УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ФРАНЦИСКА СКОРИНЫ»

УДК 512.542

СЕМЁНОВ
Максим Геннадьевич

ИНЪЕКТОРЫ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

Гомель, 2015

Работа выполнена в учреждении образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»

Научный руководитель: **Воробьев Николай Тимофеевич**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова», кафедра алгебры и методики преподавания математики

Официальные оппоненты: **Семенчук Владимир Николаевич**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», кафедра высшей математики

Гальмак Александр Михайлович, доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой, учреждение образования «Могилевский государственный университет продовольствия», кафедра высшей математики

Оппонирующая организация – учреждение образования «Белорусский государственный университет».

Защита состоится 16 мая 2015 года в 12^{00} на заседании совета по защите диссертаций Д 02.12.01 при учреждении образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины» по адресу: 246019, г. Гомель, ул. Советская, 104, ауд. 1-20. Телефон ученого секретаря: +375 232 57 37 91. E-mail: SovetD021201@tut.by.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале № 1 библиотеки учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».

Автореферат разослан 14 апреля 2015 года.

Ученый секретарь
совета по защите диссертаций Д.А. Ходанович

ВВЕДЕНИЕ

Краеугольным камнем теории конечных групп и их классов является теорема Силова[1] о том, что *если порядок группы G равен $p^a m$, где число p является простым, а число m не делится на p, то в G существуют подгруппы порядка p^a (так называемые силовские p-подгруппы) и любые две из них сопряжены.* В рамках этой теории получение теорем силовского типа привело к формированию большого самостоятельного направления, крупным вкладом для развития которого являются основополагающие работы Ф. Холла[2] и С.А. Чунихина[3].

Напомним, что через $\pi(n)$ обозначают множество всех простых делителей натурального числа n, а через $\pi(G)$ – множество всех простых делителей порядка группы G. Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Натуральное число n, для которого $\pi(n) \subseteq \pi$ называется π-числом, а группу G, для которой $\pi(G) \subseteq \pi$, называют π-группой. Подгруппа H группы G называется *холловой π-подгруппой*, если порядок H является π-числом, а ее индекс в G есть π'-число. Как установлено С.А. Чунихиным[3] и Ф. Холлом[2], *любая π-разрешимая группа (в частности, разрешимая группа) имеет холловы π-подгруппы и любые две из них сопряжены.* Заметим, что в случае $\pi = \{p\}$ холлова π-подгруппа – это в точности силовская p-подгруппа. Вместе с тем, все указанные выше результаты были доказаны арифметическими методами: они базировались на свойствах порядков подгрупп.

Оригинальное обобщение фундаментальных теорем Силова и Холла неарифметическими методами было получено в работе Гашюца, Фишера и Хартли[4], где доказано, что *для любого разрешимого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ в каждой конечной разрешимой группе G существуют $\mathfrak{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены.* Напомним, что класс конечных групп $\mathfrak{F}$ называют *классом Фиттинга*, если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. При этом подгруппа V группы G называется *$\mathfrak{F}$-инъектором G*, если для любой субнормальной подгруппы N группы G подгруппа $V \bigcap N$ является максимальной из подгрупп N, принадлежащих $\mathfrak{F}$. Заметим, что если $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\pi$ – класс Фиттинга всех конечных разрешимых π-групп (в частности, $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p$ – класс всех конечных p-групп), то $\mathfrak{F}$-инъектор группы это в точности ее холлова π-подгруппа (силовская p-под-

[1] Sylow, M.L. Theoremes sur les groupes de substitutions / M.L. Sylow // Math. Ann. – 1872. – Vol. 5. – P. 584–594.

[2] Hall, P. A note on soluble groups / P. Hall // J. London Math. Soc. – 1928. – Vol. 3. – P. 98–105.

[3] Чунихин, С.А. О существовании и сопряженности подгрупп у конечной группы / С. А. Чунихин // Мат. сб. – 1953. – Т. 33, № 1. – С. 111–132.

[4] Fischer, B. Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen / B. Fischer, W. Gaschütz, B. Hartley // Math. Z. – 1967. – Bd. 102. – S. 337–339.

группа). Развивая и обобщая теорему Гашюца-Фишера-Хартли[4], Л.А. Шеметков[5] и в разрешимом случае Андерсон[6] устанавливают, что для *любого множества Фиттинга $\mathscr{F}$ конечной π-разрешимой (в частности, разрешимой) группы G, где π – множество всех простых делителей всех подгрупп из $\mathscr{F}$, существует единственный класс сопряженных $\mathscr{F}$-инъекторов.* Напомним, что *множеством Фиттинга $\mathscr{F}$* конечной группы G называют такое непустое множество подгрупп группы G, которое замкнуто относительно взятия нормальных подгрупп, произведений нормальных подгрупп и сопряжений подгрупп. Понятие $\mathscr{F}$-инъектора группы для ее множества Фиттинга $\mathscr{F}$ определяется аналогично, как и понятие $\mathfrak{F}$-инъектора для класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.

Заметим, что если $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, то множество подгрупп $\{H \leq G \mid H \in \mathfrak{F}\}$ группы G является множеством Фиттинга G. Его обозначают $Tr_{\mathfrak{F}}(G)$ и называют *следом класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ в группе G*. Хорошо известно, что каждому классу Фиттинга $\mathfrak{F}$ соответствует его след в группе G, хотя обратное в общем случае неверно. Кроме того, очевидно, что множества всех $\mathfrak{F}$-инъекторов для класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ и всех $\mathscr{F}$-инъекторов для множества Фиттинга $\mathscr{F} = Tr_{\mathfrak{F}}(G)$ совпадают и поэтому из указанной выше теоремы Шеметкова[5], в частности, следует теорема Гашюца-Фишера-Хартли[4]. В связи с этим, актуальной является *задача нахождения новых канонических классов сопряженных инъекторов для множеств Фиттинга конечной группы (в частности, π-разрешимой группы без ограничения на множество π).*

Естественным продолжением задачи нахождения новых классов сопряженных инъекторов является задача нахождения их характеризаций. Напомним, что из определения класса Фиттинга следует, что для любого непустого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ в группе G существует наибольшая из нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп, которую называют *$\mathfrak{F}$-радикалом* и обозначают $G_{\mathfrak{F}}$. Задаче характеризации нильпотентных инъекторов ($\mathfrak{N}$-инъекторов) группы посредством радикалов посвящен изящный результат Фишера[7] о том, что множество всех нильпотентных инъекторов конечной разрешимой группы G – это в точности множество всех тех максимальных из нильпотентных подгрупп G, которые содержат нильпотентный радикал G, т.е. подгруппу Фиттинга $F(G)$. Усиливая данный результат, Хартли[8] установил, что для классов Фиттин-

[4] Fischer, B. Injektoren endlichen auflösbaren Gruppen / B. Fischer, W. Gaschütz, B. Hartley // Math. Z. – 1967. – Bd. 102, № 5. – S. 337–339.

[5] Шеметков, Л.А. О подгруппах π-разрешимых групп / Л.А. Шеметков // В кн.: Конечные группы. – Минск: Наука и техника, 1975. – С. 207–212.

[6] Anderson, W. Injectors in finite solvable groups / W. Anderson // J. Algebra. – 1975. – № 36. – P. 333–338.

[7] Fischer, B. Klassen konjugierter Untergruppen in endlichen auflösbaren Gruppen / B. Fischer // Habilitationschift, Universität Frankfurt (M). – 1966.

[8] Hartley, B. On Fischer's dualization of formation theory / B. Hartley // Proc. London Math. Soc. – 1969. – Vol. 3, № 2. – P. 193–207.

га вида $\mathfrak{X}\mathfrak{N}$ ($\mathfrak{X}$ – непустой класс Фиттинга) подгруппа V группы G является $\mathfrak{X}\mathfrak{N}$-инъектором тогда и только тогда, когда $V/G_{\mathfrak{X}}$ – нильпотентный инъектор группы $G/G_{\mathfrak{X}}$. Кроме того, Хартли[8] впервые в теории разрешимых классов Фиттинга был предложен локальный метод их исследования: им определены объекты, дуальные локальным формациям, которые в настоящее время называют классами Хартли[9]. В дальнейшем эффективность метода Хартли была подтверждена серией результатов по характеризации инъекторов конечных разрешимых групп в терминах радикалов для разрешимых классов Хартли в работах П. Дарси[10], П. Хаука и В.Н. Загурского[11], В. Го и Н.Т. Воробьева[9,12] и др. Это приводит к *задаче развития локального метода Хартли и описания посредством радикалов инъекторов конечных групп в общем случае: без требования разрешимости групп и их классов.* Примечателен тот факт, что все указанные выше результаты по характеризации инъекторов базировались на свойстве $\mathfrak{F}$-скованности групп. Напомним, что если $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, то группу G называют *$\mathfrak{F}$-скованной,* если $C_G(G_{\mathfrak{F}}) \leq G_{\mathfrak{F}}$. В связи с этим для решения предыдущей задачи необходимо *описать классы Фиттинга $\mathfrak{F}$ и конечные группы G, для которых выполняется свойство $\mathfrak{F}$-скованности.*

Задача нахождения новых классов сопряженных $\mathfrak{F}$-инъекторов в группе тесно взаимосвязана с задачей описания общих методов их построения, то есть задачей нахождения формулы $\mathfrak{F}$-инъектора конечной группы для произвольного класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Представляет интерес тот факт, что в теории формаций аналогом такой задачи является задача нахождения формулы проектора группы – объекта, дуального ее инъектору. Заметим, что решение данной задачи к настоящему времени известно только для специального случая конечной разрешимой группы G, а именно, для случая, когда G факторизуется подгруппой L из локальной формации $\mathfrak{F}$ и её подгруппой Фиттинга, т.е. $G = L \cdot F(G)$[13,14]. В сравнение с этим, в теории классов Фиттинга задача нахождения формулы $\mathfrak{F}$-инъектора любой конечной разрешимой группы для локального класса Фиттинга была решена Н.Т. Воробьевым и В.Н. Загур-

[8] Hartley, B. On Fischer's dualization of formation theory / B. Hartley // Proc. London Math. Soc. – 1969. – Vol. 3, № 2. – P. 193–207.

[9] Guo, W. On injectors of finite soluble groups / W. Guo, N.T. Vorob'ev // Comm. Algebra. – 2008. – Vol. 36. – P. 3200–3208.

[10] D'arcy, P. Locally defined fitting classes / P. D'arcy // J. Austral. Math. Soc. – 1975. – Vol. 20 (Series A). – P. 25–32.

[11] Hauck, P. A characterization of dominant local Fitting classes. / P. Hauck, V.N. Zahursky // J. Algebra – 2012. – № 358. – P. 27–32.

[12] Vorob'ev, N.T. Description of $\mathfrak{F}$-injectors of Finite Soluble Groups / N.T. Vorob'ev, Y. Liu, W. Guo // Math. Sci. Res. J. – 2008. – Vol. 12, № 1. – P. 17–22.

[13] Doerk, K. Zur Theorie der Formationen endlichen auflösbaren Gruppen / K. Doerk // J. Algebra. – 1969. – Vol. 13, № 3. – P. 345–373.

[14] D'arcy, P. $\mathfrak{F}$-Abnormality and the theory of finite solvable groups / P. D'arcy // J. Algebra. – 1974. – Vol. 28. – P. 342–361.

ским[15]. Так как множество всех $\mathfrak{F}$-инъекторов конечной группы для класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ совпадает со множеством всех её $\mathscr{F}$-инъекторов для специального случая множества Фиттинга $\mathscr{F}$, то актуальна *задача нахождения общей формулы $\mathscr{F}$-инъектора для любого множества Фиттинга $\mathscr{F}$ конечной группы (в частности, π-разрешимой группы без ограничения на множество π).*

Таким образом, задача нахождения новых классов сопряженных инъекторов конечных групп и описания строения инъекторов во множествах Фиттинга и классах Фиттинга весьма актуальна. Реализации ее и посвящена данная диссертация.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с крупными научными программами, темами

Диссертационная работа выполнялась в рамках следующих госбюджетных программ:

– в рамках составной части задания «Приложение теории радикалов и классов Фиттинга к исследованию конечных групп» учреждения образования «Витебский государственный университет им. П.М. Машерова». Задание входило в Государственную программу фундаментальных исследований Республики Беларусь «Исследование математических моделей и их применение к анализу систем, структур и процессов в природе и обществе» (шифр «Математические модели 04»). Тема входила в план важнейших научно-исследовательских работ в области естественных, технических и общественных наук по Республике Беларусь, утвержденный решением Президиума НАН Беларуси № 907 от 12 мая 2006 г., тема выполнялась в 2006–2010 гг. (номер госрегистрации в БелИСА – 20062003);

– в рамках составной части задания «Развитие локальных методов исследования радикалов и классов Фиттинга и их применение в теории конечных групп» (Конвергенция 1.1.03.5), входящего в Государственную программу научных исследований на 2011–2015 годы «Междисциплинарные научные исследования, новые зарождающиеся технологии как основа устойчивого инновационного развития» (ГПНИ «Конвергенция»). Подпрограмма «Разработка и исследование математических методов и их применение для решения актуальных проблем естествознания, техники, экономики и социальных наук» («Математические методы», номер госрегистрации в БелИСА – 20111880);

[15]Загурский, В.Н. Инъекторы локальных классов Фиттинга / В.Н. Загурский, Н.Т. Воробьев // Веснік ВДУ. – 2010. – № 4 (58). – С. 17–20.

– гранта БРФФИ на 2013– 2014 гг. «Классы конечных групп с заданными свойствами операторов замыкания и функторов» (номер госрегистрации в БелИСА - 20131475).

Цель и задачи исследования

Целью данной диссертации является нахождение новых канонических классов сопряженных инъекторов конечных частично разрешимых групп и описание строения инъекторов этих групп для локальных множеств Фиттинга и классов Фиттинга.

Для достижения этой цели в диссертации необходимо было решить следующие взаимосвязанные задачи:

– доказать существование и сопряженность инъекторов в π-насыщенном множестве Фиттинга в любой π-разрешимой группе;

– описать классы Фиттинга $\mathfrak{F}$ и группы G, для которых выполняется свойство $\mathfrak{F}$-скованности;

– получить в терминах радикалов характеризацию инъекторов конечных групп (в общем случае неразрешимых) для классов Хартли;

– найти общую формулу $\mathscr{F}$-инъектора для любого локального множества Фиттинга $\mathscr{F}$ конечной частично разрешимой группы.

Объектом исследования являются инъекторы конечных групп для классов Фиттинга и множеств Фиттинга.

Предмет исследования – строение и свойства инъекторов конечных групп.

Научная новизна

Все полученные в диссертации результаты являются новыми и носят теоретический характер. Найдены новые канонические классы сопряженных инъекторов для множества Фиттинга конечной частично разрешимой группы. В терминах радикалов получена новая характеризациия инъекторов конечных групп для классов Хартли. Впервые построено локальное множество Фиттинга конечной группы и найдена общая формула инъектора в этом множестве в случае частичной разрешимости группы.

Полученные результаты могут найти применение у специалистов по теории групп для нахождения новых теорем силовского типа, в исследованиях подгруппового строения групп и описания структуры их классов, а также при чтении спецкурсов для студентов математических специальностей, написании курсовых, дипломных проектов, магистерских и кандидатских диссертаций.

Положения, выносимые на защиту

1. Нахождение канонических классов сопряженных инъекторов в конечной π-разрешимой группе: доказательство существования и сопряженности инъекторов в π-насыщеном множестве Фиттинга произвольной конечной π-разрешимой группы.

2. Описание в терминах классов Хартли свойств радикалов конечных частично разрешимых групп.

3. Характеризация инъекторов конечных групп посредством радикалов и классов Хартли.

4. Построение локального множества Фиттинга конечной группы и описание общей формулы инъектора группы в этом множестве в случае ее частичной разрешимости.

Все результаты диссертации являются новыми, впервые получены автором.

Личный вклад соискателя

Диссертационная работа выполнена соискателем лично под руководством профессора, доктора физико-математических наук Воробьева Николая Тимофеевича. Научным руководителем были поставлены задачи и предложена методика их исследования. В совместных работах [1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 12, 14] основные идеи и методы принадлежат научному руководителю, а реализация – соискателю. Остальные работы выполнены самостоятельно и опубликованы без соавторов.

Апробация результатов диссертации

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались:

– на Гомельском алгебраическом семинаре кафедры алгебры и геометрии учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Ф.Скорины»;

– на научных семинарах кафедры алгебры и методики преподавания математики учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»;

– на X(55) Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников, аспирантов и студентов университета, посвященной 90 летию со дня рождения П.М. Машерова (Витебск, 24–25 апреля 2008 г.);

– на Международной научно-практической конференции студентов, магистрантов и аспирантов «III Машеровские чтения» (Витебск, 2010 г.);

– на 7-ой Международной алгебраической конференции в Украине, (Харьков, 5–12 июля 2009 г.);

– на XVII (64) Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов «Наука — образованию, производству, экономике» (Витебск, 14–15 марта 2012 г.);

– на Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «VI Машеровские чтения» (Витебск, 27–28 сентября 2012 г.);

– на Международной научной конференции «XI Белорусская математическая конференция» (Минск, 5–9 ноября 2012 г.);

– на XVIII (65) Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов «Наука — образованию, производству, экономике» (Витебск, 13–14 марта 2013 г.);

– на 9-ой Международной алгебраической конференции в Украине (Львов, 8–13 июля 2013 г.);

– на Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «VII Машеровские чтения» (Витебск, 24–25 сентября 2013 г.);

– на XIX (66) Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов «Наука — образованию, производству, экономике» (Витебск, 13–14 марта 2014 г.);

– на Международной алгебраической конференции, посвященной памяти Л.А. Шеметкова (Гомель, 3–5 июля 2014 г.);

– на Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «VIII Машеровские чтения» (Витебск, 16–17 октября 2014 г.).

Опубликованность результатов диссертации

Основные результаты диссертации опубликованы в 6 статьях в научных журналах и в 12 тезисах докладов. Общий объем опубликованных материалов — 4,74 авторских листов, в том числе: статьи в научных журналах — 3,11 авторских листа, тезисы и материалы докладов конференций — 1,63 авторского листа.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из перечня определений и условных обозначений, введения, общей характеристики работы, пяти глав основной части, заключения и библиографического списка в алфавитном порядке в количестве 64 наименований использованных источников и 18 наименований публикаций соискателя. Полный объем диссертации — 88 страниц, из них 7 страниц занимает библиографический список.

Автор выражает глубокую признательность и искреннюю благодарность своему научному руководителю — доктору физико-математических наук, профессору Николаю Тимофеевичу Воробьеву за помощь и внимание, оказанные им при написании данной диссертации.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Все рассматриваемые в диссертационной работе группы предполагаются конечными. Используются стандартные обозначения и определения[16,17].

Диссертация состоит из перечня определений и условных обозначений, введения, общей характеристики работы, пяти глав основной части, заключения и библиографического списка в алфавитном порядке.

Глава 1 содержит аналитический обзор литературы по теме диссертации. На основе проведенного анализа формируются основные задачи диссертационной работы.

В главе 2 «Предварительные сведения» приведены некоторые известные понятия и результаты, которые наиболее часто используются в диссертационной работе.

Основное содержание диссертации представлено в главах 3–5.

В главе 3 решается задача нахождения новых канонических классов сопряженных инъекторов для множеств Фиттинга группы (в частности, π-разрешимой группы без ограничения на множество π). Основополагающим результатом в теории классов разрешимых групп является теорема Гашюца-Фишера-Хартли[4] о том, что для любого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ в каждой группе G существуют $\mathfrak{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены. Альтернативное доказательство указанной теоремы было предложено Хоторном[18]. Для этого он использовал понятие строгой замкнутости p-подгрупп. Пусть G – разрешимая группа. Тогда p-подгруппу $P_0 \leq P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ называют строго замкнутой в P если $P_0^g \bigcap P \leq P_0$ для всех элементов $g \in G$. Для доказательства основного результата главы 3 нами было определено понятие строгой π-замкнутости π-подгруппы в холловой π-подгруппе группы.

3.1.1 Определение [6]. Пусть π – некоторое непустое множество простых чисел, G – π-разрешимая группа и H_0 является такой π-подгруппой группы G, что $H_0 \leq H \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$. Подгруппу H_0 назовем *строго π-замкнутой подгруппой в H относительно G*, если $H_0^g \bigcap H \leq H_0$ для всех $g \in G$.

[16] Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 278 с.

[17] Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T.O. Hawkes. - Berlin–New York : Walter de Gruyter & Co., 1992. – 891 p. – (De Gruyter Expo. Math.. vol. 4).

[4] Fischer. B. Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen / B. Fischer, W. Gaschütz, B. Hartley // Math. Z. – 1967. - Bd. 102. – S. 337–339.

[18] Hawthorn, I. The existence and uniqueness of injectors for Fitting sets of solvable groups / I. Hawthorn // Proc. American Math. Soc. – Vol. 126, № 8 – 1998. – P. 2229–2230.

Раздел 3.1 диссертации посвящен изучению свойств строго π-замкнутых подгрупп π-разрешимой группы. Полученные в этом разделе результаты имеют вспомогательный характер: они используются для доказательства основного результата главы 3.

3.2.1 Определение [4,6]. Пусть π – некоторое непустое множество простых чисел. Множество Фиттинга $\mathscr{F}$ группы G назовем *π-насыщенным*, если для каждой подгруппы H из G такой, что $O^{\pi'}(H) \in \mathscr{F}$, справедливо $H \in \mathscr{F}$.

Основной результат главы 3 представляет

3.2.3 Теорема [6]. *Пусть G – π-разрешимая группа и $\mathscr{F}$ – π-насыщенное множество Фиттинга G. Тогда в группе G существуют $\mathscr{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены.*

Напомним, что группу G называют[16] *π-замкнутой*, если она имеет нормальную холлову π-подгруппу, и *π-специальной*, если она имеет нормальную нильпотентную холлову π-подгруппу. Легко видеть, что класс всех π-замкнутых и класс всех π-специальных групп являются π-насыщенными классами Фиттинга. Таким образом, из теоремы 3.2.3 вытекают

3.2.5 Следствие [6]. *В любой π-разрешимой группе существует единственный класс сопряженных π-замкнутых инъекторов.*

3.2.6 Следствие [6]. *В любой π-разрешимой группе существуют π-специальные инъекторы и любые два из них сопряжены.*

Из теоремы 3.2.3 вытекает также ряд известных результатов. Приведем некоторые из них в виде следствий.

3.2.7 Следствие (Андерсон[6]). *Если $\mathscr{F}$ – множество Фиттинга разрешимой группы G, то в G существуют $\mathscr{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены.*

3.2.8 Следствие (Гашюц-Фишер-Хартли[4]). *Если $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга и группа G разрешима, то в G существуют $\mathfrak{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены.*

Дальнейший поиск новых канонических классов сопряженных инъекторов группы в случае ее частичной разрешимости представляют заключительные результаты главы 3. Напомним, что через $\sigma(\mathscr{F})$ обозначают множество всех простых делителей всех подгрупп из $\mathscr{F}$.

3.2.9 Теорема [6]. *Пусть $\mathscr{F}$ – множество Фиттинга группы G и $G/G_{\mathscr{F}}$ является π-разрешимой группой, где $\pi = \sigma(\mathscr{F})$. Тогда в группе G существуют $\mathscr{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены.*

---

[16] Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 278 с.

[6] Anderson, W. Injectors in finite solvable groups / W. Anderson // J. Algebra. – 1975. – № 36. – P. 333–338.

[4] Fischer, B. Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen / W. Gaschütz, B. Fischer, B. Hartley // Math. Z. – 1967. – Bd. 102. – S. 337–339.

3.2.10 Следствие (Шеметков[5]). *Пусть $\mathscr{F}$ – множество Фиттинга π-разрешимой группы G, где $\pi = \sigma(\mathscr{F})$. Тогда в группе G существуют $\mathscr{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены.*

3.2.11 Следствие (Баллестер-Болинше[19]). *Пусть $\mathscr{F}$ – множество Фиттинга группы G и $G/G_{\mathscr{F}}$ является разрешимой группой. Тогда в группе G существуют $\mathscr{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены.*

Глава 4 посвящена нахождению в терминах радикалов характеризаций инъекторов конечных групп (в общем случае неразрешимых) для классов Хартли. Локальный метод изучения классов Фиттинга был впервые предложен Хартли[8]. Пусть $\sum = \{\pi_i : i \in I\}$ – семейство попарно различных подмножеств множества всех простых чисел такое, что $\mathbb{P} = \bigcup_{i\in I}\pi_i$. Функцию $h : \sum \rightarrow$\{классы Фиттинга\} называют *функцией Хартли* или *H-функцией*[9]. Если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга, то их произведение – класс групп $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = (G : G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H})$. В частности, $\mathfrak{H}\mathfrak{S}$ – класс всех таких групп G, что факторгруппа G по её $\mathfrak{H}$-радикалу разрешима. Хорошо известно[17], что произведение классов Фиттинга – класс Фиттинга и операция умножения классов Фиттинга ассоциативна. Класс Фиттинга $\mathfrak{H}$ называется *классом Хартли*[9], если

$$\mathfrak{H} = \bigcap_{i\in I} h(\pi_i)\mathfrak{E}_{\pi_i'}\mathfrak{E}_{\pi_i}$$

для некоторой H-функции h. Функцию Хартли h будем называть *приведенной*, если $h(\pi_i) \subseteq \mathfrak{H}$ для всех i из I. Нами установлено [2], что каждый класс Хартли $\mathfrak{H}$ определяется приведенной H-функцией $\widetilde{h}$ такой, что $\widetilde{h}(\pi_i) \subseteq \widetilde{h}(\pi_j)\mathfrak{E}_{\pi_j'}$ для всех различных i и j из I. Применение локального метода Хартли привело к получению ряда результатов[9,10,11], посвященных характеризациям инъекторов разрешимых групп. Эти результаты базировались на свойстве $\mathfrak{F}$-скованности групп. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга. Тогда группу G называют $\mathfrak{F}$-скованной, если $C_G(G_{\mathfrak{F}}) \leq G_{\mathfrak{F}}$. В разделе 4.1 определяются условия, при которых группа G обладает свойством $\mathfrak{H}$-скованности для класса Хартли $\mathfrak{H}$.

---

[5]Шеметков, Л.А. О подгруппах π-разрешимых групп / Л.А. Шеметков // В кн.: Конечные группы. – Минск: Наука и техника, 1975. – С. 207–212.

[19]Ballester-Bolinches, A. Classes of finite groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Dordrecht : Springer, 2006. – 385 p.

[8]Hartley, B. On Fischer's dualization of formation theory / B. Hartley // Proc. London Math. Soc. – 1969. – Vol. 3, № 2. – P. 193–207.

[9]Guo, W. On injectors of finite soluble groups / W. Guo, N.T. Vorob'ev // Comm. Algebra. – 2008. – Vol. 36. – P. 3200–3208.

[17]Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T.O. Hawkes. – Berlin–New York : Walter de Gruyter & Co., 1992. – 891 p. – (De Gruyter Expo. Math., vol. 4).

[10]D'arcy, P. Locally defined fitting classes / P. D'arcy // J. Austral. Math. Soc. - 1975. – Vol. 20 (Series A). – P. 25–32.

[11]Hauck, P. A characterization of dominant local Fitting classes. / P. Hauck, V.N. Zahursky // J. Algebra – 2012. – № 358. – P. 27–32.

4.1.2 Теорема [2]. *Пусть класс Хартли* $\mathfrak{H} = \bigcap_{i \in I} \widetilde{h}(\pi_i)\mathfrak{E}_{\pi_i'}\mathfrak{E}_{\pi_i}$ *и* $\mathfrak{X}$ *– непустой класс Фиттинга такой, что* $\mathfrak{X} \subseteq \bigcap_{i \in I} \widetilde{h}(\pi_i)\mathfrak{E}_{\pi_i'}$. *Тогда для любой группы* $G \in \mathfrak{H}\mathfrak{S}$ *и ее* $\mathfrak{H}$*-инъектора* V *справедливы следующие утверждения:*

(1) $C_G(G_{\mathfrak{H}}/G_{\mathfrak{X}}) \leq G_{\mathfrak{H}}$;

(2) $V_{\mathfrak{X}} = G_{\mathfrak{X}}$;

(3) $V_{\widetilde{h}(\pi_i)} = G_{\widetilde{h}(\pi_i)}$ *для всех* i *из* I.

Из утверждения (1) теоремы 4.1.2, в частности, вытекает следующее известное свойство нильпотентного радикала разрешимой группы.

4.1.5 Следствие. *Если* G *– разрешимая группа, то* $C_G(F(G)) \leq F(G)$.

В разделе 4.2 усиливаются известные результаты Иранцо-Торреса[20] о p-нильпотентных инъекторах p-разрешимой группы. Будем обозначать символом $\mathfrak{N}^p$ класс всех p-нильпотентных групп. Тогда справедлива

4.2.3 Теорема [3]. *Пусть класс Хартли* $\mathfrak{H} = \mathfrak{X}\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$, *где* $\mathfrak{X}$ *– непустой класс Фиттинга и* G *– такая группа, что группа* $G/G_{\mathfrak{X}}$ *–* $\mathfrak{N}^p$*-скована (в частности, p-разрешима). Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $V/G_{\mathfrak{X}}$ *– p-нильпотентный инъектор группы* $G/G_{\mathfrak{X}}$ *тогда и только тогда, когда* V *–* $\mathfrak{H}$*-инъектор группы* G;

2) в группе G *существуют* $\mathfrak{H}$*-инъекторы и любые два из них сопряжены;*

3) $\mathfrak{H}$*-инъекторы группы* G *– это в точности те* $\mathfrak{H}$*-максимальные в* G *подгруппы, которые содержат ее* $\mathfrak{H}$*-радикал.*

4.2.4 Следствие (Иранцо, Торрес[20]). *Любая p-разрешимая группа G имеет единственный класс сопряженных p-нильпотентных инъекторов, причем такими инъекторами являются в точности все максимальные p-нильпотентные подгруппы из G, содержащие p-нильпотентный радикал.*

Ключевым моментом для развития локального метода Хартли является результат Воробьева[21], где описана наибольшая приведенная H-функция F локального класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{X}$ – класс Фиттинга, то символом $\mathfrak{F}_{\mathfrak{X}}$ обозначим класс всех тех групп, $\mathfrak{F}$-радикалы которых принадлежат $\mathfrak{X}$. В разделе 4.3 посредством радикалов получено новое локальное задание произвольного локального класса Фиттинга.

4.3.3 Теорема [1]. *Любой локальный класс Фиттинга* $\mathfrak{F}$ *определяется нормально-наследственной локальной функцией* x *такой, что*

$$x(p)\mathfrak{N}_p = x(p) = \begin{cases} \mathfrak{F}_{F(p)} & \text{, если } p \in \pi \\ \varnothing & \text{, если } p \in \pi' \end{cases},$$

---

[20] Iranzo, M.J. The p*p-injectors of a finite group / M.J. Iranzo, M. Torres // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova – 1989. – № 82. – P. 233-237.

[21] Воробьев, Н.Т. О наибольшей приведенной функции Хартли / Н.Т. Воробьев // Известия Гомельского государственного университета им. Ф.Скорины. – 1999. – № 1 (15). – С. 8–13.

где F – наибольшая приведенная H-функция класса $\mathfrak{F}$ и $\pi = \{p \in \mathbb{P} : F(p) \neq \varnothing\}$.

В главе 5 с помощью локального метода Хартли[8] решена задача нахождения общей формулы $\mathscr{F}$-инъектора для локального множества Фиттинга частично разрешимой группы. Для этой цели в разделе 5.1 мы развиваем локальный метод Хартли[8] для множеств Фиттинга.

5.1.1 Определение [4]. *Локальной функцией Хартли* или *H-функцией группы G* назовем отображение $f : \mathbb{P} \to \{$множества Фиттинга группы $G\}$.

5.1.2 Определение [4]. *Произведением $\mathscr{F} \bullet \mathfrak{X}$ множества Фиттинга $\mathscr{F}$ группы G и класса Фиттинга $\mathfrak{X}$* назовем множество подгрупп $\{H \leq G : H/H_{\mathscr{F}} \in \mathfrak{X}\}$.

5.1.5 Определение [4]. Множество Фиттинга $\mathscr{F}$ группы G назовем *локальным*, если $\mathscr{F} = \bigcap_p f(p) \bullet \mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$ для некоторой H-функции f группы G. В данном случае f назовем *H-функцией $\mathscr{F}$*.

5.1.7 Определение [4]. Пусть f – H-функция, определяющая множество Фиттинга $\mathscr{F}$ группы G. Тогда f назовем:

1) *приведенной*, если $f(p) \subseteq \mathscr{F}$ для каждого простого p;

2) *полной*, если $f(p) \bullet \mathfrak{N}_p = f(p)$ для всех простых p.

5.1.8 Лемма [4]. *Каждое локальное множество Фиттинга группы G определяется полной приведенной H-функцией.*

Раздел 5.2 является вспомогательным: здесь установлен ряд свойств множеств Фиттинга, которые используются в дальнейшем при доказательстве основного результата главы 5. Напомним, что *холловой системой* π-разрешимой группы G называется такое множество Σ холловых подгрупп из G, что выполняются следующие условия: 1) для всякого множества простых чисел ρ из π выполняется $G_\rho \in \Sigma$, а также $G_{\rho \bigcup \pi'} \in \Sigma$; 2) если $H, K \in \Sigma$, то $HK = KH$. Если R – подгруппа группы G, то через $\Sigma \bigcap R$ обозначают множество подгрупп $\{S \bigcap R | \forall S \in \Sigma\}$. Если $\Sigma \bigcap R$ – холлова система группы R, то говорят, что Σ *редуцирует* холлову систему Σ_R подгруппы R и обозначают $\Sigma \searrow R$. Подгруппа $N_G(\Sigma) = \{g \in G | H = H^g, \forall H \in \Sigma\}$ называется *нормализатором* холловой системы Σ.

Формулу инъектора описывает главный результат главы 5.

5.3.2 Теорема [4, 5]. *Пусть f – полная приведенная H-функция локального множества Фиттинга $\mathscr{F}$ π-разрешимой группы G, причем $\mathscr{F}$ является либо π-насыщенным, либо $\pi = \sigma(\mathscr{F})$. Пусть Σ – холлова система G, $D = N_G(\Sigma)$ и $D_p \in \Sigma \bigcap D$ для некоторого $p \in \pi$. Если F – $\mathscr{F}$-инъектор группы $O^p(G)$ и $\Sigma \searrow F$, то подгруппа $V = F \cdot C_{D_p}(F/F_{f(p)})$ – $\mathscr{F}$-инъектор G и $\Sigma \searrow V$.*

[8] Hartley, B. On Fischer's dualization of formation theory / B. Hartley // Proc. London Math. Soc. – 1969. – Vol. 3, № 2. – P. 193–207.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

В диссертационной работе решена задача нахождения новых классов сопряженных инъекторов конечных групп и описания их строения во множествах Фиттинга и классах Фиттинга. Основные результаты диссертации следующие.

Найдены новые канонические классы сопряженных инъекторов в π-насыщеном множестве Фиттинга произвольной π-разрешимой группы. Доказано, что если $\mathscr{F}$ – π-насыщенное множество Фиттинга, то в любой π-разрешимой группе существуют $\mathscr{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены (теорема 3.2.3 [6]). Это позволяет утверждать, что в любой π-разрешимой группе существует единственный класс сопряженных π-замкнутых инъекторов и единственный класс π-специальных инъекторов (следствия 3.2.5, 3.2.6 [6]). Кроме того, решены вопросы существования и сопряженности $\mathscr{F}$-инъекторов группы G в предположении о том, что π-разрешима не сама группа G, а только факторгруппа по ее $\mathscr{F}$-радикалу (теорема 3.2.9 [6]). Следствиями теорем 3.2.3 и 3.2.9 являются известные результаты Гашюца-Фишера-Хартли, Андерсона, Л.А. Шеметкова, Баллестера-Болинше и др. о существовании и сопряженности инъекторов разрешимых и частично разрешимых групп.

В главе 4 выявлено новое широкое семейство классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и групп G, для которых выполняется свойство $\mathfrak{F}$-скованности (теорема 4.1.2 [2]). Это послужило основой для характеризации инъекторов посредством радикалов для класса Хартли $\mathfrak{H}$, который является расширением произвольного непустого класса Фиттинга $\mathfrak{X}$ с помощью класса всех p-нильпотентных групп. В частности, установлено, что любая группа G такая, что факторгруппа по ее $\mathfrak{X}$-радикалу p-разрешима, обладает единственным классом сопряженных $\mathfrak{H}$-инъекторов, причем $\mathfrak{H}$-инъекторы G – это в точности те $\mathfrak{H}$-максимальные в G подгруппы, которые содержат ее $\mathfrak{H}$-радикал (теорема 4.2.3 [3]). Следствием теоремы 4.2.3 является известный результат Иранцо-Торреса о характеризации p-нильпотентных инъекторов p-разрешимой группы.

В главе 5 определено локальное множество Фиттинга в конечной группе. Это явилось основой для решения задачи нахождения общей формулы $\mathscr{F}$-инъектора π-разрешимой группы в ее локальном множестве Фиттинга $\mathscr{F}$ в каждом из следующих случаев: 1) $\mathscr{F}$ – π-насыщено; 2) π – множество всех простых делителей всех подгрупп из $\mathscr{F}$ (теорема 5.3.2 [4, 5]).

Рекомендации по практическому использованию результатов

Диссертационная работа имеет теоретический характер. Полученные результаты могут найти приложение в исследованиях подгруппового строения конечных групп: нахождении новых теорем силовского типа, описании радикалов и инъекторов групп. Они могут быть использованы в дальнейших исследованиях в этом направлении, проводимых в Гомельском, Витебском, Брестском, Полоцком, Белорусском госуниверситетах, университете науки и технологий КНР, университетах Майнца и Тюбингена (Германия), Валенсии и Наварры (Испания). Основной результат диссертации опубликован в российском переводном журнале, что делает его доступным для использования не только в научных центрах СНГ, но и за его пределами.

Результаты диссертации могут быть использованы также при чтении спецкурсов для студентов математических специальностей, при написании курсовых, дипломных работ и диссертаций, а также в теории формальных языков для их классификации и теории конечных автоматов для их построения.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в научных журналах

1. Воробьев, Н.Т. Локальные функции классов Фиттинга / Н.Т. Воробьев, М.Г. Семёнов // Веснік Віцебскага дзяржаўнага універсітэта. – 2009. – № 2 (52). – С. 139–141.

2. Семёнов, М.Г. О свойствах радикалов и инъекторов для классов Хартли / М.Г. Семёнов, Н.Т. Воробьев // Веснік Віцебскага дзяржаўнага універсітэта. – 2012. – № 2 (68). – С. 10–13.

3. Семёнов, М.Г. О характеризации инъекторов конечных групп / М.Г. Семёнов, Н.Т. Воробьев // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-матэм. навук. – 2014. – № 2. – С. 52–58.

4. Воробьев, Н.Т. Множества Фиттинга и инъекторы конечной группы / Н.Т. Воробьев, М.Г. Семёнов // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2014. – № 6 (87). – С. 149–155.

5. Семёнов, М.Г. Формула инъектора конечной π-разрешимой группы / М.Г. Семёнов // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 4 (21). – С. 77–88.

6. Воробьев, Н.Т. Инъекторы во множестве Фиттинга конечной группы / Н.Т. Воробьев, М.Г. Семёнов // Матем. заметки. – 2015. – Т. 97, № 4. – С. 516–528.

Тезисы докладов конференций

7. Семёнов, М.Г. О наибольших локальных функциях локальных классов Фиттинга / М.Г. Семёнов, Н.В. Савельева // X(55) Региональная научно-практическая конференция преподавателей, научных сотрудников, аспирантов и студентов университета, посвященной 90-летию со дня рождения П.М. Машерова: сборник статей. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2008. – С. 21–23.

8. Семёнов, М.Г. О новом локальном задании классов Фиттинга / М.Г. Семёнов // III Машеровские чтения: материалы республиканской научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых, Витебск, 24–25 марта 2009 г. / Вит. Гос.ун-т. : редкол. А.Л. Гладков (гл. ред.) [и др.]. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2009. – С. 18–19.

9. Semenov, M.G. Local Functions of Fitting Classes / M.G. Semenov, N.T. Vorob'ev // 7th International Algebraic Conference in Ukraine: abstracts of talks. Kharkov. 18–23 August, 2009. – Kharkov, 2009. – P. 129.

10. Семёнов, М.Г. О свойствах радикалов и инъекторов для классов Хартли / М.Г. Семенов // Наука – образованию, производству, экономике: материалы XVII(64) Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 14–15 марта 2012 г. / Вит. гос. ун т; редкол.: А.П. Солодков (гл. ред.) [и др.]. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2012. – Т. 1. – С. 24–25.

11. Семёнов, М.Г. Об инъекторах конечных π-разрешимых групп для фиттинговых множеств / М.Г. Семёнов // VI Машеровские чтения: материалы международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых, Витебск, 27–28 сентября 2012 г. / Вит. гос. ун т; редкол.: А.П. Солодков (гл. ред.) [и др.]. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2012. – С. 46–47.

12. Семёнов, М.Г. Об инъекторах конечных π-разрешимых групп для множеств Фиттинга / М.Г. Семёнов, Н.Т. Воробьев // XI Белорусская математическая конференция: Тез. докл. Междунар. науч. конф. Минск, 5–9 ноября 2012 г. – Часть 5. – Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2012. – С. 50–51.

13. Семёнов, М.Г. Об инъекторах конечных частично разрешимых групп для множеств Фиттинга / М.Г. Семенов // Наука – образованию, производству, экономике: материалы XVIII(65) Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 13–14 марта 2013 г. / Вит. гос. ун т; редкол.: А.П. Солодков (гл. ред.) [и др.]. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2013. – Т. 1. С. 25–27.

14. Semenov, M.G. Injectors for Fitting sets / M.G. Semenov, N.T. Vorob'ev // 9th International Algebraic Conference in Ukraine: Abstracts of Reports, L'viv, July 8–13, 2013. – L'viv, 2013. – P. 168.

15. Семёнов, М.Г. Об инъекторах для фиттинговых множеств / М.Г. Семёнов // VII Машеровские чтения: материалы международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых, Витебск, 24–25 сентября 2013 г. / Вит. гос. ун т; редкол.: А.П. Солодков (гл. ред.) [и др.]. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2013. – С. 37–38.

16. Семёнов, М.Г. О локальном методе для множеств Фиттинга / М.Г. Семёнов // Наука – образованию, производству, экономике: материалы XIX(66) Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 13-14 марта 2014 г./ УО ВГУ им. П.М. Машерова; редакционный совет: И.М. Прищепа [и др.]. – Витебск, 2014. – С. 31–33.

17. Семёнов, М.Г. О свойствах инъекторов для перестановочных мно-

жеств Фиттинга. / М.Г. Семёнов // VIII Машеровские чтения: материалы международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых, Витебск, 16-17 октября 2014 г. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2014. – С. 20–21.

18. Semenov, M. On injectors for Fitting sets of finite group / M. Semenov // The Youth of the 21th Century: Education, Science, Innovations: materials of the International Conference for Students, Postgraduates and Young Scientists, Vitebsk, December 4, 2014 / Vitebsk State University; Editorial board: I.M. Prishepa (editor in chief.) [and others.]. – Vitebsk: VSU named after P.M. Masherov, 2014. – P. 14–15.

РЭЗЮМЭ

Сямёнаў Максім Генадзьевіч

Ін'ектары канечных груп

Ключавыя словы: канечная група, ін'ектар, π-вырашальная група, клас Фіцінга, мноства Фіцінга, холава падгрупа, радыкал.

Дысертацыя прысвечана рашэнню задачы знаходжання новых класаў спалучаных ін'ектараў канечных груп і вывучэнню будовы ін'ектараў у мноствах Фіцінга і класах Фіцінга.

У дысертацыйнай рабоце знойдзены новыя кананічныя класы спалучаных ін'ектараў у мностве Фіцінга канечнай часткова вырашальнай групы. У прыватнасці, даказана існаванне і спалучанасць ін'ектараў для π-насычанага мноства Фіцінга ў адвольнай π-вырашальнай групе. Выяўлены новыя ўласцівасці радыкалаў груп і на гэтай аснове ўстаноўлена характарызацыя ін'ектараў з дапамогай радыкалаў для класа Хартлі, які фактарызуецца здабыткам непустога класа Фіцінга і класа ўсіх p-нільпатэнтных груп. Атрымана агульная формула ін'ектара ў лакальным π-насычаным мностве Фіцінга ва ўсялякай канечнай π-вырашальнай групе.

Усе асноўныя вынікі дысертацыі з'яўляюцца новымі. Яны маюць тэарэтычны характар і могуць быць выкарыстаны ў даследаваннях па тэорыі канечных груп і іх класаў, а таксама пры чытанні спецкурсаў ва універсітэтах.

РЕЗЮМЕ

Семёнов Максим Геннадьевич

Инъекторы конечных групп

Ключевые слова: конечная группа, инъектор, π-разрешимая группа, класс Фиттинга, множество Фиттинга, холлова подгруппа, радикал.

Диссертация посвящена решению задачи нахождения новых классов сопряженных инъекторов конечных групп и изучению строения инъекторов во множествах Фиттинга и классах Фиттинга.

В диссертационной работе найдены новые канонические классы сопряженных инъекторов во множестве Фиттинга конечной частично разрешимой группы. В частности, доказано существование и сопряженность инъекторов для π-насыщенного множества Фиттинга в произвольной π-разрешимой группе. Выявлены новые свойства радикалов групп и на этой основе установлена характеризация инъекторов посредством радикалов для класса Хартли, факторизуемого произведением непустого класса Фиттинга и класса всех p-нильпотентных групп. Получена общая формула инъектора в локальном π-насыщенном множестве Фиттинга в любой конечной π-разрешимой группе.

Все основные результаты диссертации являются новыми. Они имеют теоретический характер и могут быть использованы в исследованиях по теории конечных групп и их классов, а также при чтении спецкурсов в университетах.

SUMMARY

Semenov Maksim Gennadievich

Injectors of finite groups

Keywords: finite group, injector, π-soluble group, Fitting class, Fitting set, Hall subgroup, radical.

Thesis devoted to solving of the problem of finding new classes of conjugate injectors of finite groups and study of structure of injectors for Fitting sets and Fitting classes.

New canonical classes of conjugate injectors in a Fitting set of finite partially soluble group are found. In particular, the existence and conjugation of injectors for π-saturated Fitting sets in an arbitrary π-soluble group are proved. New properties of radicals of groups are obtained; on this basis, the characterization of injectors by radicals for Hartley class that factored by the product of a non-empty Fitting class and the class of all p-nilpotent groups is established. The general formula of the injector in the local π-saturated Fitting set of finite π-soluble group is obtained.

All main results of the thesis are new. They are theoretical and can be used in researches on the theory of finite groups and their classes, as well as in reading specialized courses at universities.

Научное издание

СЕМЁНОВ Максим Геннадьевич

ИНЪЕКТОРЫ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

01.01.06 – математическая логика,
алгебра и теория чисел

Подписано в печать 09.04.2015. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 1,4.
Уч.-изд. л. 1,5. Тираж 60 экз. Заказ № 218.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013.
Специальное разрешение (лицензия) №02330/450 от 18.12.2013.
ул. Советская, 104, 246019, г. Гомель