнную x и коэффиціенты ея степеней ихъ абсолютными значеніями.

Полагаемъ для этой цѣли

$$\chi(x) = a(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$$

и, на основаніи равенства (13), находимъ для $\varphi(x)$ выраженіе:

$$(p-1)!\,\varphi(x) = a^{np+p-1}x^{p-1}(x - x_1)^p(x - x_2)^p\dots(x - x_n)^p.$$

Коэффиціенты этого выраженія получаются путемъ сложенія и перемноженія величинъ:

$$a,\ -x_1,\ -x_2,\ \dots,\ -x_n,$$

и, согласно п. п. 5 и 6 § 51-го, абсолютныя величины этихъ коэффиціентовъ будутъ меньше (и во всякомъ случаѣ не больше), чѣмъ тѣ числа, которыя мы получимъ, замѣщая величины $a, -x_1, -x_2, \dots, -x_n$ ихъ абсолютными значеніями

$$a,\ r_1,\ r_2,\ \dots,\ r_n,$$

т. е. не больше, чѣмъ коэффиціенты функціи

$$a^{np+p-1}x^{p-1}(x + r_1)^p(x + r_n)^p\dots(x + r_n)^p.$$

Положивъ поэтому

$$\varrho(r) = a^{n+1}r(r + r_1)(r + r_2)\dots(r + r_n),$$

найдемъ, что при всякомъ положительномъ r число

$$F(r) \leqq \frac{(\varrho(r))^p}{ar(p-1)!},$$

и его можно сдѣлать сколь угодно малымъ, достаточно увеличивая число p.

Такимъ образомъ, согласно равенству (8) § 142-го, абсолютное значеніе числа $U(x_\nu)$, а вмѣстѣ съ нимъ и абсолютное значеніе суммы $\sum_{\nu=1}^{m} U(x_\nu)$ можетъ быть сдѣлано меньше всякаго напередъ заданнаго числа и, въ частности, меньше 1. Этимъ исчерпывается и второе требованіе п. 5, чѣмъ вполнѣ оправдано положеніе:

Число π есть трансцендентное число.

Итакъ, издревле знаменитая задача о квадратурѣ круга, на которую было потрачено столько силъ, окончательно разрѣшена.

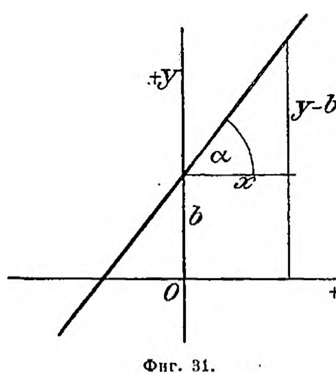
ГЛАВА XXVIII.

Функціи, дифференціалы и интегралы.

§ 145. Геометрическое представленіе функцій.

1. Выше (§ 102) мы пользовались уже координатами для того, чтобы сдѣлать наглядною зависимость между цѣлою функціей и ея независимой перемѣнной. Такъ какъ главная цѣль всѣхъ примѣненій математики къ явленіямъ внѣшняго міра состоитъ въ познаніи зависимости между измѣряемой величиной и другой, способной принимать различныя значенія и представляющей поэтому перемѣнную величину, то изображеніе функцій при помощи кривыхъ является незамѣнимымъ вспомогательнымъ средствомъ, при помощи котораго удается однимъ взглядомъ охватить въ извѣстной мѣрѣ ходъ явленія или, вообще, взаимную зависимость перемѣнныхъ величинъ.

Наблюдательныя естественныя науки, статистика и другія дисциплины уже издавна пользуются этимъ вспомогательнымъ графическимъ способомъ для того, чтобы и въ тѣхъ случаяхъ, когда законъ зависимости не вполнѣ извѣстенъ, изобразить ее при посредствѣ кривыхъ, получаемыхъ помощью измѣреній, а также и прямой регистраціей, для которой фотографія является превосходнымъ вспомогательнымъ средствомъ.



Фиг. 31.

2. Здѣсь мы прежде всего займемся геометрическимъ представленіемъ составленныхъ по нѣкоторымъ законамъ простыхъ функцій, съ которыми мы уже познакомились въ предыдущихъ главахъ. Это были, прежде всего, цѣлыя и дробныя раціональныя функціи, затѣмъ радикалы, логариѳмы, показательныя функціи и, наконецъ, тригонометрическія функціи и обратныя имъ круговыя функціи — arc sin, arc cos, arc tang.

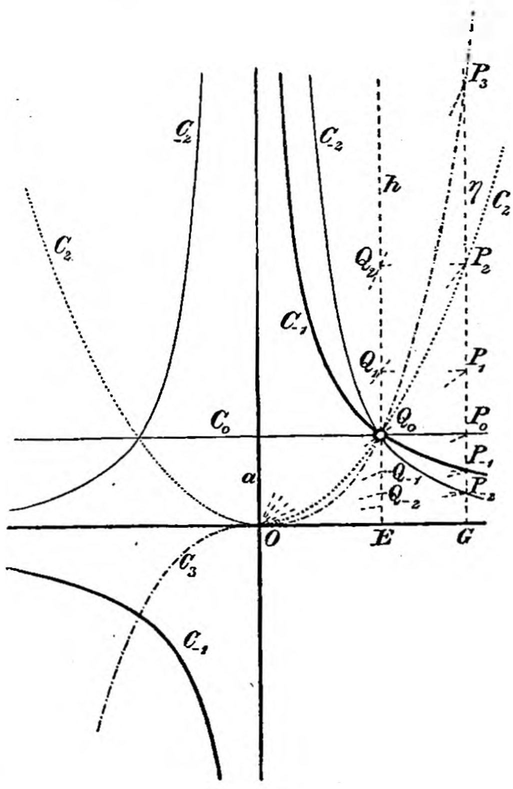
Цѣлая функція первой степени или линейная функція

$$y = ax + b \tag{1}$$

представляется прямою линіею. Это подробнѣе разъясняется въ аналитической геометріи, но также непосредственно усматривается на фигурѣ 31, изъ которой выводится уравненіе

$$\frac{y-b}{x} = \operatorname{tg} \alpha,$$

обращающееся въ уравненіе (1) при помощи подстановки $a = \operatorname{tg} \alpha$. Отрѣзокъ b на оси y-овъ считается отрицательнымъ, когда ось y-овъ пересѣкается прямою ниже нулевой точки. Подобнымъ же образомъ, уголъ α считается отрицательнымъ, когда прямая образуетъ съ положительнымъ направленіемъ оси x-овъ тупой или отрицательный острый уголъ.



Фиг. 32.

3. Цѣлая функція 2-й степени $y = f(x)$, какъ мы это уже раньше видѣли (§ 102), представляется параболой. Если степень функціи $f(x)$ выше 2-й, то каждому значенію абсциссы x все еще соотвѣтствуетъ одно опредѣленное значеніе ординаты y. Эти кривыя называются параболами высшихъ порядковъ. Если, напримѣръ, $y = ax^n$, то кривыя C_n (фиг. 32), соотвѣтствующія $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, могутъ быть получаемы послѣдовательно одна изъ другой по слѣдующему рекуррентному способу. Отложивъ на оси x-овъ отъ начала координатъ отрѣзки $OE = 1$ и $OG = x$, возставимъ къ ней въ точкахъ E и G перпендикуляры h и η, нанесемъ на h отрѣзокъ $EQ = a$, сообразуясь при этимъ со знакомъ числа a, который на фигурѣ 32 взятъ положительнымъ. Проведемъ прямую OQ_0 до

встрѣчи съ прямою η въ точкѣ P_1, черезъ которую проведемъ прямую P_1Q_1, перпендикулярную къ $\mathfrak{h}$; проведемъ прямую OQ_1 до встрѣчи съ прямой η въ точкѣ P_2, черезъ которую проведемъ прямую P_2Q_2, перпендикулярную къ $\mathfrak{h}$; проведемъ прямую OQ_2 до встрѣчи съ прямою η въ точкѣ P_3, черезъ которую проведемъ прямую P_3Q_3, перпендикулярную къ $\mathfrak{h}$ и т. д. Идя отъ точки P_1 въ обратную сторону, проводимъ прямую Q_0P_0, перпендикулярную къ η; беремъ точку пересѣченія Q_{-1} прямыхъ OP_0 и $\mathfrak{h}$ и черезъ нее проводимъ прямую $Q_{-1}P_{-1}$, перпендикулярную къ η; беремъ точку пересѣченія Q_{-2} прямыхъ OP_{-1} и $\mathfrak{h}$ и черезъ нее проводимъ прямую $Q_{-2}P_{-2}$, перпендикулярную къ η и т. д. Тогда всѣ точки неограниченнаго съ двухъ сторонъ ряда точекъ

$$\ldots, P_{-3}, P_{-2}, P_{-1}, P_0, P_1, P_2, P_3, \ldots$$

получаются послѣдовательно по одному и тому же закону, и мы утверждаемъ, что P_n есть точка кривой C_n, соотвѣтствующая абсциссѣ x. Ибо, если y_ν есть ордината точки P_ν, гдѣ ν можетъ быть цѣлымъ положительнымъ или отрицательнымъ числомъ, а также и нулемъ, то изъ подобія треугольниковъ OGP_ν и $OEQ_{\nu-1}$ вытекаетъ, что $y_\nu : y_{\nu-1} = x:1$, т. е. $y_\nu = xy_{\nu-1}$. Такимъ образомъ имѣемъ:

$$y_\nu = xy_{\nu-1} = x^2y_{\nu-2} = \cdots = x^ny_{\nu-n},$$

и 1) при $\nu = n$:

$$y_n = x^ny_0 = x^na,$$

2) при $\nu = 0$:

$$y_0 = x^ny_{-n}, \quad y_{-n} = y_0x^{-n} = ax^{-n},$$

что и требовалось доказать.

4. Въ видѣ примѣровъ дробныхъ раціональныхъ функцій разсмотримъ двѣ функціи

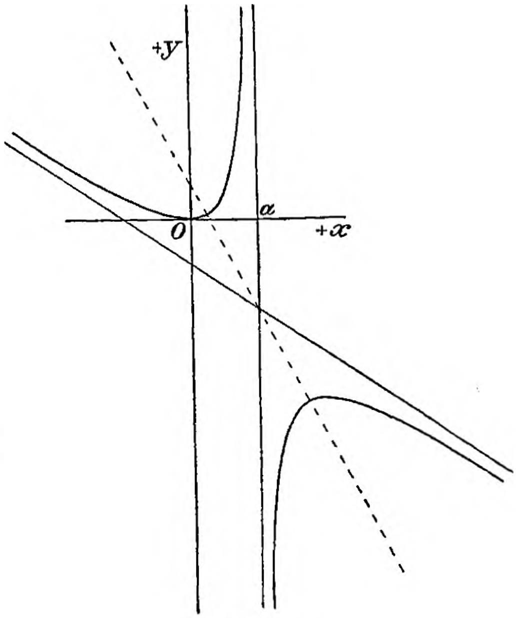
$$y = \frac{cx^2}{a-x}, \quad y = \frac{1}{1-x^2}.$$

Первая функція y остается положительною при $x < a$ [1]), отрицательною при $x > a$ *). При $x = 0$ будетъ также $y = 0$, и функція y имѣетъ здѣсь minimum, потому что она не переходитъ отъ положительныхъ значеній къ отрицательнымъ, а возвращается отъ нуля къ положительнымъ же

[1]) Коэффиціентъ c считается положительнымъ.

значеніямъ. При $x = a$ и при $x = \pm\infty$ функція y становится безконечной [2]). (Фигура 33. Кривая есть гипербола).

Во второмъ случаѣ функція y будетъ положительной, когда величина x содержится между -1 и $+1$, и обращается въ безконечность для обоихъ этихъ предѣльныхъ значеній x. При $x > 1$ или $x < -1$



Фиг. 33.

функція y остается отрицательною и исчезаетъ при безконечномъ значеніи x. Полагая

$$y_1 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-x}, \quad y_2 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+x},$$

получаемъ: $y = y_1 + y_2$. Ординатамъ y_1, y_2 соотвѣтствуютъ двѣ равностороннія гиперболы. Ордината y, соотвѣтствующая разсматриваемой кривой, будетъ получаться сложеніемъ ординатъ y_1, y_2, какъ показываетъ фигура 34.

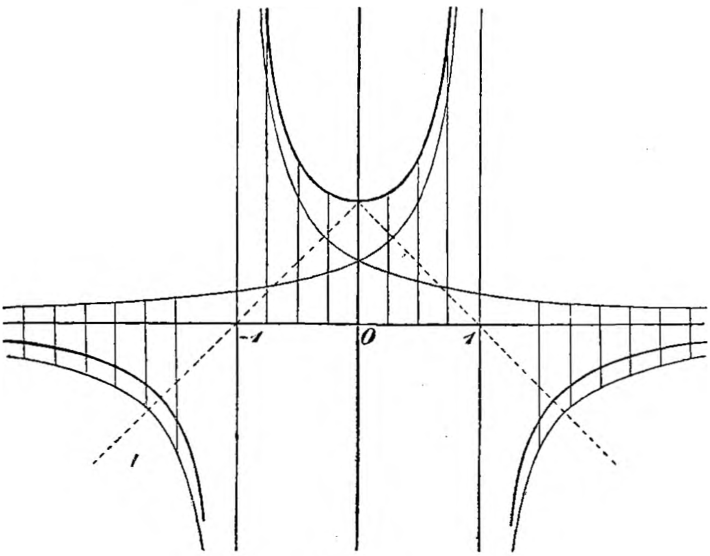
5. Въ § 126 мы познакомились съ показательной функціей

$$y = e^x. \tag{2}$$

---

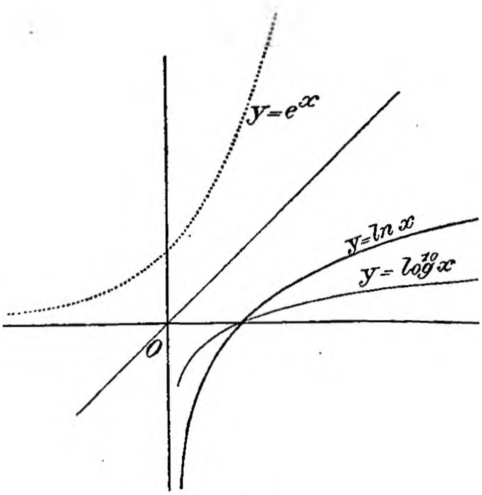
[2]) Ибо $\lim\limits_{x=\pm\infty} \frac{cx^2}{a-x} = \lim\limits_{x=\pm\infty} \left(\frac{cx}{\frac{a}{x} - 1}\right) = \mp\infty.$

Функція y имѣетъ только положительныя значенія и постоянно возрастаетъ вмѣстѣ съ x; она становится безконечно малой при $x = -\infty$ и безконечно большой при $x = +\infty$; далѣе, $y = 1$ при $x = 0$ и $y = e$ при $x = 1$. Пунктирная линія фугуры 35 показываетъ ходъ кривой.



Фиг. 34.

Кривая $y = a^x = e^{x \ln a}$ имѣетъ совершенно подобный ходъ, только абсциссы x слѣдуетъ уменьшить въ отношеніи $1 : \ln a$.



Фиг. 35.

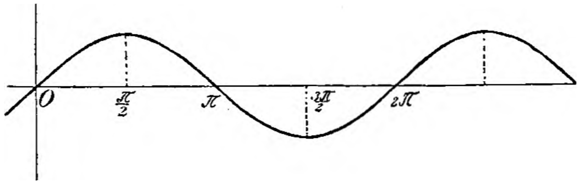
Когда функція графически представлена, то образъ обратной функціи получается простымъ отраженіемъ первой фигуры въ равнодѣлящей [3]) перваго и третьяго квадранта. Этимъ способомъ на фиг. 35 изъ пунктирной кривой $y = e^x$ получена логариѳмическая кривая $y = \ln x$. Болѣе тонко начерченная линія соотвѣтствуетъ бриггову логариѳму.

6. Если въ уравненіи

$$y = \sin x \qquad (3)$$

[3]) Принимаемой за плоское зеркало.

измѣрять уголъ x дуговою мѣрою, то получится кривая, имѣющая разнообразныя примѣненія и извѣстная подъ именемъ **синусоиды**. Ордината y постоянно остается между -1 и $+1$ и попеременно принимаетъ эти значенія, когда значенія x равны нечетнымъ кратнымъ числа $\frac{1}{2}\pi$, между тѣмъ какъ для значеній x, кратныхъ числа π, ордината равна нулю. Кривая состоитъ изъ безчисленнаго множества конгруэнтныхъ дугъ, изъ коихъ каждая, въ свою очередь, распадается на двѣ симметричныя половины



Фиг. 36.

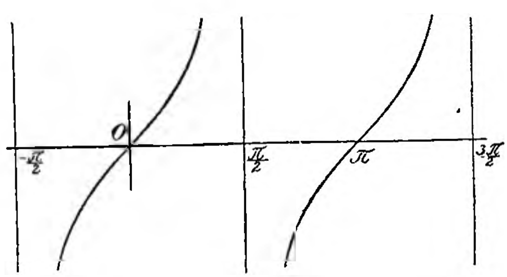
$(\sin x = \sin(\pi - x))$ (фигура 33). Мы будемъ называть кривую **періодическою** съ періодомъ 2π.

Линія косинусовъ имѣетъ тотъ же видъ. Она получается изъ синусоиды перемѣщеніемъ послѣдней параллельно оси x-овъ на длину $\frac{1}{2}\pi$, какъ это видно изъ равенства $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

7. Мы разсмотримъ еще кривую

$$y = \operatorname{tg} x. \tag{4}$$

Она состоитъ изъ безконечнаго числа конгруэнтныхъ частей и также періодична съ періодомъ π. Ордината



Фиг. 37.

становится безконечной, когда x есть нечетное кратное числа $\frac{1}{2}\pi$ (фиг. 37).

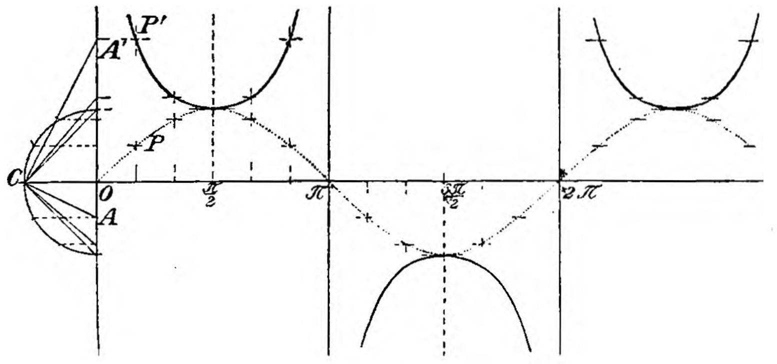
Другими примѣрами могутъ служить еще функціи

$$y = \operatorname{cosec} x = 1/\sin x, \tag{5}$$

$$y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \tag{6}$$

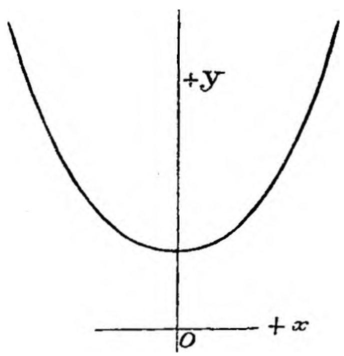
которыя на фигурахъ 38 и 39 представлены при помощи кривыхъ.

Кривая косекансовъ $y' = 1/\sin x$ получается изъ синусоиды, если положить $yy' = 1$. Отложимъ для этой цѣли на оси ординатъ отъ начала



Фиг. 38.

отрѣзокъ, обратный по знаку, но равный по величинѣ ординатѣ нѣкоторой точки P синусоиды. Если A есть конецъ этого отрѣзка и OC есть отрѣзокъ на оси x-овъ, равный 1, то перпендикуляръ, возставленный изъ точки C къ прямой AC, встрѣчаетъ ось y-овъ въ точкѣ A', ордината которой по величинѣ обратна ординатѣ точки P, ибо $OC^2 = OA \cdot OA'$. Точкѣ A' соотвѣтствуетъ на кривой косекансовъ точка P', имѣющая ординату, равную OA', и такую же абсциссу, какую имѣетъ точка P.



Фиг. 39.

Кривая, представленная уравненіемъ (6), имѣетъ ту форму, какую принимаетъ укрѣпленная на концахъ свободно висящая цѣпь; кривая называется поэтому цѣпною линіей. (Фигура 39).

§ 146. Дифференціалъ и производная.

1. Отрѣзокъ $\overline{PQ}$, соединяющій двѣ точки кривой, называется хордой кривой; продолжая хорду неопредѣленно, получаютъ сѣкущую кривой.

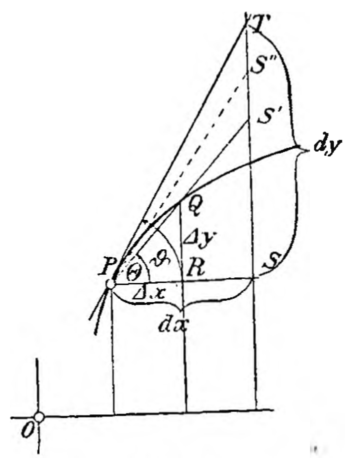
Если x, y суть координаты точки P на кривой, $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ — координаты другой точки Q на кривой и θ есть уголъ, образуемый сѣкущей $\overline{PQ}$ съ положительной осью x-овъ, то (фиг. 40)

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Приращенія Δx, Δy перемѣнныхъ x и y называются также **разностями** x и y, а отношеніе $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ — **отношеніемъ разностей**.

Взявъ произвольную точку S на прямой, проходящей черезъ точку P параллельно оси x-овъ, и обозначивъ отрѣзокъ PS черезъ dx, а отрѣзокъ [4]) SS' черезъ δy, мы изъ подобія треугольниковъ PQR и $PS'S$ находимъ, что

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\delta y}{dx}.$$



Фиг. 40.

Съ приближеніемъ точки Q къ точкѣ P величины Δx и Δy измѣняются. Если же при этомъ не измѣнять величины dx, то точка S' будетъ перемѣщаться по линіи ST и придетъ, положимъ, въ положеніе S''. Уголъ θ также измѣняется, и когда онъ переходитъ въ θ', то $\operatorname{tg}\theta' = \delta' y : dx$ [5]).

Если точка Q **неограниченно** приближается къ точкѣ P, то величины Δx и Δy становятся **безконечно малыми**. Точка S' приближается къ **предѣльному положенію** T, и **предѣльное положеніе** PT сѣкущей называется **касательной къ кривой**. Уголъ θ приближается къ **предѣльному значенію** ϑ, и если мы обозначимъ черезъ dy отрѣзокъ ST, то

$$dy = \operatorname{tg}\vartheta\, dx, \quad \operatorname{tg}\vartheta = \frac{dy}{dx}. \qquad (2)$$

Отрѣзокъ dy называется **дифференціаломъ** функціи y. Онъ зависитъ отъ положенія точки P на кривой и отъ произвольно выбраннаго отрѣзка dx, который называется **дифференціаломъ независимаго перемѣннаго** x. Частное $dy : dx$ **не зависитъ**, однако, отъ произвольно выбранной величины dx и называется **дифференціальнымъ коэффи-**

---

[4]) Точка S' есть пересѣченіе прямой PQ съ прямой, проходящей черезъ точку S параллельно оси y-овъ.

[5]) $\delta' y = \overline{SS''}$.

ціентомъ функціи y по x или относительно x. Онъ такъ же, какъ и y, есть функція отъ x и потому называется также производною функціей или просто производною отъ y и обозначается черезъ y'. Если $y = f(x)$ есть данная функція, то

$$y' = f'(x) \tag{3}$$

есть производная функція

Производная есть предѣлъ, который непосредственно представляется въ видѣ $0/0$:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \tag{4}$$

а дифференціалъ, при произвольно взятомъ dx, есть

$$dy = y' dx. \tag{5}$$

Мы объединимъ всѣ эти разсужденія въ одномъ предложеніи:

Производная отъ функціи есть тригонометрическій тангенсъ угла, который касательная къ кривой, изображающей функцію y, образуетъ съ положительною осью x-овъ [6]).

2. Два угла, отличающіеся одинъ отъ другого на π, имѣютъ одинъ и тотъ же тригонометрическій тангенсъ. Онъ имѣетъ положительное значеніе для остраго угла и отрицательное для тупого или отрицательнаго остраго угла. Въ равенствахъ (1) и (2) углы θ и ϑ должны быть измѣряемы сообразно съ поворотомъ, при помощи котораго оси x-овъ можно дать направленіе сѣкущей или касательной, такъ что углы θ и ϑ должны быть взяты отрицательными, когда вращеніе направлено отъ положительной оси x-овъ къ отрицательной оси y-овъ.

Если въ равенствѣ (1) Δx и Δy имѣютъ положительные знаки, то перемѣнныя y и x возрастали при переходѣ отъ точки P къ точкѣ Q; когда Δx есть величина положительная, а Δy — отрицательная, то функція y убывала, когда перемѣнная x возрастала. Если, слѣдовательно, про-

---

[6]) Это опредѣленіе производной основано на понятіи о касательной, какъ о предѣльномъ положеніи сѣкущей, которое, въ свою очередь, ничѣмъ не опредѣлено. Если же опредѣлить производную отъ функціи въ данной точкѣ (т. е. при данномъ значеніи x), какъ предѣлъ отношенія $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, то можно будетъ затѣмъ опредѣлить касательную, какъ прямую, проходящую черезъ данную точку кривой (т. е. черезъ точку кривой, имѣющую данныя координаты) и образующую съ положительнымъ направленіемъ оси x-овъ уголъ, тангенсъ котораго равенъ производной въ этой точкѣ. Въ случаѣ отсутствія производной, т. е. предѣла отношенія $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, нѣтъ и касательной въ разсматриваемой точкѣ кривой.

изводная y' отлична отъ нуля, то для достаточно малаго положительнаго значенія Δx знакъ величины Δy будетъ совпадать со знакомъ производной y', и мы заключаемъ:

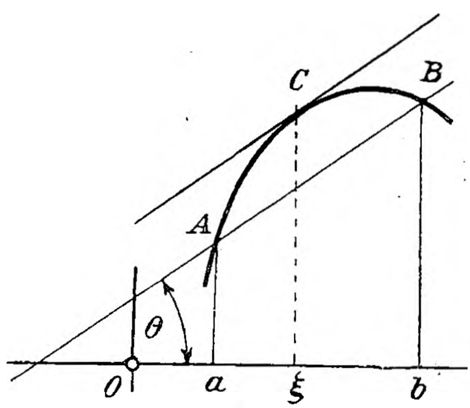
Когда въ точкѣ P производная y' есть величина положительная, то y возрастаетъ вмѣстѣ съ x, а если y' есть величина отрицательная, то y убываетъ съ возрастаніемъ x.

Если y' въ точкѣ P есть нуль, то мы не можемъ судить по y' о возрастаніи или убываніи функціи y. Но если y' при прохожденіи въ точкѣ P черезъ нуль переходитъ отъ отрицательныхъ значеній къ положительнымъ, то y будетъ переходить отъ убыванія къ возрастанію; въ точкѣ P функція y имѣетъ наименьшее значеніе, minimum; точно такъ же y имѣетъ наибольшее значеніе, maximum, когда y' переходитъ отъ положительныхъ къ отрицательнымъ значеніямъ. Въ такихъ точкахъ касательная параллельна оси x-овъ. На нашихъ фигурахъ 33, 34, 36, 38 и 39 легко узнать такія точки.

3. Итакъ, производная $y' = f'(x)$ опредѣляетъ, согласно равенству (2), направленіе касательной въ точкѣ x, y кривой $y = f(x)$. Пользуясь этимъ, мы докажемъ предложеніе, извѣстное подъ именемъ теоремы о среднемъ значеніи. Пусть a и b будутъ абсциссы, а $f(a)$ и $f(b)$ — соотвѣтствующія ординаты двухъ точекъ кривой; тогда отношеніе

$$\frac{f(b) - f(a)}{a - b} = \operatorname{tg} \theta$$

будетъ представлять собою тангенсъ угла θ, образуемаго сѣкущей AB съ осью x-овъ (фиг. 41). Если дуга кривой между точками A и B искривляется непрерывно, то при переходѣ вдоль кривой отъ точки A къ точкѣ B касательная непрерывно мѣняетъ свое положеніе, и потому она должна одинъ, по крайней мѣрѣ, разъ — въ нѣкоторой точкѣ C, лежащей между A и B, — стать параллельной хордѣ AB. Если ξ есть абсцисса этой точки C, то $f'(\xi)$ опредѣляетъ направленіе касательной въ точкѣ C. Въ этомъ и заключается теорема о среднемъ значеніи:



Фиг. 41.

Если функція $f(x)$ и ея производная $f'(x)$ непрерывны для всѣхъ значеній перемѣнной, лежащихъ между a и b, то существуетъ такое значенie перемѣнной ξ, для котораго имѣетъ мѣсто равенство:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi), \qquad a<\xi<b. \tag{6}$$

Изъ этой теоремы вытекаетъ слѣдствie:

4. Если непрерывная функцiя $f(x)$ обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что ея производная $f'(x)$ исчезаетъ для всѣхъ значенiй перемѣнной x, то $f(x)$ есть постоянная величина.

Ибо при указанномъ предположенiи изъ соотношенiя (6) слѣдуетъ, что для любыхъ значенiй перемѣнной a и b имѣетъ мѣсто равенство:

$$f(a)=f(b).$$

Поэтому

5. Если двѣ непрерывныя функцiи $F(x)$ и $F_1(x)$ имѣютъ одну и ту же производную $F'(x)=F_1'(x)$, то между функцiями $F(x)$ и $F_1(x)$ существуетъ соотношенie

$$F_1(x)=F(x)+C,$$

гдѣ C есть постоянная величина.

§ 147. Дифференцiалы простыхъ функцiй.

1. Чтобы найти производную отъ функцiи $y=f(x)$, полагаютъ $\Delta x=h$, $\Delta y=f(x+h)-f(x)$ и получаютъ:

$$y'=\lim_{h=0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \tag{1}$$

Если возможно выполнить дѣленie въ правой части, то послѣ этого можно прямо положить $h=0$.

Такъ, напримѣръ, полагая въ равенствѣ (5) § 63-го

$$\frac{a^n-b^n}{a-b}=a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+b^{n-1}$$

$a=x+h$, $b=x$, найдемъ:

$$\lim_{h=0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=nx^{n-1};$$

слѣдовательно,

$$d(x^n)=nx^{n-1}dx; \tag{2}$$

и вообще, когда $f(x)$ есть цѣлая функція, а $f'(x)$ ея производная, то

$$df(x) = f'(x)\,dx, \tag{3}$$

какъ это слѣдуетъ и изъ § 66.

2. Равенство (2) доказано пока только для цѣлаго значенія n. Пусть теперь μ будетъ произвольное раціональное или ирраціональное число. Ограничимся, во избѣжаніе многозначности, положительными значеніями x: тогда x^μ будетъ однозначная функція, имѣющая только положительныя значенія. Положимъ теперь

$$f(x) = x^\mu, \quad f(x+h) = (x+h)^\mu = x^\mu\left(1+\frac{h}{x}\right)^\mu,$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = x^\mu\,\frac{\left(\left(1+\frac{h}{x}\right)^\mu - 1\right)}{h}.$$

При $h < x$ къ правой части этого равенства можно примѣнить теорему о биномѣ (§ 130), при чемъ находимъ:

$$\frac{x^\mu}{h}\left(\left(1+\frac{h}{x}\right)^\mu - 1\right) = x^\mu\left(\mu\frac{1}{x} + \frac{\mu.(\mu-1)}{1.2}\frac{h}{x^2} + \cdots\right);$$

полагая $h = 0$, имѣемъ:

$$d(x^\mu) = \mu x^{\mu-1}dx, \tag{4}$$

какъ и въ равенствѣ (2).

3. Точно такъ же находимъ изъ разложенія (7) § 132-го:

$$\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \frac{1}{h}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{h}{2x^2} + \frac{h^2}{3x^3} - \cdots;$$

поэтому, полагая $h = 0$, имѣемъ:

$$d\ln x = \frac{dx}{x}. \tag{5}$$

4. Для показательной функціи e^x имѣемъ:

$$\frac{1}{h}(e^{x+h} - e^x) = e^x\left(\frac{e^h-1}{h}\right);$$

полагая $e^h - 1 = h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \cdots$ и $h = 0$, находимъ:

$$de^x = e^x dx. \tag{6}$$

5. Изъ тригонометрическихъ формулъ (томъ II, § 29. (5))

$$\sin(x+h) - \sin x = \quad 2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2},$$

$$\cos(x+h) - \cos x = -\ 2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2},$$

при помощи предѣльнаго равенства $\frac{2}{h}\sin\frac{h}{2} = 1$ (§ 127, 4), находимъ:

$$\begin{aligned} d\sin x &= \quad \cos x\,dx, \\ d\cos x &= -\sin x\,dx. \end{aligned} \tag{7}$$

§ 148. Дифференціалы сложныхъ функцій.

1. Если y и z суть двѣ функціи отъ x, то справедливы слѣдующія тождества:

1) $$\frac{\Delta(y+z)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta z}{\Delta x}\ {}^{7)},$$

2) $$\frac{\Delta(yz)}{\Delta x} = \frac{(y+\Delta y)(z+\Delta z) - yz}{\Delta x}$$

$$= y\frac{\Delta z}{\Delta x} + z\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta y}{\Delta x}\frac{\Delta z}{\Delta x}\Delta x,$$

3) $$\frac{\Delta(y:z)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{y+\Delta y}{z+\Delta z} - \frac{y}{z}\right)$$

$$= \frac{z\frac{\Delta y}{\Delta x} - y\frac{\Delta z}{\Delta x}}{z(z+\Delta z)}.$$

2. Отсюда, съ помощью перехода къ предѣламъ при $\Delta x = 0$, получаются слѣдующія формулы для производныхъ:

$$\frac{d(y+z)}{dx} = \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx}, \tag{1}$$

$$\frac{d(yz)}{dx} = y\frac{dz}{dx} + z\frac{dy}{dx}; \tag{2}$$

---

[7]) Полагая $y=f(x)$, $z=g(x)$, находимъ послѣдовательно: $\Delta y = f(x+h) - f(x)$, $\Delta z = g(x+h) - g(x)$, $\Delta y + \Delta z = [f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)] = \Delta[f(x) - g(x)] = = \Delta(y+z)$. Аналогично доказываются и тождества 2) и 3).

въ частности, когда z имѣетъ постоянное значеніе c, находимъ:

$$\frac{d(cy)}{dx} = c\frac{dy}{dx}; \tag{3}$$

далѣе:

$$\frac{d(y:z)}{dx} = \frac{z\frac{dy}{dx} - y\frac{dz}{dx}}{z^2}. \tag{4}$$

Отсюда выводятся соотвѣтствующія формулы для дифференціаловъ:

$$d(y+z) = dy + dz, \tag{5}$$

$$d(yz) = ydz + zdy, \tag{6}$$

$$d(cy) = cdy, \tag{7}$$

$$d\frac{y}{z} = \frac{zdy - ydz}{z^2}. \tag{8}$$

Содержаніе этихъ формулъ можно выразить слѣдующими словами:

3. Дифференціалъ суммы равенъ суммѣ дифференціаловъ слагаемыхъ.

4. Дифференціалъ произведенія равенъ суммѣ, составленной изъ произведенія перваго множителя на дифференціалъ второго и произведенія второго множителя на дифференціалъ перваго.

5. Дифференціалъ дроби [8]) получается по такому правилу: изъ произведенія знаменателя на дифференціалъ числителя надо вычесть произведеніе числителя на дифференціалъ знаменателя и разность раздѣлить на квадратъ знаменателя.

6. Примѣняя повторно эти правила, можно составить дифференціалы всѣхъ тѣхъ функцій, которыя получаются изъ функцій, дифференціалы которыхъ уже извѣстны, при помощи раціональныхъ операцій, т. е. при помощи сложенія, вычитанія, умноженія и дѣленія.

Положивъ, напримѣръ, въ равенствѣ (8)

$$y = \sin x, \qquad z = \cos x,$$
$$dy = \cos x\, dx, \quad dz = -\sin x\, dx,$$

---

[8]) Или частнаго.

получимъ:

$$d\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}dx,$$

такъ что

$$d\,\mathrm{tg}x=\frac{dx}{\cos^2 x};\tag{9}$$

подобнымъ же образомъ найдемъ, что

$$d\,\mathrm{cotg}x=\frac{-dx}{\sin^2 x}.\tag{10}$$

Полагая $y=1$, $z=\cos x$, найдемъ:

$$d\sec x=-\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx.\tag{11}$$

7. Когда y есть функція отъ x, а z есть функція отъ y, то можно и на z смотрѣть, какъ на функцію отъ x, и вообще на каждыя двѣ изъ трехъ величинъ x, y, z можно смотрѣть, какъ на функцію отъ третьей. Приращенію Δx перемѣнной x будутъ соотвѣтствовать приращенія Δy, Δz перемѣнныхъ y и z. Величины Δy, Δz являются тогда функціями отъ Δx, и если одна изъ нихъ становится безконечно малой, то такими же дѣлаются и двѣ другія

Если приращеніе Δz равно нулю при всякомъ значеніи Δx, то z есть постоянная.

Изъ тожества

$$4)\quad \frac{\Delta z}{\Delta x}=\frac{\Delta z}{\Delta y}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

слѣдуетъ:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx},\tag{12}$$

$$dz=\frac{dz}{dy}dy.\tag{13}$$

8. Эта формула гласитъ:

Если z есть функція отъ y, а y есть функція отъ x, то дифференціалъ отъ z получается, какъ произведеніе производной отъ z по y на дифференціалъ отъ y.

Или другими словами:

9. Тремъ перемѣннымъ x, y, z можно приписать три дифференціала dx, dy, dz такимъ образомъ, что одинъ изъ нихъ будетъ произвольнымъ и частное какихъ-либо двухъ изъ дифференцiаловъ будетъ дифференцiальнымъ коэффицiентомъ соотвѣтственной перемѣнной.

Если, напримѣръ,

$$z = \ln y, \quad y = \sin x, \quad dy = \cos x\, dx, \quad dz/dy = 1/y,$$

то

$$d \ln \sin x = \operatorname{cotg} x\, dx; \tag{14}$$

подобнымъ же образомъ

$$d \ln \cos x = -\operatorname{tg} x\, dx, \tag{15}$$

$$d \ln \operatorname{tg} x = \frac{d \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x} = \frac{dx}{\sin x \cos x} = \frac{2dx}{\sin 2x}. \tag{16}$$

10. Равенство (12) даетъ также возможность составлять дифференцiалы такихъ функцiй, которыя получаются черезъ обращенiе функцiй, дифференцiалы которыхъ уже извѣстны. А именно, полагая въ равенствѣ (12) $z = x$, имѣемъ:

$$\frac{dx}{dy}\frac{dy}{dx} = 1,$$

и когда dx/dy извѣстно, то отсюда получаютъ dy/dx, какъ обращенную дробь.

Возьмемъ, напримѣръ, $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$, такъ что $x = \operatorname{tg} y$; согласно равенству (9), получимъ:

$$dx = \frac{dy}{\cos^2 y}.$$

Но по формуламъ тригонометрiи (томъ II, § 26, (5))

$$\frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \operatorname{tg}^2 y = 1 + x^2$$

и, слѣдовательно, $dy = dx/(1 + x^2)$, такъ что

$$d \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \frac{dx}{1 + x^2}. \tag{17}$$

Если же положить

$$y = \arcsin x, \quad x = \sin y, \quad dx = \cos y\, dy,$$

то изъ равенствъ $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$, получимъ:

$$d \arcsin x = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}. \tag{18}$$

Эти краткія указанія не имѣютъ даже той цѣли, чтобы ввести читателя въ начальныя основанія дифференціальнаго исчисленія. Имѣлось только въ виду показать, какъ изъ разложеній въ ряды, полученныхъ элементарнымъ путемъ, почти сами собою выводятся основныя понятія этого исчисленія, и мы сдѣлаемъ еще только историческое указаніе на то, что Лагранжъ (Lagrange) думалъ одолѣть именно этимъ путемъ трудности, связанныя со строгимъ обоснованіемъ исчисленія безконечно малыхъ *).

Дифференціальное исчисленіе и связанное съ нимъ интегральное исчисленіе называютъ исчисленіемъ безконечно малыхъ и разсматриваютъ, большею частью, какъ начало „высшей математики". При всякомъ изученіи математики и примѣненіи ея необходимо освоиться съ методами и пріемами исчисленія безконечно малыхъ такъ же, какъ и съ таблицей умноженія. Этого можно достичь только при помощи многочисленныхъ упражненій на примѣрахъ, которые, естественно, остаются внѣ предѣловъ этой книги. Существуютъ различные сборники задачъ, употребленіе которыхъ будетъ полезнымъ для этой цѣли; таковы сборники Шлёмильха (Schlömilch), Зонке (Sohnke, neu herausgegeben von Amstein), Дёльпа (Dölp, neu herausgegeben von Netto) и другіе [9]). Богатый матеріалъ для упражненій содержится также въ каждомъ болѣе обширномъ учебникѣ дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій, изъ коихъ наиболѣе распространенными у насъ являются учебники Штегеманна (Stegemann, bearbeitet von Kiepert) и Серре (Serret, bearbeitet von Harnack, später von Bohlmann, zuletzt von Scheffers), а также книга Чубера (Czuber) „Vorlesungen über Differential- und Jntegralrechnung". Ср. докладъ Больманна „Обзоръ важнѣйшихъ учебниковъ по исчисленію безконечно малыхъ отъ Эйлера до новѣйшаго времени" (Bohlmann: „Übersicht über die wichtigsten Lehrbücher der Infinitesimalrechnung von Euler bis auf die heutige Zeit") въ журналѣ „Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" (Bd. VI, 1897).

§ 149. Теоремы Тейлора и Маклорена.

1. Если $y = f(x)$ есть функція отъ x, то и производная $y' = f'(x)$ есть функція отъ x. Взявъ отъ нея производную, мы получимъ вторую производную отъ функціи $f(x)$ и, продолжая такимъ же образомъ, получимъ рядъ высшихъ производныхъ отъ $f(x)$:

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ \ldots \qquad (1)$$

Для случая, когда $f(x)$ есть цѣлая функція, мы получили всѣ эти функціи въ § 141 изъ теоремы о биномѣ и видѣли, что эти производныя

*) Lagrange, „Théorie des Fonctions analytiques." Prairial an V (1797).

[9]) На русскомъ языкѣ можно указать сборники задачъ Вѣры Шиффъ и Хмырова.

также суть цѣлыя функціи, и что степень каждой слѣдующей на единицу ниже степени предшествующей. Поэтому, если функція $f(x)$ будетъ n-ой степени, то n-ая производная будетъ постоянная, а высшія производныя равны нулю.

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ рядъ производныхъ функцій составляется по простому закону. Если, напримѣръ, $y = x^\mu$ есть степень, то n-ая производная выражается такъ:

$$y^{(n)} = \mu(\mu - 1) \ldots (\mu - n + 1) x^{\mu - n}, \tag{2}$$

и это имѣетъ мѣсто также для отрицательныхъ и дробныхъ показателей μ. При $y = e^x$ всѣ производныя равны той же функціи e^x, а для $\sin x$ и $\cos x$ рядъ (1) переходитъ въ ряды:

$$\begin{array}{l} \sin x,\ \cos x,\ -\sin x,\ -\cos x,\ \sin x,\ \cos x,\ -\sin x,\ \ldots \\ \cos x,\ -\sin x,\ -\cos x,\ \sin x,\ \cos x,\ -\sin x,\ -\cos x,\ \ldots \end{array} \tag{3}$$

2. Пусть

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots \tag{4}$$

будетъ степенной рядъ и допустимъ, что онъ сходится абсолютно, когда абсолютное значеніе x равно r или меньше r.

Въ п. 8 § 124-го мы показали, что въ этомъ случаѣ сходится и рядъ

$$\Phi(x) = c_0 x + \frac{c_1 x^2}{2} + \frac{c_2 x^3}{3} + \cdots + \frac{c_n x^{n+1}}{n+1} + \cdots, \tag{5}$$

если только

$$|x| < r. \tag{6}$$

Мы докажемъ теорему:

3. Рядъ $f(x)$ есть производная функція отъ $\Phi(x)$.

Для доказательства беремъ числа x и $x + h$ столь малыми, чтобы оба они удовлетворяли условію (6). Тогда по п. 5 § 51-го при всякомъ [10]) показателѣ m:

$$\frac{(x+h)^m - x^m}{h} = (x+h)^{m-1} + (x+h)^{m-2} x + \cdots + x^{m-1} < m r^{m-1} \tag{7}$$

(по абсолютной величинѣ).

---

[10]) Цѣломъ.

Если же положить:

$$R_n(x) = \frac{c_{n+1} x^{n+2}}{n+2} + \frac{c_{n+2} x^{n+3}}{n+3} + \cdots,$$

то изъ соотношенiй (7) получимъ:

$$\left| \frac{R_n(x+h) - R_n(x)}{h} \right| < |c_{n+1}| \, r^{n+1} + |c_{n+2}| \, r^{n+2} + \cdots,$$

и это выраженiе, въ силу допущенной нами абсолютной сходимости ряда (4), можетъ быть сдѣлано, независимо отъ значенiй x и h [11]), меньше всякаго напередъ заданнаго положительнаго числа ω, если только взять n достаточно большимъ.

Но

$$\frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = c_0 + c_1 \frac{(x+h)^2 - x^2}{2h} + \cdots + c_n \frac{(x+h)^{n+1} - x^{n+1}}{(n+1)h} + \\ + \frac{R_n(x+h) - R_n(x)}{h}.$$

Дѣлая здѣсь h безконечно малымъ, мы по опредѣленiю производной получаемъ:

$$\Phi'(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \varrho_n,$$

гдѣ ϱ_n есть величина, которая при достаточно большомъ n можетъ стать произвольно малой, т. е. $\Phi'(x)$ есть сумма безконечнаго ряда $f(x)$, какъ это и нужно было доказать.

Функцiя $\Phi(x)$ называется **интегральною функцiей** или **интеграломъ отъ** $f(x)$.

Сообразуясь съ правиломъ дифференцированiя степеней, мы можемъ теорему п. 3 выразить и такъ:

4. Чтобы дифференцировать степенной рядъ, достаточно дифференцировать каждый его отдѣльный членъ. Кругъ сходимости при этомъ не измѣняется.

5. Теорему п. 4 можно повторно примѣнить къ функцiи $f(x)$ и ея производнымъ; тогда получимъ:

$$\begin{aligned} f(x) &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \cdots, \\ f'(x) &= c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + 5c_5 x^4 + \cdots, \\ f''(x) &= 2c_2 + 2 \cdot 3c_3 x + 3 \cdot 4c_4 x^2 + 4 \cdot 5c_5 x^3 + \cdots, \\ f'''(x) &= 2 \cdot 3c_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4c_4 x + 3 \cdot 4 \cdot 5c_5 x^2 + \cdots, \end{aligned} \tag{8}$$

[11]) удовлетворяющихъ, однако, соотношенiямъ $|x| < r$ и $|x+h| < r$.

и вообще

$$f^{(n)}(x) = n!\,c_n + \frac{(n+1)!}{1!}\,c_{n+1}x + \frac{(n+2)!}{2!}\,c_{n+2}x^2 + \\ + \frac{(n+3)!}{3!}\,c_{n+3}x^3 + \cdots, \tag{9}$$

— формула, которую легко доказать методомъ полной индукціи.

6. Положивъ $x = 0$ въ равенствахъ (8) и (9), получаемъ:

$$c_0 = f(0),\quad c_1 = f'(0),\quad c_2 = \frac{1}{2!}f''(0),\quad c_3 = \frac{1}{3!}f'''(0),\ \ldots,$$

$$c_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(0),$$

откуда

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \cdots. \tag{10}$$

Эта формула называется **рядомъ Маклорена**.

7. Этой формулѣ мы дадимъ еще другой видъ. Пусть $f(x)$ будетъ функція отъ x и $f'(x)$ ея производная. Замѣнимъ x черезъ $x + h$ и станемъ разсматривать, какъ перемѣнную, одинъ разъ величину x, другой разъ величину h. Согласно формулѣ (12) § 148-го,

$$\frac{df(x+h)}{dh} = f'(x+h)\frac{d(x+h)}{dh} = f'(x+h).$$

Выполнивъ дифференцированіе и положивъ $h = 0$, находимъ:

$$\left(\frac{df(x+h)}{dh}\right)_{h=0} = f'(x);$$

соотвѣтственныя равенства можно установить и для высшихъ производныхъ.

Отсюда слѣдуетъ, что, разсматривая $f(x+h)$, какъ функцію отъ h, мы найдемъ для нея, согласно формулѣ (10), слѣдующее разложеніе по степенямъ h:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \cdots; \tag{11}$$

эта формула называется **рядомъ Тейлора** *). Изъ нея обратно выведемъ рядъ (10), полагая $x = 0$ и замѣняя потомъ h на x.

---

*) Brook Taylor (1685—1731) издалъ въ 1715 г. сочиненіе „Methodus incrementorum", въ которомъ содержится это разложеніе. Colin Mac Laurin (1698—1746) въ своемъ сочиненіи „Treatise of fluxions", 1742. далъ формулу (10).

8. При выводѣ этихъ формулъ мы исходили изъ предположенія, что функція $f(x)$ съ самаго начала опредѣлена степеннымъ рядомъ. Поэтому, если допустимъ одну только возможность разложенія функціи въ рядъ вида (10) или (11), то мы получимъ самое разложеніе, составляя производныя отъ функціи.

Вопросъ объ условіяхъ возможности такого разложенія мы не относимъ уже къ элементамъ. Отвѣтъ на него принадлежитъ къ важнѣйшимъ основнымъ проблемамъ теоріи функцій.

Въ отдѣльныхъ рядахъ, разсмотрѣнныхъ нами въ главахъ XXIII и XXIV, мы легко усмотримъ подтвержденіе правильности формулъ (10) и (11). Если возьмемъ, напримѣръ, биноміальный рядъ (§ 128, 1)

$$(1+z)^{\mu} = 1 + B_1^{(\mu)} z + B_2^{(\mu)} z^2 + B_3^{(\mu)} z^3 + \cdots,$$

положимъ въ немъ $z = h/x$ и умножимъ на x^{μ}, то получимъ:

$$(x+h)^{\mu} = x^{\mu} + B_1^{(\mu)} x^{\mu-1} h + B_2^{(\mu)} x^{\mu-2} h^2 + \cdots + B_n^{(\mu)} x^{\mu-n} h^n + \cdots,$$

откуда при сравненіи съ равенствомъ (11) найдемъ, какъ и выше, что n-ая производная отъ x^{μ} равна

$$B_n^{(\mu)} n!\, x^{\mu-n} = \mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)\, x^{\mu-n}.$$

9. Отбрасывая въ степенномъ ряду (10) члены, слѣдующіе за n-ой степенью перемѣнной x, мы получаемъ цѣлую функцію n-ой степени, которая, въ предположеніи сходимости ряда, приближенно совпадаетъ съ функціей $f(x)$. Такимъ образомъ, для функціи $f(x)$ найдена цѣлая функція $\varphi(x)$, которая обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что она и n ея первыхъ производныхъ совпадаютъ соотвѣтственно съ функціей $f(x)$ и ея производными при одномъ значеніи x (при $x = 0$); въ нѣкоторыхъ случаяхъ эта функція $\varphi(x)$ можетъ замѣнять собой функцію $f(x)$. Существуетъ, однако, и другой способъ для приближеннаго изображенія любой функціи $F(x)$ въ видѣ цѣлой функціи n-ой степени, а именно разыскиваютъ цѣлую функцію $\varphi(x)$, значенія которой соотвѣтственно равны значеніямъ функціи $F(x)$ при $n+1$ значеніяхъ x:

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n.$$

Эта задача уже рѣшена въ § 69 при помощи интерполяціонной формулы Лагранжа. Полагая, какъ тамъ,

$$f(x) = (x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n), \tag{12}$$

мы по указаннымъ тамъ формуламъ (7) находимъ:

$$\varphi(x) = \frac{F(a_0) f(x)}{(x-a_0) f'(a_0)} + \frac{F(a_1) f(x)}{(x-a_1) f'(a_1)} + \cdots + \frac{F(a_n) f(x)}{(x-a_n) f'(a_n)}, \tag{13}$$

вмѣсто чего можно также написать

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{F(a_i) f(x)}{(x - a_i) f'(a_i)}; \tag{14}$$

эта формула непосредственно показываетъ, что

$$\varphi(a_0) = F(a_0), \quad \varphi(a_1) = F(a_1), \ldots, \quad \varphi(a_n) = F(a_n)\ ^{12}).$$

Когда функція $F(x)$ сама есть цѣлая функція, степень которой не выше n, то функціи $\varphi(x)$ и $F(x)$ тождественны, и мы получаемъ:

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{\varphi(a_i)}{f'(a_i)(x - a_i)}. \tag{15}$$

Выраженіе (15) называется **разложеніемъ правильно-дробной функціи $\varphi(x)/f(x)$ на частныя дроби.**

§ 150. Понятіе объ интегралѣ.

1. Уже въ древности при опредѣленіи площади или объема прибѣгали къ слѣдующему средству: разсматриваемый образъ разлагали на части, которыя принимались столь малыми, чтобы безъ чувствительной погрѣшности можно было считать образъ ограниченнымъ прямыми линіями или плоскостями, и затѣмъ находили сумму всѣхъ этихъ частей. Этотъ способъ можно сдѣлать совершенно точнымъ по методу предѣловъ или по Архимедову „методу исчерпыванія". Интегральное исчисленіе обобщаетъ этотъ методъ и приводитъ его въ систему. Опираясь на прямую очевидность, элементарная математика уже издавна прибѣгала къ такимъ пріемамъ, хотя и не пользовалась при этомъ ни именемъ ни обозначеніями интегральнаго исчисленія, и геометрическая часть нашего сочиненія содержитъ много такихъ примѣровъ. Здѣсь мы хотимъ только установить со всевозможной краткостью понятіе объ интегралѣ въ его простѣйшей формѣ и аналитическомъ значеніи съ цѣлью показать, какъ оно натурально развивается изъ разсмотрѣнія площади.

. Пусть

$$y = f(x) \tag{1}$$

будетъ произвольная функція отъ x и допустимъ, что она непрерывно возрастаетъ между точками $x = a$ и $x = b$. Положимъ, что она пред-

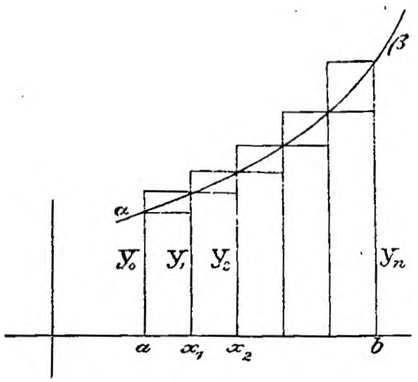
---

[12]) См. § 69, 2.

ставлена дугою $\alpha\beta$ кривой на фигурѣ 42. Требуется найти площадь S части плоскости $(ab\beta\alpha)$.

Мы дѣлимъ интервалъ $b - a = \Delta$ на n равныхъ частей, изъ коихъ каждая равна Δ/n, и проводимъ въ точкахъ дѣленія $a, x_1, x_2, \ldots, b$ ординаты $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Фигура 42 указываетъ намъ тогда двѣ площади S_1 и S_2, составленныя изъ прямоугольниковъ, при чемъ одна S_1 цѣликомъ содержится въ площади S, а другая содержитъ въ себѣ площадь S, такъ что



Фиг. 42.

$$S_1 < S < S_2, \tag{2}$$

гдѣ

$$S_1 = \frac{\Delta}{n}(y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1}),$$
$$S_2 = \frac{\Delta}{n}(y_1 + y_2 + \cdots + y_n). \tag{3}$$

Разность этихъ двухъ суммъ равна

$$S_2 - S_1 = \frac{\Delta}{n}[(y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \cdots + (y_n - y_{n-1})],$$

и если σ есть наибольшая изъ разностей $(y_1 - y_0), (y_2 - y_1), \ldots, (y_n - y_{n-1})$, то

$$S_2 - S_1 < \sigma\Delta. \tag{4}$$

Такъ какъ функція y предполагается непрерывной, то величина σ становится безконечно малой, когда число n становится безконечно большимъ. Величины S_1 и S_2 неограниченно приближаются одна къ другой и образуютъ Дедекиндово сѣченіе, которымъ опредѣляется — вообще ирраціональное — число S. Это же число S служитъ верхнею границею всѣхъ чиселъ S_1 и нижнею границею всѣхъ чиселъ S_2. Оно опредѣляется функціей $y = f(x)$ и границами a и b интервала Δ.

Это число S называется **интеграломъ функціи** $f(x)$ **между предѣлами** a и b. Мы обозначаемъ его черезъ

$$S = \int_a^b f(x)\,dx, \tag{5}$$

при чемъ подъ $f(x)dx = y\,dx$ понимаютъ площадь элементарнаго прямоугольника, сдѣлавшагося безконечно малымъ, а подъ $\int$ — знакъ суммы.

Когда функція $f(x)$, при измѣненіи x отъ a до b, не возрастаетъ, а убываетъ, то заключеніе то же, только съ тѣмъ отличіемъ, что въ неравенствахъ (2) знаки $<$ слѣдуетъ замѣнить знаками $>$.

Если же функція $f(x)$ между границами a, b переходитъ отъ возрастанія къ убыванію или наоборотъ, то интервалъ дѣлятъ на двѣ или на нѣсколько частей и къ каждой изъ нихъ примѣняютъ въ отдѣльности тѣ же разсужденія. При этомъ всегда будетъ

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &= \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \frac{\Delta}{n}(y_0+y_1+\cdots+y_{n-1}) \\ &= \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \frac{\Delta}{n}(y_1+y_2+\cdots+y_n). \end{aligned} \tag{6}$$

3. Возьмемъ въ видѣ примѣра функцію $y = x^k$, въ которой k есть цѣлое число. Сверхъ того, положимъ еще $a = 0$ и, слѣдовательно, $\Delta = b$. Тогда

$$y_1 = \left(\frac{b}{n}\right)^k, \quad y_2 = \left(\frac{2b}{n}\right)^k, \quad y_3 = \left(\frac{3b}{n}\right)^k, \quad \ldots, \quad y_n = \left(\frac{nb}{n}\right)^k;$$

поэтому

$$S_2 = \frac{b^{k+1}}{n^{k+1}}(1^k+2^k+\cdots+n^k) = \frac{b^{k+1}\sigma_n}{n^{k+1}}. \tag{7}$$

Слагаемыя содержащейся здѣсь суммы

$$\sigma_n = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$$

образуютъ ариѳметическій рядъ k-аго порядка, а суммы σ_1, σ_2, σ_3, ... сами составляютъ ариѳметическій рядъ $(k+1)$-го порядка. Такимъ образомъ, согласно формулѣ (1) § 62-го, сумма σ_n есть выраженіе вида

$$\sigma_n = \alpha_0 B_0^{(n)} + \alpha_1 B_1^{(n)} + \cdots + \alpha_{k+1} B_{k+1}^{(n)}, \tag{8}$$

въ которомъ $B_h^{(n)}$ суть биноміальные коэффиціенты и числа α_h не зависятъ отъ n. Здѣсь легко опредѣлить число α_{k+1}, ибо

$$\begin{aligned} &\sigma_n - \sigma_{n-1} = n^k = \\ &= \alpha_1(B_1^{(n)} - B_1^{(n-1)}) + \alpha_2(B_2^{(n)} - B_2^{(n-1)}) + \cdots + \alpha_{k+1}(B_{k+1}^{(n)} - B_{k+1}^{(n-1)}); \end{aligned}$$

поэтому, согласно равенству (7) § 57-го,

$$n^k = \alpha_1 B_0^{(n-1)} + \alpha_2 B_1^{(n-1)} + \cdots + \alpha_{k+1} B_k^{(n-1)}. \tag{9}$$

Это равенство k-той степени по отношенію къ n и должно удовлетворяться при всякомъ значеніи n; слѣдовательно, оно должно быть тождествомъ по отношенію къ n, такъ какъ уравненіе k-ой степени не можетъ имѣть больше, чѣмъ k корней. Но степени биноміальныхъ коэффиціентовъ $B_0^{(n-1)}, \ldots, B_{k-1}^{(n-1)}$ относительно n ниже k и только

$$B_k^{(n-1)} = \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k)}{k!}$$

есть выраженіе степени k; поэтому изъ сравненія правой и лѣвой части равенства (9) получается:

$$a_{k+1} = k!. \qquad (10)$$

Такимъ образомъ, при переходѣ частнаго σ_n/n^{k+1} къ предѣлу при $n = \infty$, выраженія

$$\frac{B_0^{(n)}}{n^{k+1}}, \quad \frac{B_1^{(n)}}{n^{k+1}}, \ldots, \frac{B_k^{(n)}}{n^{k+1}}$$

исчезаютъ, потому что степени числителей относительно n ниже степеней знаменателей. Напротивъ,

$$\frac{B_{k+1}^{(n)}}{n^{k+1}} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k)}{n^{k+1}(k+1)!}$$
$$= \frac{1}{(k+1)!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k}{n}\right),$$

и предѣлъ этого выраженія равенъ $1/(k+1)!$. Поэтому

$$\operatorname{Lim} \frac{\sigma_n}{n^{k+1}} = \frac{a_{k+1}}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1},$$

и изъ равенства (7) мы получаемъ для S_2 предѣлъ:

$$\int_0^b x^k dx = \frac{b^{k+1}}{k+1}. \qquad (11)$$

4. Когда y есть сумма $c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)$, гдѣ c_1, c_2 суть постоянные множители, то изъ опредѣленія интеграла при помощи суммъ (6) непосредственно вытекаетъ, что,

$$\int_a^b (c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x))\,dx = c_1\int_a^b \varphi_1(x)\,dx + c_2\int_a^b \varphi_2(x)\,dx; \qquad (12)$$

соотвѣтственныя равенства выводятся также для суммъ, содержащихъ больше членовъ.

Поэтому изъ равенства (11) можно прямо получить интегралъ цѣлой функціи:

Если

$$f(x) = \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \cdots + \gamma_m x^m$$

есть цѣлая функція m-ой степени, то

$$\int_0^b f(x)\,dx = \gamma_0 b + \frac{\gamma_1 b^2}{2} + \frac{\gamma_2 b^3}{3} + \cdots + \frac{\gamma_m b^{m+1}}{m+1}. \qquad (13)$$

Если станемъ разсматривать эту сумму, какъ функцію $\Phi(b)$ отъ b, то $\Phi(b)$ будетъ интегральной функціей отъ функціи $f(b)$ въ томъ же смыслѣ, въ какомъ мы употребляли это выраженіе въ п. 3 § 149-го. Изъ разложенія суммы S выводится

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^b f(x)\,dx - \int_0^a f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a). \qquad (14)$$

5. Рядъ значеній перемѣнной x отъ a до b называется промежуткомъ интегрированія. Этотъ промежутокъ можно всегда привести къ промежутку отъ -1 до $+1$ по слѣдующему способу. Положимъ

$$t = \frac{2x - b - a}{b - a}, \quad x = \tfrac{1}{2}(t(b-a) + (b+a)). \qquad (15)$$

Когда x, непрерывно возрастая, проходитъ значеніе отъ a до b, то t проходитъ значенія отъ -1 до $+1$, также непрерывно возрастая, и функція $y = f(x)$ будетъ вмѣстѣ съ тѣмъ функціей $\varphi(t)$ отъ t, если положимъ

$$y = f(\tfrac{1}{2}(t(b-a) + b + a)) = \varphi(t). \qquad (16)$$

Точкамъ дѣленія $a, x_1, x_2, \ldots, b$ на фигурѣ 38 соотвѣтствуютъ для t точки дѣленія $-1,\ -1+\dfrac{2}{n},\ -1+\dfrac{4}{n}, \ldots, +1$ и ординаты

$$y_0 = \varphi(-1),\ y_1 = \varphi\left(-1 + \frac{2}{n}\right), \ldots, y_n = \varphi(+1).$$

Поэтому $\displaystyle\int_{-1}^{+1} \varphi(t)\,dt$ есть предѣлъ обѣихъ суммъ

$$\frac{2}{n}(y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1}) \text{ и } \frac{2}{n}(y_1 + y_2 + \cdots + y_n);$$

полагая вновь $\Delta = b - a$, получаемъ:

$$\frac{\Delta}{2}\int_{-1}^{+1}\varphi(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b y\,dx; \tag{17}$$

для цѣлой же функціи

$$F(t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + C_3 t^3 + \cdots$$

находимъ изъ равенствъ (13) и (14):

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} F(t)\,dt = C_0 + \frac{C_2}{3} + \frac{C_4}{5} + \cdots, \tag{18}$$

гдѣ въ правой части остаются числа C_i только съ четными индексами i.

§ 151. Опредѣленный и неопредѣленный интегралъ.

1. Если функція $f(x)$ служить производною функціей $F(x)$, т. е. если

$$F'(x) = f(x), \tag{1}$$

то $F(x)$, какъ мы уже упоминали выше при разсмотрѣніи частнаго случая, называется интегральной функціей отъ $f(x)$. Если функція $f(x)$ дана, то этимъ функція $F(x)$ еще не вполнѣ опредѣлена, такъ какъ остается еще произвольной постоянная, которую можно прибавить къ $F(x)$ (§ 146, 5). Въ виду этого функцію $F(x)$ называютъ также неопредѣленнымъ интеграломъ функціи $f(x)$; это на письмѣ отмѣчается такъ:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C. \tag{2}$$

Связь между неопредѣленнымъ интеграломъ и опредѣленнымъ интеграломъ, соотвѣтствующимъ суммѣ (5) § 150-го, устанавливается съ помощью слѣдующихъ соображеній:

Пусть

$$y = f(x)$$

и положимъ

$$\eta_1 = \frac{y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1}}{n},$$

т. е. будемъ разумѣть подъ η_1 среднее ариѳметическое n значеній $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ функціи y; тогда выраженіе (3) § 150-го для суммы S_1 приметъ видъ:

$$S_1 = (b - a)\eta_1;$$

переходя къ предѣлу при $n = \infty$, получимъ, согласно равенству (5) § 150-го:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,\eta, \tag{3}$$

гдѣ η есть нѣкоторое значенiе функцiи y, заключающееся между наибольшимъ и наименьшимъ изъ всѣхъ значенiй, принимаемыхъ ординатою y въ интервалѣ $a \ldots b$. Если b будетъ неограниченно приближаться къ a, такъ что разность $b-a$ будетъ стремиться къ нулю, то η будетъ неограниченно приближаться къ $f(a)$. Замѣняя a черезъ x и b черезъ $x+h$, т. е. $b-a$ черезъ h, мы получимъ изъ равенства (3):

$$\operatorname*{Lim}_{h=0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x)\,dx = f(x). \tag{4}$$

Возьмемъ произвольное число a и произведемъ разложенiе интеграла $\int_x^{x+h} f(x)\,dx$ аналогично тому, какъ это сдѣлано въ формулѣ (14) § 150-го:

$$\int_x^{x+h} f(x)\,dx = \int_a^{x+h} f(x)\,dx - \int_a^x f(x)\,dx;$$

поэтому, если положимъ

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x) + C, \tag{5}$$

то соотношенiе (4) приметъ видъ:

$$\operatorname*{Lim}_{h=0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x);$$

слѣдовательно, $F(x)$ есть интегральная функцiя отъ $f(x)$.

Если въ формулѣ (5) положимъ $x = a$, то лѣвая часть обратится въ нуль, откуда слѣдуетъ, что

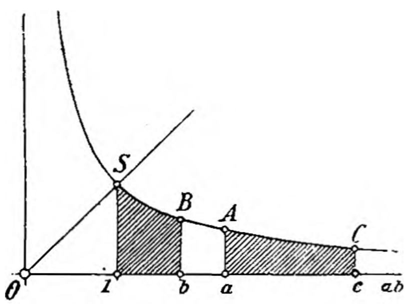
$$C = -F(a).$$

Замѣняя обратно x на b, будемъ имѣть:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{6}$$

Итакъ, мы найдемъ значеніе опредѣленнаго интеграла между предѣлами a и b, если мы подставимъ эти предѣлы въ неопредѣленный интегралъ и изъ результата второй подстановки вычтемъ результатъ первой подстановки. Неопредѣленная постоянная C не фигурируетъ уже въ этой разности.

Этимъ путемъ мы можемъ для каждаго изъ дифференціаловъ, выведенныхъ нами въ §§ 147 и 148, найти сперва неопредѣленный интегралъ, а затѣмъ опредѣленный интегралъ между любыми предѣлами. При этомъ, однако, слѣдуетъ имѣть въ виду, что функція $f(x)$ не должна обращаться въ безконечность ни для какого-либо изъ предѣловъ, ни для какого-либо изъ значеній перемѣнной x, лежащихъ между предѣлами. Изслѣдованіямъ такого рода случаевъ посвящены болѣе глубокіе отдѣлы интегральнаго исчисленія.



Фиг. 43.

2. Разсмотримъ, въ качествѣ примѣра, функцію

$$y = \frac{1}{x},$$

геометрическимъ образомъ которой служитъ равнобочная гипербола (фиг. 43).

Согласно равенству (5) § 147-го, эта функція служитъ производной натуральнаго логариѳма, и, слѣдовательно, мы получаемъ неопредѣленный интегралъ

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C. \tag{7}$$

При переходѣ къ опредѣленному интегралу слѣдуетъ выбирать предѣлы интегрированія такъ, чтобы въ немъ не заключалось значеніе $x = 0$, ибо для этого значенія перемѣннаго x функція $\frac{1}{x}$ обращается въ безконечность; поэтому предѣлы интегрированія должны быть однозначными,— напримѣръ, положительными. Такъ какъ $\ln 1 = 0$, то изъ формулы (7) вытекаетъ:

$$\int_1^x \frac{dx}{x} = \ln x; \tag{8}$$

поэтому площадь фигуры ($1aAS$), ограниченной осью абсциссъ, ординатами $f(1)$ и $f(a)$ и дугой гиперболы, выражается числомъ $\ln a$.

Если мы условимся разсматривать интегралъ (8), какъ опредѣленіе натуральнаго логариѳма, то основное свойство логариѳма, по которому логариѳмъ произведенія равенъ суммѣ логариѳмовъ сомножителей, можно вывести изъ этого опредѣленія слѣдующимъ образомъ:

$$\int_1^a \frac{dx}{x} = \ln a = \text{площади } (1aAS),$$

$$\int_1^b \frac{dx}{x} = \ln b = \text{площади } (1bBS),$$

$$\int_1^b \frac{dx}{x} = \int_1^b \frac{adx}{ax} = \int_a^{ab} \frac{dx}{x} = \text{площади } (acCA);$$

при выводѣ послѣдняго равенства мы сперва полагаемъ $ax = x_1$, а затѣмъ отбрасываемъ индексъ x_1; итакъ,

$$(1bBS) = (acCA) \tag{9}$$

и

$$\ln a + \ln b = \int_1^a \frac{dx}{x} + \int_a^{ab} \frac{dx}{x} = \int_1^{ab} \frac{dx}{x} = \ln ab,$$

т. е.

$$\ln ab = \ln a + \ln b. \tag{10}$$

Это предложеніе можно геометрически интерпретировать съ помощью равенства (9), выражающаго, что площадь фигуры, заключенной между двумя ординатами гиперболы и ея асимптотами, не измѣняется, если измѣнить соотвѣтствующія этимъ ординатамъ абсциссы въ одномъ и томъ же отношеніи.

Аналогичная теорема имѣетъ мѣсто для всякой, хотя бы не равнобочной, гиперболы.

§ 152. Приближенное вычисленіе интеграловъ.

1. Такъ какъ мы легко можемъ найти интегралъ цѣлой функціи (§ 150) и такъ какъ всякую функцію мы можемъ замѣнить съ нѣкоторымъ приближеніемъ цѣлою функціей—при помощи ли ряда Тейлора или при помощи Лагранжевой формулы, то отсюда получаются различные способы для приближеннаго опредѣленія интеграловъ. Изслѣдованія значительно упрощаются, когда промежутокъ интегрированія по способу, указанному въ п. 5 § 150-го, приведенъ къ интервалу отъ -1 до $+1$.

Итакъ, пусть перемѣнная t будетъ ограничена интерваломъ $-1 \ldots +1$ и пусть $\varphi(t)$ будетъ какая-либо функція. Опредѣлимъ цѣлую функцію $\Phi(t)$ степени n, совпадающую съ функціей $\varphi(t)$ при $n+1$ значеніяхъ

$$t = a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n. \tag{1}$$

Положивъ

$$\varphi(a_0) = y_0,\quad \varphi(a_1) = y_1,\ \ldots,\quad \varphi(a_n) = y_n, \tag{2}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= (t-a_0)(t-a_1)\ldots(t-a_n) \\ &= t^{n+1} + c_1 t^n + c_2 t^{n-1} + \cdots + c_n t + c_{n+1}, \end{aligned} \tag{3}$$

мы получимъ, согласно равенствамъ (13) и (14) § 149-го:

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \frac{y_0 f(t)}{(t-a_0)f'(a_0)} + \frac{y_1 f(t)}{(t-a_1)f'(a_1)} + \cdots + \frac{y_n f(t)}{(t-a_n)f'(a_n)} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i f(t)}{(t-a_i)f'(a_i)}. \end{aligned} \tag{4}$$

Частное $f(t)/(t-a_i)$ есть цѣлая функція отъ t степени n, и ея интегралъ можно опредѣлить по § 150. Сначала для каждаго числа a ряда (1) мы получимъ:

$$\frac{f(t)}{t-a} = q_0(a)t^n + q_1(a)t^{n-1} + q_2(a)t^{n-2} + \cdots + q_{n-1}(a)t + q_n(a), \tag{5}$$

гдѣ, согласно равенствамъ (6) § 66-го, коэффиціенты $q_i(a)$ суть цѣлыя функціи отъ a, выражающіяся слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{aligned} q_0(a) &= 1, \\ q_1(a) &= a + c_1, \\ q_2(a) &= a^2 + c_1 a + c_2, \\ q_3(a) &= a^3 + c_1 a^2 + c_2 a + c_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_n(a) &= a^n + c_1 a^{n-1} + c_2 a^{n-2} + \cdots + c_n. \end{aligned} \tag{6}$$

Напишемъ члены второй части равенства (5) въ обратномъ порядкѣ:

$$\frac{f(t)}{t-a} = q_n(a) + q_{n-1}(a)t + q_{n-2}(a)t^2 + \cdots + q_0(a)t^n$$

и положимъ, согласно равенству (18) § 150-го:

$$\begin{aligned} S(a) &= \frac{1}{2f'(a)} \int_{-1}^{+1} \frac{f(t)}{t-a}\,dt \\ &= \frac{1}{f'(a)}\left(q_n(a) + \frac{q_{n-2}(a)}{3} + \frac{q_{n-4}(a)}{5} + \dots\right), \end{aligned} \tag{7}$$

при чемъ послѣдній членъ внутри скобокъ есть $q_1(a)/n$ или $1/(n+1)$, смотря по тому, будетъ ли n число нечетное или четное.

Въ такомъ случаѣ изъ равенства (4) выводится приближенная формула:

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(t)\,dt = \int_{-1}^{+1} \Phi(t)\,dt = 2\sum_{i=0}^{n} y_i S(a_i) \tag{8}$$

и потому, согласно равенству (17) § 150-го,

$$\int_a^b y\,dx = (b-a)\sum y_i S(a_i). \tag{9}$$

Когда числа a_i извѣстны, то по равенству (7) можно опредѣлить всѣ суммы $S(a_i) = S_i$, и онѣ не зависятъ отъ особенностей функціи y, которую нужно интегрировать.

2. Взявъ, напримѣръ, $n = 2$, $a_0 = -1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, получимъ:

$$\begin{gathered} f(t) = t^3 - t, \\ f'(t) = 3t^2 - 1, \\ f'(-1) = f'(+1) = 2, \quad f'(0) = -1, \\ q_2(t) = t^2 - 1, \\ S(a) = \frac{1}{f'(a)}\left(q_2(a) + \frac{1}{3}\right); \end{gathered}$$

поэтому

$$S(-1) = S(+1) = \frac{1}{6}, \quad S(0) = \frac{2}{3},$$

и, слѣдовательно, формула (9) даетъ приближенное значеніе:

$$\int_a^b y\,dx = \frac{b-a}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2). \tag{10}$$

Эта формула носитъ названіе правила Симпсона *). Ея геометрическій смыслъ заключается въ томъ, что данная кривая замѣняется параболой, у которой крайнія и средняя ординаты совпадаютъ съ данными.

Если точность этой формулы недостаточно велика, то можно раздѣлить данный интервалъ на нѣсколько частей и примѣнять формулу (10) къ каждой изъ нихъ.

3. Какъ бы ни были выбраны числа a_i, равенство (8) даетъ точное значеніе интеграла $\int_{-1}^{+1} \varphi(t)\,dt$, когда $\varphi(t)$ есть цѣлая функція, степень которой не выше n, потому что при этомъ допущеніи функціи $\Phi(t)$ и $\varphi(t)$ совпадаютъ. Чтобы составить себѣ сужденіе о точности формулы (9), примѣнимъ ее къ случаю, когда $\varphi(t) = t^m$ и $m > n$. Если обозначимъ черезъ D_m число, на которое лѣвая часть равенства (9) меньше правой, и примемъ во вниманіе, что

$$\int_{-1}^{+1} t^m dt = \frac{2}{m+1} \quad \text{или} \quad = 0,$$

смотря по тому, будетъ ли m четнымъ или нечетнымъ, то, согласно равенству (8),

$$D_m = 2\sum a_i^m S(a_i) - \frac{\delta}{m+1},$$

гдѣ $\delta = 0$ или $\delta = 2$ въ зависимости отъ того, будетъ ли m нечетнымъ или четнымъ.

Внося первое изъ выраженій (7) вмѣсто $S(a_i)$, находимъ:

$$D_m = \int_{-1}^{+1} f(t) \sum^{i} \frac{a_i^m}{(t-a_i)f'(a_i)}\,dt - \frac{\delta}{m+1}. \tag{11}$$

4. Формула (11) даетъ для D_m значеніе, равное нулю, когда $m \leqq n$. Мы получимъ это, положивъ въ равенствѣ (15) § 149-го $\varphi(x) = x^m$. Когда же $m > n$, то дѣлимъ t^m на $f(t)$ по правиламъ § 66-го. Мы получимъ частное Q_m и остатокъ $R_m(t)$, степень котораго не выше n:

$$t^m = Q_m f(t) + R_m(t), \tag{12}$$

*) Thomas Simpson, англійскій математикъ, родился въ 1710 году, провелъ жизнь въ Лондонѣ и Вульвичѣ и умеръ въ 1761 году на своей родинѣ Market-Bosworth, Leicestershire.

а такъ какъ $f(a_i) = 0$, то

$$R_m(a_i) = a_i^m.$$

Но $R_m(t)/f(t)$ есть правильно-дробная функція и, слѣдовательно, согласно равенству (15) § 149-го, имѣемъ:

$$\frac{R_m(t)}{f(t)} = \sum^{i} \frac{R_m(a_i)}{f'(a_i)(t - a_i)} = \sum^{i} \frac{a_i^m}{(t - a_i) f'(a_i)},$$

и равенство (11) даетъ:

$$D_m = \int_{-1}^{+1} R_m(t)\, dt - \frac{\delta}{m+1}. \tag{13}$$

Положивъ

$$R_m(t) = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 t + \varepsilon_2 t^2 + \cdots + \varepsilon_n t^n, \tag{14}$$

мы получаемъ отсюда:

$$D_m = 2\varepsilon_0 + \frac{2\varepsilon_2}{3} + \frac{2\varepsilon_4}{5} + \cdots - \frac{\delta}{m+1}, \tag{15}$$

при чемъ въ выраженіе для D_m величины ε_i входятъ только съ четными индексами.

Такимъ образомъ, въ случаѣ, когда y есть цѣлая функція m-ой степени или когда функція y можетъ быть съ достаточною точностью (напримѣръ, при помощи ряда Тейлора) представлена цѣлою функціей m-ой степени:

$$y = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \cdots + C_m t^m,$$

то въ равенствѣ (8) ошибка выражается такъ:

$$D = C_{n+1} D_{n+1} + C_{n+2} D_{n+2} + \cdots + C_m D_m. \tag{16}$$

5. Чтобы вычислить величину ошибки при данной функціи $f(t)$, или, что то же, при данныхъ величинахъ a_i, нужно только выполнить дѣленія, требуемыя равенствомъ (12). Точность способа будетъ тѣмъ большая, чѣмъ больше будетъ число исчезающихъ величинъ D_{n+1}, D_{n+2}, ... Такъ какъ мы располагаемъ $n+1$ величинами a_i или $n+1$ коэффиціентами функціи $f(t)$, то мы можемъ распорядиться ими такъ, чтобы было *)

$$D_{n+1} = 0, \quad D_{n+2} = 0, \; \ldots, \quad D_{2n+1} = 0. \tag{17}$$

---

*) Gauss, „Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi" (Göttingen, 1816, Werke, Bd. III, S. 165)

Въ этомъ случаѣ формула (9) остается точною, когда степень функціи y повышается до $2n+1$, и при помощи $n+1$ промежуточныхъ значеній мы достигаемъ тѣхъ же результатовъ, какихъ достигли бы, выбравъ произвольно $2n+1$ промежуточныхъ значеній.

6. Если $n+1$ величинъ a_i имѣютъ попарно противоположныя значенія при нечетномъ n, или если при четномъ n одна изъ нихъ равна нулю, а остальныя n имѣютъ попарно противоположныя значенія, то $f(t)$ при четномъ n есть нечетная, а при нечетномъ n четная функція:

$$f(t) = t^{n+1} + c_2 t^{n-1} + c_4 t^{n-3} + \cdots; \tag{18}$$

поэтому, какъ это слѣдуетъ изъ равенства (12), когда замѣнимъ въ немъ t на $-t$, функція $R_m(t)$ будетъ четной при четномъ m и нечетной при нечетномъ m; а изъ опредѣленія величины δ и равенства (15) слѣдуетъ, что всѣ величины D_m съ нечетными индексами m исчезаютъ.

Отсюда, напримѣръ, вытекаетъ, что Симпсоново правило вполнѣ точно не только для функцій 2-й степени, но и для функцій 3-й степени.

7. Мы разсмотримъ нѣкоторые примѣры, относящіеся къ методу Гаусса, основанному на равенствахъ (17).

Когда $n=0$, то $f(t)=t$, $a_0=0$ и $S(a_0)=1$, такъ что

$$\int_a^b y\,dx = (b-a)y_0.$$

Такимъ образомъ, здѣсь функція просто замѣщается постоянной, которая равна средней ординатѣ y_0 кривой, такъ что площадь замѣщается прямоугольникомъ, котораго основаніе равно интервалу $b-a$, а высота — средней ординатѣ y_0. Представляется геометрически очевиднымъ, что при этомъ допущеніи формула (9) еще остается вѣрной, когда y есть функція первой степени, т. е. когда кривая сводится къ прямой линіи.

8. Пусть будетъ $n=1$, $f(t)=t^2+c$; мы получимъ:

$$t^2 = f(t) - c, \quad R_2 = -c, \quad D_2 = -2\left(c+\tfrac{1}{3}\right),$$

такъ что, если $c = -\frac{1}{3}$, то $D_2 = 0$, и мы находимъ:

$$a_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad q_1(t) = t, \quad S(a) = \frac{1}{2},$$

$$\int_a^b y\,dx = (b-a)\frac{y_0+y_1}{2}.$$

Здѣсь y_0, y_1 суть ординаты, соотвѣтствующія значеніемъ $t = \pm 1/\sqrt{3} = \pm 0{,}18257$. Кривая замѣняется прямой, проходящей черезъ точки $t = -1/\sqrt{3}$, $y = y_0$ и $t = +1/\sqrt{3}$, $y = y_1$, и формула остается точной, когда функція y достигаетъ третьей степени (какъ и Симпсонова формула).

9. При $n = 2$ слѣдуетъ положить $f(t) = t^3 + ct$, $q_2(t) = t^2 + c$, откуда:

$$t^4 = tf(t) - ct^2, \quad D_4 = -\frac{2c}{3} - \frac{2}{5}, \quad D_5 = 0;$$

а такъ какъ $D_4 = 0$, то

$$c = -\frac{3}{5}$$

и

$$a_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = +\sqrt{\frac{3}{5}},$$

$$S(a_0) = S(a_2) = \frac{5}{18}, \quad S(a_1) = \frac{4}{9};$$

слѣдовательно

$$\int_a^b y\,dx = \frac{b-a}{18}(5y_0 + 8y_1 + 5y_2).$$

Кривая здѣсь замѣщается параболой, проходящей черезъ точки, имѣющія абциссы $t = \pm\sqrt{\frac{3}{5}} = \pm 0{,}2449490$, $t = 0$, и формула остается точной до функцій 5-ой степени.

Для опредѣленія функцій $f(t)$, удовлетворяющихъ условіямъ (17) при болѣе высокихъ значеніяхъ n, Гауссъ создалъ особыя вспомогательныя средства. Они приводятъ къ такъ называемымъ шаровымъ функціямъ, находящимъ часто примѣненіе въ математической физикѣ. При помощи теоремы Штурма можно показать, что найденная такимъ образомъ функція $f(t)$, какъ это и требуется, всегда имѣетъ $n + 1$ вещественныхъ корней, содержащихся между -1 и $+1$ [1]).

10. Гауссъ примѣняетъ свой способъ къ интегралу

$$\int_a^b \frac{dx}{\ln x}$$

[1]) Ср. Heine, „Handbuch der Kugelfunktionen“, 2. Aufl., Bd. II, Teil I Weber, „Lehrbuch der Algebra“, 2. Aufl, Bd. I, § 93.

при $a = 100\,000$, $b = 200\,000$. Это представляется интереснымъ, въ виду того, что при большихъ значеніяхъ a и b этотъ интегралъ приближенно выражаетъ число простыхъ чиселъ, содержащихъ между a и b, — законъ, который, однако, установленъ до сихъ поръ только эмпирически. Кривая $y = 1/\ln x$, подобно гиперболѣ, асимптотически приближается къ оси x-овъ.

Симпсоново правило даетъ:

$$\frac{100\,000}{6}\left(\frac{1}{5\ln 10}+\frac{4}{\ln 15+4\ln 10}+\frac{1}{\ln 20+4\ln 10}\right).$$

Съ точностью до пяти знаковъ:

$$\ln 10 = 2{,}30259,$$

$$\ln 15 = 2{,}70805,$$

$$\ln 20 = 2{,}99573,$$

и значеніе предыдущаго выраженія приблизительно равно

$$8404{,}573\ldots$$

Гауссовъ способъ даетъ съ точностью до третьяго десятичнаго знака при $n = 0,\ 1,\ 2$:

$$8390{,}395,$$

$$8405{,}955,$$

$$8406{,}237.$$

Точное значеніе, вычисленное Бесселемъ (Bessel), равно

$$8406{,}243,$$

а число простыхъ чиселъ, содержащихся между $100\,000$ и $200\,000$, равно 8372.

Алфавитный указатель.

Числа указываютъ страницы.

Сравнительная таблица

параграфовъ I-го и II-го русскихъ изданій.

§§ II-го изд.	§§ I-го изд.	§§ II-го изд.	§§ I-го изд.	§§ II-го изд.	§§ I-го изд.
1—6	1—6	34	31	62	57
7	143	35	32	63	58
8	7	36	33	64	59
9	8	37	34	65	60
10	9	38	35	66	61
11	10	39	36	67	62
12	11	40	37	68	63
13	12	41	38	69	149
14	13	42	146	70	64
15	14	43	39	71	65
16	15	44	40	72	66
17	16	45	41	73	67
18	17	46	42	74	68
19	18	47	43	75	69
20	19	48	44	76	70
21	20	49	45	77	150
22	144	50	46	78	151
23	21	51	47	79	71
24	22	52	48	80	72
25	23	53	49	81	152
26	24	54	50	82	73
27	25	55	51	83	74
28	26	56	52	84	75
29	145	57	53	85	76
30	27	58	54	86	77
31	28	59	147	87	78
32	29	60	55 и 148	88	79
33	30	61	56	89	80

§§ II-го изд.	§§ I-го изд.	§§ II-го изд.	§§ I-го изд.	§§ II-го изд.	§§ I-го изд.
90	81	111	102	132	123
91	82	112	103	133	124
92	83	113	104	134	125
93	84	114	105	135	126
94	85	115	106	136	127
95	86	116	107	137	128
96	87	117	108	138	129
97	88	118	109	139	130
98	89	119	110	140	131
99	90	120	111	141	132
100	91	121	112	142	133
101	92	122	113	143	134
102	93	123	114	144	135
103	94	124	115	145	136
104	95	125	116	146	137
105	96	126	117	147	138
106	97	127	118	148	139
107	98	128	119	149	140
108	99	129	120	150	141
109	100	130	121	151	—
110	101	131	122	152	142

школѣ въ качествѣ практическаго пособія... Изложеніе очень сжато, но полно и послѣдовательно. *Вопросы Физики.*

ШЕЙДЪ, К. Химическіе опыты для юношества. Перев. съ нѣмецк. подъ ред. лаборанта *Е. С. Ельчанинова.* IV+192 стран. 8°. Съ 79 рисунками. 1907. Ц. Р. 1. 20 к.

Превосходная книга, какой намъ давно не хватало. Всюду въ книгѣ сохраняешь благотворное чувство, что находишься въ совершенно надежныхъ рукахъ... учитъ серьезной наукѣ въ болѣе легкой формѣ. *Zeitschrift für Lehrmittelwesen und pädagogische Litteratur.*

ШМИДЪ, Б. проф. **Философская** хрестоматія *). Перев. съ нѣмецк. *Ю. А. Говсѣева* подъ ред. и съ пред. проф. *Н. Н. Ланге.* VIII+172 стр. 8° 1907. Ц. Р. 1.—

...Для человѣка, занятаго самообразованіемъ и немного знакомаго съ философіей и наукой, она (книга) даетъ разнообразный и интересный матеріалъ. *Вопросы философіи и психологіи.*

ТРОМГОЛЬТЪ, С. Игры со спичками. Задачи и развлеченія. Пер. съ нѣм. 146 стр. 16°. Свыше 250 рис. и черт. 1907. Ц. 50 к.

ВЕТГЭМЪ, В. проф. **Современное развитіе физики** *). Пер. съ англ. подъ ред. проф. *Б. П. Вейнберга* и прив.-доц. *А. Р. Орбинскаго.* Съ прилож. рѣчи *А. Бальфура:* **Нѣсколько мыслей о новой теоріи вещества.** VIII+319 стран. 8°. Съ 5 портрет., 6 таблиц. и 33 рис. Ц. Р. 2. —

Старается представить въ стройной и глубокой системѣ всѣ явленія физическаго опыта и рисуетъ читателю дѣйствительно захватывающую картину грандіозныхъ завоеваній человѣческаго генія. *Современный Міръ.*

УШИНСКІЙ, Н. проф. **Лекціи по бактеріологіи.** VIII+135 стр. 8°. Съ 34 черными и цвѣтными рисунками. 1908. Ц. Р. 1. 50 к.

РИГИ, А. проф. **Современная теорія физическихъ явленій** *) (Іоны, электроны, радіоактивность). Пер. съ 3 итальянск. изданія. VIII+146 стр. 8°. Съ 21 рис. 1910. *Второе изданіе.* Ц. 90 к.

Книгу Риги можно смѣло рекомендовать образованному человѣку, какъ лучшее имѣющееся у насъ изложеніе новѣйшихъ взглядовъ на обширную область физическихъ явленій. *Педагогическій Сборникъ.*

КЛОССОВСКІЙ, А. проф. **Физическая жизнь нашей планеты на основаніи современныхъ воззрѣній** *). 46 стран. 8°. 2-е изданіе, испр. и дополн. 1908. Ц. 40 к.

Рѣдко можно встрѣтить изложеніе, въ которомъ въ такой степени соединялась бы высокая научная эрудиція съ картинностью и увлекательностью рѣчи. *Педагогическій Сборникъ.*

ЛАКУРЪ, П. и **АППЕЛЬ, Я. Историческая физика** *). Перев. съ нѣм. подъ ред. *„Вѣстн. Опытн. Физики и Элементарн. Матем."*. Въ 2-хъ томахъ большого формата, 892 стр. Съ 799 рис. и 6 отдѣльными цвѣтными таблицами. 1908. Ц. Р. 7. 50 к.

«Нельзя не привѣтствовать этого интереснаго изданія... Книга читается легко; содержитъ весьма удачно подобранный матеріалъ и обильно снабжена хорошо выполненными рисунками. Переводъ никакихъ замѣчаній не вызываетъ»... *Ж. М. Н. Пр.*

АРРЕНІУСЪ, Св. проф. **Образованіе міровъ** *). Пер. съ нѣм. подъ ред проф. *К. Д. Покровскаго.* VIII+200 стр. 8°. Съ 60 рис. 1908. Ц. Р. 1. 75 к.

Книга чрезвычайно интересна и богата содержаніемъ. *Педагог. Сборн.*

КАГАНЪ, В. прив.-доц. **Задача обоснованія геометріи въ современной постановкѣ.** Рѣчь, произнесенная при защитѣ диссертаціи на степень магистра чистой математики. 35 стр. 8°. Съ 11 чертеж. 1908. Ц. 35 к.

ЦИММЕРМАНЪ, В. проф. **Объемъ шара, шарового сегмента и шарового слоя.** 34 стр. 16°. Съ 6 черт. 1908. Ц. 25 к.

Распространеніе подобнаго рода элементарныхъ монографій среди учащихся весьма желательно *Русская Школа.*

РИГИ, А. проф. **Электрическая природа матеріи** *) Вступительная лекція. Перев. съ итальянскаго подъ ред. *„Вѣстн. Опытн. Физ. и Элем. Матем.“*. 28 стр. 8°. *2-е изданіе.* 1911. Ц. 30 к.

Эта прекрасная рѣчь обладаетъ всѣми преимуществами многочисленныхъ популярныхъ сочиненій знаменитаго проф. Болоньскаго унив. *Ж. М. Н. Пр.*

ЛЕМАНЪ, О. проф. **Жидкіе кристаллы и теоріи жизни.** Пер. съ нѣм. *П. В. Казанецкаго.* VIII+43 стр. 8. Съ 30 рис. 1908. Ц. 40 к.

.....весьма кстати является краткая сводка главныхъ фактовъ, сдѣланная проф. Леманомъ. *Педагогическій Сборникъ*

ГЕЙБЕРГЪ, I. проф. **Новое сочиненіе Архимеда** *). Посланіе Архимеда къ Эратосфену о нѣкоторыхъ вопросахъ механики. Перев. съ нѣм. подъ ред. и съ предисл. прив.-доц. *И. Ю. Тимченко.* XV+27 стр. 8°. Съ 15 рис. 1909. Ц. 40 к.

Математикамъ... будетъ весьма интересно познакомиться съ новой драгоцѣнной научной находкой... *Образованіе.*

ВЕЙНБЕРГЪ, Б. П. проф. **Снѣгъ, иней, градъ, ледъ и ледники** *). IV+127 стр. 8°. Съ 138 рис. и 2 фототип. табл. 1909. Ц. Р. 1.

«Mathesis» можетъ гордиться этимъ изданіемъ. *Ж. М. Н. Пр.*

КОВАЛЕВСКІЙ, Г. проф. **Введеніе въ исчисленіе безконечно-малыхъ** *). Перев. съ нѣмецк. подъ редакц. и съ прим. прив.-доц. *С. О Шатуновскаго.* VIII+140 стр. 8°. Съ 18 черт. 1909. Ц. Р. 1.

Книга проф. Ковалевскаго, несомнѣнно, прекрасное введеніе въ высшій анализъ... *Русская Школа.*

ТОМПСОНЪ, СИЛЬВАНУСЪ, проф. **Добываніе свѣта** *) Общедоступная лекція для рабочихъ, прочит. на собраніи Британск. Ассоціаціи 1906. Перев. съ англ. VIII+88 стр. 16°. Съ 28 рис. 1909. Ц. 50 к.

Въ этой весьма интересно составленной рѣчи собранъ богатый матеріалъ по вопросу добыванія свѣта *Ж. М. Н. Пр.*

СЛАБИ, А. проф. **Резонансъ и затуханіе электрическихъ волнъ.** Пер. съ нѣм. подъ ред. *„Вѣстн. Опыт Физ. и Элемент. Матем.“*. 41 стр. 8°. Съ 36 рис. Ц. 40 к.

СНАЙДЕРЪ, К. проф. **Картина міра въ свѣтѣ современнаго естествознанія.** Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *В. В. Завьялова.* VIII+193 стр. 8°. Съ 16 отдѣльными портретами. 1909. Ц. Р. 1. 50 к.

Книга касается интереснѣйшихъ вопросовъ о природѣ. *Педагог. Сборникъ.*

РАМЗАЙ, В. проф. **Благородные и радіоактивные газы.** Пер. подъ ред. *„Вѣстн. Оп. Физ. и Элем. Мат.“*. 37 стр. 16°. Съ 16 рис. 1909. Ц. 25 к.

БРУНИ, К. проф. **Твердые растворы** *). Пер. съ итал. подъ ред. *„Вѣстн. Оп. Физ. и Эл. Мат.“*. 37 стр. 16°. 1909. Ц. 25 к.

БОЛЛЪ, Р. С. проф. **Вѣка и приливы.** Пер. съ англ. подъ ред. прив.-доц. *А. Р. Орбинскаго.* 104 стр. 8°. Съ 4 рис. и 1 табл. 1909. Ц. 75 к.

.....настоящее изданіе «Mathesis» слѣдуетъ привѣтствовать наравнѣ съ прочими, какъ почтенный, заслуживающій распространенія и серьезнаго вниманія, вкладъ въ русскую науку. *Русская Школа.*

СЛАБИ, А. проф. **Безпроволочный телефонъ.** Пер. съ нѣм. подъ ред. *„Вѣстн. Оп. Физ. и Эл. Мат.“*. 28 стр. 8°. Съ 23 рис. 1909. Ц. 30 к.

ЛИНДЕМАНЪ, Ф. проф. **Спектръ и форма атомовъ.** Рѣчь ректора Мюнхенскаго университета. 23 стр. 16°. *2-е изданіе.* 1909. Ц. 15 к.

КУТЮРА, Л. **Алгебра логики.** Перев. съ французскаго съ прибавленіями проф. *И. Слешинскаго.* IV+107+XIII стр. 8°. 1909. Ц. 90 к.

ВЕБЕРЪ Г. и ВЕЛЬШТЕЙНЪ I., проф. **Энциклопедія элементарной геометріи. Томъ II, книга I. Основанія геометріи.** Перев. съ нѣм. подъ ред. и съ примѣч. прив.-доц. *В. Ф. Кагана.* XII+362 стр. 8°. Съ 144 черт. и 5 рис. 1909. Ц. Р. 3

ЛОРЕНЦЪ, Г. проф. **Курсъ физики** *). Перев. съ нѣмецк. подъ ред. проф. *Н. П. Кастерина.*
Т. I. VIII+348 стр. больш. 8°. Съ 236 рис. 1910. Ц. Р. 2. 75 к.
Т. II. VIII+466 стр. больш. 8°. Съ 257 рис. 1910. Ц. Р. 3. 75 к.
Съ появленіемъ этого перевода русская литература обогатилась превосходнымъ курсомъ физики. *Ж. М. Н. Пр.*

ГЕРНЕТЪ В. А. Объ единствѣ вещества. 46 стр. 16°. Ц. 25 к.

ЗЕЕМАНЪ, П. проф. **Происхожденіе цвѣтовъ спектра.** Съ прил. статьи *В. Ритца.* **„Линейные спектры и строеніе атомовъ“.** 50 стр. 16°. Ц. 30 к.

НЬЮКОМЪ, С. проф. **Теорія движенія луны.** (Исторія и современное состояніе этого вопроса). 26 стр. 16°. Ц. 20 к.

КЛОССОВСКІЙ, А. проф. **Основы метеорологіи** *). XVI+527 стр. больш. 8°. Съ 199 рис., 2 цвѣтн. и 3 черн. табл. 1910. Ц. Р. 4. —
Честь и слава «Mathesis» за изданіе этой прекрасной книги, которою можетъ гордиться русская наука! *Ж. М. Н. Пр.*

КЭДЖОРИ, Ф. проф. **Исторія элементарной математики** (съ нѣкоторыми указаніями для препод.) *). Перев. съ англ. подъ ред и съ примѣч. прив.-доц. *И. Ю. Тимченко.* VIII+368 стр. 8°. Съ рис. 1910. Ц. Р. 2. 50 к.
Книга читается съ большимъ интересомъ и весьма полезна... Мы настоятельно рекомендуемъ «Исторію элемент. мат.» Кэджори. *Вѣст. Воспит.*

РАМЗАЙ, В. проф. **Введеніе въ изученіе физической химіи.** Перев. съ англ. подъ ред. проф. *П. Г. Меликова.* VIII+76 стр. 16°. 1910. Ц. 40 к.

РОУ, С. Геометрическія упражненія съ кускомъ бумаги. Пер. съ англ. XVI+173 стр. 16°. Съ 87 рис. и чертежами. 1910. Ц. 90 к.

ТОМСОНЪ, Дж. Дж. проф. **Корпускулярная теорія вещества.** Переводъ съ англійск. *І. Левинтова,* подъ ред. *„Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат.“* VIII+162 стр. 8°. Съ 29 рис. 1910. Ц. Р. 1. 20 к.

ГРАФФЪ, К. Комета Галлея *). Пер. съ нѣм. VIII+71 стр. 16°. Съ 13 рис. и 2 отд. табл. Изданіе второе исправл. и дополненное 1910. Ц. 30 к.
Брошюра Граффа хорошо выполняетъ свое назначеніе. *Педагог. Сборникъ.*

НИМФЮРЪ, Р. Воздухоплаваніе *). Научныя основы и техническое развитіе. Пер. съ нѣм. VIII+161 стр 8°. Съ 52 рис. 1910. Ц. 90 к.

Галлеева Комета въ 1910 году. *Общедоступное изданіе.* Содержаніе: О вселенной—О кометахъ О кометѣ Галлея. 32 стр. 8°. Съ 12 иллюстраціями 1910. Ц. 12 к.

КАЙЗЕРЪ, Г. проф. **Развитіе современной спектроскопіи** *). Пер. съ нѣм. подъ ред. *„Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат.“* 45 стр. 16°. 1910. Ц. 25 к.

ГАМПСОНЪ-ШЕФЕРЪ. Парадоксы природы *). Книга для юношества, объясняющая явленія, которыя находятся въ противорѣчіи съ повседневнымъ опытомъ. Пер. съ нѣм. VIII+193 стр. 8°. Съ 67 рис. Ц. Р. 1.20 к

ВЕБЕРЪ и ВЕЛЬШТЕЙНЪ, проф. **Энциклопедія элементарной математики** *). Т. II, кн. 2 и 3. Тригонометрія, аналитическая геометрія и стереометрія. Перев. съ нѣмец. подъ ред. прив.-доц. *В. Кагана.* VIII+321 стр. 8°. Съ 109 рис. 1910. Ц. Р. 2. 50 к.

КАГАНЪ, В. прив.-доц. **Что такое алгебра?** *) 72 стр. 16°. Ц. 40 к.

ПУАНКАРЕ, Г. проф. **Наука и Методъ.** Пер. съ франц. И. Брусиловскаго подъ ред. прив.-доц. *В. Кагана.* VIII+384 стр. 16°. 1910. Ц. Р. 1. 50 к.

ЛЁБЪ, Ж. проф. **Динамика живого вещества.** Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *В. В. Завьялова.* VIII+352 стр. 8°. Съ 64 рис. 1910. Ц. Р. 2. 50 к.

Печатаются и готовятся къ печати:

П. АППЕЛЬ и С. ДОТЕВИЛЬ. Курсъ теоретической механики. Введенiе въ изученiе физики и прикладной механики. Пер. съ фр.

БАХМАНЪ проф. **Основы новѣйшей теорiи чиселъ.** Пер. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго.*

КЛЕЙНЪ. Лекцiи по элементарной математикѣ для учителей. Пер. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *В. Кагана.*

ТРЕЛЬСЪ-ЛУНДЪ. Небо и мiровоззрѣнiе въ круговоротѣ временъ. Пер. съ нѣмецкаго.

ЛОВЕЛЛЬ П. Обитаемость Марса. Пер. съ англ. Со мног. рис.

АНДУАЙЕ, проф. **Курсъ астрономiи.** Пер. съ французскаго.

ГАССЕРТЪ, проф **Изслѣдованiя полярныхъ странъ.** Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *Г. Танфильева.*

МОРЕНЪ, проф. **Физическiя состоянiя вещества.** Переводъ съ французскаго подъ ред. проф. *Писаржевскаго.*

ДЗIОБЕКЪ, проф. **Курсъ аналитической геометрiи.** Въ 2 част. Пер. съ нѣм. подъ ред. препод. С.-П. Б. высш. женск. курсовъ *В. I. Шиффъ.*

КЛАРКЪ, А. Исторiя астрономiи XIX столѣтiя. Пер. съ англ. подъ ред. прив.-доц. С.-П. Б. университета *В. Серафимова.*

ВЕРИГО, В. Ф. проф. **Основы общей бiологiи.** Около 40 печатныхъ листовъ.

ЛАГРАНЖЪ, Ж. Дополненiя къ «элементамъ алгебры» Эйлера. Неопредѣленный анализъ. Пер. съ фр. подъ ред. прив.-доц. *С. Шатуновскаго.*

ЧЕЗАРО, Э. проф. **Элементарный учебникъ алгебраическаго анализа и исчисленiя безконечномалыхъ.** Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. СПБ. универс. *К. Поссе.*

НЕТТО, Е. проф. **Начала теорiи опредѣлителей.** Перев. съ нѣм.

МИ, Г. проф. **Курсъ элекричества и магнетизма.** Перев. съ нѣм.

ЛАДЕНБУРГЪ, А. проф. **Лекцiи по исторiи химiи отъ Лавуазье до нашихъ дней.** Пер. съ нѣм. подъ ред. лаб. *Е. С. Ельчанинова.*

ЦЕНТНЕРШВЕРЪ, М. Очерки исторiи химiи.

Выписывающiе изъ главнаго склада изданiй „Матезисъ“ (Одесса, Новосельская 66) на сумму 5 руб. и больше за пересылку не платятъ.

Подробный каталогъ высылается по требованiю безплатно.
