Инж. П. К. ШМУЛЕВИЧ

УЧЕБНИК ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ ТРИГОНОМЕТРИИ

ПЕРЕРАБОТКА И ДОПОЛНЕНИЯ Б. Я. БЕРЕЗОВСКОГО

ИЗДАНИЕ ШЕСТОЕ, ИСПРАВЛЕННОЕ

Утвержден в качестве учебника Главным управлением учебных заведений Наркомтяжпрома на 1937 г.

ОБЪЕДИНЕННОЕ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО НКТП СССР
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1937 ЛЕНИНГРАД

Т 24-3-2
ТКК № 107

Главная редакция технико-теоретической литературы обращается ко всем преподавателям и учащимся, которым придется пользоваться настоящим учебником, с просьбой присылать в адрес редакции (Москва, Третьяковский пр., 1) свои замечания, касающиеся настоящей книги, для учета их при последующих изданиях.

Редактор *И. Я. Акушский.* Техн. редактор *Е. Весник.*
Корректор *А. Н. Крутов.* График *З. И. Савицкая.*

Технико-теоретическая редакция № 45. Учетн. № 42641а, Тираж 25 000. Сдано в набор 1/VI 1937 г. Подп. в печ. 14/IX 1937 г. Формат бумаги 62 × 94. Авт. л. 23. Бум. лист. $7^1/_8$. Печ. зн. в бум. листе 101 000. Заказ № 1089. Ленобгорлит № 4629. Выход в свет сентябрь 1937 г.

3-я тип. ОНТИ. Ленинград. ул. Моисеенко, 10.

К ШЕСТОМУ ИЗДАНИЮ

В настоящее издание книги внесен ряд редакционных исправлений, уточнены некоторые формулировки и устранены ошибки, замеченные в предыдущих изданиях. Многие из внесенных в настоящее издание исправлений вызваны замечаниями и указаниями, полученными Главной редакцией от преподавателей и учащихся, пользующихся настоящей книгой. В некоторых из этих замечаний были высказаны пожелания, чтобы книга была значительно пополнена задачами и упражнениями. Главная редакция не сочла возможным принять это предложение, ввиду наличия отдельно изданных сборников задач, в том числе специально приспособленного к настоящему учебнику сборника задач по прямолинейной тригонометрии Б. Я. Березовского (издание ОНТИ НКТП СССР, 1936 г.).

Главная редакция
технико-теоретической литературы.

ВВЕДЕНИЕ

Предмет тригонометрии

§ 1. Слово „тригонометрия“ — греческого происхождения. В буквальном переводе на русский язык оно означает „измерение треугольников“ [1]) и этим названием достаточно характеризуется первоначальное назначение данной отрасли математических наук. Но, подобно тому, как геометрия, предназначавшаяся сперва для чисто практических целей — измерения земли — переросла свое название и выросла в обширную область, изучающую свойства протяженности вообще, так и тригонометрия далеко перешагнула свои первоначальные узкие рамки и сделалась совершенно необходимой и незаменимой при изучении всякого рода вопросов и решений задач, в которых на ряду с линейными величинами фигурируют углы.

Сведение сложных геометрических фигур к треугольнику

§ 2. Как известно из геометрии, треугольник является простейшей геометрической фигурой, и всякого рода зависимости — равенство, пропорциональность, подобие — для более сложных фигур выводятся из свойств треугольников, на которые при помощи диагоналей разбиваются эти фигуры.

В соответствии с особо важной ролью треугольников, им при изучении геометрии отводится исключительно много места. Вполне естественным является поэтому вопрос: почему же понадобилась специальная отрасль математики — тригонометрия — для изучения тех же треугольников, о которых и в геометрии говорится достаточно подробно?

Подобный вопрос со стороны учащихся вполне законен и заслуживает самого точного и определенного ответа.

Геометрические теоремы о соотношениях между сторонами и углами треугольников

§ 3. Как известно из геометрии, каждый треугольник имеет шесть „основных“ элементов: три стороны и три угла. Постараемся припомнить,

---

[1]) Слово „тригонометрия“ происходит от двух греческих слов: τρίγωνον (читается: „тригонон“), что означает „треугольник“, и μετρεῖν (читается: „метрейн“), что означает „измерять“.

много ли существует соотношений, связывающих между собою эти основные элементы, т. е. углы треугольников с их сторонами.

Мы знаем, что в одном и том же треугольнике против равных сторон лежат равные углы, а против большей стороны лежит и больший угол (и наоборот). Кроме того, известно, что в двух различных треугольниках, в случае попарного равенства двух сторон и неравенства третьих, против большей стороны лежит и больший угол (и наоборот). Наконец, вспоминаем, что существует соотношение между квадратом любой стороны треугольника и суммою квадратов двух других сторон. При этом приходится рассматривать отдельно 3 случая, когда данная сторона лежит против прямого угла (теорема Пифагора), острого угла или тупого.

Перечисленными зависимостями почти исчерпываются геометрические теоремы, выражающие связь между сторонами и углами треугольников.

Много ли этих зависимостей? Да и можно ли их назвать настоящими „зависимостями" в математическом смысле этого слова? Ведь под математической зависимостью между двумя величинами подразумевается такое соотношение между ними, при котором, зная значение одной из них, мы можем значение другой точно определить. Так ли обстоит дело в данном случае? Мы знаем, что в треугольнике против большей стороны лежит больший угол. Пусть так. Но можно ли из этого заключить, что если сторона a вдвое, втрое,... больше стороны b, то и противолежащий ей угол A тоже вдвое, втрое,... больше угла B? Или же зависимость здесь другая, более сложная и какая именно? Очевидно, упомянутая теорема не дает ответа на эти естественные вопросы.

Составить уравнение, которое выражало бы непосредственную зависимость между сторонами и углами треугольников оказывается невозможным. Но зато найден способ применять вместо величин самих углов особые зависимые от них величины — тригонометрические, которые могут быть связаны со сторонами треугольников при помощи весьма простых уравнений.

Переменные величины

§ 4. Вводя понятие о функции, необходимо на нем подробно остановиться и точно объяснить, какой именно смысл придается в математике слову „функция".

Всякого рода величина, обладающая способностью изменяться в более или менее широких границах в условии данного вопроса, называется переменной величиной. Всякого рода математические зависимости (формулы) выражают определенную связь между некоторыми переменными величинами. Так, например, площадь круга выражается формулой $S = \pi R^2$. Здесь и величина площади S и величина радиуса R — величины переменные, но между ними существует строго определенная и притом постоянная связь, устанавливаемая написанной формулой. Спрашивается: могут ли и площадь круга и радиус его выражаться совершенно произвольными числами, так как обе эти величины переменные? Ответ ясен: каждая из них в отдельности — да, но обе одновременно — нет. В самом деле, несомненно, могут существовать круги, площади которых выражаются какими угодно числами, как весьма большими, так и самыми малыми. Также ясно, что и радиусы кругов могут быть какими угодно, от самых малых до самых больших. Но нельзя по своему желанию изменять одновременно и то и другое. Если мы возьмем радиус в 10 *м*, то площадь круга будет 100π *м*^{2} и не может быть никакой иной. Если же мы зададимся площадью круга в 30 *см*^{2}, то радиус его будет $\sqrt{\frac{30}{\pi}}$ *см* и не может при заданной площади иметь никакого другого значения. Таким образом оказывается, что хотя и площадь круга и радиус — величины переменные, способные изменяться каждая в отдельности в самых неограниченных пределах по нашему усмотрению, но производить изменения их обеих одновременно по своему произволу мы не можем. Их взаимоотношение зависит от формулы, связывающей их между собою и позволяющей нам распоряжаться по своему усмотрению всего лишь одной какой-нибудь величиной: если мы выбрали произвольный радиус, то площадь круга получится строго определенная; наоборот, взяв желательную для нас площадь, мы уже не можем повлиять на величину радиуса, который определится сам собой на основании формулы.

К совершенно такому же заключению мы придем при истолковании и всякой другой формулы, связывающей две переменные величины: всегда мы можем придавать произвольное значение *только одной* из них, а другая, хотя и переменная сама по себе, получит уже некоторое вполне определенное значение, зависящее от выбранного нами значения первой переменной и от формулы, связывающей обе эти переменные между собою.

Аргумент и функция

§ 5. Таким образом оказывается, что обе переменные величины, входящие в формулу (или уравнение), выполняют *неодинаковые* роли, в то время как значения одной из них могут быть выбраны нами совершенно произвольно, другая величина получает уже вполне определенные значения, *зависящие* от произвольно выбранных значений первой и определяемые из формулы (или уравнения), связывающей эти две переменные величины. Поэтому в зависимости от той роли, которую каждая из двух переменных величин выполняет, каждая имеет свое *особое* название: та из них, значения которой мы можем выбирать произвольно, по нашему усмотрению, называется *независимой переменной* или *аргументом*, вторая же переменная, значения которой уже будут определяться из формулы в зависимости от значений первой, называется *зависимой переменной* или *функцией*.

Итак, функцией называется такая переменная величина, значения которой определяются в зависимости от свободно выбранных произвольных значений другой переменной величины — независимой [1]).

Примеры функциональных зависимостей

§ 6. Соотношения между независимыми переменными и их функциями могут выражаться в самых разнообразных формах. Примерами

[1]) Какая из двух переменных является аргументом и какая функцией, зависит от постановки вопроса, от условий данной задачи.

функциональных зависимостей могут служить любые формулы из алгебры, геометрии, физики и т. д.

Так, например, из одного уравнения с двумя неизвестными $ax+by=c$ найти определенных значений для x и для y нельзя. Но из этого вовсе не следует, что обоим неизвестным можно давать совершенно произвольные значения: этому препятствует существующая между ними связь в виде заданного уравнения. Решив его относительно какого-либо неизвестного, например y, получим $y=\frac{c-ax}{b}$.

Теперь мы можем придавать совершенно произвольные значения неизвестному x и будем получать в зависимости от них уже вполне определенные значения для y. Значит y есть функция от x.

В геометрической формуле $s=180°\cdot(n-2)$ сумма углов многоугольника s выражена в виде функции от числа его сторон n.

В формуле из физики $v_t=gt$ скорость v_t свободно падающего тела в данный момент времени выражается в виде функции от времени t, протекшего от начала падения (g — ускорение силы тяжести — величина для каждого места п о с т о я н н а я).

В формуле $l_t=l_0(1+\alpha t)$ длина тела l_t при произвольной температуре t выражается в функции от температуры t (l_0 — длина тела при 0° и α — коэфициент расширения — величина для данного тела определенная).

Исходя из числа независимых переменных, которыми определяются значения функции, различают функции от одной, двух, трех и вообще многих переменных. Так, например, величина угла правильного многоугольника есть функция всего лишь от одной переменной — числа сторон многоугольника. Площадь треугольника — функция двух переменных: основания и высоты. Вес тела — функция его объема и удельного веса. Сумма определенного числа членов арифметической прогрессии — функция трех независимых переменных: первого члена, разности прогрессии и числа ее членов.

Однозначные и многозначные функции

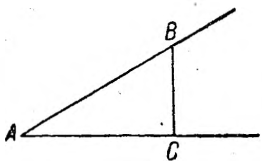
§ 7. Если каждому данному значению независимой переменной соответствует одно и только одно значение функции, то такая функция называется о д н о з н а ч н о й. В противном случае она называется двузначной, трехзначной и вообще м н о г о з н а ч н о й. Например, функция y, определяемая формулой $y=\sqrt{x}+5$, есть функция двузначная, так как $\sqrt{x}$ для каждого данного значения x имеет два значения — положительное и отрицательное, и потому, например, при $x=4$ получается: $y_1=2+5=7$ и $y_2=-2+5=3$.

Ознакомившись в общих чертах с понятием о ф у н к ц и я х вообще, можем теперь перейти к определению интересующих нас ф у н к ц и й т р и г о н о м е т р и ч е с к и х.

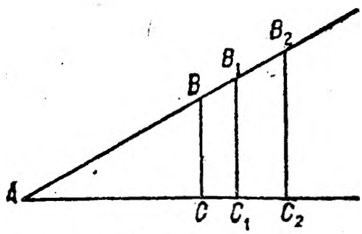
ЧАСТЬ ПЕРВАЯ
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ОСТРОГО УГЛА

ГЛАВА I
ПЕРВОНАЧАЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

§ 8. Пусть задан совершенно произвольный острый угол A. Возьмем на одной из его сторон какую-нибудь точку B и опустим из нее перпендикуляр BC на другую сторону (черт. 1). Вследствие полной свободы выбора точки B, длина катета BC и длина гипотенузы AB в треуголь-



Черт. 1.

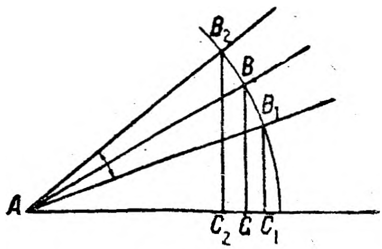


Черт. 2.

нике ABC будут, очевидно, переменными величинами. Но отношение этих длин для данного угла A — величина, не зависящая от выбора точки B. В самом деле, если бы вместо точки B мы выбрали точки $B_1, B_2, \ldots$ (черт. 2) и провели перпендикуляры B_1C_1, $B_2C_2, \ldots$, то все полученные таким образом треугольники $ABC, AB_1C_1, AB_2C_2, \ldots$ были бы подобны между собой, а потому сходственные стороны в этих треугольниках пропорциональны, т. е. величина отношения

$$\frac{BC}{AB}=\frac{B_1C_1}{AB_1}=\frac{B_2C_2}{AB_2}=\ldots$$

не зависит от выбора точки B.



Черт. 3.

Если теперь, поворотом стороны AB около вершины A в том или ином направлении (черт. 3) изменить величину угла A, то ни одно из отношений $\frac{B_1C_1}{AB_1}$ и $\frac{B_2C_2}{AB_2}$ не может быть равно отношению $\frac{BC}{AB}$. В самом деле, так как $AB=AB_1=AB_2$ и $B_1C_1<BC<B_2C_2$, будем иметь неравенство:

$$\frac{B_1C_1}{AB_1}<\frac{BC}{AB}<\frac{B_2C_2}{AB_2}.$$

Синус, косинус и тангенс

§ 9. Итак, если из произвольной точки, взятой на одной из сторон угла, опустить перпендикуляр на другую сторону, то в полученном прямоугольном треугольнике:

1) отношение длины катета, противолежащего данному углу, к длине гипотенузы есть величина определенная для каждого данного угла;

2) при изменении величины угла указанное отношение тоже изменяется.

Какой же вывод можно сделать из этих двух положений? Если угол изменяется (черт. 3), т. е. величина этого угла есть величина переменная, то и отношение катета, противолежащего этому углу, к его гипотенузе, есть тоже величина переменная (изменяющаяся при изменении угла); однако для каждого произвольно заданного угла получается уже не произвольное, а строго определенное, и притом только одно, значение для величины отношения катета к гипотенузе.

Следовательно, отношение длины катета, противолежащего переменному углу, к длине гипотенузы, есть *функция* от величины этого угла.

Если переменную величину угла обозначить буквой x, а переменную величину рассматриваемого отношения катета к гипотенузе обозначить буквой y, то выражение „величина y есть функция от величины x" с помощью математических символов кратко записывается так:

$$y = f(x),$$

что читается: „игрек есть функция от икс".

Каждой отдельной функции, если она имеет достаточно частое применение, присваивается определенное название.

Рассматриваемой функции угла присвоено название: *синус* (sinus) угла, и существующая между функцией y и аргументом x зависимость записывается в математических символах так:

$$y = \sin x,$$

что читается: „игрек есть синус угла икс".

Определение. *Синусом* угла называется величина, выражающая отношение длины катета, противолежащего этому углу, к длине гипотенузы.

Синус угла представляет собой отношение двух длин и значит всегда является отвлеченным числом.

§ 10. Применяя к отношению $\frac{AC}{AB}$ (черт. 1) те же рассуждения, какими мы пользовались в § 8 и 9, легко придем к заключению, что и это отношение зависит от величины угла A, т. е. является его функцией. Эта функция носит название: *косинус* (cosinus) угла и обозначается символом $\cos A$, где A — величина рассматриваемого угла BAC.

Наконец, и отношение $\frac{BC}{AC}$ (черт. 1) есть функция угла A и называется *тангенсом* (tangens) угла и обозначается символом $\operatorname{tg} A$.

Определения:

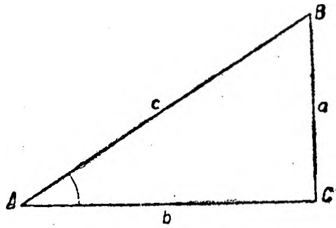
Косинусом угла называется величина, выражающая отношение длины катета, прилежащего к углу, к длине гипотенузы.

Тангенсом угла называется величина, выражающая отношение длины катета, противолежащего углу, к длине второго катета.

Значения косинуса и тангенса для каждого данного угла по той же причине, что и значения синуса, являются числами отвлеченными.

Все три функции, с которыми мы только что ознакомились, — синус, косинус и тангенс — называются *тригонометрическими функциями*.

§ 11. Рассматривая соответствующие отношения длин сторон прямоугольного треугольника ABC (черт. 4)[1], можно на основании изложенного так определить тригонометрические функции острого угла:



Черт. 4.

1) синус угла есть отношение катета, противолежащего этому углу, к гипотенузе:

$$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{\textit{противолежащий катет}}{\textit{гипотенуза}};$$

2) косинус угла есть отношение катета, прилежащего к этому углу, к гипотенузе:

$$\cos A = \frac{b}{c} = \frac{\textit{прилежащий катет}}{\textit{гипотенуза}};$$

3) тангенс угла есть отношение катета, противолежащего этому углу, к катету, прилежащему к нему:

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b} = \frac{\textit{противолежащий катет}}{\textit{прилежащий катет}}.$$

Измерив длины a, b, c сторон треугольника произвольной (но одинаковой для всех сторон) единицей и взяв отношения длин соответствующих двух сторон, найдем численные значения тригонометрических функций для данного угла A.

Основные зависимости между тригонометрическими функциями одного и того же угла

§ 12. Мы видели, что для каждого данного острого угла A вполне определены отношения $\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, \frac{a}{b}\right)$ попарно взятых сторон прямоугольного треугольника, заключающего этот угол. В каждое из этих отношений $\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, \frac{a}{b}\right)$ входят две стороны прямоугольного треугольника. Пользуясь теоремой Пифагора, легко по двум сторонам найти третью сторону прямоугольного треугольника. Отсюда вытекает, что, зная одно из трех отношений: $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{a}{b}$, можно определить остальные два.

---

[1]) Для сокращения письма принято обозначать величины углов треугольника большими буквами, поставленными в их вершинах, а длины сторон маленькими буквами, соответствующими противолежащим углам.

Пример. Дано отношение $\frac{a}{c}=\frac{3}{5}$. Определить отношения $\frac{b}{c}$ и $\frac{a}{b}$.

Решение. По теореме Пифагора

$$b=\sqrt{c^2-a^2};$$

поэтому

$$\frac{b}{c}=\frac{\sqrt{c^2-a^2}}{c}=\sqrt{\frac{c^2-a^2}{c^2}}=\sqrt{1-\left(\frac{a}{c}\right)^2}.$$

Подставив в полученное выражение данное значение отношения $\frac{a}{c}$, получим

$$\frac{b}{c}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}.$$

Аналогично найдем

$$\frac{a}{b}=\frac{a}{\sqrt{c^2-a^2}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{c^2-a^2}{a^2}}}=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2-1}}.$$

Подставив $\frac{c}{a}=\frac{5}{3}$, получим

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2-1}}=\frac{1}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}.$$

Впрочем, отношение $\frac{a}{b}$ легко найти из данного отношения $\frac{a}{c}=\frac{3}{5}$ и полученного из него отношения $\frac{b}{c}=\frac{4}{5}$ путем деления первого на второе:

$$\frac{a}{b}=\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{3}{4}.$$

Таким образом по каждому из трех отношений: $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{a}{b}$ можно определить остальные два. Но эти отношения представляют тригонометрические функции острого угла прямоугольного треугольника. Следовательно, по каждой из трех тригонометрических функций острого угла можно определить остальные две. Другими словами, между тригонометрическими функциями (и попарно взятыми, и вместе взятыми) существуют некоторые зависимости. Из них основными являются две следующие зависимости:

$$\sin^2 A+\cos^2 A=1 \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} A=\frac{\sin A}{\cos A}.$$

(Примечание. $\sin^2 A$ обозначает $(\sin A)^2$, т. е. квадрат синуса угла A.)

Из этих двух основных зависимостей можно получить, как следствие, все другие зависимости, существующие между тремя тригонометрическими функциями одного и того же угла.

Приступим теперь к выводу двух основных зависимостей.

I. Вывод формулы $\sin^2 A+\cos^2 A=1$.

По теореме Пифагора:

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

откуда почленным делением на c^2 получим

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1;$$

но

$$\frac{a}{c} = \sin A \quad \text{и} \quad \frac{b}{c} = \cos A,$$

поэтому

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1,$$

т. е. сумма квадратов синуса и косинуса одного и того же острого угла равна единице.

II. Вывод формулы $\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A}$.

Делением отношения $\frac{a}{c}$ на отношение $\frac{b}{c}$ получаем

$$\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b};$$

но

$$\frac{a}{c} = \sin A, \quad \frac{b}{c} = \cos A \quad \text{и} \quad \frac{a}{b} = \operatorname{tg} A,$$

поэтому

$$\frac{\sin A}{\cos A} = \operatorname{tg} A,$$

т. е. отношение синуса к косинусу одного и того же острого угла равно тангенсу того же угла.

Примеры для упражнений

§ 13. 1. Катеты прямоугольного треугольника равны:

$$a = 4 \text{ см}, \quad b = 3 \text{ см}.$$

Найти численные значения тригонометрических функций угла A, противолежащего катету a.

Решение. Гипотенуза c равна

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \ (\text{см});$$

отсюда

$$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{4 \text{ см}}{5 \text{ см}} = 0{,}8; \quad \cos A = \frac{b}{c} = \frac{3 \text{ см}}{5 \text{ см}} = 0{,}6;$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b} = \frac{4 \text{ см}}{3 \text{ см}} = 1{,}3 \text{ (с точностью до 0,1)}.$$

2. Найти численные значения тригонометрических функций для углов прямоугольных треугольников, катеты которых имеют длину:

1) $a = 4$ *км*, $b = 3$ *км*; 2) $a = 4$ *дм*, $b = 3$ *дм*; 3) $a = 16$ *м*, $b = 12$ *м*.

3. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 20 *см*. Один из катетов равен 18,2 *см*. Найти численные значения тригонометрических функций угла, прилежащего к данному катету. (Вычислить с точностью до 0,0001.)

Ответ. $\sin A = 0{,}4146$; $\cos A = 0{,}9100$; $\operatorname{tg} A = 0{,}4556$.

4. Пользуясь основными зависимостями между функциями одного и того же угла (§ 12), определить $\cos A$ и $\operatorname{tg} A$, если $\sin A = \frac{7}{25}$, где A — острый угол.

Решение. Из зависимости

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

находим

$$\cos^2 A = 1 - \sin^2 A.$$

Но $\sin A = \frac{7}{25}$, поэтому

$$\cos^2 A = 1 - \left(\frac{7}{25}\right)^2,$$

откуда

$$\cos A = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{25}\right)^2}.$$

Вычислить $\sqrt{1 - \left(\frac{7}{25}\right)^2}$ удобнее так:

$$\sqrt{1 - \left(\frac{7}{25}\right)^2} = \sqrt{\frac{25^2 - 7^2}{25^2}} = \sqrt{\frac{32 \cdot 18}{25^2}} = \sqrt{\frac{64 \cdot 9}{25^2}} = \frac{8 \cdot 3}{25} = \frac{24}{25}.$$

Итак,

$$\cos A = \frac{24}{25}.$$

Теперь, пользуясь формулой

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A},$$

находим

$$\operatorname{tg} A = \frac{\frac{7}{25}}{\frac{24}{25}} = \frac{7}{24}.$$

5. Определить $\sin x$ и $\cos x$, если $\operatorname{tg} x = \frac{5}{12}$, где x — острый угол.

Решение. По условию задачи отношение катетов прямоугольного треугольника, содержащего острый угол x, равно $\frac{5}{12}$, т. е. один катет содержит 5 таких частей, каких в другом содержится 12. Тогда гипотенуза этого прямоугольного треугольника будет содержать 13 таких же частей, ибо $\sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$.

Поэтому

$$\sin x = \frac{5}{13} \quad \text{и} \quad \cos x = \frac{12}{13}.$$

6. Определить $\cos \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sin \alpha = k$, где α — острый угол, а k — положительная правильная дробь.

Ответ. $\cos \alpha = \sqrt{1 - k^2}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{k}{\sqrt{1 - k^2}}$.

7. Определить $\sin\beta$ и $\cos\beta$, если $\operatorname{tg}\beta = m$, где β — острый угол, а m — положительное число.

Решение. По условию:

$$\frac{a}{b} = m,$$

откуда

$$a = bm.$$

Тогда

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{b^2m^2 + b^2} = b\sqrt{m^2 + 1}.$$

Теперь находим

$$\sin\beta = \frac{a}{c} = \frac{bm}{b\sqrt{m^2+1}} = \frac{m}{\sqrt{m^2+1}},$$

$$\cos\beta = \frac{b}{c} = \frac{b}{b\sqrt{m^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{m^2+1}}.$$

Проверка:

$$\sin^2\beta + \cos^2\beta = \left(\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}\right)^2 = \frac{m^2+1}{m^2+1} = 1$$

и

$$\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\dfrac{m}{\sqrt{m^2+1}}}{\dfrac{1}{\sqrt{m^2+1}}} = m = \operatorname{tg}\beta.$$

8. Определить $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{m}{n}$, где α — острый угол, а $\frac{m}{n}$ — положительное число.

Ответ $\sin\alpha = \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}$, $\cos\alpha = \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}$.

Вспомогательные тригонометрические функции (котангенс, секанс и косеканс)

§ 14. Из § 11 нам известно, что отношения:

$$\frac{a}{c}, \quad \frac{b}{c}, \quad \frac{a}{b} \tag{1}$$

сторон прямоугольного треугольника являются функциями острого угла A и называются соответственно синусом, косинусом и тангенсом угла A.

Обратные [1]) отношения:

$$\frac{c}{a}, \quad \frac{c}{b}, \quad \frac{b}{a}, \tag{2}$$

конечно, тоже зависят от величины острого угла A, т. е. тоже являются функциями угла A.

[1]) Два числа (или выражения) называются *обратными* друг другу или *взаимно обратными*, если произведение их равно (тождественно равно) положительной единице. Таковы, например, $\frac{3}{4}$ и $\frac{4}{3}$; $-\frac{2}{5}$ и $-\frac{5}{2}$; 9 и $\frac{1}{9}$; $\frac{A}{B}$ и $\frac{B}{A}$; $\frac{k}{m}$ и $\frac{m}{k}$ и т. д.

Они имеют следующие названия и обозначения:

отношение $\frac{b}{a}$ называется котангенсом (cotangens) угла A и обозначается символом $\operatorname{ctg} A$, т. е.

$$\operatorname{ctg} A = \frac{b}{a};$$

отношение $\frac{c}{b}$ называется секансом (secans) угла A и обозначается символом $\sec A$, т. е.

$$\sec A = \frac{c}{b};$$

отношение $\frac{c}{a}$ называется косекансом (cosecans) угла A и обозначается символом $\operatorname{cosec} A$, т. е.

$$\operatorname{cosec} A = \frac{c}{a}.$$

Следствие. Так как отношения (2) обратны соответственно отношениям (1), то имеем:

$$\operatorname{ctg} A = \frac{1}{\operatorname{tg} A}; \quad \sec A = \frac{1}{\cos A}; \quad \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A},$$

или

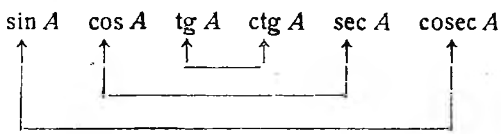
$$\sin A \cdot \operatorname{cosec} A = 1; \quad \cos A \cdot \sec A = 1; \quad \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{ctg} A = 1.$$

Чтобы запомнить, какие попарно тригонометрические функции имеют взаимно обратные значения для одного и того же угла, выпишем все шесть тригонометрических функций в следующем порядке:

$$\sin A, \ \cos A, \ \operatorname{tg} A, \ \operatorname{ctg} A, \ \sec A, \ \operatorname{cosec} A,$$

и тогда первая функция с начала и с конца, вторая — с начала и с конца, третья — с начала и с конца или, короче, две функции, равноудаленные от концов, имеют взаимно обратные значения для одного и того же угла.

Схематически это можно изобразить так:



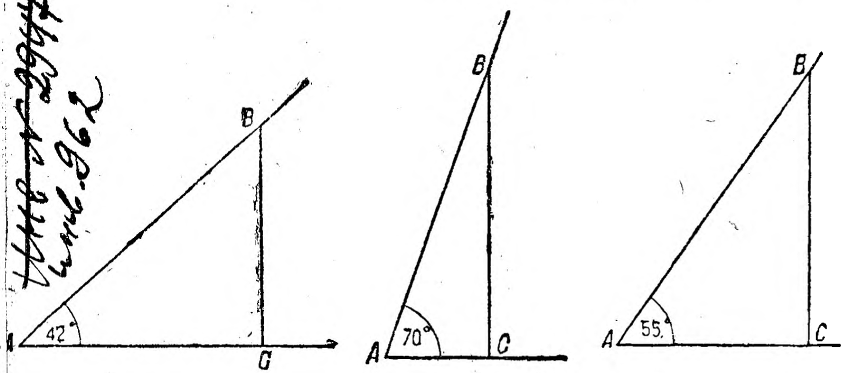
Замечание 1. Эти три новые тригонометрические функции (котангенс, секанс, косеканс), так же как и первые три (синус, косинус, тангенс), являются отношениями длин двух отрезков, измеренных одной и той же единицей, а потому численные значения этих тригонометрических функций для каждого данного угла A являются также числами отвлеченными.

Замечание 2. Из шести тригонометрических функций (синус, косинус, тангенс, котангенс, секанс, косеканс) преимущественно применяются первые три (синус, косинус, тангенс), которые мы назовем *основными* тригонометрическими функциями. Последние три тригонометрические функции (котангенс, секанс, косеканс), которые мало употребительны, назовем *вспомогательными* тригонометрическими функциями.

Эпределение значения тригонометрической функции данного угла при помощи геометрического построения

§ 15. Определения, приведенные в § 9 и 10, дают возможность ычислять приближенные значения тригонометрических функций для ка-ких угодно острых углов при помощи простейшего графического по-троения. Правда, такие вычисления будут далеко не точными, но для ногих практических целей они дают вполне приемлемые результаты. Точность графического определения зависит главным образом от акку-атности вычерчивания и измерения. Можно считать, что для не слиш-ом малых углов даже малоопытный чертежник получит два верных де-ятичных знака. Умелый чертежник при хороших инструментах свободно южет дать три правильных десятичных знака, больше чего в технике едко требуется.

Для точного и отчетливого уяснения основных понятий тригономе-рии настоятельно рекомендуется каждому учащемуся, не довольствуясь



Черт. 5. Черт. 6. Черт. 7.

ертежами в книге, **самостоятельно** прочертить, измерить и вычи-лить результаты нижеследующих построений.

Пример 1. Определить значение синуса угла в 42°.

Для решения задачи чертим при помощи транспортира угол в 42° черт. 5), берем на любой из его сторон произвольную точку B и про-одим $BC \perp AC$. Теперь из прямоугольного треугольника ABC находим а основании определения (§ 9):

$$\sin 42° = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{гипотенуза}} = \frac{BC}{AB}.$$

Измерив по чертежу возможно более тщательно BC и AB в произ-ольных, но одинаковых единицах (например в миллиметрах), найдем для ашего чертежа

$$BC = 25{,}5 \text{ мм}; \quad AB = 38 \text{ мм},$$

следовательно,

$$\sin 42° = \frac{25{,}5 \text{ мм}}{38 \text{ мм}} = 0{,}67.$$

Пример 2. Определить $\cos 70^\circ$.

Чертим при помощи транспортира угол в 70° (черт. 6), проводим $BC \perp AC$ и измеряем стороны AC и AB полученного прямоугольного треугольника. Для нашего чертежа получается $AC = 12$ *мм*, $AB = 34{,}8$ *мм*, а потому на основании определения косинуса (§ 10) находим

$$\cos 70^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{12\ мм}{34{,}8\ мм} = 0{,}34.$$

3. Чему равен $\operatorname{tg} 55^\circ$?

Чертим $\angle BAC = 55^\circ$ (черт. 7), проводим $BC \perp AC$ и измеряем:

$$BC = 32\ мм, \quad AC = 22{,}4\ мм.$$

Следовательно, на основании определения тангенса (§ 10), имеем

$$\operatorname{tg} 55^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{32\ мм}{22{,}4\ мм} = 1{,}43.$$

Вычисление всех тригонометрических функций данного угла

§ 16. Само собой разумеется, что из черт. 5, 6 и 7 можно получить не только $\sin 42^\circ$, $\cos 70^\circ$ и $\operatorname{tg} 55^\circ$, но и значения всех остальных тригонометрических функций углов 42°, 70°, 55°.

Так, например, для нахождения $\sec 70^\circ$ строим угол в 70° (черт. 6) проводим $BC \perp AC$ и измеряем стороны AC и AB полученного прямоугольного треугольника. Для нашего чертежа получается:

$$AC = 12\ мм \quad и \quad AB = 34{,}8\ мм,$$

а потому на основании определения секанса заключаем, что, если

$$\cos 70^\circ = \frac{AC}{AB},$$

то

$$\sec 70^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{34{,}8\ мм}{12\ мм} = 2{,}9.$$

Определение величины угла по заданному значению его тригонометрической функции при помощи геометрического построения

§ 17. На основании определений (§ 9 и 10) можно решать при помощи геометрического построения и обратные задачи, а именно зная значение какой-нибудь из тригонометрических функций угла, определить величину этого угла.

Пример 1. Определить угол, синус которого равен $\frac{3}{5}$.

Чертим прямой угол C (черт. 8), на одной из его сторон откладываем отрезок CB, равный 3 (в произвольно выбранных единицах длины) и из точки B радиусом BD, равным 5 таким же единицам, засекаем другую сторону прямого угла в точке A. В полученном треугольнике угол A будет искомым, так как согласно определению

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{BC}{BD} = \frac{3\ един.}{5\ един.} = \frac{3}{5}.$$

Измерив величину этого угла при помощи транспортира, найдем, что он будет равен приблизительно 37°.

Пример 2. Определить угол, косинус которого равен $\frac{4}{7}$.

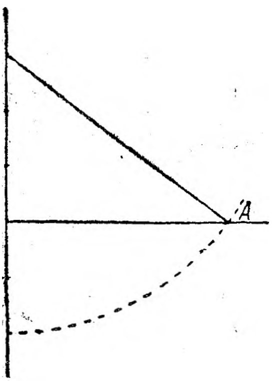
На одной из сторон прямого угла откладываем отрезок AB (черт. 9), равный 4 (в произвольных единицах), и из точки A радиусом AD в 7 таких же единиц засекаем другую сторону прямого угла в точке B. Угол A — искомый, так как

$$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{AC}{AD} = \frac{4 \text{ един.}}{7 \text{ един.}} = \frac{4}{7}.$$

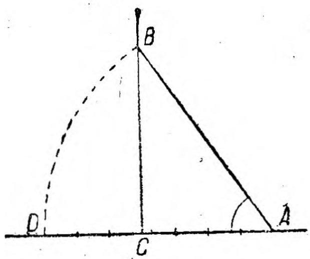
Измерение угла A транспортиром дает около 55°.

Пример 3. Определить угол, тангенс которого равен 2.

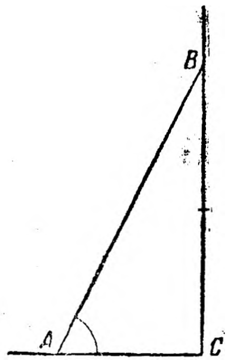
На одной из сторон прямого угла C (черт. 10) откладываем произвольный отрезок CA, а на другой стороне отрезок CB, вдвое больший.



Черт. 8.



Черт. 9.



Черт. 10.

Соединяя A и B, получаем искомый угол A, так как тангенс его равен 2. Действительно,

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC} = \frac{2AC}{AC} = 2.$$

Измерение угла A транспортиром дает около 63°.

Пример 4. Определить угол, у которого котангенс равен $\frac{5}{9}$.

Если обозначим искомый угол через x, то по условию имеем

$$\operatorname{ctg} x = \frac{5}{9},$$

а следовательно,

$$\operatorname{tg} x = \frac{9}{5},$$

и построение сведено к предыдущей задаче.

Пример 5. Чему равен угол y, если $\sec y = \frac{7}{3}$?

Строим угол y по значению его косинуса $\left(\frac{3}{7}\right)$ и определяем его величину транспортиром.

Пример 6. Найти угол, у которого косеканс равен $\frac{9}{7}$.

Если искомый угол назовем z, то

$$\operatorname{cosec} z = \frac{9}{7},$$

а потому

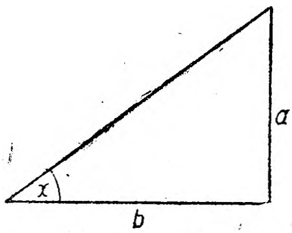
$$\sin z = \frac{7}{9},$$

а по заданному значению синуса находить угол мы умеем.

Границы изменения тригонометрических функций

§ 18. Определения тригонометрических функций, данные в § 9 и 10, позволяют установить следующие важные факты.

1. Синус и косинус острого угла представляют собой отношения соответствующего катета к гипотенузе. Но катет меньше гипотенузы, а потому у дроби:



Черт. 11.

$$\frac{\textit{катет}}{\textit{гипотенуза}}$$

числитель меньше знаменателя, т. е. численные значения синуса и косинуса каждого данного острого угла представляют правильные дроби.

2. Тангенс есть отношение двух катетов: $\operatorname{tg} x = \frac{a}{b}$ (черт. 11).

Если угол x больше 45°, то он больше другого острого угла в том же треугольнике, а потому $a > b$, т. е. $\frac{a}{b} > 1$, а следовательно, численное значение $\operatorname{tg} x$ будет больше единицы.

При угле $x = 45°$ треугольник будет равнобедренным, т. е. $a = b$, а потому

$$\operatorname{tg} 45° = \frac{a}{b} = 1.$$

Наконец, когда угол x будет меньше 45°, то катет a будет меньше b и $\frac{a}{b}$ будет правильной дробью, т. е. численное значение $\operatorname{tg} x$ будет меньше единицы.

Итак, в зависимости от величины угла численное значение тангенса может быть больше, равно или меньше единицы:

$$\begin{aligned} &\text{при } x > 45°, \quad \operatorname{tg} x > 1; \\ &\text{при } x = 45°, \quad \operatorname{tg} x = 1; \\ &\text{при } x < 45°, \quad \operatorname{tg} x < 1. \end{aligned}$$

Очевидно, что для котангенса будем иметь [1]):

$$\text{при } x > 45°, \quad \operatorname{ctg} x < 1;$$
$$\text{при } x = 45°, \quad \operatorname{ctg} x = 1;$$
$$\text{при } x < 45°, \quad \operatorname{ctg} x > 1.$$

3. Численные значения секанса и косеканса, будучи числами, обратными соответственно численным значениям косинуса и синуса (т. е. правильным дробям), будут выражаться неправильными дробями.

Примеры для упражнений

§ 10. 1. Катеты прямоугольного треугольника равны: $a = 3$ *см*, $b = 4$ *см*. Выписать значения всех тригонометрических функций для углов A и B (воспользоваться теоремой Пифагора для определения гипотенузы c).

2. В прямоугольном треугольнике даны: гипотенуза $c = 17$ *см* и катет $b = 8$ *см*. Определить значения всех тригонометрических функций углов A и B.

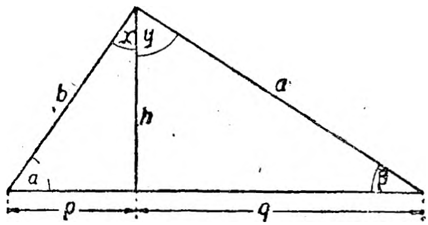
3. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 41 *м*, один из катетов равен 9 *м*. Найти значения тригонометрических функций угла, прилежащего к данному катету.

4. Определить при помощи построения значения тригонометрических функций углов в 30° и 60°.

5. Построить угол x и измерить его транспортиром, если дано:

а) $\cos x = \frac{3}{4}$; б) $\operatorname{tg} x = \frac{5}{8}$;

в) $\sin x = 0{,}7$; г) $\operatorname{ctg} x = \frac{10}{3}$.



Черт. 12.

6. Пользуясь обозначениями черт. 12, выписать тригонометрические функции углов α, β, x, y.

7. Какие тригонометрические функции выражают отношения $\frac{h}{b}$ и $\frac{q}{a}$ соответственно для углов α и β (черт. 12)? То же для углов x и y?

8. Чем является отношение $\frac{p}{h}$ для угла α (черт. 12)? Для угла x? Чем является отношение $\frac{h}{a}$ для углов β и y?

9. Пожарная лестница длиной 20 *м* упирается одним концом в землю, а другим в карниз крыши дома высотою в 21 *м*. Определить косинус и тангенс угла наклона лестницы к земле.

10. В четырехугольнике $ABCD$ диагональ AC образует прямые углы со сторонами AB и CD.

Зная, что $AB = 1{,}5$ *м*, $AC = 3{,}6$ *м*, $AD = 8{,}5$ *м*, найти $\sin ABC$, $\operatorname{tg} ACB$, $\cos CDA$ и $\operatorname{ctg} DAC$.

---

[1]) Произведение ($\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$) равно единице для любого значения x (§ 14). Но если при постоянном значении произведения один множитель будет увеличиваться, то ясно, что для сохранения неизменяемости величины произведения другой множитель должен уменьшаться. Поэтому, если $\operatorname{tg} x > 1$, то $\operatorname{ctg} x < 1$, и наоборот.

ГЛАВА II

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ. ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

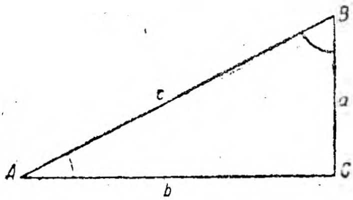
Определение дополнительных функций

§ 20. Определяя из прямоугольного треугольника ABC (черт. 13) тригонометрические функции угла A, получим

$$\sin A = \frac{a}{c}, \quad \cos A = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg} A = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{ctg} A = \frac{b}{a}. \tag{I}$$

Определяя из того же треугольника тригонометрические функции угла B будем иметь (на основании определений § 9 и 10):

$$\sin B = \frac{b}{c}, \quad \cos B = \frac{a}{c}, \quad \operatorname{tg} B = \frac{b}{a}, \quad \operatorname{ctg} B = \frac{a}{b}. \tag{II}$$



Черт. 13.

Сопоставляя соотношения (I) с соответствующими соотношениями (II), мы видим, что:

отношение $\frac{a}{c}$ одновременно является и синусом угла A и косинусом угла B, т. е.

$$\sin A = \cos B; \tag{1}$$

отношение $\frac{b}{c}$ одновременно является и косинусом угла A и синусом угла B, т. е.

$$\cos A = \sin B; \tag{2}$$

отношение $\frac{a}{b}$ одновременно является и тангенсом угла A и котангенсом угла B, т. е.

$$\operatorname{tg} A = \operatorname{ctg} B; \tag{3}$$

отношение $\frac{b}{a}$ одновременно является и котангенсом угла A и тангенсом угла B, т. е.

$$\operatorname{ctg} A = \operatorname{tg} B. \tag{4}$$

Из равенств (2) и (1) соответственно получим:

$$\frac{1}{\cos A} = \frac{1}{\sin B}$$

и

$$\frac{1}{\sin A} = \frac{1}{\cos B},$$

или на основании определений секанса и косеканса (§ 14):

$$\sec A = \operatorname{cosec} B \tag{5}$$

и

$$\operatorname{cosec} A = \sec B, \tag{6}$$

Соотношения (5) и (6) можно было бы также получить непосредственно из рассмотрения соотношений между сторонами прямоугольного треугольника.

Так, $\sec A = \frac{c}{b}$. Но одновременно отношение $\frac{c}{b}$ есть косеканс угла B, а потому $\sec A = \operatorname{cosec} B$.

Полученные шесть зависимостей между тригонометрическими функциями двух взаимно дополнительных углов [1]) словесно формулируются так:

1) синус угла равен косинусу дополнительного угла;
2) косинус угла равен синусу дополнительного угла;
3) тангенс угла равен котангенсу дополнительного угла;
4) котангенс угла равен тангенсу дополнительного угла;
5) секанс угла равен косекансу дополнительного угла;
6) косеканс угла равен секансу дополнительного угла.

Вот почему косинус, котангенс и косеканс называются *дополнительными функциями* по отношению соответственно к синусу, тангенсу и секансу.

Так как из соотношений (1), (3), (5) вытекает, что и, наоборот, синус — это косинус дополнительного угла, тангенс — это котангенс дополнительного угла, секанс — это косеканс дополнительного угла, то с одинаковым основанием синус, тангенс и секанс мы можем тоже назвать дополнительными функциями по отношению соответственно к косинусу, котангенсу и косекансу.

Поэтому каждая из пар функций:

1) синус и косинус, 2) тангенс и котангенс, 3) секанс и косеканс — является парой *взаимно дополнительных функций.*

Пользуясь понятием о взаимно дополнительных функциях, мы можем сущность всех соотношений (1 — 6) выразить так:

Взаимно дополнительные функции двух взаимно дополнительных углов равны между собой.

Так, $\sin 13° = \cos 77°$; $\cos 48° = \sin 42°$; $\operatorname{cosec} 19° = \sec 71°$; $\operatorname{ctg} 54°20' = \operatorname{tg} 35°40'$; $\sin 88° = \cos 2°$; $\sin 45° = \cos 45°$ и т. д.

Примеры для упражнений

§ 21. 1. Написать дополнительные углы для углов: а) $27°51'$; б) $12°17'29''$; в) $45° - A$; г) $45° + B$; д) $30° + \frac{A}{B}$.

2. Дано $\sin 36° = 0{,}588$. Чему равен $\cos 54°$?

3. Дано $\cos 21° = 0{,}934$. Чему равен $\sin 69°$?

4. Дано, что $\operatorname{tg} 40° = 0{,}839$. Для какого угла это число 0,839 служит котангенсом?

5. $\operatorname{ctg} 81° = 0{,}158$. Какая тригонометрическая функция угла 9° имеет то же значение 0,158?

6. $\sec 66° = 2{,}457$. Какая тригонометрическая функция угла 24° имеет то же значение 2,457?

---

[1]) Два угла, составляющие в сумме 90°, называются *взаимно дополнительными углами*. Таковы, например, углы 20° и 70°; 83° и 7°; 42° и 48°; 59°17′ и 30°43′. Острые углы в прямоугольном треугольнике являются взаимно дополнительными, так как их сумма равна 90°.

§ 22. Установленные в § 20 соотношения (1—6) позволяют, как мы видели, заменить тригонометрическую функцию какого-нибудь угла дополнительной функцией дополнительного угла. В частности, эти соотношения позволяют заменить вычисление значений тригонометрических функций угла, большего 45°, вычислением значений соответствующих дополнительных функций дополнительного угла.

Например, вместо значений синуса углов 46°, 47°, 48°, ... можно взять значения косинуса дополнительных им углов 44°, 43°, 42°, ...; вместо $\cos 49°$ можно взять $\sin 41°$; $\operatorname{tg} 52°$ можно заменить $\operatorname{ctg} 38°$ и т. д.

Следовательно, если уже вычислены значения тригонометрических функций острых углов, меньших 45°, то значения тригонометрических функций углов, бóльших 45°, нет надобности вычислять особо, так как вместо них можно взять уже вычисленные ранее значения соответствующих дополнительных тригонометрических функций дополнительных углов, меньших 45°.

Таблица значений тригонометрических функций

§ 23. Ясно, что для практического применения тригонометрических функций было бы весьма неудобно, если бы приходилось вычислять их значения для каждого отдельного случая. Гораздо проще и практичнее составить раз навсегда таблицы, содержащие эти значения, и брать из таких таблиц готовые числа по мере надобности.

Сколь ни далек от совершенства метод вычисления значений тригонометрических функций, показанный в § 15, все же при его помощи мы можем определить численное значение любой тригонометрической функции заданного острого угла. Вычерчивая последовательно углы, например, в 5°, 10°, 15°, ..., мы сможем таким образом составить таблицу значений тригонометрических функций этих углов.

Заметим, однако, что для вычисления тригонометрических функций существуют и иные, более совершенные, а главное более точные методы[1]).

При помощи этих методов вычислены значения тригонометрических функций острых углов через достаточно малые промежутки и с необходимой точностью, и составлены таблицы этих значений.

Здесь приведена (стр. 25) одна из таких таблиц значений тригонометрических функций углов от 1° до 89° через промежутки в 1° с точностью до 0,001.

При пользовании этой таблицей надо иметь в виду следующее: углы до 45° помещены в крайней левой графе таблицы, и названия тригонометрических функций для них надо читать сверху; углы более 45° помещены в крайней правой графе, и названия тригонометрических функций для них надо читать снизу.

Так, например, если надо найти $\cos 14°$, то ищем его в столбце, где надписано „cos“ — вверху. Находим $\cos 14° = 0{,}970$. Если же ищем $\cos 57°$, то берем его из столбца, где написано „cos“ — внизу. Находим $\cos 57° = 0{,}545$.

---

[1]) Рассмотрение их выходит из рамок данного курса.

Таблица значений тригонометрических функций с точностью до 0,001
(через один градус)

Углы в градусах	sin	cos	tg	ctg	
1	0,017	1,000	0,017	57,290	89
2	0,035	0,999	0,035	28,636	88
3	0,052	0,999	0,052	19,081	87
4	0,070	0,998	0,070	14,301	86
5	0,087	0,996	0,087	11,430	85
6	0,105	0,995	0,105	9,514	84
7	0,122	0,993	0,123	8,144	83
8	0,139	0,990	0,141	7,115	82
9	0,156	0,988	0,158	6,314	81
10	0,174	0,985	0,176	5,671	80
11	0,191	0,982	0,194	5,145	79
12	0,208	0,978	0,213	4,705	78
13	0,225	0,974	0,231	4,331	77
14	0,242	0,970	0,249	4,011	76
15	0,259	0,966	0,268	3,732	75
16	0,276	0,961	0,287	3,487	74
17	0,292	0,956	0,306	3,271	73
18	0,309	0,951	0,325	3,078	72
19	0,326	0,946	0,344	2,904	71
20	0,342	0,940	0,364	2,747	70
21	0,358	0,934	0,384	2,605	69
22	0,375	0,927	0,404	2,475	68
23	0,391	0,921	0,424	2,356	67
24	0,407	0,914	0,445	2,246	66
25	0,423	0,906	0,466	2,145	65
26	0,438	0,899	0,488	2,050	64
27	0,454	0,891	0,510	1,963	63
28	0,469	0,883	0,532	1,881	62
29	0,485	0,875	0,554	1,804	61
30	0,500	0,866	0,577	1,732	60
31	0,515	0,857	0,601	1,664	59
32	0,530	0,848	0,625	1,600	58
33	0,545	0,839	0,649	1,540	57
34	0,559	0,829	0,675	1,483	56
35	0,574	0,819	0,700	1,428	55
36	0,588	0,809	0,727	1,376	54
37	0,602	0,799	0,754	1,327	53
38	0,616	0,788	0,781	1,280	52
39	0,629	0,777	0,810	1,235	51
40	0,643	0,766	0,839	1,192	50
41	0,656	0,755	0,869	1,150	49
42	0,669	0,743	0,900	1,111	48
43	0,682	0,731	0,933	1,072	47
44	0,695	0,719	0,966	1,036	46
45	0,707	0,707	1,000	1,000	45
	cos	sin	ctg	tg	Углы в градусах

Нахождение значения тригонометрической функции по величине угла

§ 24. Приводим несколько примеров пользования таблицей.

Пример 1. Определить $\sin 34°$.

Ищем в крайней слева графе угол в 34° и смотрим соответствующее значение синуса на пересечении той же строчки с вертикальным столбцом, где вверху написано „sin":

$$\sin 34° = 0{,}559.$$

Пример 2. Чему равен $\cos 22°$?

Искомое значение найдется на пересечении горизонтальной строчки, соответствующей углу в 22°, с вертикальным столбцом, где вверху написано „cos":

$$\cos 22° = 0{,}927.$$

Пример 3. Найти $\sin 71°$ и $\operatorname{tg} 71°$.

В крайней справа графе находим угол в 71° и определяем значения искомых функций в той же строчке в столбцах, внизу которых написано „sin" и „tg":

$$\sin 71° = 0{,}946; \ \operatorname{tg} 71° = 2{,}904.$$

Пример 4. Найти $\cos 59°$ и $\sin 31°$.

В одной и той же строчке таблицы находим:

$$\cos 59° = 0{,}515 \quad \text{и} \quad \sin 31° = 0{,}515.$$

Нахождение величины угла по значению его тригонометрической функции

§ 25. При помощи той же таблицы (стр. 25) решается и обратная задача: нахождение величины угла по заданному значению какой-нибудь его тригонометрической функции.

При этом могут представиться два случая.

1. Заданное значение тригонометрической функции находится непосредственно в таблицах.

Пусть, например, дано: $\sin x = 0{,}921$.

Просматривая числа в столбцах, где написано „sin" (вверху или внизу), находим заданное число 0,921 в столбце 2, где „sin" написано внизу. Следовательно, искомое значение угла найдется в крайней справа графе в той же строчке. Находим $x = 67°$.

Если $\operatorname{ctg} x = 1{,}664$, то $x = 31°$; если $\cos y = 0{,}208$, то $y = 78°$; если $\operatorname{tg} z = 2{,}747$, то $z = 70°$.

2. Если заданное значение тригонометрической функции в таблицах не находится, то искомый угол заключается между теми двумя отличающимися на 1° углами, между значениями тригонометрических функций которых заключено заданное значение.

Пусть, например, требуется найти угол x, если $\sin x = 0{,}347$.

Из таблицы находим:

$$0{,}342 = \sin 20° \quad \text{и} \quad 0{,}358 = \sin 21°.$$

Следовательно, искомый угол x заключен между 20° и 21°.

Если $\cos y = 0{,}903$, то на основании того, что

$$0{,}899 = \cos 26° \quad \text{и} \quad 0{,}906 = \cos 25°,$$

видим, что угол y заключен между 25° и 26°.

Если $\operatorname{tg} z = 1{,}247$, то на основании того, что

$$1{,}235 = \operatorname{tg} 51° \quad \text{и} \quad 1{,}280 = \operatorname{tg} 52°,$$

заключаем, что $52° > z > 51°$.

Во всех этих случаях можно получить более точные значения искомых углов (с минутами) при помощи так называемой **интерполяции**, о чем будет сказано ниже (гл. V).

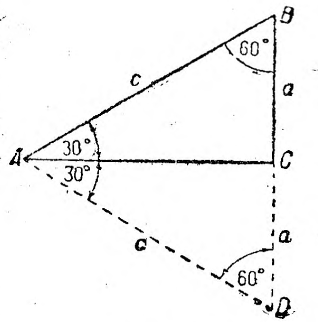
Вычисление точных значений тригонометрических функций некоторых углов на основании геометрических соображений

§ 26. Имеется целый ряд углов, для которых могут быть вычислены точные значения тригонометрических функций на основании лишь чисто геометрических соображений. Таковы, например, углы 15°, 18°, 22°30′, 30°, 45° и 60° и некоторые другие.

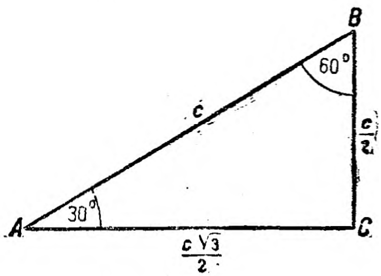
Мы ограничимся вычислением точных значений тригонометрических функций только углов 30°, 45° и 60°, так как тригонометрические функции этих углов будут в дальнейшем часто встречаться.

Значения тригонометрических функций углов в 30° и 60°

§ 27. Вспомним известное геометрическое свойство: в прямоугольном треугольнике с углом в 30° противолежащий этому углу катет равен половине гипотенузы.



Черт. 14.



Черт. 15.

Доказательство. Если $\angle A = 30°$ (черт. 14), то, продолжая BC на равное расстояние до точки D, замечаем, что треугольник ABD **равноугольный**, а следовательно, и **равносторонний**. Поэтому $BD = AB = c$, а $BC = \frac{1}{2} BD = \frac{c}{2}$, что и требовалось доказать.

Установив это свойство, возьмем теперь угол в 30° и из произвольной точки B одной из его сторон опустим перпендикуляр BC на другую сторону (черт. 15). Из построенного таким образом треугольника ABC на основании известных определений (§ 9 и 10) найдутся искомые тригонометрические функции.

Если гипотенузу AB (черт. 15) обозначим через c, то катет BC по только что доказанному будет $\frac{1}{2}c$. Вычислим теперь длину катета AC. По теореме Пифагора имеем

$$AC^2 = AB^2 - BC^2 = c^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}c^2,$$

а следовательно,

$$AC = \frac{c\sqrt{3}}{2}.$$

Теперь пишем:

$$\sin 30^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{\frac{1}{2}c}{c} = \frac{1}{2};$$

$$\cos 30^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{\frac{1}{2}c\sqrt{3}}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{\frac{1}{2}c}{\frac{1}{2}c\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

после чего, взяв обратные числа, находим

$$\operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 30^\circ} = \sqrt{3}; \qquad \sec 30^\circ = \frac{1}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3};$$

$$\operatorname{cosec} 30^\circ = \frac{1}{\sin 30^\circ} = 2.$$

Для определения значений тригонометрических функций 60° пользуемся свойством взаимно дополнительных углов (§ 20)

$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}, \quad \operatorname{ctg} 60^\circ = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\sec 60^\circ = \operatorname{cosec} 30^\circ = 2, \quad \operatorname{cosec} 60^\circ = \sec 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Но те же значения могут быть получены и непосредственно из черт. 15, если выписать значения тригонометрических функций угла B треугольника ABC согласно определениям (§ 9 и 10).

Тригонометрические функции угла в 45°

§ 28. Строим $\angle A = 45^\circ$ и проводим $BC \perp AC$ (черт. 16). Заметим, что второй острый угол этого треугольника ($\angle B$) тоже равен 45°, т. е.

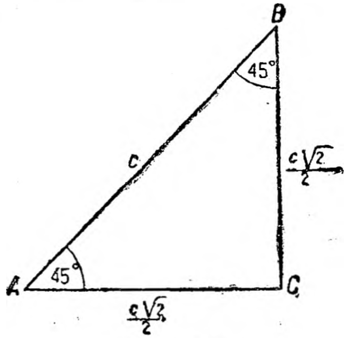
угол в 45° является дополнительным по отношению к самому себе, так что $\sin 45° = \cos 45°$, $\operatorname{tg} 45° = \operatorname{ctg} 45°$ и т. д.

Если обозначить гипотенузу AB через c, а каждый из равных катетов BC и AC через x, то по теореме Пифагора имеем:

$$BC^2 + AC^2 = AB^2 \quad \text{или} \quad x^2 + x^2 = c^2,$$

откуда

$$x^2 = \frac{c^2}{2} \quad \text{и} \quad x = \frac{c}{\sqrt{2}} = \frac{c\sqrt{2}}{2}.$$



Черт. 16.

Теперь на основании определений пишем:

$$\sin 45° = \frac{BC}{AB} = \frac{\frac{1}{2}c\sqrt{2}}{c} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 45° = \frac{BC}{AC} = \frac{\frac{1}{2}c\sqrt{2}}{\frac{1}{2}c\sqrt{2}} = 1.$$

На основании § 20 находим:

$$\cos 45° = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \operatorname{ctg} 45° = \operatorname{tg} 45° = 1.$$

Таблица значений тригонометрических функций углов в 30°, 45° и 60°

§ 29. Все найденные значения тригонометрических функций углов в 30°, 45° и 60° можно представить в форме следующей таблицы:

Функции / Углы	sin	cos	tg	ctg	sec	cosec
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	2
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$

Для облегчения запоминания значений синусов этих углов может служить следующее оригинальное мнемоническое правило.

Выпишем интересующие нас углы в порядке их возрастания и пронумеруем их по порядку:

30°	45°	60°
1	2	3

Теперь из последовательного номера каждого угла извлечем квадратный корень и разделим его на 2. Получится:

30°	45°	60°
$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Подписанные под каждым углом числа и дают значения его синуса. Значения косинусов этих углов пишем в обратном порядке:

30°	45°	60°
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$

Примеры для упражнений

§ 30. 1. Найти значение выражения

$$\operatorname{tg}^2 45^\circ \sin 60^\circ \operatorname{tg}^2 60^\circ.$$

Заменяя данные тригонометрические функции их значениями из таблицы § 29, получаем

$$1^2 \frac{\sqrt{3}}{2} (\sqrt{3})^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

2. Найти значение выражения

$$\operatorname{tg}^2 30^\circ + 2 \sin 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} 60^\circ + \cos^2 30^\circ?$$

Имеем

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 1 - \sqrt{3} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} + \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} + \frac{3}{4} = \frac{25}{12}.$$

Найти значения выражений 3—7:

3. $\operatorname{ctg}^2 45^\circ + \cos 60^\circ - \sin^2 60^\circ + \frac{3}{4} \operatorname{ctg}^2 60^\circ.$

4. $3 \operatorname{tg}^2 30^\circ + \frac{4}{3} \cos^2 30^\circ - \frac{1}{2} \sec^2 45^\circ - \frac{1}{3} \sin^2 60^\circ.$

5. $\cos 60^\circ - \operatorname{tg}^2 45^\circ + \frac{3}{4} \operatorname{tg}^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin 30^\circ.$

6. $\frac{1}{3} \sin^2 60^\circ - \frac{1}{2} \sec 60^\circ \operatorname{tg}^2 30^\circ + \frac{4}{3} \sin^2 45^\circ \operatorname{tg}^2 60^\circ.$

7. $\dfrac{\operatorname{ctg}^2 30^\circ \sec 60^\circ \operatorname{tg} 45^\circ}{\operatorname{cosec}^2 45^\circ \operatorname{cosec} 30^\circ \sin 30^\circ \cos^2 45^\circ}.$

Вычислить выражения 8—10 (не пользуясь таблицей):
8. $\sin 17^\circ \sec 73^\circ$. 9. $\cos 35^\circ \operatorname{cosec} 55^\circ$. 10. $\operatorname{tg} 80^\circ \operatorname{tg} 10^\circ$.

11. Пользуясь таблицей на стр. 25, определить $\sin 37^\circ$; $\operatorname{cosec} 12^\circ$; $\operatorname{cosec} 62^\circ$; $\sec 49^\circ$.

ГЛАВА III

ПРОСТЕЙШИЕ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

§ 31. Мы знаем определения тригонометрических функций и умеем находить значения этих функций с точностью, достаточной для решения многих практических вопросов (§ 15). Теперь мы можем приступить к установлению простейших зависимостей между сторонами и углами треугольника, что и составляло первоначально главное назначение тригонометрических функций.

Зависимость между сторонами и углами прямоугольного треугольника

§ 32. Пусть задан некоторый произвольный прямоугольный треугольник ABC (черт. 17). Определяя из этого треугольника тригонометрические функции угла A, будем иметь

$$\frac{a}{c} = \sin A, \quad \frac{b}{c} = \cos A, \quad \frac{a}{b} = \operatorname{tg} A, \quad \frac{b}{a} = \operatorname{ctg} A.$$

В каждом из этих равенств содержатся три величины: две стороны треугольника и один его острый угол, представленный какой-нибудь тригонометрической функцией. Следовательно, каждое из этих четырех равенств выражает з а в и с и м о с т ь   м е ж д у   с т о р о н а м и   и   у г л а м и   п р я м о у г о л ь н о г о   т р е у г о л ь н и к а.

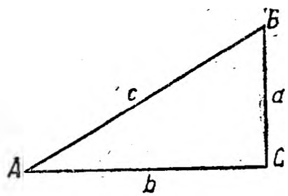
Эти соотношения можно представить еще в другом виде, а именно:

$$a = c \sin A, \quad b = c \cos A, \quad a = b \operatorname{tg} A, \quad b = a \operatorname{ctg} A.$$

В таком виде эти четыре соотношения между основными элементами прямоугольного треугольника словесно формулируются так:

Во всяком прямоугольном треугольнике: *катет равен гипотенузе, умноженной на синус противолежащего ему угла*:

$$a = c \sin A; \tag{1}$$



Черт. 17.

катет равен гипотенузе, умноженной на косинус прилежащего к нему угла:

$$b = c \cos A; \tag{2}$$

катет равен другому катету, умноженному на тангенс угла, противолежащего первому катету:

$$a = b \operatorname{tg} A; \tag{3}$$

катет равен другому катету, умноженному на котангенс угла, прилежащего к первому катету:

$$b = a \operatorname{ctg} A. \tag{4}$$

Формулы (1) и (2) можно объединить в одной словесной формулировке:

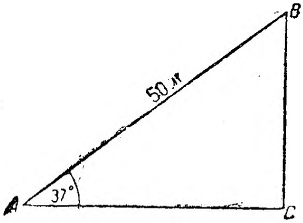
Катет равен гипотенузе, умноженной на синус противолежащего или на косинус прилежащего угла.

Подобным же образом можно в одной словесной формулировке объединить формулы (3) и (4):

Катет равен другому катету, умноженному на тангенс угла, противолежащего первому катету или на котангенс прилежащего к нему угла.

Вычисление элементов прямоугольного треугольника при помощи установленных зависимостей

§ 33. Теперь на нескольких примерах мы покажем применение соотношений предыдущего параграфа для **решения треугольника**, т. е. для вычисления всех его элементов по достаточному числу данных.



Черт. 18.

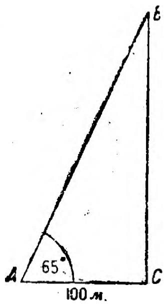
Пример 1. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 50 *м*; один из острых углов равен 37°. Найти катеты.

На основании установленных зависимостей имеем (черт. 18):

$$a = c \sin A = 50 \sin 37°,$$
$$b = c \cos A = 50 \cos 37°,$$

или, взяв значения $\sin 37°$ и $\cos 37°$ из таблицы (стр. 25):

$$a = 50 \cdot 0{,}602 = 30{,}1 \text{ м},$$
$$b = 50 \cdot 0{,}799 = 39{,}95 \text{ м}.$$



Черт. 19.

Пример 2. В прямоугольном треугольнике катет $b = 100$ *м*, а прилежащий к нему угол $A = 65°$. Определить другой катет и гипотенузу.

Из черт. 19 имеем:

$$a = b \operatorname{tg} A = 100 \operatorname{tg} 65° = 100 \cdot 2{,}145 = 214{,}5 \text{ м};$$
$$b = c \cos A,$$

откуда

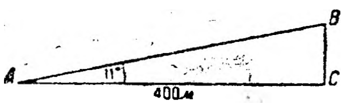
$$c = \frac{b}{\cos A} = \frac{100}{\cos 65°} = \frac{100}{0{,}423} \approx 236{,}4 \text{ м}.$$

Пример 3. На расстоянии 400 *м* от колокольни вершина ее видна под углом 11°. Определить высоту колокольни.

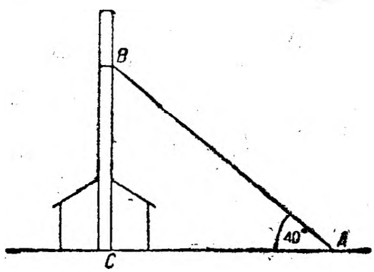
Из черт. 20 имеем

$$BC = AC \cdot \operatorname{tg} BAC = 400 \cdot \operatorname{tg} 11° = 400 \cdot 0{,}194 = 77{,}6 \text{ м}.$$

Пример 4. Фабричная железная труба вышиною 16 *м* поддерживается стальными тросами, прикрепленными на расстоянии $^3/_4$ ее высоты, считая от земли. Определить длину каждого из этих тросов, зная, что они образуют с горизонтом углы в 40°.



Черт. 20.



Черт. 21.

В треугольнике ABC (черт. 21) известны: катет $BC = 12$ *м* и острый угол $A = 40°$.

Поэтому пишем:

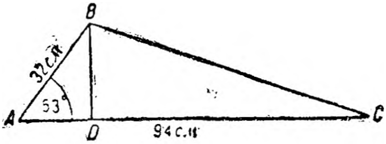
$$BC = AB \cdot \sin 40^\circ,$$

откуда

$$AB = \frac{BC}{\sin 40^\circ} = \frac{12}{\sin 40^\circ} = \frac{12}{0{,}643} \approx 18{,}66 \text{ м}.$$

Решение косоугольного треугольника путем разбиения его на два прямоугольных

§ 34. При помощи выведенных зависимостей можно решать и косоугольные треугольники: для этого достаточно, проведя соответствующую высоту, разбить данный треугольник на два прямоугольных, решаемых по предыдущему.



Черт. 22.

Пример 1. В треугольнике ABC даны: сторона $AB = 32$ *см* и сторона $AC = 94$ *см*; $\angle A = 53^\circ$ (черт. 22). Определить сторону BC и углы B и C.

Проведя высоту BD, имеем из треугольника ABD:

$$BD = AB \cdot \sin 53^\circ = 32 \cdot \sin 53^\circ = 32 \cdot 0{,}799 = 25{,}568 \text{ см};$$

$$AD = AB \cdot \cos 53^\circ = 32 \cdot \cos 53^\circ = 32 \cdot 0{,}602 = 19{,}264 \text{ см}.$$

Теперь переходим к треугольнику BDC, в котором нам уже известны $BD = 25{,}568$ *см* и $DC = AC - AD = 94 - 19{,}264 = 74{,}736$ *см*. По теореме Пифагора

$$BC = \sqrt{BD^2 + DC^2} = \sqrt{(25{,}568)^2 + (74{,}736)^2} = 78{,}4 \text{ см}.$$

Угол C определяется по тангенсу:

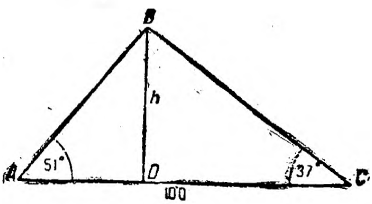
$$\operatorname{tg} C = \frac{BD}{DC} = \frac{25{,}568}{74{,}736} \approx 0{,}342,$$

после чего из таблицы (стр. 25) находим, что $\angle C = 19^\circ$ (приблизительно). Наконец, $\angle B = 180^\circ - (A + C) = 180^\circ - (53^\circ + 19^\circ) = 108^\circ$.

Пример 2. Решить треугольник, в котором известны: сторона $AC = 100$ *м* и прилежащие углы $\angle A = 51^\circ$ и $\angle C = 37^\circ$ (черт. 23).

Проведя высоту BD, разбиваем наш треугольник на два прямоугольных треугольника ABD и CBD, из которых находим

$$AD = BD \cdot \operatorname{ctg} 51^\circ,$$
$$DC = BD \cdot \operatorname{ctg} 37^\circ.$$



Черт. 23.

Складывая эти равенства, получаем

$$AD + DC = BD\ (\operatorname{ctg} 51^\circ + \operatorname{ctg} 37^\circ),$$

или

$$AC = h\ (\operatorname{ctg} 51^\circ + \operatorname{ctg} 37^\circ).$$

Подставляя значения котангенсов из таблиц, имеем

$$AC = h\,(0{,}810 + 1{,}327) = 2{,}137h,$$

откуда

$$h = \frac{AC}{2,137} = \frac{100}{2,137} \approx 46,8 \text{ } \mathit{см}.$$

Теперь, из тех же треугольников ABD и CBD найдем:

$$h = AB \cdot \sin 51^\circ$$

и

$$h = BC \cdot \sin 37^\circ,$$

откуда

$$AB = \frac{h}{\sin 51^\circ} = \frac{46,8}{0,777} \approx 60,2 \text{ } \mathit{см};$$

$$BC = \frac{h}{\sin 37^\circ} = \frac{46,8}{0,602} \approx 77,7 \text{ } \mathit{см}.$$

§ 35. В предыдущем параграфе показано решение косоугольного треугольника путем разбиения его на прямоугольные треугольники. Этот способ далеко не всегда удобен. Для решения косоугольных треугольников, как мы увидим дальше, существуют более совершенные способы. Они основаны на общих формулах, выражающих зависимость между сторонами и углами произвольного треугольника (гл. XXI).

Примеры для упражнений

§ 36. 1. В прямоугольном треугольнике дан катет $a = 80,3$ *м* и противолежащий ему острый угол $A = 62^\circ$. Определить другой катет и гипотенузу.

2. Катет в прямоугольном треугольнике равен 120 *м*, а прилежащий к нему острый угол $A = 27^\circ$. Найти гипотенузу и другой катет.

3. В прямоугольном треугольнике известна гипотенуза $c = 240$ *см* и угол $B = 39^\circ$. Определить оба катета.

4. На расстоянии 120 *м* вершина фабричной трубы видна под углом 14° к горизонту. Чему равна вышина трубы?

5. Вершина холма вышиной 132 *м* видна наблюдателю под углом зрения в 41° к горизонту. Определить, на каком расстоянии от вершины холма этот наблюдатель находится.

6. На судне имеются две мачты вышиной в 20 *м* и 13 *м*. Прямая, соединяющая их вершины, составляет с горизонтом угол в 34°. Определить расстояние между основаниями этих мачт.

7. Лестница длиною в 6,5 *м* приставлена концом к подоконнику второго этажа, отстоящему от земли на 4,3 *м*. Определить, какой угол составляет лестница с горизонтом.

8. С подножья башни вышиной в 17 *м* вершина колонны видна под углом в 59°. С верхушки той же башни вершина колонны видна под углом в 28° к горизонту. Определить вышину колонны.

9. Находясь на холме вышиной в 50 *м*, наблюдатель видит в одном и том же направлении две лодки, причем луч зрения составляет с горизонтом для одной лодки 32°, а для другой 17°. Чему равно расстояние между лодками?

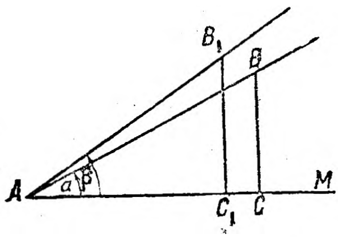
10. С вершины маяка вышиной в 16 *м* видны в одном и том же направлении две скалы, причем угол зрения к одной из них равен 73°, а к другой 19°. Определить расстояние между этими скалами.

ГЛАВА IV

ИЗМЕНЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ УГЛА

Сравнение одноименных тригонометрических функций разных углов

§ 37. До сих пор нам приходилось иметь дело с тригонометрическими функциями какого-нибудь о т д е л ь н о взятого угла. Перейдем теперь к сравнению величин одноименных тригонометрических функций двух (или более) различных углов.



Черт. 24.

При сравнении величин тригонометрических функций двух (или более) различных углов мы сразу наталкиваемся на некоторое затруднение, сущность которого уясняется из следующего примера.

Положим, нам нужно сравнить по величине одноименные тригонометрические функции двух углов α и β (черт. 24).

Поступая по общему правилу, берем произвольные точки B и B_1 и из них опускаем на прямую AM перпендикуляры BC и B_1C_1.

Тогда из прямоугольных треугольников ABC и AB_1C_1 получаем:

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB}, \quad \cos\alpha = \frac{AC}{AB}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC}$$

и

$$\sin\beta = \frac{B_1C_1}{AB_1}, \quad \cos\alpha = \frac{AC_1}{AB_1}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{B_1C_1}{AC_1}.$$

Для дробей, выражающих величины синуса и косинуса угла α, знаменателем будет служить длина отрезка AB; для дробей же, выражающих величины синуса и косинуса угла β, знаменателем будет служить длина отрезка AB_1. Но точки B и B_1 взяты нами на сторонах углов α и β совершенно произвольно. Следовательно, от нашего усмотрения зависело выбрать эти точки так, чтобы отрезки AB и AB_1 были равны между собой. Ведь в этом случае (при $AB = AB_1$) для сравнения, например, значений

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB}$$

и

$$\sin\beta = \frac{B_1C_1}{AB_1}$$

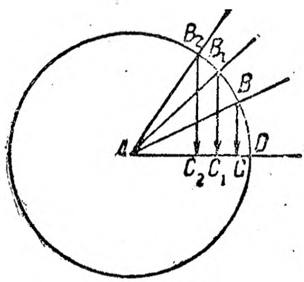
не придется приводить дроби к общему знаменателю [1]), а достаточно будет сравнить только их числители, т. е. BC и BC_1, что, несомненно, много проще и скорее. В то же время общность рассуждения от этого нисколько не пострадает.

---

[1]) Так как знаменатели будут равны между собой по построению.

Руководствуясь этими соображениями, мы будем впредь во всех тех случаях, когда придется производить сравнение значений синусов или косинусов двух или нескольких углов, выбирать положение точек B и B_1 так, чтобы они одинаково отстояли от вершины A, т. е. чтобы AB равнялась AB_1. А это то же самое, что брать точки B и B_1 на окружности произвольного радиуса, описанной из общей вершины рассматриваемых углов, как из центра.

Итак, производим построение следующим образом.



Черт. 25.

Из некоторой точки A как из центра описываем окружность произвольного радиуса R (черт. 25). Проводим произвольный радиус AD (для удобства берем его горизонтальным). Теперь располагаем все подлежащие сравнению острые углы $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ так, чтобы вершины их совпадали с центром окружности и чтобы одна из двух сторон каждого из углов совпадала с радиусом AD, а другие стороны углов располагались в верхней части чертежа (по отношению к радиусу AD).

Из точек B, B_1, $B_2, \ldots$ пересечения окружности со сторонами AB, AB_1, $AB_2, \ldots$ данных углов α, β, $\gamma, \ldots$ опускаем перпендикуляры BC, B_1C_1, $B_2C_2, \ldots$ на общую сторону AD этих углов.

Тогда, на основании определения тригонометрических функций получаем

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{BC}{R}, \quad \cos\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{AC}{R};$$

$$\sin\beta = \frac{B_1C_1}{AB_1} = \frac{B_1C_1}{R}, \quad \cos\beta = \frac{AC_1}{AB_1} = \frac{AC_1}{R};$$

$$\sin\gamma = \frac{B_2C_2}{AB_2} = \frac{B_2C_2}{R}, \quad \cos\gamma = \frac{AC_2}{AB_2} = \frac{AC_2}{R};$$

. . . .

Так как теперь у всех написанных дробей знаменатель один и тот же (R), то сравнение величин одноименных тригонометрических функций различных углов сведется только к сравнению их числителей, т. е. длин отрезков BC, B_1C_1, $B_2C_2, \ldots$ и AC, AC_1, $AC_2, \ldots$

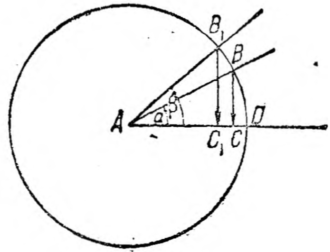
Изменение синуса и косинуса

§ 38. Возьмем какие-нибудь острые углы (черт. 26): $\angle BAD = \alpha$ и $\angle B_1AD = \beta$ и запишем значения их синуса и косинуса:

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{BC}{R}, \quad \sin\beta = \frac{B_1C_1}{AB_1} = \frac{B_1C_1}{R},$$

$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{AC}{R}, \quad \cos\beta = \frac{AC_1}{AB_1} = \frac{AC_1}{R}.$$

Сравнивая величины одноименных тригонометрических функций углов α и β ($\beta > \alpha$), видим:



Черт. 26.

$$B_1C_1 > BC,$$

а потому

$$\sin\beta > \sin\alpha,$$

т. е. с увеличением угла синус его увеличивается;

$$AC_1 < AC,$$

а потому

$$\cos\beta < \cos\alpha,$$

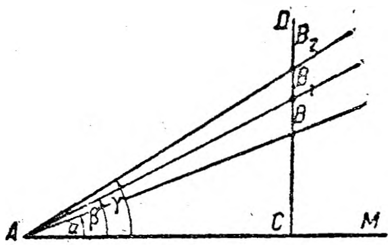
т. е. с увеличением угла косинус его уменьшается.

Изменение тангенса

§ 39. Для сравнения тангенсов двух углов α и β нам пришлось бы сравнить дроби $\frac{BC}{AC}$ и $\frac{B_1C_1}{AC_1}$, выражающие значения $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$. Это представляет некоторое неудобство. Возникает вопрос: нельзя ли путем соответствующего построения устранить это неудобство, т. е. свести сравнение тангенсов различных углов к сравнению (как в случае синуса и косинуса) лишь числителей дробей, выражающих эти тангенсы?

Вопрос этот легко решается.

Так как тангенс есть отношение катета, противолежащего данному углу, к катету, прилежащему к этому углу, т. е. длина катета, прилежащего к углу, является знаменателем дроби, выражающей значение тангенса, то, чтобы у всех дробей, выражающих значения тангенсов нескольких углов, был один и тот же знаменатель, нужно построить чертеж так, чтобы у всех прямоугольных треугольников, заключающих рассматриваемые углы, был общий катет, прилежащий к каждому из этих углов.



Черт. 27.

Отсюда вытекает следующее построение.

Располагаем рассматриваемые углы, например α, β, γ, так, чтобы у них совпадали вершины и одна из двух сторон каждого угла (черт. 27).

Из произвольной точки C общей стороны AM этих углов восставим перпендикуляр CD до пересечения с другими сторонами всех углов в точках B, B_1, B_2. Тогда получаем прямоугольные треугольники ABC, AB_1C, AB_2C с общим катетом AC, прилежащим к данным углам α, β, γ.

На основании определения тангенса угла имеем

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{B_1C}{AC}, \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{B_2C}{AC}.$$

Так как теперь у всех дробей, выражающих тангенсы данных углов, знаменатель один и тот же (катет AC), то для сравнения величин тангенсов остается только сравнить числители этих дробей. Сравнивая отрезки BC, B_1C, B_2C, находим:

$$B_2C > B_1C > BC,$$

а потому

$$\operatorname{tg}\gamma > \operatorname{tg}\beta > \operatorname{tg}\alpha,$$

т. е. с увеличением угла тангенс его увеличивается.

Представление тригонометрических функций с помощью окружности

§ 40. В предыдущих параграфах (§ 38 и 39) были показаны два приема построения, которыми удобно пользоваться в тех случаях, когда нам нужно сравнивать значения одноименных тригонометрических функций нескольких углов. Причем один способ применяется для синусов и косинусов (§ 38) и другой способ — для тангенсов (§ 39).

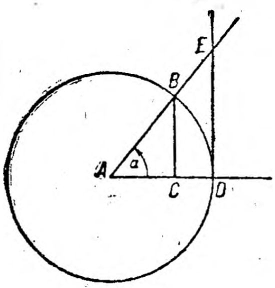
Оказывается, однако, можно очень легко соединить два показанных в § 38 и 39 построения в одном чертеже.

Пусть, например, дан произвольный острый угол α.

Опишем из вершины его A, как из центра, произвольным радиусом окружность (черт. 28).

Из точек (B и D) пересечения окружности со сторонами угла проводим $BC \perp AD$ и $DE \perp AD$.

Тогда, на основании определений тригонометрических функций имеем:



Черт. 28.

из треугольника ABC из треугольника AED

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{BC}{R}, \qquad \cos\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{AC}{R};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{DE}{AD} = \frac{DE}{R}.$$

Таким способом построения, как видим, мы добились того, что значения всех трех основных тригонометрических функций (синус, косинус, тангенс) выражаются дробями с одним и тем же знаменателем (R). Благодаря этому способу мы можем легко сравнивать значения одноименных тригонометрических функций различных углов, не прибегая к отдельному построению для синуса и косинуса и отдельному — для тангенса.

Из чертежа 28 легко заметить что с уменьшением угла синус и тангенс уменьшаются, а косинус увеличивается. Естественно поставить вопрос: ну, а каковы будут значения этих функций, если угол станет равным 0°? Ведь до сих пор мы знали, что синус, косинус и тангенс суть величины отношения сторон в прямоугольном треугольнике, а при допущении, что угол α равен 0° самый треугольник исчезает. То же самое случится если угол α станет равным 90°. Чтобы ответить на этот вопрос условимся считать, что равенства

$$\sin\alpha = \frac{DC}{R}; \quad \cos\alpha = \frac{AC}{R}; \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{DE}{R}$$

остаются верными и тогда, когда угол α будет равен 0° или 90°. А из этого условия уже легко получить и ответ на поставленный вопрос. Именно; при $\alpha = 0$, $BC = R$; $AC = 0$ и $DE = 0$ и значит:

$$\sin 0^\circ = 1; \quad \cos 0^\circ = 0; \quad \operatorname{tg} 0^\circ = 0.$$

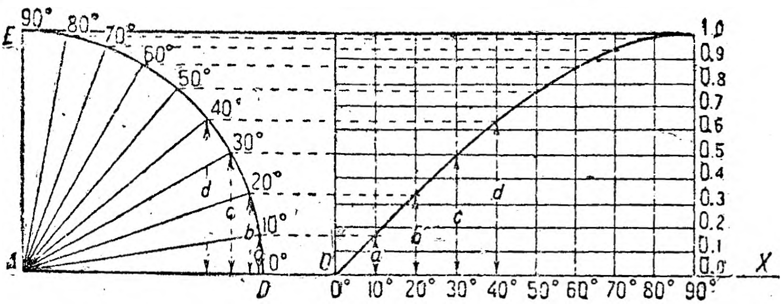
$$\text{При } \alpha = 90^\circ, \quad BC = 0; \quad AC = R \quad \text{и} \quad DE = \infty$$

и значит $\sin 90^\circ = 0$; $\cos 90^\circ = 1$; $\operatorname{tg} 90^\circ = \infty$. [1])

График синуса

§ 41. Из какой-нибудь точки A, как из центра, произвольным радиусом R описываем окружность (черт. 29). Проводим произвольный радиус AD (удобнее взять его горизонтальным).

Располагаем подлежащие сравнению углы в 10°, 20°, 30° и т. д. так, чтобы центр окружности был их общей вершиной, а радиус AD их общей стороной.



Черт. 29.

Если радиус R нашей окружности принять за единицу, то длины перпендикуляров a; b, c, d,... будут, очевидно, синусами соответствующих углов. Взяв на продолжении DX радиуса AD произвольную точку O (черт. 29), отложим от нее вправо девять равных отрезков соответственно взятым девяти углам. В точках деления восставим перпендикуляры к прямой OX и на них отложим вертикальные отрезки a, b, c, d,... Соединив верхние концы полученных отрезков плавной кривой, получим график последовательного изменения синуса при изменении угла от 0° до 90°.

Из рассмотрения этого графика можно вывести следующие заключения:

1. При увеличении угла от 0° до 90° синус его возрастает от 0 до 1.

2. Синус возрастает неравномерно, т. е. приращения синуса не пропорциональны приращениям угла, и подавно, синус не пропорционален углу.

---

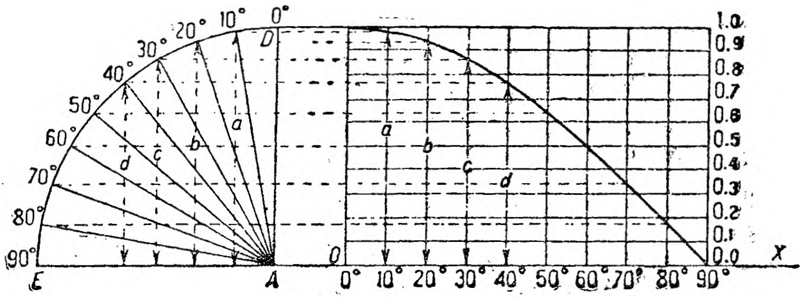
[1]) Запись $\operatorname{tg} 90^\circ = \infty$ означает, что при стремлении угла к 90° его тангенс будет неограниченно возрастать.

График косинуса

§ 42. Почти аналогично можно построить график косинуса[1]) (черт. 30).

Из рассмотрения графика косинуса можно вывести следующие заключения:

1. При увеличении угла от 0° до 90° косинус его убывает от 1 до 0.
2. Косинус убывает **неравномерно**, т. е. приращения[2]) косинуса **не пропорциональны** приращениям угла, и подавно, косинус **не пропорционален** углу.



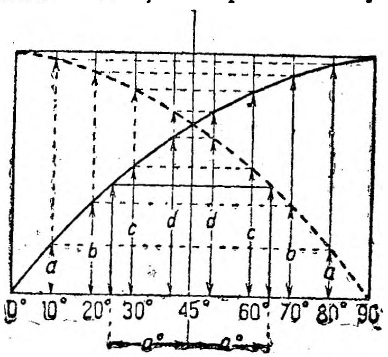
Черт. 30.

Сопоставление графиков синуса и косинуса

§ 43. Сопоставляя графики синуса и косинуса (черт. 31), можно легко видеть, что кривая косинуса симметрична с кривой синуса относительно перпендикуляра, восставленного в точке, отвечающей 45°. Это обстоятельство вытекает из соотношения

$$\sin(45° - a°) = \cos(45° + a°),$$

выражающего равенство синуса и косинуса двух взаимно дополнительных углов.



Черт. 31.

Это соотношение показывает, что если взять по обе стороны от точки, отвечающей 45°, на произвольном, но равном расстоянии от нее две точки, отвечающие $(45° - a°)$ и $(45° + a°)$, то соответствующие вер-

[1]) Для удобства перенесения отрезков, длины которых, если радиус R окружности принять за единицу длины, представляют значения косинусов соответствующих углов, лучше построить чертеж так, чтобы эти отрезки в круге (как и в случае синуса) располагались вертикально, что облегчит параллельное перенесение этих отрезков в виде перпендикуляров к горизонтальной прямой OX.

[2]) Приращение здесь отрицательно, так как с увеличением угла косинус убывает.

тикальные отрезки, представляющие значения $\sin(45°—a°)$ и $\cos(45°+a°)$, будут равны между собою.

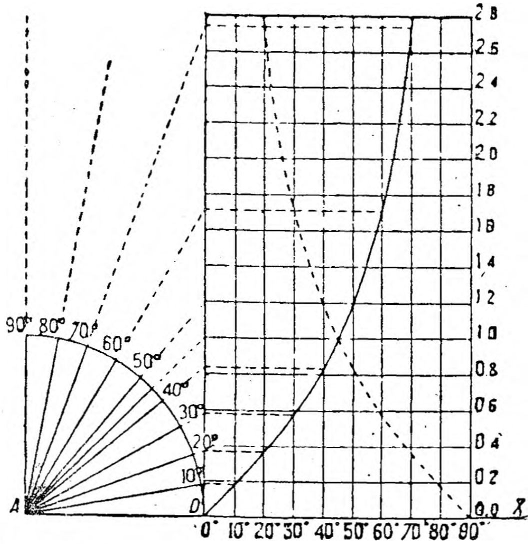
График тангенса

§ 44. Используя метод построения, показанный в § 39, мы можем легко построить график тангенса (черт. 32).

Из графика тангенса усматривается:

1. С возрастанием угла от 0° до 90° тангенс его непрерывно возрастает от 0 до ∞ (т. е. неограниченно) [1].

2. Тангенс возрастает **неравномерно**, т. е. приращения тангенса **не пропорциональны** приращениям угла [2], и подавно, тангенс **не пропорционален** углу.



Черт. 32.

График котангенса

§ 45. Аналогично можно построить график котангенса. Нетрудно сообразить, что кривая котангенса симметрична с кривой тангенса относительно перпендикуляра, восставленного в точке, отвечающей 45°, что следует из соотношений

$$\operatorname{tg}(45° - a°) = \operatorname{ctg}(45° + a°)$$

и

$$\operatorname{tg}(45° + a°) = \operatorname{ctg}(45° - a°),$$

выражающих равенство тангенса и котангенса двух взаимно дополнительных углов $(45° - a°)$ и $(45° + a°)$.

На черт. 32 график котангенса показан пунктиром.

---

[1]) Символ ∞ (бесконечность) применяется для обозначения того, что некоторая переменная величина может возрастать неограниченно.

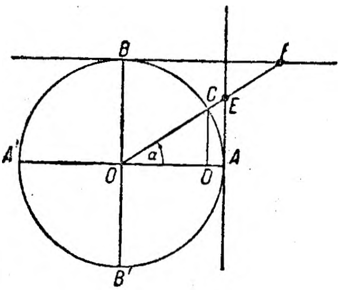
[2]) По мере увеличения угла кривая тангенса идет кверху все более и более круто, т. е. чем угол ближе к 90°, тем возрастание тангенса происходит быстрее.

Определение тригонометрических функций на круге

§ **46.** В круге произвольного радиуса R (черт. 33) проводим два взаимно перпендикулярных диаметра AA' и BB' и в точках A и B окружности проводим к ней касательные AE и BF.

Повернем радиус OA (назовем его *начальным радиусом*) против движения часовой стрелки и предположим, что он занял некоторое положение OC. Таким образом образуется угол AOC (здесь мы ограничиваемся случаем, когда образуется острый угол).

Продолжим радиус OC до пересечения с касательными AE и BF соответственно в точках E и F, а из конца C радиуса OC опустим перпендикуляр CD на диаметр AA'.



Черт. 33.

В результате такого построения получатся отрезки DC, OD, AE, BF, OE и OF, которые соответственно называются: DC — *линией синуса* угла AOC, OD — *линией косинуса*, AE — *линией тангенса*, BF — *линией котангенса*, OE — *линией секанса* и OF — *линией косеканса*. Отношения длин этих линий (называемых *тригонометрическими линиями*) к длине радиуса называются соответственно: $\frac{DC}{R}$ — *синусом* угла AOC, $\frac{OD}{R}$ — *косинусом*, $\frac{AE}{R}$ — *тангенсом*, $\frac{BF}{R}$ — *котангенсом*, $\frac{OE}{R}$ — *секансом* и $\frac{OF}{R}$ — *косекансом*.

Нетрудно показать, что тригонометрические функции, определяемые здесь как отношения длин так называемых тригонометрических линий в круге к длине его радиуса, для острого угла совпадают с тригонометрическими функциями, определенными нами ранее как отношения сторон прямоугольного треугольника.

Так, согласно прежним определениям (см. § 9, 10 и 14) находим для углов DOC, AOE и BFO (каждый из которых имеет одну и ту же величину α) из соответствующего прямоугольного треугольника:

$$(\text{из } \triangle DOC)\ \sin\alpha = \frac{DC}{OC} \quad \text{и} \quad \cos\alpha = \frac{OD}{OC},$$

$$(\text{из } \triangle AOE)\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{AE}{OA} \quad \text{и} \quad \sec\alpha = \frac{OE}{OA},$$

$$(\text{из } \triangle BFO)\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{BF}{OB} \quad \text{и} \operatorname{cosec}\alpha = \frac{OF}{OB}.$$

Но

$$OC = OA = OB = R,$$

поэтому

$$\sin\alpha = \frac{DC}{R}, \quad \cos\alpha = \frac{OD}{R}, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{AE}{R},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{BF}{R}, \quad \sec\alpha = \frac{OE}{R} \quad \text{и} \quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{OF}{R}.$$

Вместе с тем, пользуясь этими новыми определениями для функций углов в 0° и 90°, мы получим те же значения, какие были приняты нами для этих углов в § 40. А именно:

$$\sin 0^\circ = \frac{DC}{R} = \frac{0}{R} = 0; \quad \cos 0^\circ = \frac{OD}{R} = \frac{R}{R} = 1; \quad \mathrm{tg}\, 0^\circ = \frac{AE}{R} = \frac{0}{R} = 0;$$

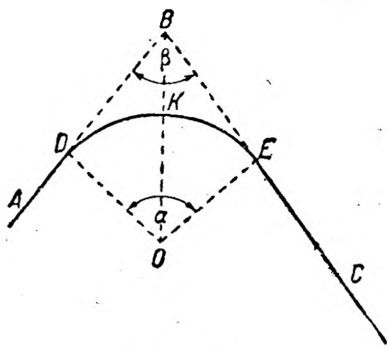
$$\sin 90^\circ = \frac{DC}{R} = \frac{R}{R} = 1; \quad \cos 90^\circ = \frac{OD}{R} = \frac{0}{R} = 0; \quad \mathrm{tg}\, 90^\circ = \frac{AE}{R} = \frac{\infty}{R} = \infty.$$

Нужно отметить, однако, что новые определения тригонометрических функций имеют, как увидим в дальнейшем (гл. VIII), то преимущество, что благодаря им понятия тригонометрических функций могут быть распространены на любой угол, а не ограничены только острым углом.

Пример практического применения линии тангенса

§ 47. Предположим, что при разбивке на местности железнодорожного полотна приходится делать поворот пути на угол β (черт. 34).

В этом случае прямые части пути AD и CE должны быть сопряжены при помощи дуги определенного радиуса[1]). Как наметить в натуре, т. е. на земле, положение точек D и E, в которых прямой путь начинает плавно переходить в кривую? Для этой цели от имеющейся в натуре вершины B[2]) откладывают равные отрезки BD и BE, именуемые „т а н г е н с а м и“, величина коих берется из специальных железнодорожностроительных таблиц или справочников, а при неимении их под рукой может быть найдена из любых таблиц значений тригонометрических функций.



Черт. 34.

В самом деле, если O есть центр дуги DE, а BE — касательная к этой дуге в точке E, то при радиусе OE, принятом за единицу, длина отрезка BE будет представлять собой значение тангенса угла BOE, чем и оправдывается название „тангенса“ для отрезка BE (и BD).

Пусть, например, угол поворота $\beta = 142°$, и требуется подсчитать „тангенс“ при радиусе закругления в 400 *м*.

Из черт. 34 видим, что в четырехугольнике $ODBE$ углы при точках D и E прямые, а потому сумма двух других углов $(\alpha + \beta)$ равна 180°[3]), т. е $\alpha = 180° - \beta = 38°$. Следовательно, $\angle BOE = \frac{1}{2}\alpha = 19°$, после чего из треугольника OBE определяем

$$BE = OE \cdot \mathrm{tg}\, BOE = 400 \cdot \mathrm{tg}\, 19° = 400 \cdot 0{,}344 = 137{,}6 \text{ м}.$$

При разбивке кривой обыкновенно определяют также и положение точки K, для чего вычисляют расстояние ее BK от вершины угла. Это расстояние, именуемое в железнодорожной практике „биссектрисой“, также помещается в железнодорожных специальных таблицах для разбивки кривых.

---

[1]) Обыкновенно от 300 до 600 *м*.

[2]) Линии AB и BC должны быть предварительно п р о в е ш е н ы, т. е. отмечены на земле при помощи вех и колышков.

[3]) Сумма углов четырехугольника равна четырем прямым углам.

Для вычисления „биссектрисы" в нашем примере имеем

$$BK = BO - OK = BO - 400.$$

Но из треугольника OBE имеем

$$BO = \frac{OE}{\cos BOE} = \frac{400}{\cos 19^\circ} = \frac{400}{0{,}946} = 422{,}8 \text{ м},$$

а следовательно,

$$BK = 422{,}8 - 400 = 22{,}8 \text{ м}.$$

Краткая историческая справка

§ 48. Понятие о синусе ведет свое происхождение от индусов, которые определяли синус угла как половину хорды, на которую опирается угол, вдвое больший данного. В самом деле, из черт. 35 видно, что при радиусе, равном единице, $\sin\alpha = CE = \frac{1}{2} CD$. Для таких „полухорд" у индусов были составлены таблицы, дававшие значения синусов различных углов.

Значительно позже индусов греческие математики Гиппарх (около 150 лет до нашей эры) и Птоломей (около 125 лет от нашей эры) при работах над астрономическими вычислениями принимали за меру угла целую хорду, соответствующую данному углу. Птоломей составил таблицу таких хорд для углов, отличающихся друг от друга на 30′, начиная с 0°. Эти таблицы были снабжены даже разностями для облегчения интерполяции (см. ниже). Косинусом, вообще, древние греки не пользовались и заменяли его синусом дополнительного угла, между тем как понятие о косинусе было хорошо известно древним египтянам, давшим косинусу особое название „sekt". Имелись ли у египтян специальные таблицы для определения косинусов — остается пока не выясненным.

Черт. 35.

Спустя много столетий арабский принц Мохаммед-бен-Гебер (877 — 929), более известный в истории математики под литературным псевдонимом „Аль-Баттани", предпринял полную переработку птоломеевских таблиц, заменив хорды полухордами, т. е. синусами[1]). Арабский же математик Абуль-Вера (937 — 998) впервые ввел в употребление тангенсы, определяя их, правда, не как самостоятельные тригонометрические функции, а как отношения синуса к косинусу.

Таким образом, еще до начала XI столетия были сделаны весьма важные открытия в области тригонометрии. К сожалению, все эти ценные вклады в науку оставались неизвестными европейским ученым в течение нескольких сот лет, и только примерно через пять веков великий венский математик Региомонтанус (1436—1475), ознакомившийся во время своих путешествий с трудами арабов[2]), предпринял полную переработку численных таблиц Птоломея. Региомон-

---

[1]) Он же первый разработал таблицу котангенсов.

[2]) Наука древнего мира (греков, вавилонян, индусов) проникала в средневековую Европу, главным образом, через ученые сочинения арабов. Поэтому многие современные научные термины являются переводами или искажениями соответствующих арабских терминов, которые также имеют свою историю.

Вот, например, предполагаемая история латинского названия „sinus".

Так как сегмент напоминает лук, а хорда в сегменте — тетиву лука, то полухорда по санскритски называлась „arhagiva" (половина тетивы лука). При переводе с санскритского языка на арабский слово „giva" было переделано в „giba", что на арабском языке пишется „gb" (в арабском языке гласные не пишутся). При переводе с арабского языка это слово „gb", обозначавшее „giba", было танус вычислял тригонометрические величины углов не для круга с радиусом, принятым за единицу, а для радиуса, равного 6 000 000, причем впоследствии он же произвел перерасчет для радиуса в 10 000 000. Таблицы Региомонтануса были отпечатаны лишь спустя много лет после его смерти.

Великий астроном Коперник (1473—1548), не зная о составленных Региомонтанусом таблицах и ощущая в них настоятельную потребность при своих астрономических вычислениях, составил собственные небольшие тригонометрические таблицы и побудил своего ученика Иоахима Рэтикуса[1]) (1514—1596) заняться составлением новых, значительно более полных таблиц. Рэтикус отдал этому делу свыше 50 лет своей жизни и составил таблицу тригонометрических функций для всех острых углов через каждые 10″ с десятью десятичными знаками. В этих таблицах впервые дополнительные углы были помещены внизу страницы, а минуты для них даны справа. Ввиду чрезвычайной массивности таблиц и дороговизны их издания, Рэтикусу не удалось найти для них издателя до конца своих дней, и только после его смерти труд всей его жизни был отпечатан на средства пфальцского курфюрста Фридриха VI.

Дальнейшее переработанное и улучшенное издание таблиц Рэтикуса было сделано каппелланом пфальцского курфюрста Бартоломеем Питискусом (1561—1613). Его таблицы, увидевшие свет в 1610 г., содержали значения тригонометрических функций углов через каждые 10″ с 15 (а для малых углов даже с 25) десятичными знаками.

Таблицы Питискуса „Thesaurus mathematicus“ послужили образцом для составления всех позднейших тригонометрических таблиц.

В настоящее время, располагая значительно более усовершенствованными способами для составления таблиц[2]), мы лишь с большим трудом можем представить себе, какую самоотверженную и поистине гигантскую работу пришлось проделать Рэтикусу и Питискусу при составлении своих таблиц.

Можно лишь указать, что на это ушла вся их жизнь и что никакой благодарности за свои труды они не дождались.

Открытие логарифмов, сделанное почти одновременно и совершенно независимо друг от друга швейцарцем Бюрги (1552—1632) и шотландцем Непером (1558—1617), повлекло за собой полное преобразование тригонометрических таблиц, так как в них вместо значения тригонометрических функций начали печатать их логарифмы.

Теперешняя форма таблиц выработана другом Непера англичанином Бриггсом (1556—1630), выпустившим свои таблицы в 1617 г. Из многочисленных таблиц, появившихся после этого времени, заслуживают упоминания вышедшие в 1794 г. таблицы Вега. Они содержат десятизначные значения логарифмов чисел и тригонометрических величин.

Все дальнейшие логарифмические таблицы, выпущенные после Вега, отличаются от них лишь изменением расположения материала и уменьшением числа десятичных знаков до пределов, требуемых практикой (обычно 4, 5 или 7 знаков).

Из русских логарифмических таблиц наиболее употребительны и очень удобны для применения четырехзначные таблицы В. Брадиса и пятизначные таблицы Е. Пржевальского.

принято за арабское слово „gaib“ (впадина) и дословно переведено на латинский язык словом „sinus“ (впадина).

Кроме того имеются и другие объяснения возникновения слова „sinus“.

Более позднего происхождения латинские названия „tangens“ (касательная) и „secans“ (секущая) вытекают из графического построения соответствующих величин.

Название „cosinus“ (co sinus) является сокращенным обозначением составного термина „sinus complementi“, что означает „синус дополнения“ (под „дополнением“ разумеется дополнительный угол). Аналогично объясняется образование названий „cotangens“ и „cosecans“.

[1]) Ретикус первый высказал мнение, что для нахождения тригонометрических функций можно свободно обойтись без круга и что они могут быть определены как отношения сторон в треугольнике.

[2]) Эти способы даются высшей математикой.

ГЛАВА V

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПРИ ПОЛЬЗОВАНИИ ТАБЛИЦАМИ НАТУРАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

§ 49. Всякого рода математические вычисления, в которые входят тригонометрические функции, выполняются вообще при помощи логарифмических тригонометрических таблиц, значительно упрощающих эти вычисления. Но при решении многих прикладных технических вопросов, где не требуется исключительно большой точности, на практике пользуются обыкновенно таблицами натуральных значений тригонометрических функций, вычисленных с тремя-четырьмя десятичными знаками.

Такого рода четырехзначные таблицы приложены в конце этой книги[1]). Пользование ими не представляет затруднений и легко выясняется на нескольких разобранных здесь примерах.

При помощи подобных таблиц решаются две задачи.

1. Прямая задача. Дан угол, и требуется найти соответствующее ему значение тригонометрической функции (§ 24).

2. Обратная задача. Дано значение тригонометрической функции, и требуется найти соответствующий угол (§ 25).

Определение по таблице значения тригонометрической функции заданного угла

§ 50. Если данный угол выражен в градусах и целых десятках минут, то значения его тригонометрических функций находятся непосредственно из таблиц.

Примеры

$$\sin 17°00' = 0,2924; \qquad \cos 42°20' = 0,7392;$$
$$\sin 56°10' = 0,8307; \qquad \cos 74°30' = 0,2616;$$
$$\operatorname{tg} 33°30' = 0,6619; \qquad \operatorname{ctg} 2°40' = 21,4704;$$
$$\operatorname{tg} 71°50' = 3,0475; \qquad \operatorname{ctg} 47°10' = 0,9271.$$

Если число минут данного угла не кратно десяти, то для нахождения соответствующего значения тригонометрической функции приходится прибегать к так называемой *интерполяции*. Этот метод вычисления становится ясным из следующих примеров.

Пример 1. Определить $\sin 36°17'$.

По таблицам находим:

$$\sin 36°10' = 0,5901 \quad \text{и} \quad \sin 36°20' = 0,5925.$$

Мы видим, что увеличению угла в $36°10'$ на $10'$ соответствует *табличная разность* (0,5925—0,5901) в 24 единицы последнего десятичного знака, т. е. в 24 десятитысячных. Заключаем, что при увеличении угла на $1'$ приращение синуса будет в 10 раз меньше, т. е. 2,4, а при увеличении

---

[1]) Так как расположение таблиц, приведенных в конце книги, по существу совершенно аналогично с расположением таблиц в § 23 (стр. 25), то и пользование ими производится по тем же правилам, что и в § 23—25.

угла на $7'$ приращение синуса будет $2{,}4 \cdot 7 = 16{,}8$, или круглым числом 17 (десятитысячных). Эту поправку (0,0017) надо прибавить[1]) к значению синуса угла $36°10'$, чтобы получить значение синуса $36°17'$.

Итак, имеем:

$$\sin 36°17' = 0{,}5901 + 0{,}0017 = 0{,}5918.$$

Пример 2. Найдем $\cos 29°22'$.

Из таблиц выписываем:

$$\cos 29°20' = 0{,}8718 \quad \text{и} \quad \cos 29°30' = 0{,}8704.$$

Видим, что приращению угла на $10'$ соответствует табличная разность, т. е. уменьшение косинуса на 14 единиц последнего десятичного знака. Следовательно, приращению угла на $1'$ соответствует уменьшение его косинуса на 1,4 единицы последнего десятичного знака, а увеличение угла на $2'$ дает уменьшение косинуса на 2,8 единицы последнего десятичного знака, или круглым числом на 0,0003. Эту поправку (0,0003) надо вычесть[2]) из значения $\cos 29°20'$, чтобы получить искомый косинус угла $29°22'$, т. е. имеем

$$\cos 29°22' = 0{,}8718 - 0{,}0003 = 0{,}8715.$$

Пример 3. Чему равен $\operatorname{tg} 54°48'$?

Имеем:

$$\operatorname{tg} 54°40' = 1{,}4106 \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} 54°50' = 1{,}4193;$$

табличная разность $d = 87$; приращение тангенса на $1'$ будет $87 : 10 = 8{,}7$; приращение на $8'$ выразится произведением $8{,}7 \cdot 8 = 69{,}6$ или (с округлением) 70; следовательно,

$$\operatorname{tg} 54°48' = 1{,}4106 + 0{,}0070 = 1{,}4176.$$

Пример 4. Чему равен $\operatorname{ctg} 83°6'$?

Из таблиц имеем:

$$\operatorname{ctg} 83°00' = 0{,}1228; \quad \operatorname{ctg} 83°10' = 0{,}1198;$$

$d = 30$. Следовательно, приращение котангенса на $1'$ равно $30 : 10 = 3$, а на $6'$ оно будет $3 \cdot 6 = 18$. Поправка вычитается[3]), поэтому

$$\operatorname{ctg} 83°6' = 0{,}1228 - 0{,}0018 = 0{,}1210.$$

Замечание. Табличная разность d обычно дается непосредственно в таблицах, так что ее не приходится вычислять. Поэтому для определения значения тригонометрической функции данного угла достаточно брать из таблиц только одно (меньшее или большее) из двух ближайших к искомому значений функции.

§ 51. Из разобранных примеров ясно, что метод интерполяции основан на допущении, что положительное или отрицательное приращение тригонометрической функции пропорционально приращению угла. На самом деле такое предположение безусловно неверно, так как мы

---

[1]) Потому что с увеличением угла его синус увеличивается.

[2]) Так как при увеличении угла его косинус уменьшается.

[3]) Так как при увеличении угла его котангенс уменьшается.

уже знаем, что тригонометрические функции изменяются непропорционально углам и что графики их изображаются не прямыми, а кривыми линиями. Спрашивается: на каком же основании мы допускаем заведомо неверные предположения, и какова будет ценность полученного при таком допущении результата? Ответ таков: практика показывает, а высшие отделы математики подтверждают, что для малых приращений угла, не превышающих $10'$, ошибка от допущения пропорциональности приращения углов и их тригонометрических функций сказывается не ближе пятого десятичного знака, а четыре знака, которыми мы можем ограничиться при наших вычислениях, получаются обыкновенно совершенно точными. Это и дает нам достаточное основание для производства интерполирования по указанному методу.

§ 52. Наглядное объяснение указанной интерполяции можно дать при помощи графиков функций.

На черт. 36 и 37 начерчены в достаточно большом масштабе части графиков синуса и косинуса, причем кривизна кривой преднамеренно (для наглядности чертежа) сильно преувеличена. На черт. 36 и 37 точка C отвечает данному углу, который не находится в таблицах, так как он содержит число минут, не кратное 10.

Точка A отвечает ближайшему углу α, меньшему, чем данный, и который находится в таблицах, так как число его минут кратно 10; точка B отвечает углу β, на $10'$ большему, чем α, так что отрезок AB соответствует $10'$. Отрезок же AC соответствует разности k' между данным углом и ближайшим к нему меньшим α, причем эта разность очевидно меньше $10'$, так что $k' < 10$. Значение a рассматриваемой функции угла α изображено отрезком AD. Значение b той же функции угла β изображено отрезком BF. Отрезок FN представляет таким образом разность между этими двумя значениями a и b рассматриваемой функции углов α и β, т. е. табличную разность d.

Отрезок MK представляет фактическую разность между значением a функции угла α и точным значением той же функции данного угла. Однако при помощи интерполяции мы на самом деле находим не эту фактическую разность: поправка c, которую мы определяем при помощи интерполяции и которую прибавляем к значению a в случае синуса и тангенса и вычитаем из значения a в случае косинуса и котангенса, представлена на черт. 36 и 37 отрезком ME.

Действительно, из подобия треугольников DME и DNF получаем пропорцию:

$$ME : NF = DM : DN.$$

Учитывая введенные выше обозначения длин этих отрезков, а именно:

$ME = c$ (поправка),

$NF = d$ (табличная разность),

$DM = AC = k'$ (число минут, составляющее разность между данным углом и ближайшим к нему меньшим, находящимся в таблицах),

$DN = AB = 10'$,

получим нашу пропорцию в следующем виде:

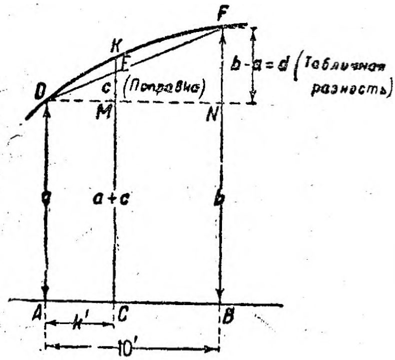
$$c : d = k' : 10'.$$

Отсюда поправка:

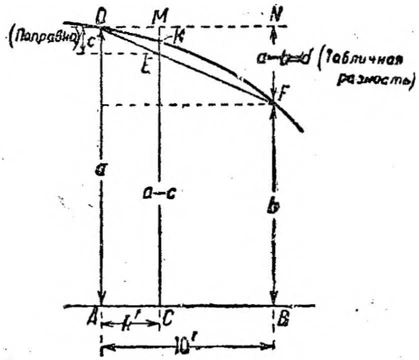
$$c = \frac{d}{10} \cdot k'.$$

Эта формула и соответствует тому способу вычисления, который был показан на примерах § 50.

Следовательно, при вычислении поправки указанным способом мы пренебрегаем длиной отрезка KE, дающей наглядное изображение ошибки при пользовании интерполяцией. Но в том-то и дело, что длина отбрасываемого отрезка KE в действительности крайне ничтожна, вследствие того, что расстояние между точками A и B, соответствующее разности углов α и β, т. е. 10′, настолько сравнительно мало, что в таком малом промежутке дуга DKF кривой почти совпадает с ее хордой DF. Эта ошибка, которая равна длине отбрасываемого отрезка KE, обычно не отражается, как замечено выше, даже на четвертом десятичном знаке и сказывается не ближе пятого десятичного знака, так что четыре знака, которыми мы ограничиваемся, получаются обыкновенно совершенно точными. Это и дает нам основание для применения интерполяции по указанному методу.



Черт. 36.



Черт. 37.

§ 53. На основании изложенного в предыдущих параграфах можно вывести следующее практическое правило для определения значения какой-нибудь тригонометрической функции любого острого угла, число минут которого не кратно 10.

Ищут по таблицам значение (a) рассматриваемой тригонометрической функции для ближайшего угла (α), меньшего, чем данный, и выраженного в градусах и целых десятках минут (например для 30°20′ вместо 39°28′). Затем берут из таблиц табличную разность d, т. е. разность между значением (a) функции угла α и значением (b) той же функции угла β, на 10′ большего; десятую часть найденной табличной разности d умножают на число k, выражающее разность (в минутах) между данным углом и ближайшим к нему меньшим (α), и полученная таким образом поправка (c) прибавляется к значению (a) для синуса или тангенса и вычитается из (a) для косинуса или котангенса.

Замечание. Вместо ближайшего меньшего значения (a) функции можно брать ближайшее большее значение (b). В этом случае число k выражает разность между данным углом и ближайшим к нему большим углом β. Полученная поправка ($c = 0{,}1d \cdot k$) вычитается из значения b для синуса и тангенса и прибавляется к b для косинуса или котангенса.

Определение по таблице угла по заданному значению его тригонометрической функции

§ 54. Если заданное значение функции находится непосредственно в таблицах, то определение угла не представляет никаких затруднений.

Так, если $\sin x = 0{,}4592$, то $x = 27°20'$; если $\cos y = 0{,}6271$, то $y = 51°10'$; если $\operatorname{tg} z = 1{,}5204$, то $z = 56°40'$.

Если же заданное значение тригонометрической функции в таблице не находится, то берут из таблиц ближайшее к ней меньшее (a) или бóльшее (b) значение, после чего интерполируют.

Сущность этой интерполяции легко уясняется на следующих примерах.

Пример 1. Дано $\sin \alpha = 0{,}5620$; определить угол α.

Из таблиц выписываем:

$$\sin 34°10' = 0{,}5616 \quad \text{и} \quad \sin 34°20' = 0{,}5640.$$

Табличной разности d, равной 24 единицам (0,5640 — 0,5616) последнего десятичного знака, отвечает приращение угла в $10'$; следовательно, одной единице последнего десятичного знака соответствует приращение в $\frac{10}{24} = \frac{5}{12}$ минуты, а потому разности между заданным значением синуса и взятым из таблиц, т. е. разности 0,5620 — 0,5616, равной 4 единицам последнего десятичного знака, будет соответствовать приращение угла в $\left(\frac{5}{12}\right)' \cdot 4 \approx 2'$.

Таким образом искомый угол $\alpha = 34°10' + 2' = 34°12'$.

Замечание. Так как выведенная в § 58 пропорция $k' : 10' = c : d$ остается в силе, то искомая поправка на минуты (k) равна $\frac{10c}{d}$.

Вычислив эту поправку, следует ее прибавить к взятому из таблицы ближайшему меньшему углу в случае синуса или тангенса и вычесть из него в случае косинуса и котангенса.

Если же из таблиц берется ближайший бóльший угол, то, наоборот, поправка вычитается в случае синуса и тангенса и прибавляется в случае косинуса и котангенса.

Пример 2. Чему равен угол α, если $\cos \alpha = 0{,}4382$?

Ближайшее бóльшее значение из таблиц равно 0,4384; оно соответствует углу $64°0'$. Табличная разность $d = 26$; разность c равна $0{,}4384 - 0{,}4382 = 0{,}0002 = 2$ единицам последнего десятичного знака. Искомая поправка $k = \frac{2 \cdot 10}{26} \approx 1$.

Прибавляя эту поправку к углу $64°0'$, находим $\alpha = 64°1'$.

Пример 3. $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}5448$; чему равен угол α?

Ближайшее меньшее значение 1,5399 соответствует углу $57°0'$; табличная

ная разность $d = 98$; разность $c = 49$; искомая поправка $k = \frac{49 \cdot 10}{98} = 5$; следовательно, $\alpha = 57°5'$.

Расположение действий удобно вести как показано на следующих примерах.

Пример 4. Определить угол x, если $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{ll|l} 0{,}4986 & 63°30' & \\ +14 & -4' & d = 36;\ \frac{14 \cdot 10}{36} \approx 4. \\ \hline 0{,}5000 & 63°26' & \end{array}$$

Пример 5. Определить x, если $\sin x = 0{,}2452$.

$$\begin{array}{ll|l} 0{,}2447 & 14°10' & \\ +5 & +2' & d = 28;\ \frac{5 \cdot 10}{28} \approx 2. \\ \hline 0{,}2452 & 14°12' & \end{array}$$

Пример 6. $\cos x = \frac{5}{7}$; определить x.

$$\frac{5}{7} \approx 0{,}7143.$$

$$\begin{array}{ll|l} 0{,}7133 & 44°30' & \\ +10 & -5' & d = 20;\ \frac{10 \cdot 10}{20} = 5. \\ \hline 0{,}7143 & 44°25' & \end{array}$$

Примеры для упражнений

§ 55. 1. Определить синусы углов: а) $35°17'$; б) $56°6'$.

Ответ. а) 0,5777; б) 0,8300.

2. Чему равны косинусы углов: а) $18°33'$; б) $83°17'$?

Ответ. а) 0,9480; б) 0,1170.

3. Найти: а) $\operatorname{tg} 16°43'$; б) $\operatorname{tg} 67°28'$.

Ответ. а) 0,3004; б) 2,2963.

4. Чему равны: а) $\operatorname{ctg} 29°58'$; б) $\operatorname{ctg} 63°4'$?

Ответ. а) 1,7344; б) 0,5080.

5. Найти угол x, если: а) $\sin x = 0{,}6435$; б) $\sin x = 0{,}7838$; в) $\sin x = \frac{2}{3}$.

Ответ. а) $40°3'$; б) $51°37'$; в) $41°49'$.

6. Определить угол, если косинус его равен: а) 0,9745; б) 0,3240; в) $\frac{11}{17}$.

Ответ. а) $12°59'$; б) $71°6'$; в) $49°40'$.

7. Чему равен угол, тангенс которого равен: а) 1,8356; б) 0,3471; в) $\frac{5}{3}$.

Ответ. а) $61°25'$; б) $19°8'$; в) $59°2'$.

8. Определить угол x, если: а) $\operatorname{ctg} x = 2$; б) $\operatorname{ctg} x = 0{,}593$; в) $\operatorname{ctg} x = \frac{7}{19}$.

Ответ. а) $26°34'$; б) $59°20'$; в) $69°47'$.

ГЛАВА VI

РЕШЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

§ **56.** Во всем дальнейшем изложении условимся придерживаться следующих сокращенных обозначений.

Во всяком треугольнике будем обозначать градусную меру углов большими буквами, стоящими при их вершинах; так, например, в треугольнике ABC, говоря об угле A, мы будем подразумевать под A число градусов, минут и секунд, содержащихся в угле A.

Длины сторон, выраженные в каких угодно линейных мерах, мы будем обозначать маленькими буквами, соответствующими противолежащим углам. Таким образом, говоря, например, о стороне a, будем подразумевать длину стороны BC.

В частности, в прямоугольных треугольниках будем ставить букву C в вершине прямого угла, так что сторона c будет гипотенузой.

§ **57.** Мы имеем формулы, выражающие простейшие зависимости между сторонами и одним из острых углов прямоугольного треугольника, в двух различных видах:

I $\sin A = \frac{a}{c}$, (1) $\cos A = \frac{b}{c}$, (2) $\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$, (3) $\operatorname{ctg} A = \frac{b}{a}$, (4)

II $a = c \sin A$, (1) $b = c \cos A$, (2) $a = b \operatorname{tg} A$, (3) $b = a \operatorname{ctg} A$. (4)

При решении прямоугольных треугольников они применяются в том или в другом виде в зависимости от того, какие из элементов треугольников заданы и какие требуется определить.

1. Если требуется определить угол по двум сторонам прямоугольного треугольника, то удобнее применять формулы I. При этом формулы (1) и (2) применяются в случае задания гипотенузы (c) и одного из катетов (a или b), а формулы (3) или (4) — в случае задания обоих катетов (a и b).

2. Если требуется определить катет по одной из двух других сторон треугольника, то удобнее применять формулы II. При этом формулы (1) или (2) применяются в случае задания гипотенузы (c) и острого угла, а формулы (3) и (4) — в случае задания одного из катетов (a или b) и острого угла.

3. И, наконец, если требуется определить гипотенузу (c) по одному из катетов и острому углу, то формулы

$$a = c \sin A \quad \text{и} \quad b = c \cos A,$$

в которые входит гипотенуза, удобнее применять в преобразованном виде, а именно: определяя из этих равенств c, получим:

III $$c = \frac{a}{\sin A}, \quad (1) \qquad c = \frac{b}{\cos A}, \quad (2)$$

что можно словесно формулировать:

гипотенуза равна катету, деленному на синус противолежащего или на косинус прилежащего угла.

Основные случаи решения прямоугольных треугольников

§ 58. Следующие четыре случая решения прямоугольных треугольников принимаются за о с н о в н ы е:

1) если даны гипотенуза и острый угол;
2) если даны катет и острый угол;
3) если даны гипотенуза и катет;
4) если даны два катета.

§ 59. **1-й случай.** *Решение прямоугольного треугольника по гипотенузе и острому углу.*

Данные: c, $\angle A$. *Искомые*: $\angle B$, a, b.

Решение.

1) Второй острый угол B определяется вычитанием:

$$\angle B = 90° - \angle A.$$

2) Катет a определяется из формулы:

$$a = c \sin A.$$

3) Катет b определяется из формулы:

$$b = c \cos A \quad \text{или} \quad b = c \sin B.$$

Итак, все основные элементы треугольника найдены, т. е. треугольник р е ш е н.

З а м е ч а н и е. После решения треугольника рекомендуется проверять найденные результаты, для чего прибегают к так называемому к о н т р о л ь н о м у решению. Последнее состоит обычно в том, что п о н а й д е н н ы м (из решения) элементам треугольника определяют какой-нибудь и з з а д а н н ы х элементов его и сверяют полученные результаты. Например, для рассматриваемого случая можно проверить решение, вычислив д а н н ы й угол A по формуле $\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$.

Ч и с л о в о й п р и м е р.

Данные: $c = 9{,}35$; $\angle A = 65°14'$. *Искомые*: $\angle B$, a, b.

Решение.

1) Определение угла B:

$$\angle B = 90° - \angle A = 90° - 65°14' = 24°46'.$$

2) Определение катета a:

$$a = c \sin A = 9{,}35 \cdot \sin 65°14' = 9{,}35 \cdot 0{,}9080 = 8{,}49.$$

3) Определение катета b:

$$b = c \cos A = 9{,}35 \cdot \cos 65°14' = 9{,}35 \cdot 0{,}4190 = 3{,}92.$$

4) Контрольное вычисление угла A:

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b} = \frac{8{,}49}{3{,}92} = 2{,}166,$$

откуда

$$\angle A = 65°14',$$

§ 60. **2-й случай.** *Решение прямоугольного треугольника по катету и острому углу.*

Данные: a, $\angle A$. *Искомые:* $\angle B$, b, c.

Решение.

1) Угол B определяется вычитанием:

$$\angle B = 90^\circ - \angle A.$$

2) Катет b определяется из формулы:

$$b = a \operatorname{ctg} A \quad \text{или} \quad b = a \operatorname{tg} B.$$

3) Гипотенуза c определяется из формулы:

$$c = \frac{a}{\sin A}.$$

4) Для контрольного решения можно воспользоваться формулой:

$$\sin B = \frac{b}{c}.$$

Числовой пример.

Данные: $a = 6{,}37$; $\angle A = 60^\circ 18'$. *Искомые:* $\angle B$, b, c.

Решение.

1) Определение угла B:

$$\angle B = 90^\circ - \angle A = 90^\circ - 60^\circ 18' = 29^\circ 42'.$$

2) Определение катета b:

$$b = a \operatorname{ctg} A = 6{,}37 \cdot \operatorname{ctg} 60^\circ 18' = 6{,}37 \cdot 0{,}5704 = 3{,}63.$$

3) Определение гипотенузы c:

$$c = \frac{a}{\sin A} = \frac{6{,}37}{\sin 60^\circ 18'} = \frac{6{,}37}{0{,}8686} = 7{,}33.$$

4) Контрольное вычисление угла A:

$$\cos A = \frac{b}{c} = \frac{3{,}63}{7{,}33} = 0{,}4952;$$

откуда

$$\angle A = 60^\circ 19'.$$

Разница в $1'$ может быть объяснена ограниченной точностью таблиц, которыми мы пользуемся при вычислениях.

§ 61. **3-й случай.** *Решение прямоугольного треугольника по гипотенузе и катету.*

Данные: c, a. *Искомые:* $\angle A$, $\angle B$, b.

Решение.

1) Угол A определяется из формулы:

$$\sin A = \frac{a}{c},$$

2) Угол B найдем вычитанием:

$$\angle B = 90° - \angle A.$$

3) Катет b определяется из формулы:

$$b = c \cos A.$$

4) Для контрольного решения можно воспользоваться формулой:

$$a = b \operatorname{tg} A.$$

Можно для этой же цели пользоваться и другими формулами, например:

$$\operatorname{tg} B = \frac{b}{a}.$$

Числовой пример.

Данные: $c = 697$; $a = 528$. *Искомые*: $\angle A$, $\angle B$, b.

Решение.

1) Определение угла A:

$$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{528}{697} = 0{,}7576,$$

откуда

$$\angle A = 49°15'.$$

2) Определение угла B:

$$\angle B = 90° - \angle A = 90° - 49°15' = 40°45'.$$

3) Определение катета b:

$$b = \sqrt{(c+a)(c-a)} = \sqrt{1225 \cdot 169} = 455.$$

4) Контрольное вычисление катета a:

$$a = b \operatorname{tg} A = 455 \cdot \operatorname{tg} 49°15' = 455 \cdot 1{,}1606 = 528.$$

§ 62. 4-й случай. *Решение прямоугольного треугольника по двум катетам.*

Данные: a, b. *Искомые*: $\angle A$, $\angle B$, c.

Решение.

1) Угол A определяем из формулы:

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}.$$

2) Угол B находим вычитанием:

$$\angle B = 90° - \angle A.$$

3) Гипотенузу c ищем через один из данных катетов и найденный угол:

$$c = \frac{a}{\sin A}.$$

(Такой способ удобнее, чем пользование формулой $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, по которой вычисления были бы очень громоздкими.)

4) Для контрольного решения можно воспользоваться формулой:

$$\sin B = \frac{b}{c}.$$

Числовой пример:

Данные: $a = 261$; $b = 380$. *Искомые*: $\angle A$, $\angle B$, c.

Решение.

1) Определение угла A:

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b} = \frac{261}{380} = 0,6868;$$

откуда

$$\angle A = 34^\circ 29'.$$

2) Определение угла B:

$$\angle B = 90^\circ - \angle A = 90^\circ - 34^\circ 29' = 55^\circ 31'.$$

3) Определение гипотенузы c:

$$c = \frac{a}{\sin A} = \frac{261}{\sin 34^\circ 29'} = \frac{261}{0,5662} = 461.$$

4) Контрольное вычисление угла B:

$$\sin B = \frac{b}{c} = \frac{380}{461} = 0,8243;$$

откуда

$$\angle B = 55^\circ 31'.$$

ГЛАВА VII

ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИИ В ГЕОМЕТРИИ, ФИЗИКЕ, МЕХАНИКЕ И ТЕХНИКЕ

§ 63. Чтобы убедиться, насколько разнообразна область применения тригонометрии не только в математике, но и в самых различных отраслях физики, механики и, главным образом, техники, приведем несколько задач, взятых преимущественно из производственной практики. Часть задач решена здесь для образца, остальные же предназначены для самостоятельного решения самими учащимися.

Все значения тригонометрических функций, встречающиеся в этих задачах, можно брать из таблицы, приложенной к концу книги, или из „четырехзначных математических таблиц“ В. Брадиса.

Вписанный и описанный многоугольники

§ 64. Имеется круг данного радиуса R. В него вписан правильный многоугольник с n сторонами и около него описан правильный многоугольник с n сторонами. Определить стороны обоих многоугольников, Если $AB = a_n$ (черт. 38) есть искомая сторона правильного вписанного n-угольника, то $\angle AOB = \frac{360°}{n}$, а потому $\angle COB = \frac{180°}{n}$. Следовательно, из $\triangle BOC$ находим

$$BC = OB \cdot \sin \angle BOC$$

или

$$\frac{a_n}{2} = R \sin \frac{180°}{n},$$

откуда определяется искомая сторона:

$$a_n = 2R \sin \frac{180°}{n}.$$

Так, например, сторона правильного вписанного девятиугольника будет:

$$a_9 = 2R \sin 20° = 2R \cdot 0{,}342 = 0{,}684R;$$

сторона правильного стоугольника будет:

$$a_{100} = 2R \sin \frac{180°}{100} = 2R \cdot \sin 1°48' = 2R \cdot 0{,}0314 = 0{,}0628R.$$

Если $AB = b_n$ (черт. 39) есть сторона правильного описанного n-угольника, то в треугольнике BOC известны: катет $OC = R$ и

$$\angle BOC = \frac{180°}{n},$$

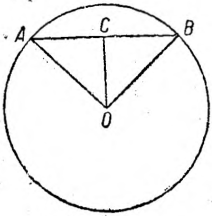
а потому

$$BC = OC \operatorname{tg} \angle BOC$$

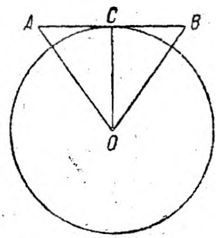
или

$$\frac{b_n}{2} = R \operatorname{tg} \frac{180°}{n},$$

откуда искомая сторона



Черт. 38.



Черт. 39.

$$b_n = 2R \operatorname{tg} \frac{180°}{n}.$$

Так, например, при $n = 36$ получаем

$$b_{36} = 2R \operatorname{tg} 5° = 2R \cdot 0{,}0875 = 0{,}175\,R;$$

сторона правильного описанного тринадцатиугольника будет:

$$b_{13} = 2R \operatorname{tg} \frac{180°}{13} = 2R \operatorname{tg} 13°51' = 2R \cdot 0{,}2465 = 0{,}493R.$$

Периметр (p) правильного вписанного n-угольника определяется из формулы:

$$p = na_n = 2nR \sin \frac{180°}{n}.$$

Периметр (p) правильного описанного n-угольника определяется из формулы:

$$p = nb_n = 2nR \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}.$$

Определим теперь площадь правильного вписанного и описанного n-угольников.

В обоих случаях площадь (s) определяется из формулы:

$$s = \frac{1}{2} p \cdot OC,$$

где OC — апофема многоугольника.

В случае вписанного многоугольника (черт. 38)

$$OC = R \cos \frac{180^\circ}{n}.$$

Следовательно,

$$s = nR^2 \sin \frac{180^\circ}{n} \cos \frac{180^\circ}{n}$$ [1].

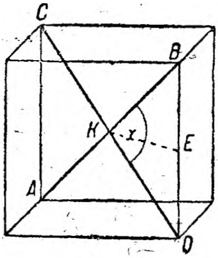
В случае описанного многоугольника (черт. 39) $OC = R$, следовательно:

$$s = nR^2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}.$$

Угол между диагоналями куба

§ 65. Определить острый угол в точке пересечения двух диагоналей куба (черт. 40).

Из геометрии известно, что квадрат диагонали куба равен утроенному квадрату его ребра, т. е., обозначив ребро куба через a, а диагональ через d, будем иметь



Черт. 40.

$$d^2 = 3a^2,$$

откуда

$$d = a\sqrt{3}.$$

Так как диагонали куба при пересечении делятся пополам, то треугольник BKD — равнобедренный, и в нем

$$BD = a, \quad BK = KD = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

[1] В дальнейшем по ознакомлении с соответствующими формулами (§ 134) учащиеся увидят, что эту формулу можно упростить и получить

$$s = \frac{1}{2} nR^2 \sin \frac{360^\circ}{n}.$$

Если соединить вершину K с серединой E стороны BD, то из прямоугольного треугольника BKE имеем

$$\sin \angle BKE = \frac{BE}{BK}$$

или

$$\sin \frac{x}{2} = \frac{\frac{1}{2} a}{\frac{1}{2} a \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} .$$

Итак, искомый угол x определяется из равенства $\sin \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Чтобы не извлекать квадратного корня из 3, вспоминаем, что $\frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg} 30^\circ$, т. е. (по таблицам) равно 0,5774.

Теперь из равенства

$$\sin \frac{x}{2} = 0{,}5774$$

при помощи таблиц находим

$$\frac{x}{2} = 35^\circ 16',$$

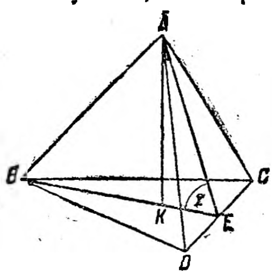
а потому

$$x = 70^\circ 32' .$$

Двугранный угол в правильном тетраэдре

§ 66. Определить величину двугранного угла в правильном тетраэдре.

Линейный угол x искомого двугранного угла получится, если провести высоту BE основания тетраэдра и апофему AE (черт. 41).



Черт. 41.

Для определения угла x обратимся к прямоугольному треугольнику AKE, гипотенуза AE которого есть высота равностороннего треугольника ADC, а катет KE есть $^1/_3$ высоты равностороннего треугольника BDC[1]). Но треугольники ADC и BCD равны, а потому

$$BE = AE$$

и

$$KE = \frac{1}{3} BE = \frac{1}{3} AE .$$

Поэтому имеем

$$\cos x = \frac{KE}{AE} = \frac{\frac{1}{3} AE}{AE} = \frac{1}{3} = 0{,}3333 .$$

Теперь из таблиц находим

$$x = 70^\circ 32' .$$

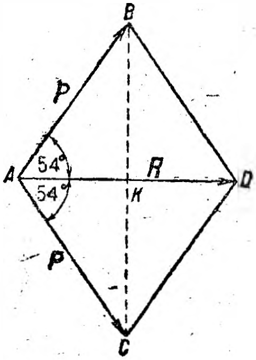
---

[1]) Точка K — центр правильного треугольника, а потому

$$KE = \frac{1}{2} BK = \frac{1}{3} BE .$$

Разложение силы

§ 67. Сила R в 1000 *кг* разложена на две равные составляющие P, образующие с ней углы по 54° (черт. 42). Найти величину этих составляющих.



Черт. 42.

Разложение силы производится, как известно из механики, по правилу параллелограма сил. В рассматриваемом случае в виду равенства составляющих сил AB и AC (черт. 42) получается ромб $ABCD$, сторону которого AB требуется найти.

Из прямоугольного треугольника ABK имеем

$$AK = AB \cdot \cos \angle BAK$$

или

$$\frac{R}{2} = P \cos 54^\circ,$$

откуда

$$P = \frac{R}{2 \cos 54^\circ} = \frac{500}{0{,}5878} = 850{,}63 \text{ кг}.$$

Ускорение тела, катящегося по наклонной плоскости

§ 68. Вычислить ускорение тела, катящегося по наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол 17°28′ (черт. 43).

Из физики известно, что ускорение (a) на наклонной плоскости меньше нормального ускорения (g) во столько раз, во сколько высота (h) наклонной плоскости меньше ее длины (l), т. е.

$$a : g = h : l.$$

Но отношение $\frac{h}{l}$, как видно из чертежа, есть синус угла ABC, т. е. равно sin 17°28′, а потому

Черт. 43.

$$a : g = \sin 17^\circ 28',$$

откуда

$$a = g \sin 17^\circ 28' = 0{,}3001\, g.$$

Угол преломления луча в стекле

§ 69. Луч падает на стекло под углом 28°36′ (черт. 44). Принимая показатель преломления стекла равным 1,5, определить угол преломления луча в стекле.

Из физики известно, что отношение синуса угла падения к синусу угла преломления равно показателю преломления, а потому имеем

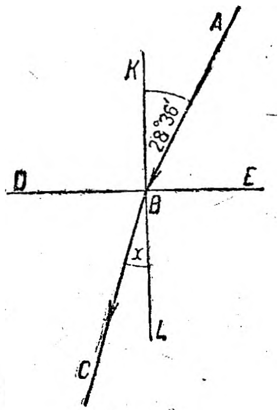
$$\frac{\sin 28°36'}{\sin x} = 1{,}5;$$

откуда

$$\sin x = \frac{\sin 28°36'}{1{,}5} = \frac{0{,}4787}{1{,}5} = 0{,}3191;$$

после чего из таблиц определяем

$$x = 18°36'.$$



Черт. 44.

Тангенс-гальванометр

§ 70. В специальном приборе, служащем для измерения силы гальванического тока, так называемом тангенс-гальванометре, сила тока прямо пропорциональна тангенсу угла отклонения магнитной стрелки.

Пусть, например, измерено, что ток I дает отклонение стрелки на 21°20′, а ток I_1 — на 13°40′. Требуется определить, во сколько раз ток I сильнее тока I_1.

Имеем

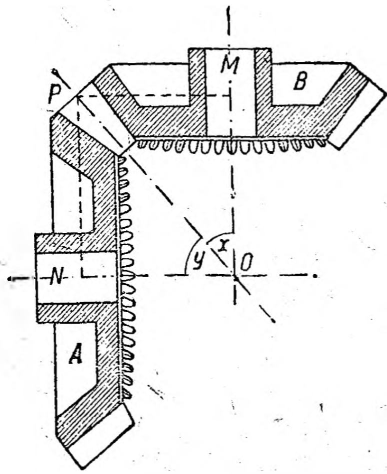
$$I : I_1 = \operatorname{tg} 21°20' : \operatorname{tg} 13°40' = 0{,}3906 : 0{,}2432;$$

откуда находим, что первый ток сильнее второго приблизительно в 1,6 раза.

Угол наклона зубцов шестеренок

§ 71. Два вала, расположенные под прямым углом друг к другу, соединены при помощи конических зубчатых колес (шестеренок) (черт. 45). Определить углы наклона зубцов к осям валов, если известно, что шестерня A имеет диаметр 48 *см*, а диаметр шестерни B равен 32 *см*.

Из чертежа видно, что искомые углы будут $x = POM$ и $y = PON$, причем $ON = PM = 16$ *см*, а $OM = PN = 24$ *см*.



Черт. 45.

Следовательно, из треугольников PON и POM получаем

$$\operatorname{tg} y = \frac{PN}{ON} = \frac{24}{16} = \frac{3}{2} = 1{,}5000;$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{PM}{OM} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3} = 0{,}6667;$$

после чего из таблицы находим

$$\angle y = 56^\circ 19' \quad \text{и} \quad \angle x = 33^\circ 41'.$$

Сумма найденных углов дает 90°, что указывает на правильность решения, как видно из чертежа[1]).

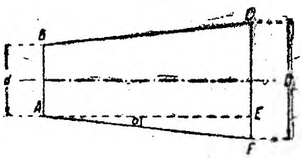
Уклон пути

§ 72. Железнодорожная линия имеет предельный уклон в 10 тысячных. Это значит, что на каждые 1000 *м* пути по горизонтальному расстоянию допускается подъем пути в гору не свыше чем на 10 *м*. Каков будет наклон пути к горизонту при таком уклоне?

Ответ. Тангенс искомого угла равен 0,01, после чего из таблиц находим, что угол составляет около $34'$.

Конусность

§ 73. В механических мастерских нередко приходится производить обточку „на конус", в связи с чем у металлистов существует особый термин „конусность". Под этим названием подразумевается отношение $EF:AE$ (черт. 46), т. е. конусность есть не что иное, как разность радиусов оснований, деленная на длину оси конуса (или приращение радиуса на единицу высоты конуса). Из треугольника AEF ясно, что отношение $EF:AE$ есть тангенс угла наклона образующей конуса к его оси, что дает новое определение конусности, удобное для вычисления ее значения, а именно: конусность равна тангенсу угла, составленного образующей конуса с его осью.



Черт. 46.

Кроме того, существует еще способ определения конусности в процентах подъема.

Если, например, говорится, что изображенная на черт. 47 коническая цапфа имеет подъем в 32%, то это означает, что на каждые 100 *мм* высоты цапфы радиус ее сечения увеличивается на 32 *мм*. Очевидно, что величина конусности такой цапфы будет 0,32, т. е. $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}32$, а по таблицам найдем, что $\alpha = 17^\circ 45'$.

Приведем несколько примеров на конусность.

1. Определить угол между осью конуса и его образующей, если подъем равен: а) 10%, б) 20%, в) 40%, г) 60%, д) 80%, е) 100%.

Ответ: а) 5°43', б) 11°19', в) 21°48', г) 30°58', д) 38°40', е) 45°.

2. Коническая цапфа, изображенная на черт. 48, имеет подъем в 12%; найти верхний диаметр цапфы, если высота ее 130 *мм*, а диаметр нижнего основания 100 *мм*.

---

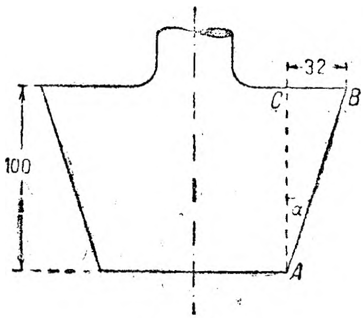
[1]) Так как угол между валами, т. е. $\angle MON$ по условию прямой, то достаточно было бы определить лишь один угол, например PON, а второй вычислить как дополнение до 90°. Но на практике обычно предпочитают определять оба угла, с той целью, чтобы путем сложения найденных результатов проверить точность подсчета.

Так как $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}12$, то из треугольника ABC имеем.

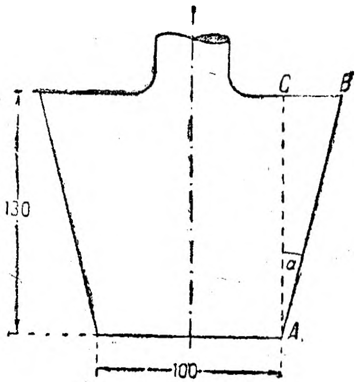
$$BC = AC \operatorname{tg}\alpha = 130 \cdot 0{,}12 = 15{,}6\ ,$$

т. е. верхний радиус цапфы больше нижнего на 15,6 *мм*, а искомый диаметр равен $100 + 31{,}2 = 131{,}2$ *мм*.

3. Угол между образующими у вершины конуса равен $14°10'$. Определить конусность.



Черт. 47.



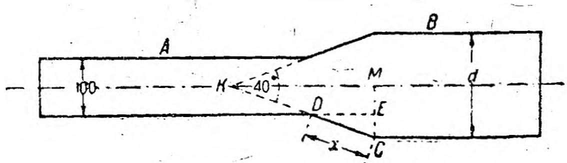
Черт. 48.

Угол между образующей и осью будет $7°5'$, а потому искомая конусность будет

$$\operatorname{tg} 7°5' = 0{,}1243.$$

Длина раструба

§ 74. Труба A диаметра 100 *мм*, при помощи конусообразного раструба переходит в трубу B вдвое большего поперечного сечения (черт. 49). Зная, что образующие конической поверхности сходятся под углом 40°, определить длину x раструба.



Черт. 49.

Так как поперечное сечение трубы B по условию вдвое больше, чем A, а площади кругов относятся как квадраты их диаметров, то диаметр $d = 100\sqrt{2}$, а потому из чертежа получаем

$$CE = CM - EM = 50\sqrt{2} - 50 = 50(\sqrt{2} - 1) = 50(1{,}4142 - 1) =$$
$$= 50 \cdot 0{,}4142 = 20{,}71 \text{ мм}.$$

Теперь из треугольника CED имеем

$$CE = CD \sin \angle CDE$$

или

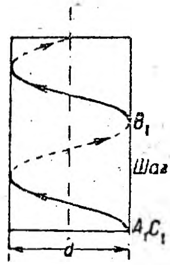
$$20{,}71 = x \sin 20^\circ,$$

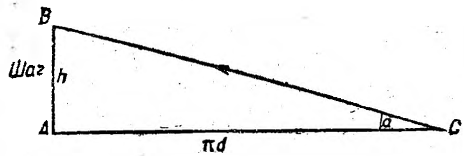
откуда

$$x = \frac{20{,}71}{\sin 20^\circ} = \frac{20{,}71}{0{,}3420} = 60{,}5 \text{ мм}.$$

Винтовая линия

§ 75. Пусть у нас имеется круглый цилиндр, у которого диаметр поперечного сечения равен d. Представим себе прямоугольный треугольник, один из катетов которого был бы в точности равен окружности поперечного сечения нашего цилиндра, т. е. имел бы длину πd (черт. 50).





Черт. 50.

Если теперь такой прямоугольный треугольник вырезать и обернуть вокруг нашего цилиндра, то гипотенуза примет положение *винтовой линии*, причем ясно, что начальная и конечная точки гипотенузы (C и B) расположатся на одной и той же образующей ($C'B'$) цилиндра.

Если теперь передвинем наш треугольник кверху так, чтобы вершина его C оказалась в точке B', и снова обернем его вокруг цилиндра в том же направлении, т. е. против движения часовой стрелки (если смотреть на цилиндр снизу вверх), то гипотенуза BC в новом положении даст точно такую же, как прежде, дугу винтовой линии, являющуюся продолжением прежней дуги.

Мы снова можем передвинуть наш треугольник и повторять это до тех пор, пока не дойдем до верхнего конца нашего цилиндра.

Если теперь по винтовой линии сделать выемку, представляющую в сечении треугольник или прямоугольник, то получится винт с треугольной или прямоугольной резьбой.

При полном обороте винта в гайке винт продвинется по своей оси на длину, равную AB, т. е. второму катету того треугольника, намотка которого дала винтовую линию. Эта длина носит название: *винтовой шаг* (или *высота винтового хода*).

Угол α в треугольнике называется *углом подъема* винтовой линии.

Если шаг винта обозначить через h, то из треугольника ABC не трудно установить зависимость:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{\pi d}.$$

Так если диаметр цилиндра равен 10 *мм*, а шаг винта равен 2 *мм*, то угол подъема определится из соотношения

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{10\pi} = \frac{2}{31,416} = 0,0637;$$

после чего из таблиц найдем

$$\alpha = 3°38'.$$

В случае если имеется уже готовая винтовая нарезка, у которой внешний диаметр D, а внутренний диаметр d, то вычисление угла подъема обыкновенно ведется по среднему диаметру $\frac{D+d}{2}$.

Решим несколько примеров на винтовую нарезку.

Пример 1. Внешний диаметр винтовой нарезки равен 50 *мм*; внутренний диаметр 42 *мм*; высота винтового хода равна 6 *мм*. Определить угол подъема винта.

Средний диаметр равен

$$\frac{50+42}{2} = 46 \text{ мм},$$

Черт. 51.

а потому

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{6}{46\pi} = \frac{3}{23 \cdot 3,1416} = \frac{3}{72,26} = 0,0415;$$

откуда

$$\alpha = 2°22'.$$

Пример 2. Винтовая нарезка имеет $4^1/_2$ хода на дюйм[1]), внешний диаметр нарезки 2 дюйма, внутренний диаметр 1,716 дюйма. Определить угол подъема.

Так как высота винтового хода равна $\frac{1}{4,5} = \frac{2}{9}$ дюйма, то задача решается вполне аналогично предыдущей. Ответ будет 2°11′.

Пример 3. Внешний диаметр винта 25,4 *мм*, внутренний 21,3 *мм*. Угол подъема 2°29′. Найти высоту винтового хода и определить число ходов на один дюйм (25,4 *мм*) высоты винта.

Из формулы $\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{\pi d}$ определяем искомый шаг винта:

$$h = \pi d \cdot \operatorname{tg}\alpha = 3,1416 \cdot 23,35 \cdot \operatorname{tg} 2°29' = $$
$$= 3,1416 \cdot 23,35 \cdot 0,0433 = 3,18 \text{ мм}.$$

Следовательно, на 25,4 *мм* приходится $\frac{25,4}{3,18} = 8$ ходов.

Пример 4. На черт. 51 изображено спиральное сверло, служащее для просверливания дыр определенного диаметра в металле. Определить угол подъема этой спирали, если известно, что полный оборот сверла получается на длине (сверла), равной семи его диаметрам.

---

[1]) Общепринятый в механических мастерских способ определения хода винта— это указать число ходов на один дюйм (25,4 *мм*) винта.

По условию, если диаметр сверла d, то винтовой шаг равен $7d$, а потому искомый угол подъема спирали определится из равенства:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{7d}{\pi d} = \frac{7}{\pi} = \frac{7}{3{,}1416} = 2{,}2281,$$

откуда

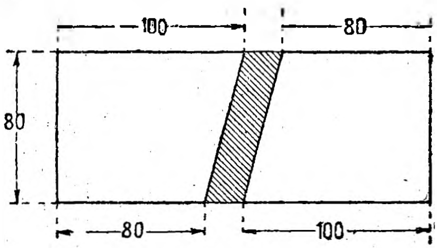
$$\alpha = 65^\circ 50'.$$

Примеры для упражнений

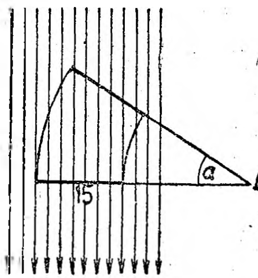
§ 76. 1. В круг радиуса R вписан и около того же круга описан правильный многоугольник с n сторонами. Определить апофемы этих многоугольников. Произвести вычисления для n равного: а) 15, б) 48, в) 80.

2. Из круглого железа[1]) диаметра 60 *мм* посредством фрезерования (состругивания) цилиндрической поверхности хотят приготовить железо восьмигранного сечения. Определить наибольшую толщину железа, которое может быть таким способом получено.

3. На крышке парового цилиндра диаметром 350 *мм* требуется просверлить восемь отверстий для болтов. Определить расстояния между центрами этих отверстий, если эти центры должны отстоять от краев крышки на 50 *мм*.



Черт. 52.



Черт. 53.

4. Вычислить углы равнобедренного треугольника, у которого боковая сторона вдвое больше, чем основание.

5. Центры двух окружностей радиусов 8 *см* и 3 *см* отстоят друг от друга на 15 *см*. Под какими углами пересекаются: а) внешние и б) внутренние касательные к обеим окружностям?

6. Катеты прямоугольного треугольника равны 10 *см* и 15 *см*. Определить длину биссектрис обоих острых углов.

7. Два круга радиусов R и r находятся во внешнем соприкосновении. Через точки касания проведена прямая под углом 75° к линии центров касающихся кругов. Определить радиусы кругов, концентрических с данными и касающихся проведенной прямой[2]).

8. Чему равны двугранные углы между гранями правильного октаэдра?

9. Вычислить угол наклона ребер тетраэдра к плоскости основания.

10. Какой угол образует диагональ куба с его ребром?

11. В изображенном на черт. 52 металлическом бруске требуется прорезать наклонную канавку (паз). На основании показанных на чертеже размеров уста-

---

[1]) То-есть из железа, поперечное сечение которого есть круг. Точнее было бы называть такое железо „цилиндрическим", но на практике его всегда называют „круглым".

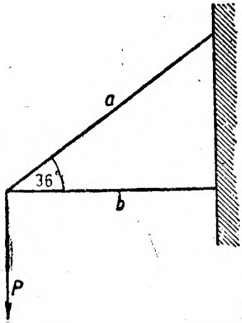
[2]) Подобную задачу приходится решать при вычислении размеров для нарезки зубчатых колес.

новить, под каким углом должен быть направлен к длинной стороне бруса резец.

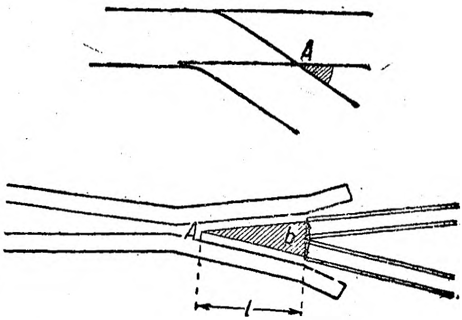
12. Две равные силы по 200 *кг* каждая, действуют на одну и ту же точку под углом 148°40′ друг к другу. Найти их равнодействующую.

13. Угол падения луча, идущего из воздуха в воду, равен 38°46′. Определить угол преломления, принимая, что показатель преломления для воды равен $^4/_3$.

14. Найти предельный угол полного внутреннего отражения для алмаза, если показатель преломления его равен $^5/_2$[1]).



Черт. 54.

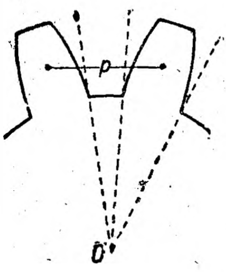


Черт. 55.

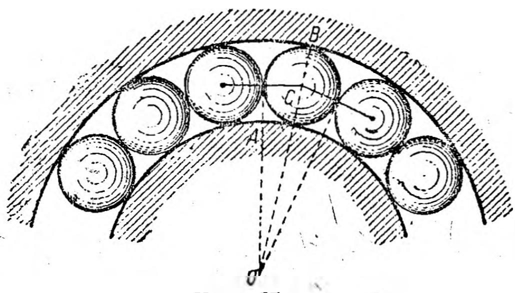
15. Точка A находится на расстоянии 12 *см* от плоского зеркала; точка B на расстоянии 6 *см*. Длина отрезка $AB = 10$ *см*. Под каким углом должен падать луч света из точки A на зеркало, чтобы после отражения от него пройти через точку B[2])?

16. Чему равно ускорение силы тяжести на наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол 22°18′?

17. Квадрат со стороной 15 *см* вращается вокруг оси O, лежащей в его плоскости, в силовом поле однородной плотности. На черт. 53 изображен про-



Черт. 56.



Черт. 57.

дольный разрез: силовые линии перпендикулярны к плоскости квадрата. В этом случае через каждый квадратный сантиметр его поверхности проходят 8000 силовых линий. Определить число таких силовых линий, когда квадрат поворачивается на угол α, равный: а) 32°, б) 73°, в) 90°.

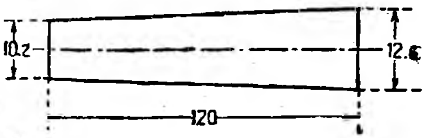
---

[1]) Из физики известно, что для каждой среды синус предельного угла полного внутреннего отражения равен обратной величине показателя преломления данной среды.

[2]) Необходимо иметь в виду, что в плоском зеркале угол падения равен углу отражения.

18. К консоли, изображенной на черт. 54, подвешен груз P в 600 *кг*. Стержни a и b образуют между собой угол в 36°. Вычислить напряжения, испытываемые стержнями a и b.

19. Ток силою 1 ампер отклоняет стрелку тангенс-гальванометра на угол 7°22′. На какой угол отклонится стрелка под действием тока в 2 ампера? (См. § 70).



Черт. 58.

20. Чему равен угол подъема пути при уклоне $^8/_{1000}$?

21. На черт. 55 изображена схема и деталь A стрелочного перевода, укладываемого на станциях при разветвлениях рельсового пути. На месте пересечения рельсов укладывается так называемая „крестовина", геометрическая форма которой — равнобедренный треугольник. Фасон крестовины определяется ее „маркой", под каковым названием подразумевается отношение „ширины" крестовины b к ее „длине" l. Обычные марки крестовин: $^1/_{11}$ для путей, предназначенных для пассажирских поездов, и $^1/_9$ — для товарных.

На основании вышеизложенного определить углы при вершине этих двух типов крестовин.

22. Определить расстояние p (по хорде) между соответствующими сторонами зубьев шестерни [1]), если диаметр ее 100 *мм*, а число зубцов 16 (черт. 56).

Черт. 59.

23. Двадцать пять стальных шариков диаметром по 15 *мм* находятся в шариковом подшипнике (черт. 57). Определить диаметр внутреннего и наружного круга катания (радиусы катания — AO и BO).

24. Большой диаметр конусной шпильки (черт. 58) длиною 120 *мм* равен 12,6 *мм* и меньший диаметр 10,2 *мм*. Чему равна конусность и под каким углом наклонены образующие к оси?

25. Конусная развертка (черт. 59), служащая для дыр с конусностью в $^1/_{50}$ имеет диаметр 18 *мм* на толстом и 15 *мм* на тонком конце. Определить длину этой развертки.

---

[1]) Это расстояние называется *шагом шестерни*.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ УГЛОВ ЛЮБОЙ ВЕЛИЧИНЫ

ГЛАВА VIII

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ УГЛОВ ЛЮБОЙ ЧЕТВЕРТИ

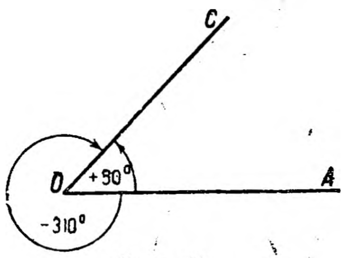
§ 77. До сих пор мы рассматривали тригонометрические функции только острых углов. Теперь мы переходим к изучению тригонометрических функций углов какой угодно величины.

Но для этого приходится прежде всего ввести понятие о направленных углах.

Направленные углы

§ 78. Приписывание положительных и отрицательных знаков различным значениям одной и той же величины возможно во всех тех случаях, когда изменения этой величины могут происходить по двум взаимно противоположным направлениям. Вследствие этого условие о знаках можно применить и по отношению к углам.

Предположим теперь, что у нас имеются две полупрямые OA и OC (черт. 60), скрепленные в точке O как бы шарниром.



Черт. 60.

Допустим, что одна из этих прямых, например OC, может свободно вращаться вокруг точки скрепления O в ту и другую сторону, между тем как вторая прямая OA прикреплена к плоскости еще в какой-нибудь другой точке и вследствие этого она остается неподвижной.

Тогда угол AOC можно рассматривать как м е р у п о в о р о т а подвижной стороны OC от неподвижной стороны OA.

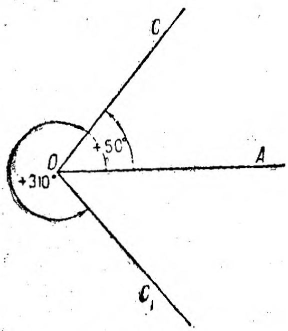
Но из чертежа видно, что положение OC может получиться в результате вращения как по направлению движения часовой стрелки, так и в противоположном направлении.

Как видно из черт. 60, в первом случае величина угла равна 310°, а во втором случае она равна 50°.

Поэтому, имея только начерченную фигуру (черт. 60) и не зная, в каком направлении происходило вращение, мы не можем сказать, какой именно угол здесь изображен: в 310° или же в 50°.

Для устранения указанной неопределенности необходимо ввести понятие о направлении углов.

Установим следующие условия о направлении углов: угол считать положительным в том случае, если он образован вращением подвижной стороны в направлении, противоположном движению часовой стрелки; если же вращение происходило в другом направлении (т. е. в направлении движения часовой стрелки), то угол считать отрицательным.

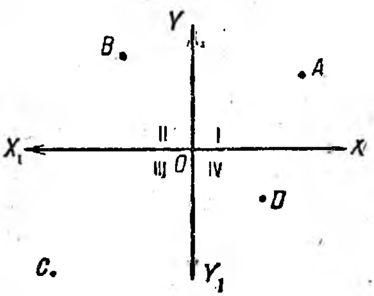


Черт. 61.

Руководствуясь установленным условием, мы скажем, что на черт. 60 изображены два угла: один в 50°, а другой не в 310°, а в минус 310° (-310°). Углы же в $+50^\circ$ и в $+310^\circ$ изобразятся как показано на черт. 61.

Замечание 1. Выбор положительного и отрицательного направлений вращения совершенно произволен, и мы могли бы с одинаковым правом условиться как раз наоборот. Но установив какое-нибудь соглашение, необходимо впредь придерживаться его раз навсегда.

§ 79. Если рассматриваемый угол мы расположим в плоскости так, чтобы его вершина совместилась с началом координат[1]), а неподвижная сторона его совпала с положительным направлением оси иксов, то в зависимости от того, в пределах какой четверти окажется подвижная



Черт. 62.

[1]) Возьмем на плоскости две взаимно перпендикулярные прямые XX_1 и YY_1, пересекающиеся в точке O (черт. 62). Точку O назовем *началом координат*, прямые XX_1 и YY_1 — *осями координат*, ось XX_1 назовем *осью иксов*, а ось YY_1 — *осью игреков*.

На каждой из осей координат будем различать положительное и отрицательное направление; условимся направление OX (от O к X) считать положительным направлением оси XX_1, а прямо противоположное направление OX_1 (от O к X_1) — отрицательным направлением; для оси YY_1 за положительное ее направление примем направление OY (от O к Y) и за отрицательное — направление OY_1 (от O к Y_1).

Замечание 1. Выбор положительного и отрицательного направлений осей совершенно произволен. Но установив какое-нибудь соглашение, необходимо впредь придерживаться его раз навсегда.

Замечание 2. При прочерчивании осей координат на плоскости мы будем прочерчивать оси так, чтобы ось XX_1 (ось иксов) располагалась горизонтально (как указано на черт. 62); тогда вследствие взаимной перпендикулярности осей вторая ось YY_1 (ось игреков) расположится вертикально.

Оси координат делят плоскость на четыре части, называемые *четвертями* (и *квадрантами*):

1) XOY, 2) X_1OY, 3) X_1OY_1, 4) XOY_1,

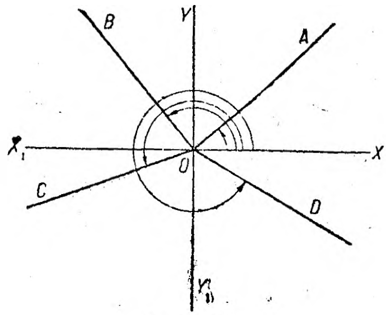
которые соответственно называются *первой, второй, третьей* и *четвертой четвертями* (или *квадрантами*.

сторона угла, он называется углом первой, второй, третьей или четвертой четверти.

Следовательно, к первой четверти относятся углы между 0° и 90°, ко второй четверти — углы между 90° и 180°, к третьей четверти — углы между 180° и 270° и к четвертой четверти — углы между 270° и 360°.

Так, например, на черт. 63 изображены: $\angle XOA$ — первой четверти, $\angle XOB$ — второй четверти, $\angle XOC$ — третьей четверти и $\angle XOD$ — четвертой четверти.

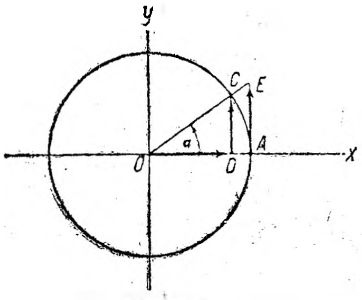
Углы, подвижные стороны которых являются границами между четвертями (0°, 90°, 180° и 360°), условимся называть *предельными углами.*



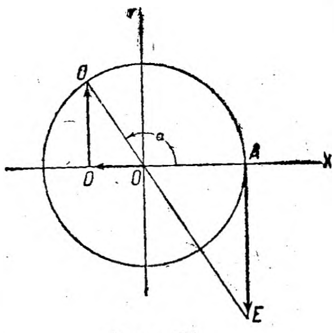
Черт. 63.

Тригонометрические линии и функции угла любой четверти

§ 80. Рассмотрим положительные углы разных четвертей (черт. 64, 65, 66, 67). Будем называть радиус OA, совпадающий с неподвижной стороной данного угла, *неподвижным радиусом*, а радиус OC, совпадающий с подвижной стороной — *подвижным радиусом.*



Черт. 64.



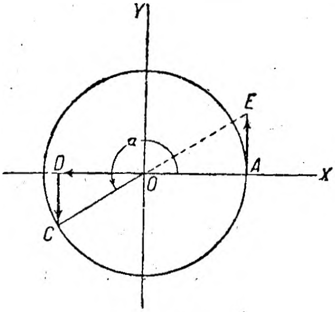
Черт. 65.

В конце A неподвижного радиуса OA проведем к окружности касательную AE и продолжим подвижный радиус OC до пересечения с ней в точке E (в направлении от центра к концу подвижного радиуса на черт. 64 и 67 и в обратном направлении на черт. 65 и 66). Опустим затем из конца C подвижного радиуса OC перпендикуляр CD на ось иксов.

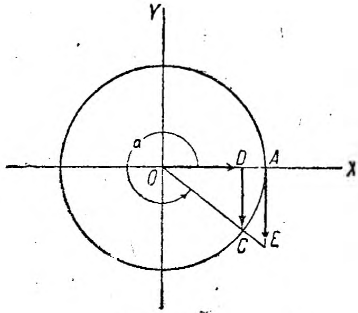
Тогда отрезки DC, OD и AE (*тригонометрические линии*) называются соответственно *линией синуса, линией косинуса* и *линией тангенса* центрального угла α.

Мы видим из чертежей, что одноименные тригонометрические линии в различных четвертях расположены неодинаково. Именно, линия синуса DC во второй четверти расположена так же как и в первой четверти, т. е. над осью X, а в третьей и четвертой — под осью X. Линия косинуса OD в четвертой четверти расположена также, как и в первой четверти, т. е. вправо по оси X, а во второй и третьей четверти — влево по оси X. Наконец, линия тангенса AE в третьей четверти расположена также, как и в первой — над осью X, а во второй и четвертой — под осью X.

Будем называть расположение тригонометрической линии **прямым**, когда оно одинаково с расположением одноименной линии для угла первой четверти и **обратным** в противном случае. Таким образом, линия синуса имеет **прямое** расположение в первой и второй четвертях и **обратное** в третьей и четвертой, линии косинуса — **прямое** расположение в первой и четвертой четвертях и **обратное** во второй и третьей, наконец, линия тангенса — **прямое** расположение в первой и третьей четвертях и **обратное** во второй и четвертой.



Черт. 66.



Черт. 67.

Определим теперь тригонометрические функции синус, косинус и тангенс угла α любой четверти так же, как мы определяли тригонометрические функции острого угла, а именно, как отношения тригонометрических линий к радиусу. При этом будем приписывать этим отношениям знак $+$, когда соответствующая тригонометрическая линия имеет прямое расположение и знак $-$, когда расположение обратное. Иными словами мы будем считать синус положительным для углов первой и второй четвертей и отрицательным для углов третьей и четвертой четвертей, косинус положительным для углов первой и четвертой четвертей и отрицательным для углов второй и третьей четвертей и, наконец, тангенс положительным для углов первой и третьей четвертей и отрицательным для углов второй и четвертой четвертей.

Таким образом:

$$\sin\alpha = +\frac{CD}{R}, \quad \cos\alpha = +\frac{OD}{R}, \quad \operatorname{tg}\alpha = +\frac{AE}{R}; \qquad \text{(I четверть)}$$

$$\sin\alpha = +\frac{CD}{R}, \quad \cos\alpha = -\frac{OD}{R}, \quad \operatorname{tg}\alpha = -\frac{AE}{R}; \qquad \text{(II четверть)}$$

$$\sin\alpha = -\frac{CD}{R}, \quad \cos\alpha = -\frac{OD}{R}, \quad \operatorname{tg}\alpha = +\frac{AE}{R}; \qquad \text{(III четверть)}$$

$$\sin\alpha = -\frac{CD}{R}, \quad \cos\alpha = +\frac{OD}{R}, \quad \operatorname{tg}\alpha = -\frac{AE}{R}. \qquad \text{(IV четверть)}$$

Благодаря такому определению тригонометрических функций достаточно указать знаки их (и даже лишь знаки каких-либо двух из них), чтобы иметь возможность судить о четверти, в которой расположен соответствующий угол. Так, например, если синус и косинус положительны, то угол первой четверти, если синус положителен, а косинус отрицателен — то угол второй четверти и т. п.

Котангенс, *секанс* и *косеканс* угла α мы определяем соответственно равенствами:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}, \quad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

§ 81. Резюмируя выводы предыдущего параграфа о знаках тригонометрических функций, мы усматриваем, что в первой четверти положительны все шесть тригонометрических функций, а в каждой из остальных четвертей положительны по две функции из шести, остальные же четыре отрицательны (см. таблицу).

Четверти	Тригонометрические функции					
	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sec\alpha$	$\operatorname{cosec}\alpha$
I	+	+	+	+	+	+
II	+	—	—	—	—	+
III	—	—	+	+	—	—
IV	—	+	—	—	+	—

Этот же результат можно представить в виде такой диаграммы:

Положительны sin *и* cosec II	*Положительны* *все функции* I
III *Положительны* tg *и* ctg	IV *Положительны* cos *и* sec

Можно рассматривать еще и другую диаграмму, дающую тот же результат в иной форме:

sin и cosec

+ II	+ I
III —	IV —

cos и sec

— II	+ I
III —	IV +

tg и ctg

— II	+ I
III +	IV —

Для удобства запоминания последних диаграмм существует **мнемоническое правило**: синус и косеканс положительны **по горизонтали**, косинус и секанс — **по вертикали**, тангенс и котангенс — **по диагонали**.

Примеры для упражнений

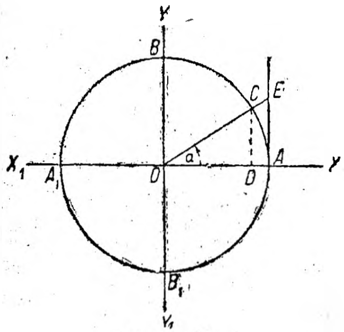
§ 82. 1. В каких четвертях синус и котангенс имеют одинаковые знаки?
2. Тот же вопрос для косинуса и котангенса.
3. В каких четвертях знаки у синуса и косинуса различны?
4. Тот же вопрос для котангенса и косинуса.
5. В каких четвертях знаки у секанса и косеканса различны?

ГЛАВА IX

ИЗМЕНЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ УГЛА ОТ 0° ДО 360°

Изменения тригонометрических функций в первой четверти

§ 83. В главе IV рассматривался вопрос об изменении тригонометрических функций при изменении угла от 0° до 90° (черт. 68).



Черт. 68.

В результате мы пришли к выводу, что с увеличением угла в первой чертверти:

синус увеличивается, косинус уменьшается, тангенс увеличивается.

Следовательно, для остальных тригонометрических функций будем иметь:

котангенс уменьшается, секанс увеличивается, косеканс уменьшается;

и вместе с тем мы получили, что

$$\sin 0^\circ = \frac{0}{R} = 0, \quad \cos 0^\circ = \frac{R}{R} = 1,$$

$$\operatorname{tg} 0^\circ = \frac{0}{R} = 0;$$

$$\sin 90^\circ = \frac{R}{R} = 1, \quad \cos 90^\circ = \frac{0}{R} = 0, \quad \operatorname{tg} 90^\circ = \frac{\infty}{R} = \infty \text{ [1]}).$$

Значения остальных тригонометрических функций для углов в 0° и 90° будут вычисляться на основании формул

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}, \quad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

---

[1]) Запись „$\operatorname{tg} 90^\circ = \infty$", как следует из выше данного объяснения смысла символа „∞", нужно понимать так, что при стремлении угла к 90° его тангенс будет **неограниченно возрастать**, принимая значения, бо́льшие какого угодно произвольно заданного большого числа.

Для угла 0° имеем

$$\operatorname{ctg} 0^\circ = \infty \text{ [1]}, \quad \sec 0^\circ = 1, \qquad \operatorname{cosec} 0^\circ = \infty.$$

Для угла 90° имеем

$$\operatorname{ctg} 90^\circ = 0, \qquad \sec 90^\circ = \infty, \qquad \operatorname{cosec} 90^\circ = 1.$$

§ 84. Займемся теперь вопросом об изменении тригонометрических функций при изменении угла от 0° до 360°. При этом достаточно будет подвергнуть такому изучению непосредственно из чертежа лишь три основные тригонометрические функции (синус, косинус, тангенс), ибо, что касается изменения трех остальных (котангенса, секанса и косеканса), то, очевидно, их изменения будут происходить в обратном порядке по сравнению с первыми.

Изменения тригонометрических функций во второй четверти

§ 85. Метод, которого мы будем придерживаться при исследовании изменения тригонометрических функций во второй четверти, совершенно тот же, что и для первой четверти.

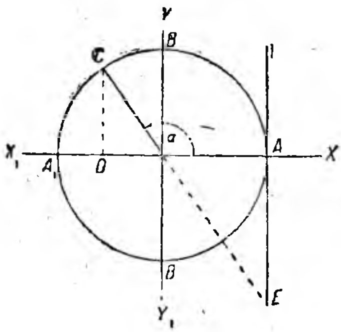
Из черт. 69 видно, что по мере возрастания угла α, т. е. по мере вращения подвижного радиуса OC в положительном направлении линия синуса DC будет укорачиваться, линия косинуса OD — удлиняться и линия тангенса AE — укорачиваться.

Отсюда заключаем, что если иметь в виду лишь абсолютное значение тригонометрических функций, то с увеличением угла во второй четверти:

синус уменьшается, косинус увеличивается, тангенс уменьшается.

Следовательно, для остальных тригонометрических функций имеем:

котангенс увеличивается, секанс уменьшается, косеканс увеличивается.



Черт. 69.

Если же учесть и знак тригонометрической функции сообразно четверти, то будем иметь:

синус уменьшается, косинус уменьшается, тангенс увеличивается, котангенс уменьшается, секанс увеличивается, косеканс увеличивается.

---

[1] Запись „$\operatorname{ctg} 0^\circ = \infty$" надо понимать в том смысле, что по мере неограниченного уменьшения угла, т. е. стремления его к нулю, котангенс его будет неограниченно возрастать. Действительно, $\operatorname{ctg}\alpha$ равен дроби $\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$; при стремлении α к нулю и $\operatorname{tg}\alpha$ будет стремиться к нулю, а если знаменатель дроби стремится к нулю, то сама дробь $\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ неограниченно возрастает, т. е. стремится к бесконечности. Аналогичными рассуждениями придем к выводу, что $\operatorname{cosec} 0^\circ = \infty$ и $\sec 90^\circ = \infty$. Легко также получить $\operatorname{ctg} 90^\circ = 0$.

Значения тригонометрических функций предельных углов второй четверти

§ 86. Каковы же значения тригонометрических функций в начале второй четверти, т. е. при угле в 90° и в ее конце, т. е. при угле в 180°? Вычислим сначала значения тригонометрических функций для 180°.

Если вращать подвижной радиус OC в положительном направлении (черт. 69), то по мере все большего приближения его к отрицательному направлению оси X линия синуса DC будет все больше и больше укорачиваться, стремясь обратиться в точку (A_1), линия косинуса OD будет все больше и больше удлиняться, стремясь к слиянию с радиусом OA_1, и линия тангенса AE будет все больше и больше укорачиваться, стремясь обратиться в точку (A), а в момент, когда радиус OC при своем дальнейшем вращении совпадет с радиусом OA_1, тогда линия синуса DC и линия тангенса AE обратятся в точку, т. е. длина каждой из них будет равна нулю, а линия косинуса OD сольется с радиусом OA_1, т. е. длина ее будет равна R.

Итак, для угла в 180° имеем:

длина линии синуса $DC = 0$,
длина линии косинуса $OD = OA_1 = R$,
длина линии тангенса $AE = 0$.

Поэтому, распространяя обобщенное определение тригонометрических функций и на угол в 180°, мы получим:

$$\sin 180^\circ = \frac{0}{R} = 0, \quad \cos 180^\circ = \frac{-R}{R} = -1, \quad \operatorname{tg} 180^\circ = \frac{0}{R} = 0.$$

Для остальных тригонометрических функций на основании формул

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$$

будем иметь

$$\operatorname{ctg} 180^\circ = \infty, \quad \sec 180^\circ = -1, \quad \operatorname{cosec} 180^\circ = \infty.$$

§ 87. Теперь перейдем к значениям тригонометрических функций 90°. Мы уже видели, что $\sin 90^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = 0$, $\operatorname{tg} 90^\circ = \infty$, $\operatorname{ctg} 90^\circ = 0$, $\sec 90^\circ = \infty$ и $\operatorname{cosec} 90^\circ = 1$. Казалось бы, что вопрос уже решен. Однако, угол в 90° можно рассматривать и как конец первой и как начало второй четверти, а это обстоятельство, как мы сейчас увидим, отражается на значениях тех тригонометрических функций, которые обращаются в ∞, именно на значениях $\operatorname{tg} 90^\circ$ и $\sec 90^\circ$.

§ 88. В самом деле, будем ли мы подходить к 90° оставаясь внутри первой четверти или внутри второй четверти длина линии тангенса, как легко видеть из чертежа, будет неограниченно возрастать и, следовательно, будет неограниченно возрастать абсолютная величина тангенса угла. Но при этом знак тангенса для углов первой четверти будет оставаться положительным, а для углов второй четверти — отрицательным. Мы скажем поэтому, что тангенс стремится к $+\infty$, когда мы приближаемся к 90°, оставаясь в первой четверти и к $-\infty$, когда мы приближаемся к 90°, оставаясь все время во второй четверти.

Когда же мы не указываем каким именно образом мы приближаемся к углу в 90°, то будем употреблять запись: $\operatorname{tg} 90^\circ = \pm\infty$, понимая ее лишь как условное обозначение констатированных выше фактов. Аналогично для $\sec 90^\circ$ получим: $\sec 90^\circ = \pm\infty$, причем эту запись следует понимать в том смысле, что когда угол приближается к 90°, оставаясь в первой четверти (т. е. будучи меньше 90°), то секанс неограниченно возрастает, оставаясь положительным, а когда угол приближается к 90° оставаясь во второй четверти (т. е. будучи больше 90°), то секанс неограниченно возрастает оставаясь отрицательным.

Подобным же образом можно написать:

$$\operatorname{ctg} 180^\circ = \mp\infty, \quad \operatorname{cosec} 180^\circ = \mp\infty.$$

Изменение тригонометрических функций в третьей и четвертой четвертях

§ 89. Пользуясь для исследования изменений тригонометрических функций в третьей и четвертой четвертях тем же методом, какой мы применяли для первой и второй четвертей, легко получить следующие результаты.

Если ограничиться рассмотрением изменения *абсолютного значения* тригонометрических функций, то с увеличением угла в третьей четверти:

синус увеличивается, косинус уменьшается, тангенс увеличивается, котангенс уменьшается, секанс увеличивается, косеканс уменьшается.

Учитывая же и знак тригонометрических функций, будем иметь:

синус уменьшается, косинус увеличивается, тангенс увеличивается, котангенс уменьшается, секанс уменьшается, косеканс увеличивается.

Изменение тригонометрических функций по *абсолютному значению* в четвертой четверти:

синус уменьшается, косинус увеличивается, тангенс уменьшается, котангенс увеличивается, секанс уменьшается, косеканс увеличивается.

Если же учесть и знак тригонометрических функций, то будем иметь:

синус увеличивается, косинус увеличивается, тангенс увеличивается, котангенс уменьшается, секанс уменьшается, косеканс уменьшается.

Значения тригонометрических функций 270° и 360° легко найти рассуждениями, аналогичными тем, которые мы приводили в § 85, 87 и 88.

§ 90. В заключение приводим в форме таблиц выводы, полученные в настоящей главе в результате исследования вопроса об изменении тригонометрических функций.

Ход изменения тригонометрических функций по четвертям

Функции	Четверти			
	0° первая 90°	вторая 180°	третья 270°	четвертая 360°
синус	0 *увелич.* +1	+1 уменьш. 0	0 уменьш. −1	−1 *увелич.* 0
косинус	+1 уменьш. 0	0 уменьш. −1	−1 *увелич.* 0	0 *увелич.* +1
тангенс	0 *увелич.* +∞	−∞ *увелич.* 0	0 *увелич.* +∞	−∞ *увелич.* 0
котангенс	+∞ уменьш. 0	0 уменьш. −∞	+∞ уменьш. 0	0 уменьш. −∞
секанс	+1 *увелич.* +∞	−∞ *увелич.* −1	−1 уменьш. −∞	+∞ уменьш. +1
косеканс	+∞ уменьш. +1	+1 *увелич.* +∞	−∞ *увелич.* −1	−1 уменьш. −∞

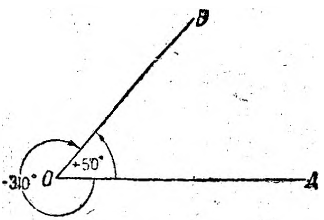
Значения тригонометрических функций предельных углов

Углы	Функции					
	Синус	Косинус	Тангенс	Котангенс	Секанс	Косеканс
0°	0	1	0	∓∞	1	∓∞
90°	1	0	±∞	0	±∞	1
180°	0	−1	0	∓∞	−1	±∞
270°	−1	0	±∞	0	∓∞	−1
360°	0	1	0	∓∞	1	∓∞

ГЛАВА X

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ УГЛОВ ЛЮБОЙ ВЕЛИЧИНЫ

§ 91. В гл. IX мы исследовали вопрос об изменении тригонометрических функций при изменении угла от 0° до 360°. Но при обобщении понятия об угле (§ 78) мы угол рассматривали как меру поворота подвижной стороны *OC* от своего первоначального положения *OA* (черт. 70). При этом мы видели, что в таком понимании могут быть углы любой величины от 0° до 360°. Но ничто не мешает нам расширить и эти рамки, ибо мы можем продолжать вращение подвижной стороны *OC* и после того, как она уже совершила полный оборот. В таком случае, продолжая рассматривать угол как меру поворота подвижной стороны *OC* от своего первоначального положения *OA*, мы можем получить углы, превосходящие 360° (один оборот) и даже превосходящие 720° (два оборота) и т. д., вообще **углы какой угодно величины.**



Черт. 70.

Таким образом мы видим, что если в геометрии приходится иметь дело с углами, не превосходящими 180°, и только в результате вычи сления получаются углы любой величины (например сумма углов пятиугольника равна шести прямым углам, т. е. 540°), то в тригонометрии величина угла не ограничена никакими пределами.

Такое расширение понятия угла является совершенно естественным. Возьмем для примера хотя бы минутную стрелку часов: каждый час она делает полный оборот, т. е. 360°, а за сутки — 24 полных оборота, т. е. она повернется на угол в 8640°. Или представим себе вал машины, вращающийся со скоростью трех оборотов в секунду. Тогда за час он сделает 10 800 оборотов, т. е. повернется на угол в 3 888 000°.

Таким образом ясно, что угол может выражаться сколь угодно большим числом. Если же принять во внимание, что в зависимости от направления вращения (против движения часовой стрелки или в сторону движения) мы различаем положительные и отрицательные углы, то станет ясным, что угол есть переменная величина, принимающая любые значения без всяких ограничений (от $-\infty$ до $+\infty$).

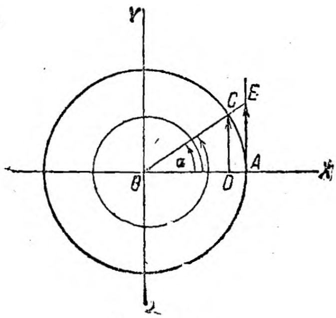
Периодичность тригонометрических функций

§ 92. Рассмотрим теперь, как изменяются тригонометрические функции в зависимости от изменения угла, если не ограничивать это изменение угла пределами одного оборота, вообще, если не ограничивать изменение угла никакими пределами.

Возьмем окружность произвольного радиуса R и будем рассматривать угол как меру поворота подвижного радиуса OC от своего первоначального положения (неподвижного радиуса OA).

Если при своем вращении подвижной радиус OC остановился в положении, показанном на черт. 71, то будем иметь:

$$\sin\alpha = \frac{DC}{R}, \quad \cos\alpha = \frac{OD}{R}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{AE}{R}.$$



Черт. 71.

Пусть теперь при дальнейшем вращении радиус OC сделал полный оборот и, следовательно, занял снова свое прежнее положение. Тогда, считая от положения OA, радиус OC повернулся на угол $(\alpha + 360°)$. Но хотя полученный в результате поворота радиуса OC угол $(\alpha + 360°)$ больше прежнего (α) на 360°, однако стороны их совпадают, а потому совпадают и все тригонометрические линии одного угла с соответствующими тригонометрическими линиями другого угла (черт. 71). В таком случае, на основании обобщенного определения тригонометрических функций, тригонометрические функции одного угла $(\alpha + 360°)$ равны одноименным тригонометрическим функциям другого (α), т. е.

$$\sin(360° + \alpha) = \sin\alpha, \qquad \cos(360° + \alpha) = \cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(360° + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha, \qquad \operatorname{ctg}(360° + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha,$$
$$\sec(360° + \alpha) = \sec\alpha, \qquad \operatorname{cosec}(360° + \alpha) = \operatorname{cosec}\alpha.$$

То же самое произойдет, очевидно, и в том случае, если радиус OC займет прежнее свое положение после двух, трех, четырех и т. д. полных оборотов. При этом будут получаться различные углы:

$$(360^\circ \cdot 2 + \alpha), \quad (360^\circ \cdot 3 + \alpha), \ldots$$

Но для всех этих углов наклон радиуса OC к положительному направлению оси X будет тот же самый и для них всех тригонометрические линии будут те же, что и для угла α, а следовательно, тригонометрические функции всех этих углов будут равны одноименным тригонометрическим функциям угла α:

$$\begin{aligned}
\sin(360^\circ \cdot 2 + \alpha) &= \sin\alpha, & \sin(360^\circ \cdot 3 + \alpha) &= \sin\alpha, \ldots\\
\cos(360^\circ \cdot 2 + \alpha) &= \cos\alpha, & \cos(360^\circ \cdot 3 + \alpha) &= \cos\alpha, \ldots\\
\operatorname{tg}(360^\circ \cdot 2 + \alpha) &= \operatorname{tg}\alpha, & \operatorname{tg}(360^\circ \cdot 3 + \alpha) &= \operatorname{tg}\alpha, \ldots
\end{aligned}$$

Наконец, и в том случае, если радиус OC сделает один, два, три и т. д. полных оборота в отрицательном направлении, то для полученных углов

$$(-360^\circ + \alpha), \quad (-360^\circ \cdot 2 + \alpha), \quad (-360^\circ \cdot 3 + \alpha), \ldots$$

все тригонометрические функции тоже будут равны одноименным функциям угла α, т. е.

$$\begin{aligned}
\sin(-360^\circ + \alpha) &= \sin(-360^\circ \cdot 2 + \alpha) = \ldots = \sin\alpha,\\
\cos(-360^\circ + \alpha) &= \cos(-360^\circ \cdot 2 + \alpha) = \ldots = \cos\alpha,\\
\operatorname{tg}(-360^\circ + \alpha) &= \operatorname{tg}(-360^\circ \cdot 2 + \alpha) = \ldots = \operatorname{tg}\alpha.
\end{aligned}$$

Вообще, если буквой n обозначить любое положительное или отрицательное целое число, то имеем:

$$\begin{aligned}
\sin(360^\circ \cdot n + \alpha) &= \sin\alpha, & \cos(360^\circ \cdot n + \alpha) &= \cos\alpha,\\
\operatorname{tg}(360^\circ \cdot n + \alpha) &= \operatorname{tg}\alpha, & \operatorname{ctg}(360^\circ \cdot n + \alpha) &= \operatorname{ctg}\alpha,\\
\sec(360^\circ \cdot n + \alpha) &= \sec\alpha, & \operatorname{cosec}(360^\circ \cdot n + \alpha) &= \operatorname{cosec}\alpha.
\end{aligned}$$

Так, например:

$$\begin{aligned}
\sin 400^\circ &= \sin(360^\circ + 40^\circ) = \sin 40^\circ,\\
\cos 735^\circ &= \cos(360^\circ \cdot 2 + 15^\circ) = \cos 15^\circ,\\
\operatorname{tg}(-690^\circ) &= \operatorname{tg}(-360^\circ \cdot 2 + 30^\circ) = \operatorname{tg} 30^\circ.
\end{aligned}$$

Итак, мы убеждаемся, что при втором, третьем, четвертом и т. д. обороте радиуса OC тригонометрические функции полученных углов будут проходить через те же самые значения, что и при первом обороте. Иначе говоря, для углов, бо́льших 360°, тригонометрические функции принимают те же самые значения, через которые они уже проходили для углов, меньших 360°.

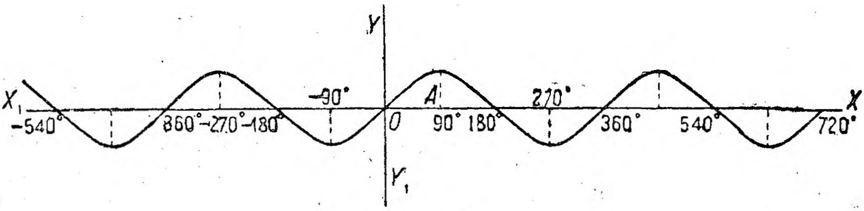
Таким образом все тригонометрические функции обладают тем свойством, что их значения не изменяются при увеличении или уменьшении угла на 360°, на 720° и т. д., вообще, на целое число оборотов. Другими словами, тригонометрические функции обладают тем свойством, что их значения повторяются периодически через каждые 360°.

Функции, обладающие свойством не изменять своего значения при увеличении аргумента на некоторую постоянную величину, называются *периодическими*. Самое свойство, которым они обладают, называется *свойством периодичности*, а наименьшее значение, прибавление которого к аргументу не изменяет значения функции, называется *периодом* функции.

Итак, тригонометрические функции являются **периодическими функциями** с периодом равным 360° (полный оборот).

Графики синуса и косинуса

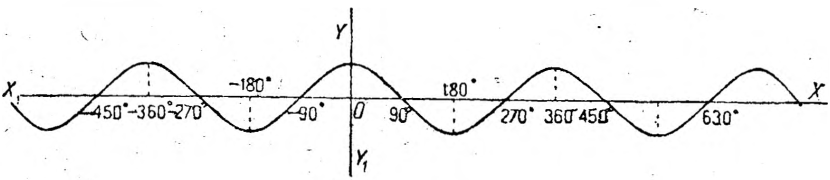
§ 93. В § 41 и 42 были указаны способы построения графиков синуса и косинуса для углов первой четверти. Придерживаясь совершенно



Черт. 72.

такого же метода, мы можем теперь построить графики синуса и косинуса для промежутка от 0° до 360°.

Достаточно построить график функции для промежутка от 0° до 360°, так как в дальнейшем в промежутках от 360° до 720°, от 720° до 1080°



Черт. 73.

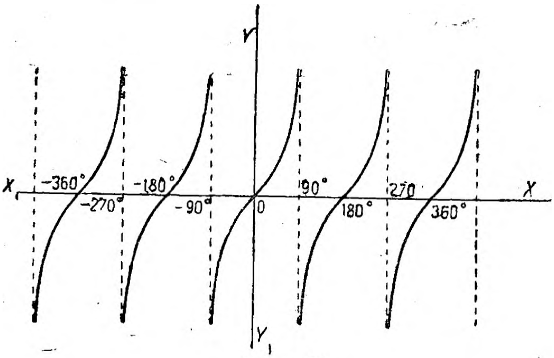
и т. д., а также от — 360° до 0°, от — 720° до — 360°, от — 1080° до — 720° и т. д., та же „ветвь" графика будет повторяться.

На черт. 72 и 73 изображены волнообразные кривые, представляющие графики синуса и косинуса.

Замечание. Легко заметить, что если начало координат O на черт. 72 передвинуть в точку A, отвечающую 90°, то получится график косинуса (черт. 73).

График тангенса

§ 94. Строя график тангенса совершенно так же, как указано в § 44, увидим, что в результате этого построения (черт. 74) получится бесконечное число **отдельных** бесконечных ветвей, каждая из которых заключена между парой последовательных перпендикуляров, восставленных к оси X в точках, отвечающих углам ... — 270°, — 90°, + 90°, + 270°, ... По мере неограниченного удаления от оси X каждая такая ветвь неограниченно приближается к соответствующим двум перпендикулярам, стремясь к касанию с ними.

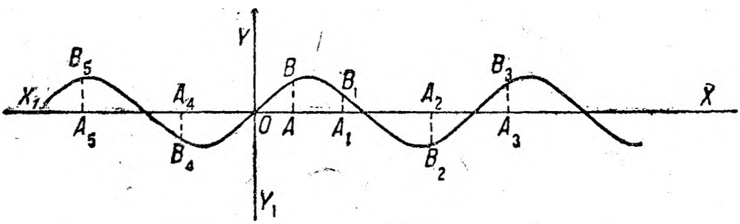


Черт. 74.

Из графика тангенса видно, что для каждой пары углов, отличающихся друг от друга на 180°, значения тангенса равны по величине и одинаковы по знаку, а это указывает, что период для тангенса равен 180° (см. § 92).

Что касается графиков котангенса, секанса и косеканса, то учащимся будет нетрудно построить их самостоятельно, причем обнаружится, что все эти графики будут состоять из отдельных ветвей.

§ 95. При помощи графиков тригонометрических функций можно наглядно показать, что задача:
найти величину угла по данному значению какой-нибудь его тригонометрической функции, — имеет не одно, а множество решений, в то время как задача: определить значение функции для любого данного угла α, — имеет одно решение.



Черт. 75.

Графическое решение второй задачи производится так (мы показываем решение задачи на графике синуса, но то же самое можно показать и на графиках косинуса и тангенса):

Отложим (черт. 75) от начала координат O по оси X отрезок OA, соответствующий данному углу [1]), и в точке A восставим перпендикуляр AB.

---

[1]) Напоминаем, что при построении графика мы откладывали по оси X значения угла в виде отрезков соответствующей длины (см. § 42), приняв некоторый произвольной длины отрезок за угол определенной величины, например в 10°.

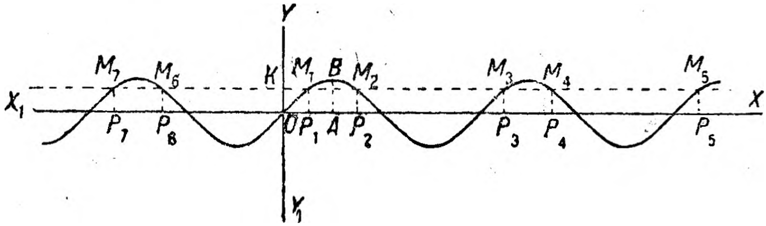
Отрезок AB этого перпендикуляра до пересечения с кривой дает графическое изображение значения синуса данного угла. Какова бы ни была величина угла, соответствующий ему перпендикуляр (AB, A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3,. . .) пересечет кривую лишь в одной точке, т. е. предложенная задача имеет одно и только одно решение.

Теперь перейдем к рассмотрению задачи: определить величину угла, если дано значение его синуса.

Для решения задачи откладываем от начала координат по оси Y (черт. 76) отрезок OK, соответствующий заданному значению синуса, и проводим через точку K прямую, параллельную оси X.

Очевидно, эта прямая будет пересекать нашу кривую (или будет касаться ее)[1]) в бесконечном ряде точек M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7, . . . , соответственно чему найдется бесчисленное множество решений предложенной задачи, которой будут удовлетворять все углы, изображаемые отрезками OP_1, OP_2, OP_3, OP_4, OP_5, OP_6, OP_7, . . .

Итак, нахождение угла по заданному значению его синуса есть задача, неопределенная, т. е., имеющая бесчисленное множество решений.



Черт. 76.

Аналогичными рассуждениями мы пришли бы к такому же выводу и для косинуса, тангенса, вообще для любой из шести тригонометрических функций. Следовательно, мы можем сделать общий вывод, что нахождение угла по заданному значению какой-нибудь его тригонометрической функции есть задача неопределенная, т. е. имеющая бесчисленное множество решений.

---

[1]) Если $OK < AB$, т. е. заданное значение синуса по абсолютной величине меньше единицы, то проведенная прямая будет пересекать кривую в бесчисленном множестве точек, если же $OK = AB$, т. е. заданное значение синуса равно по абсолютной величине единице, то проведенная прямая будет касаться кривой в бесчисленном множестве точек.

Для возможности задачи абсолютная величина данного значения синуса, выражаемого отрезком OK, должна быть, разумеется, меньше (или равна) единицы, принимая отрезок AB, как значение синуса угла в 90°, за единицу меры.

ГЛАВА XI

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ ОДНОГО И ТОГО ЖЕ УГЛА

§ 96. В § 12 выведены формулы

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \quad \text{и} \quad \frac{\sin A}{\cos A} = \operatorname{tg} A,$$

выражающие основные зависимости между тригонометрическими функциями одного и того же острого угла.

Здесь мы покажем, что эти формулы имеют место для угла любой четверти.

Кроме того, в этой главе из этих формул будут выведены как следствия другие формулы, выражающие зависимости между тригонометрическими функциями одного и того же угла.

Затем в этой главе будут показаны разнообразные применения всех этих формул.

§ 97. Для всякого угла сумма квадратов синуса и косинуса равна единице, т. е.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1. \tag{1}$$

Будем вести доказательство этого предложения для произвольного угла любой четверти.

Пусть α есть какой-нибудь угол любой из четырех четвертей (черт. 64 — 67). На основании определений будем иметь:

$$\sin \alpha = \pm \frac{DC}{R} \quad \text{и} \quad \cos \alpha = \pm \frac{OD}{R},$$

причем знак $+$ или $-$ берется в зависимости от четверти.

Однако в данном случае знак не играет никакой роли, так как при возведении в квадрат все равно получим положительное значение.

Возведя в квадрат, получим

$$\sin^2 \alpha = \left(\frac{DC}{R}\right)^2 \quad \text{и} \quad \cos^2 \alpha = \left(\frac{OD}{R}\right)^2.$$

Складывая почленно эти равенства, получим

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{DC}{R}\right)^2 + \left(\frac{OD}{R}\right)^2$$

или

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{DC^2 + OD^2}{R^2}.$$

Но по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника OCD (черт. 64 — 67) получим

$$DC^2 + OD^2 = OC^2 = R^2,$$

а потому

$$\frac{DC^2 + OD^2}{R^2} = \frac{R^2}{R^2} = 1.$$

Следовательно, окончательно получим

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$$

§ 98. Для всякого угла отношение его синуса к косинусу равно тангенсу, т. е.

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha.$$

Будем вести доказательство этого предложения для произвольного угла любой четверти.

Пусть α есть какой-нибудь угол любой из четырех четвертей (черт. 64 — 67). На основании определения будем иметь:

$$\sin\alpha=\pm\frac{DC}{R},\quad \cos\alpha=\pm\frac{OD}{R},\quad \operatorname{tg}\alpha=\pm\frac{AE}{R},$$

причем $+$ или $-$ будет в зависимости от четверти.

Заметим, что дробь $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ имеет положительное значение, когда $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ имеют одинаковые знаки, т. е. в первой и третьей четвертях, и отрицательное значение, когда $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ имеют разные знаки, т. е. во второй и четвертой четвертях. С другой стороны, и $\operatorname{tg}\alpha$ имеет положительное значение в первой и третьей четвертях и отрицательное значение — во второй и четвертой четвертях.

Таким образом оказывается, что отношение $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ имеет всегда тот же знак, что и $\operatorname{tg}\alpha$, независимо от того, какой четверти угол α.

Обратимся теперь к абсолютным значениям выражений $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ и $\operatorname{tg}\alpha$, т. е. при дальнейших выкладках отбросим знаки.

Из равенств

$$\sin\alpha=\frac{DC}{R}\quad\text{и}\quad\cos\alpha=\frac{OD}{R}$$

путем деления первого на второе получим:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{DC}{R}:\frac{OD}{R}=\frac{DC}{OD};$$

но из подобия треугольников ODC и OAE (черт. 64 — 67) находим:

$$\frac{DC}{OD}=\frac{AE}{OA}.$$

Так как

$$\frac{DC}{OD}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\quad\text{и}\quad\frac{AE}{OA}=\frac{AE}{R}=\operatorname{tg}\alpha,$$

окончательно получим

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha.$$

Пример 1. Найти $\cos x$, если $\sin x=\frac{3}{7}$.

Из равенства

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

получаем

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \left(\frac{3}{7}\right)^2 = 1 - \frac{9}{49} = \frac{40}{49},$$

откуда

$$\cos x = \pm\sqrt{\frac{40}{49}} = \pm\frac{2}{7}\sqrt{10}\ ^{1)}.$$

Пример 2. Зная, что $\sec a = \frac{13}{5}$, найти $\operatorname{cosec} a$.

Вместо значения $\operatorname{cosec} a$ мы будем искать значение $\sin a$, причем учтем, что $\cos a = \frac{5}{13}$:

$$\sin^2 a = 1 - \cos^2 a = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169},$$

откуда

$$\sin a = \pm\sqrt{\frac{144}{169}} = \pm\frac{12}{13}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{cosec} a = \frac{1}{\sin a} = \pm\frac{13}{12}.$$

Пример 3. Зная, что $\sin x = \frac{2}{3}$, найти $\operatorname{tg} x$.

Определяем сначала $\cos x$:

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9},$$

откуда

$$\cos x = \pm\frac{\sqrt{5}}{3},$$

после чего находим

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \pm\frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}} = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

§ 99. Из формул

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \tag{1}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \tag{2}$$

легко получить соотношения:

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x; \quad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x; \tag{1a}$$

$$\operatorname{tg} x \cdot \cos x = \sin x; \tag{2a}$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}\ ^{2)}. \tag{2б}$$

---

[1]) Значение двойного знака здесь и ниже будет объяснено в § 122.

[2]) Формула (2б) вытекает из того, что котангенс определяется равенством $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$.

Часто приходится пользоваться еще одним следствием из формул (1) и (2) и притом далеко не столь очевидным, как приведенные выше, а именно формулой:

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x .$$

Формула эта выводится так.

Разделив почленно формулу (1) на $\cos^2 x$, получим

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} . \tag{A}$$

Но

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x \quad \text{и} \quad \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x .$$

Поэтому равенство (A) можно переписать так:

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x . \tag{3}$$

По своему внешнему виду эта формула мало напоминает формулы (1) и (2), однако, как мы видели из самого ее вывода, она является лишь простым следствием их.

Выведем еще одну формулу.

Разделив почленно формулу (1) на $\sin^2 x$, получим

$$\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} . \tag{B}$$

Но

$$\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \operatorname{ctg}^2 x \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sin^2 x} = \operatorname{cosec}^2 x.$$

Поэтому равенство (B) можно переписать так:

$$1 + \operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x. \tag{3a}$$

Часто приходится пользоваться формулами (3) и (3a) в следующем виде:

$$\sec^2 x - 1 = \operatorname{tg}^2 x \quad \text{и} \quad \sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x = 1 ;$$

$$\operatorname{cosec}^2 x - 1 = \operatorname{ctg}^2 x \quad \text{и} \quad \operatorname{cosec}^2 x - \operatorname{ctg}^2 x = 1.$$

Пример. Дано $\operatorname{ctg} a = \frac{7}{5}$; найти $\sin a$.

По формуле (3a) имеем

$$\operatorname{cosec}^2 a = 1 + \operatorname{ctg}^2 a = 1 + \left(\frac{7}{5}\right)^2 = 1 + \frac{49}{25} = \frac{74}{25},$$

откуда

$$\operatorname{cosec} a = \pm \frac{\sqrt{74}}{5},$$

а потому

$$\sin a = \frac{1}{\operatorname{cosec} a} = \pm \frac{5}{\sqrt{74}} = \pm \frac{5}{74}\sqrt{74} .$$

Вычисление значений всех тригонометрических функций по данному значению одной из них

§ 100. При помощи выведенных формул легко по заданному значению какой-нибудь одной из тригонометрических функций угла определить значение всех остальных тригонометрических функций того же угла.

Пример 1. Дано значение синуса угла. Вычислить значение всех остальных тригонометрических функций того же угла.

Пусть, например:

$$\sin x = \frac{12}{13}.$$

Из формулы (1) имеем

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169},$$

откуда

$$\cos x = \pm \frac{5}{13}.$$

Теперь по формуле (2) находим

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{12}{13}}{\pm \frac{5}{13}} = \pm \frac{12}{5}.$$

Значения остальных тригонометрических функций получаются как обратные найденным уже значениям. А именно:

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \pm \frac{5}{12}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x} = \pm \frac{13}{5}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} = \frac{13}{12}.$$

Пример 2. Дано значение косинуса угла. Вычислить значения всех остальных тригонометрических функций того же угла.

Пусть, например:

$$\cos x = \frac{5}{7}.$$

Из формулы (1) имеем

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{5}{7}\right)^2 = 1 - \frac{25}{49} = \frac{24}{49},$$

откуда

$$\sin x = \pm \frac{\sqrt{24}}{7} = \pm \frac{2}{7}\sqrt{6}.$$

Теперь формула (2) дает

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\pm \frac{2}{7}\sqrt{6}}{\frac{5}{7}} = \pm \frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

Затем находим:

$$\operatorname{ctg} x = \pm \frac{5}{12}\sqrt{6}; \quad \sec x = \frac{7}{5}; \quad \operatorname{cosec} x = \pm \frac{7}{12}\sqrt{6}.$$

Пример 3. Дано значение тангенса угла. Вычислить значения всех остальных тригонометрических функций того же угла.

Пусть, например:

$$\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}.$$

В этом случае удобнее всего воспользоваться формулой (3), из которой сразу определяется $\sec x$:

$$\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16},$$

откуда

$$\sec x = \pm \frac{5}{4},$$

а следовательно:

$$\cos x = \pm \frac{4}{5}.$$

Для нахождения $\sin x$ удобнее всего взять формулу (2а) [1]:

$$\sin x = \operatorname{tg} x \cdot \cos x = \frac{3}{4}\left(\pm \frac{4}{5}\right) = \pm \frac{3}{5}.$$

Теперь вычисляем значения $\operatorname{ctg} x$ и $\operatorname{cosec} x$:

$$\operatorname{ctg} x = \frac{4}{3} \quad \text{и} \quad \operatorname{cosec} x = \pm \frac{5}{3}.$$

Пример 4. Если дано значение котангенса, секанса или косеканса угла, то сперва находят значение соответственно тангенса, косинуса или синуса, после чего задача приводится к одной из рассмотренных выше.

Например, пусть дано $\operatorname{ctg} x = 3$.

Тогда

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{3}.$$

По формуле (3) находим:

$$\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 + \frac{1}{9} = \frac{10}{9},$$

откуда

$$\sec x = \pm \frac{\sqrt{10}}{3},$$

а следовательно:

$$\cos x = \pm \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Далее из формулы (2*а*):

$$\sin x = \operatorname{tg} x \cdot \cos x = \frac{1}{3}\left(\pm \frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \pm \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Наконец

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} = \pm \sqrt{10}.$$

---

[1] Можно применить и формулу (1), но это потребует более сложных вычислений (извлечение корня).

Примеры для упражнений

§ 101. Определить значения всех тригонометрических функций угла, если дано:

1. $\sin x = \frac{2}{3}$.	*Ответ.*	$\operatorname{tg} x = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$,	и т. д.
2. $\cos x = \frac{15}{17}$.	"	$\operatorname{ctg} x = \pm \frac{15}{8}$,	"
3. $\operatorname{tg} x = 2\frac{1}{3}$.	"	$\sin x = \pm \frac{7}{\sqrt{58}}$,	"
4. $\operatorname{ctg} x = \sqrt{\frac{7}{8}}$.	"	$\cos x = \pm \sqrt{\frac{7}{15}}$,	"
5. $\sec x = \frac{41}{40}$.	"	$\sin x = \pm \frac{9}{41}$,	"
6. $\operatorname{cosec} x = \frac{7}{4}$.	"	$\cos x = \pm \frac{\sqrt{33}}{7}$,	"
7. $\sin a = \frac{m}{n}$.	"	$\operatorname{tg} a = \pm \frac{m}{\sqrt{n^2 - m^2}}$,	"
8. $\cos y = \frac{7}{25}$.	"	$\operatorname{tg} y = \pm \frac{24}{7}$,	"
9. $\operatorname{tg} z = \frac{2pq}{p^2 - q^2}$.	"	$\sin z = \pm \frac{2pq}{p^2 + q^2}$,	"
10. $\operatorname{ctg} B = \frac{\sqrt{q^2 - p^2}}{p}$.	"	$\sin B = \pm \frac{p}{q}$,	"
11. $\sec x = \frac{k}{l}$.	"	$\operatorname{tg} x = \pm \frac{\sqrt{k^2 - l^2}}{l}$,	"
12. $\operatorname{cosec} x = \frac{m^2 + 1}{2m}$.	"	$\operatorname{tg} x = \pm \frac{2m}{m^2 - 1}$.	"

Выражение любой тригонометрической функции через любую из остальных

§ 102. Чтобы выразить одни тригонометрические функции через другие, пользуются формулами (1—3).

Пример 1. Выразить $\sin x$ через $\operatorname{tg} x$.

Придерживаясь совершенно того же метода, как в § 100 (пример 3), пишем:

$$\sec x = \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

откуда

$$\cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}},$$

после чего на основании формулы (2а) имеем

$$\sin x = \operatorname{tg} x \cdot \cos x = \pm \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}.$$

Пример 2. Выразить $\sec y$ через $\sin y$.

Каждая тригонометрическая функция, выраженная через каждую из остальных

Выразить функции: \ Через функции:	$\sin a$	$\cos a$	$\operatorname{tg} a$	$\operatorname{ctg} a$	$\sec a$	$\operatorname{cosec} a$
$\sin a$	—	$\pm\sqrt{1-\cos^2 a}$	$\pm\dfrac{\operatorname{tg} a}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}}$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 a}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{\sec^2 a-1}}{\sec a}$	$\dfrac{1}{\operatorname{cosec} a}$
$\cos a$	$\pm\sqrt{1-\sin^2 a}$	—	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}}$	$\pm\dfrac{\operatorname{ctg} a}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 a}}$	$\dfrac{1}{\sec a}$	$\pm\dfrac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 a-1}}{\operatorname{cosec} a}$
$\operatorname{tg} a$	$\pm\dfrac{\sin a}{\sqrt{1-\sin^2 a}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\cos^2 a}}{\cos a}$	—	$\dfrac{1}{\operatorname{ctg} a}$	$\pm\sqrt{\sec^2 a-1}$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 a-1}}$
$\operatorname{ctg} a$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\sin^2 a}}{\sin a}$	$\pm\dfrac{\cos a}{\sqrt{1-\cos^2 a}}$	$\dfrac{1}{\operatorname{tg} a}$	—	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{\sec^2 a-1}}$	$\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2 a-1}$
$\sec a$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 a}}$	$\dfrac{1}{\cos a}$	$\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}$	$\pm\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 a}}{\operatorname{ctg} a}$	—	$\pm\dfrac{\operatorname{cosec} a}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 a-1}}$
$\operatorname{cosec} a$	$\dfrac{1}{\sin a}$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2 a}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}}{\operatorname{tg} a}$	$\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 a}$	$\pm\dfrac{\sec a}{\sqrt{\sec^2 a-1}}$	—

По формуле (1) имеем

$$\cos y = \pm\sqrt{1-\sin^2 y},$$

после чего находим

$$\sec y = \frac{1}{\cos y} = \pm\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}.$$

Так как на решении подобного рода примеров учащиеся могут приобрести навыки в пользовании тригонометрическими формулами, то рекомендуется в порядке упражнения выразить каждую тригонометрическую функцию поочередно через каждую из остальных и сверить полученные результаты с табл. на стр. 91.

Выражения, помещенные в этой таблице в одной и той же строке, тождественно равны друг другу и представляют выражения одной и той же тригонометрической функции поочередно через каждую из остальных. Так, например, третья строка дает выражение тангенса угла последовательно через синус, косинус и т. д. того же угла.

Тождественные преобразования тригонометрических выражений

§ 103. Формулы предыдущих параграфов применяются для тождественного преобразования тригонометрических выражений, для доказательства тригонометрических тождеств и для решения тригонометрических уравнений.

Прежде всего мы покажем здесь некоторые приемы тождественного преобразования тригонометрических выражений.

Пример 1. Преобразовать выражение $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha$ для упрощения его [1]).

Так как

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,$$

то имеем

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha=1+\operatorname{tg}^2\alpha.$$

Но на основании формулы (3):

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha.$$

Следовательно, имеем окончательно:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha.$$

Пример 2. Упростить выражение $\sec^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha$.

Пользуясь сначала формулой

$$\sec^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha=1,$$

полученной из формулы $\operatorname{tg}^2\alpha+1=\sec^2\alpha$, а затем формулой

$$1-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha,$$

полученной из формулы $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, будем последовательно иметь:

$$\sec^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=1-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha.$$

---

[1]) То есть уменьшить в выражении число тригонометрических функций или преобразовать его так, чтобы оно имело более простой вид.

Пример 3. Упростить выражение $\sin^4 x - \cos^4 x$.

Пользуясь сначала формулой разности квадратов, получим

$$\sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x).$$

Так как $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, имеем окончательно:

$$\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 x - \cos^2 x.$$

Пример 4. Упростить выражение $\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sec\alpha + \operatorname{cosec}\alpha}$.

Заменяем $\sec\alpha$ через $\frac{1}{\cos\alpha}$ и $\operatorname{cosec}\alpha$ через $\frac{1}{\sin\alpha}$:

$$\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\sin\alpha}}.$$

Чтобы уничтожить „трехэтажность" дроби, умножаем ее числителя и знаменателя на произведение $(\sin\alpha\cos\alpha)$. Получаем

$$\frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha},$$

а по сокращении дроби получаем

$$\sin\alpha\cos\alpha.$$

Таким образом окончательно имеем

$$\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sec\alpha + \operatorname{cosec}\alpha} = \sin\alpha\cos\alpha.$$

Последовательная запись решения данного примера ведется так:

$$\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sec\alpha + \operatorname{cosec}\alpha} = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\sin\alpha}} = \frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \sin\alpha\cos\alpha.$$

Примеры для упражнений

§ 104. Упростить выражения (1 — 23).

1. $1 - \sin^2\alpha$;
2. $1 - \cos^2\alpha$;
3. $\frac{1-\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$;
4. $\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}$;
5. $\frac{\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$;
6. $\operatorname{tg}^2\alpha(1-\sin^2\alpha)$;
7. $\frac{1-\cos^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha}$;
8. $(\sec^2\alpha - 1)(1-\sin^2\alpha)$;
9. $(1-\cos^2\alpha)(1-\operatorname{cosec}^2\alpha)$;
10. $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}$;
11. $\frac{\sin\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cosec}\alpha}$;
12. $\frac{1+\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\frac{1+\sec\alpha}{1+\operatorname{cosec}\alpha}$;
13. $\frac{1-\sin\alpha}{1-\cos\alpha}:\frac{1+\sec\alpha}{1+\operatorname{cosec}\alpha}$;
14. $\frac{\sec\alpha\operatorname{ctg}\alpha - \cos\alpha\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$;
15. $\frac{1-\cos^2\alpha}{1-\sec^2\alpha} + \frac{1-\sin^2\alpha}{1-\operatorname{cosec}^2\alpha}$;
16. $\sec\alpha(\operatorname{cosec}\alpha - \sin\alpha)$;

17. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}+\dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{\operatorname{ctg}\alpha}$;

18. $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}+\dfrac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$;

19. $\sin\alpha\cos\alpha(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)$;

20. $\sec^2\alpha(\operatorname{cosec}^2\alpha-1)$;

21. $(\sin\alpha-\operatorname{cosec}\alpha)\cdot(\cos\alpha-\sin\alpha)$;

22 $\sin\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha)+\cos\alpha(1+\operatorname{ctg}\alpha)$;

23. $\sin^3\alpha(1+\operatorname{ctg}\alpha)+\cos^3\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha)$.

Доказательство тригонометрических тождеств

§ 105. *Тригонометрическим тождеством* называется вообще всякое равенство, связывающее тригонометрические функции одного и того же угла или нескольких различных углов и остающееся верным при всех значениях этих углов.

Простейшими примерами тригонометрических тождеств могут служить все выведенные нами формулы, например:

$$\operatorname{ctg}x=\frac{\cos x}{\sin x},\quad 1+\operatorname{tg}^2y=\sec^2y.$$

Под термином „доказать тождество“ понимается требование, доказать, что левая и правая части тождества представляют тождественно равные выражения.

Пример 1. Доказать тождество $\sec^2x+\operatorname{cosec}^2x=\sec^2x\operatorname{cosec}^2x$.

Заменяем $\sec x$ и $\operatorname{cosec}x$ в преобразуемой (левой) части соответственно через $\dfrac{1}{\cos x}$ и $\dfrac{1}{\sin x}$:

$$\sec^2x+\operatorname{cosec}^2x=\frac{1}{\cos^2x}+\frac{1}{\sin^2x}=\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\cos^2x\cdot\sin^2x}=\frac{1}{\cos^2x}\cdot\frac{1}{\sin^2x}=$$
$$=\sec^2x\operatorname{cosec}^2x.$$

Пример 2. Доказать тождество

$$(\cos x-\sin x)(\operatorname{cosec}x-\sec x)=\sec x\operatorname{cosec}x-2.$$

Выражаем в преобразуемой (левой) части $\sec x$ и $\operatorname{cosec}x$ соответственно через $\cos x$ и $\sin x$:

$$(\cos x-\sin x)(\operatorname{cosec}x-\sec x)=(\cos x-\sin x)\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\cos x}\right)=$$
$$=(\cos x-\sin x)\frac{\cos x-\sin x}{\sin x\cos x}=\frac{(\cos x-\sin x)^2}{\sin x\cos x}=$$
$$=\frac{\cos^2x+\sin^2x-2\cos x\sin x}{\sin x\cos x}=\frac{1-2\cos x\sin x}{\sin x\cos x};$$

путем почленного деления, т. е. деля на знаменатель каждый член числителя в отдельности, получаем

$$\frac{1}{\sin x\cos x}-\frac{2\sin x\cos x}{\sin x\cos x}=\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{1}{\cos x}-2=\operatorname{cosec}x\sec x-2.$$

Пример 3. Доказать тождество:

$$\operatorname{ctg} a + \frac{\sin a}{1+\cos a} = \operatorname{cosec} a .$$

Заменяем в левой части $\operatorname{ctg} a$ через $\frac{\cos a}{\sin a}$:

$$\operatorname{ctg} a + \frac{\sin a}{1+\cos a} = \frac{\cos a}{\sin a} + \frac{\sin a}{1+\cos a} = \frac{\cos a + \cos^2 a + \sin^2 a}{\sin a\,(1+\cos a)} =$$

$$= \frac{\cos a + 1}{\sin a\,(\cos a + 1)} = \frac{1}{\sin a} = \operatorname{cosec} a .$$

Пример 4. Доказать тождество

$$\frac{1 - \sin a \cdot \cos a}{\cos a\,(\sec a - \operatorname{cosec} a)} \cdot \frac{\sin^2 a - \cos^2 a}{\sin^3 a + \cos^3 a} = \sin a .$$

Выражаем $\sec a$ и $\operatorname{cosec} a$ соответственно через $\cos a$ и $\sin a$ и в то же время разлагаем на множители разность квадратов и сумму кубов синуса и косинуса:

$$\frac{1 - \sin a \cos a}{\cos a\,(\sec a - \operatorname{cosec} a)} \cdot \frac{\sin^2 a - \cos^2 a}{\sin^3 a + \cos^3 a} =$$

$$= \frac{1 - \sin a \cdot \cos a}{\cos a \left(\frac{1}{\cos a} - \frac{1}{\sin a}\right)} \cdot \frac{(\sin a + \cos a)(\sin a - \cos a)}{(\sin a + \cos a)(\sin^2 a - \sin a \cos a + \cos^2 a)} =$$

$$= \frac{(1 - \sin a \cos a) \cos a \sin a}{\cos a\,(\sin a - \cos a)} \cdot \frac{\sin a - \cos a}{1 - \sin a \cos a} = \sin a .$$

Пример 5. Доказать тождество

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha} = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\beta.$$

Так как в обе части равенства не входят другие функции, кроме тангенса и котангенса, то в данном случае можно не выражать их через синусы и косинусы, а делать все преобразование в тангенсах и котангенсах.

Выбираем для преобразования левую часть и, руководствуясь правой, заключаем, что $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\beta$ следует оставить без изменения, а $\operatorname{tg}\beta$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, как не входящие в правую часть, надо заменить соответственно через $\frac{1}{\operatorname{ctg}\beta}$ и $\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, после чего получим:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta\,^{1)}}{\frac{1}{\operatorname{ctg}\beta} - \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}} = \frac{(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta) \operatorname{ctg}\beta \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta} = \operatorname{ctg}\beta \operatorname{tg}\alpha .$$

Примеры для упражнений

§ 106. Доказать тождества (1 — 11):

1. $(\operatorname{ctg} x - 1)^2 + (\operatorname{ctg} x + 1)^2 = 2 \operatorname{cosec}^2 x$;
2. $\sin^2 A\,(1 + \operatorname{ctg}^2 A) + \cos^2 A\,(1 + \operatorname{tg}^2 A) = 2$;

---

[1]) Умножаем числитель и знаменатель трехэтажной дроби на $(\operatorname{ctg}\beta \operatorname{tg}\alpha)$, чтобы привести ее к нормальному виду.

3. $(\sec x + \operatorname{cosec} x)(\sin x + \cos x) = \sec x \cdot \operatorname{cosec} x + 2$;
4. $(\sec^2 y + \operatorname{tg}^2 y)(\operatorname{cosec}^2 y + \operatorname{ctg}^2 y) = 1 + 2\sec^2 y \operatorname{cosec}^2 y$;
5. $\dfrac{2\sin x \cos x - \cos^2 x}{1 - \sin x + \sin^2 x - \cos^2 x} = \operatorname{ctg} x$;
6. $\operatorname{cosec}^2 A - \operatorname{ctg} A \cos A \operatorname{cosec} A - 1 = 0$;
7. $(\operatorname{tg} x + 2)(2\operatorname{tg} x + 1) = 5\operatorname{tg} x + 2\sec^2 x$;
8. $\sin^2\alpha \sec^2\beta + \operatorname{tg}^2\beta \cos^2\alpha = \sin^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta$;
9. $(1 + \operatorname{tg}\alpha)^2 + (1 + \operatorname{ctg}\alpha)^2 = (\sec\alpha + \operatorname{cosec}\alpha)^2$;
10. $\sin^2\alpha \cos^2\beta - \cos^2\alpha \sin^2\beta = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$;
11. $\sin^2\alpha \cos^2\beta - \cos^2\alpha \sin^2\beta = \cos^2\beta - \cos^2\alpha$.

Тригонометрические уравнения

§ 107. В предыдущих параграфах мы показали применение формул зависимостей между тригонометрическими функциями одного и того же угла для решения задач на тождественное преобразование тригонометрических выражений и на доказательство тригонометрических тождеств.

Здесь мы покажем другое приложение этих формул, а именно применение их для решения тригонометрических уравнений.

Тригонометрическим уравнением называется такое уравнение, в котором неизвестное находится под знаком тригонометрической функции: служит ее аргументом или входит в состав ее аргумента.

Таковы, например, уравнения:

$$2\sin^2 x + 3\cos x = 0,$$

где неизвестное x служит аргументом функций $\sin x$ и $\cos x$;

$$\sin 6x + \sin 4x + \sin 2x = 0,$$

где неизвестное x входит в состав аргумента функций $\sin 6x$, $\sin 4x$ и $\sin 2x$;

$$\sin 9x + \sin 5x + 2\sin^2 x = 1,$$

где неизвестное x служит аргументом функции $\sin x$ и входит в состав аргумента функций $\cos 9x$ и $\sin 5x$.

Решить тригонометрическое уравнение значит найти все значения неизвестного, при которых данное уравнение обращается в тождество; эти значения неизвестного называются *корнями уравнения.*

Чтобы решить тригонометрическое уравнение, т. е. найти значения неизвестного, удовлетворяющие данному уравнению, надо прежде всего определить из данного уравнения значение какой-нибудь тригонометрической функции, аргумент которой является искомым неизвестным или содержит его в своем составе. По найденному значению этой тригонометрической функции мы уже найдем аргумент ее (обыкновенно с помощью таблиц).

Один из наиболее удобных приемов решения тригонометрических уравнений состоит в том, что все тригонометрические функции, под знаком которых неизвестное находится, выражают через одну из них, а затем, приняв эту функцию за вспомогательное неизвестное, решают данное уравнение относительно этой функции как алгебраическое уравнение. При исследовании полученного ответа отбрасываем те решения, которые не могут служить значениями определяемой функции, т. е. противоречат природе этой функции.

Отнеся вопрос о полном решении тригонометрических уравнений на более позднее время (глава XXVI), мы здесь ограничимся лишь определением из данных уравнений значений какой-нибудь тригонометрической функции, для которой неизвестное служит ее аргументом или которая содержит в составе своего аргумента это неизвестное.

Само собою разумеется что совершенно невозможно дать какие-нибудь универсальные правила, руководствуясь которыми можно было бы решать любое тригонометрическое уравнение. Однако все же существуют некоторые общие приемы, руководствуясь которыми можно часто найти путь к решению тригонометрических уравнений более или менее обычных типов.

К показу этих способов на отдельных примерах мы теперь и переходим.

Пример 1. $\sin^2 x - 3 = 2\sin x$.

Легко заметить, что относительно $\sin x$ как неизвестного данное уравнение представляет алгебраическое уравнение и именно квадратное.

Решая его как квадратное уравнение относительно $\sin x$, находим два корня:

$$\sin x = -1 \quad \text{и} \quad \sin x = 3.$$

Второй корень нашего квадратного уравнения, однако, не может служить значением синуса, а потому мы его отбрасываем и, следовательно, остается одно решение:

$$\sin x = -1.$$

Пример 2. $\sin^2 x + \cos x = 0$.

Исключая $\sin x$ путем замены $\sin^2 x$ через $(1 - \cos^2 x)$, получаем

$$1 - \cos^2 x + \cos x = 0.$$

Решая это уравнение относительно $\cos x$ как обычное квадратное уравнение, получаем два корня:

$$\cos x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{и} \quad \cos x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Второе значение $\cos x$ невозможно (так как превышает единицу).

Пример 3. $2\sin^2 x + 4\cos^2 x = 3$.

Исключая из уравнения одну из двух тригонометрических функций например $\cos x$, путем замены $\cos^2 x$ через $(1 - \sin^2 x)$, получаем

$$2\sin^2 x + 4(1 - \sin^2 x) = 3.$$

Относительно $\sin x$ это уравнение является алгебраическим, которое и решаем обычным путем.

$$2\sin^2 x + 4 - 4\sin^2 x = 3; \quad 2\sin^2 x = 1,$$

или

$$\sin^2 x = \frac{1}{2},$$

откуда

$$\sin x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Пример 4. $4\operatorname{tg}^2 x = 3\operatorname{tg} x$.

Переноса все члены уравнения в одну часть, получим

$$4\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x = 0.$$

Выносим за скобку $\operatorname{tg} x$:

$$\operatorname{tg} x\,(4\operatorname{tg} x - 3) = 0.$$

Последнее уравнение распадается на два:

$$\operatorname{tg} x = 0 \quad \text{и} \quad 4\operatorname{tg} x - 3 = 0.$$

Из второго уравнения имеем

$$\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}.$$

Итак, имеем

$$\operatorname{tg} x = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} x = \frac{3}{4}.$$

Пример 5. $2\cos^2 x = 3\sin x + 2$.

Переноса все члены уравнения в одну часть, получим

$$3\sin x + 2 - 2\cos^2 x = 0.$$

Выносим 2 за скобку:

$$3\sin x + 2\,(1 - \cos^2 x) = 0.$$

Заменяем $(1 - \cos^2 x)$ через $\sin^2 x$:

$$3\sin x + 2\sin^2 x = 0.$$

Выносим $\sin x$ за скобку:

$$\sin x\,(3 + 2\sin x) = 0.$$

Последнее уравнение распадается на два:

$$\sin x = 0 \quad \text{и} \quad 3 + 2\sin x = 0.$$

Второе уравнение дает:

$$\sin x = -\frac{3}{2} \text{ (невозможно).}$$

Остается одно решение данного уравнения:

$$\sin x = 0.$$

Пример 6. $\sin^2 x + 2\sin x\cos x = 3\cos^2 x$.

Делим обе части уравнения на $\cos^2 x$:

$$\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x = 3.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно $\operatorname{tg} x$, находим два решения:

$$\operatorname{tg} x = 1 \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} x = -3.$$

Примеры для упражнений

§ 108. Решить уравнения (1—9):

1. $\sin x = \cos x$;
2. $8 \sin x - 9 \cos x = 0$;
3. $4 \cos^2 x - 5 \sin^2 x = 0$;
4. $3 \sin^2 x + 4 \sin x \cos x = 2 \cos^2 x$;
5. $8 \sin^2 x + 6 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 4$;
6. $\operatorname{tg}^2 x + 10 = 7 \operatorname{tg} x$;
7. $2 \sin x \operatorname{tg} x = 1 - \cos x$;
8. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2$;
9. $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = 1$.

ГЛАВА XII

ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

§ 109. Какова бы ни была величина данного угла, всегда можно найти такой угол первой четверти, тригонометрические функции которого, по крайней мере по абсолютному значению, будут равны одноименным или дополнительным функциям данного угла. Что же касается их знаков, то они определяются согласно § 81.

Формулы, при помощи которых можно значение тригонометрической функции угла любой четверти заменить значением тригонометрической функции угла первой четверти, называются *формулами приведения*.

Если через α обозначим величину угла первой четверти, то угол второй четверти можно представить выражениями $(90° + \alpha)$ и $(180° - \alpha)$, угол третьей четверти — выражениями $(180° + \alpha)$ и $(270° - \alpha)$, угол четвертой четверти — выражениями $(270° + \alpha)$ и $(360° - \alpha)$.

Задача заключается в том, чтобы найти формулы приведения тригонометрических функций этих углов к тригонометрическим функциям угла α, т. е. найти формулы, выражающие каждую из шести тригонометрических функций указанных углов через какую-нибудь функцию угла α.

Так как равенство взаимно дополнительных функций взаимно дополнительных углов (§ 20) позволяет тригонометрические функции угла, превышающего 45°, привести к тригонометрическим функциям угла, меньшего 45°, то формулы, основанные на указанном свойстве взаимно дополнительных функций, также могут быть отнесены к формулам приведения.

Формулы приведения для угла $(90° - \alpha)$

§ 110. Пусть α и β — два взаимно дополнительных угла, т. е.

$$\alpha + \beta = 90°.$$

На основании § 20 имеем:

$$\sin\beta = \cos\alpha,$$
$$\cos\beta = \sin\alpha,$$
$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{ctg}\alpha,$$
$$\operatorname{ctg}\beta = \operatorname{tg}\alpha,$$
$$\sec\beta = \operatorname{cosec}\alpha,$$
$$\operatorname{cosec}\beta = \sec\alpha.$$

Но из равенства $\alpha + \beta = 90^\circ$ имеем $\beta = 90^\circ - \alpha$.

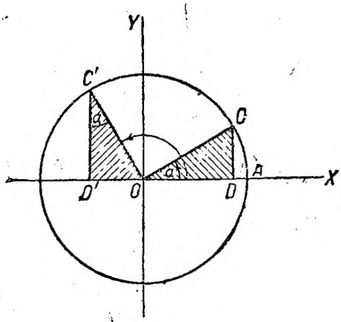
Сделав в вышеприведенных соотношениях подстановку $(90^\circ - \alpha)$ вместо β, получаем:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha,$$
$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha,$$
$$\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha,$$
$$\sec(90^\circ - \alpha) = \operatorname{cosec}\alpha,$$
$$\operatorname{cosec}(90^\circ - \alpha) = \sec\alpha.$$

Эти формулы (лишь в иной форме) выражают известные нам уже из § 20 соотношения между тригонометрическими функциями взаимно дополнительных углов (равенство взаимно дополнительных тригонометрических функций двух взаимно дополнительных углов).

Формулы приведения для угла $(90^\circ + \alpha)$

§ 111. Пусть $\angle AOC = \alpha$ (черт. 77). Проведем радиус OC', перпендикулярный к радиусу OC. Тогда, очевидно, $\angle AOC' = 90^\circ + \alpha$.



Черт. 77.

Опустим перпендикуляры CD и $C'D'$ и выпишем значения тригонометрических функций

для угла α	для угла $(90^\circ + \alpha)$
$\sin\alpha = \frac{DC}{R}$,	$\sin(90^\circ + \alpha) = \frac{D'C'}{R}$,
$\cos\alpha = \frac{OD}{R}$,	$\cos(90^\circ + \alpha) = -\frac{OD'}{R}$

Но треугольники OCD и $OC'D'$, имеющие по равной гипотенузе ($OC = OC' = R$) и равному острому углу ($\angle OC'D' = \angle COD$ вследствие перпендикулярности сторон), равны между собой, а потому $OD' = DC$ и $D'C' = OD$.

Следовательно, из сравнения выписанных значений тригонометрических функций углов $(90^\circ + \alpha)$ и α заключаем, что

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos\alpha, \quad \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin\alpha.$$

Из них делением первого равенства на второе получим

$$\operatorname{tg}(90^\circ+\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Для остальных тригонометрических функций, значения которых обратны значениям основных функций, получим

$$\operatorname{ctg}(90^\circ+\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha,$$
$$\sec(90^\circ+\alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha,$$
$$\operatorname{cosec}(90^\circ+\alpha) = \sec\alpha.$$

Пример. Найти значения основных тригонометрических функций 120°.

$$\sin 120^\circ = \sin(90^\circ+30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

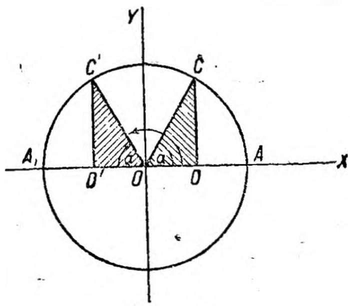
$$\cos 120^\circ = \cos(90^\circ+30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg} 120^\circ = \operatorname{tg}(90^\circ+30^\circ) = -\operatorname{ctg} 30^\circ = -\sqrt{3}.$$

Формулы приведения для угла (180° — α)

§ 112. Пусть $\angle AOC = \alpha$ (черт. 78). Для получения на чертеже угла $(180^\circ-\alpha)$ поступаем так: строим $\angle A_1OC' = \alpha$; тогда $\angle AOC'$, как смежный с ним, будет равен $(180^\circ-\alpha)$.

Опускаем перпендикуляры CD и $C'D'$ и выписываем значения тригонометрических функций:



Черт. 78.

для угла α для угла $(180^\circ-\alpha)$

$$\sin\alpha = \frac{DC}{R}, \quad \sin(180^\circ-\alpha) = \frac{D'C'}{R},$$

$$\cos\alpha = \frac{OD}{R}, \quad \cos(180^\circ-\alpha) = -\frac{OD'}{R}.$$

Но из очевидного равенства треугольников OCD и $OC'D'$ следует, что $D'C' = DC$ и $OD' = OD$, а потому из сравнения выписанных значений тригонометрических функций заключаем:

$$\sin(180^\circ-\alpha) = \sin\alpha, \quad \cos(180^\circ-\alpha) = -\cos\alpha.$$

Из них путем почленного деления получим

$$\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha.$$

Для остальных тригонометрических функций получим

$$\operatorname{ctg}(180^\circ-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha,$$
$$\sec(180^\circ-\alpha) = -\sec\alpha.$$
$$\operatorname{cosec}(180^\circ-\alpha) = \operatorname{cosec}\alpha$$

Пример. Определить значения основных тригонометрических функций 150°.

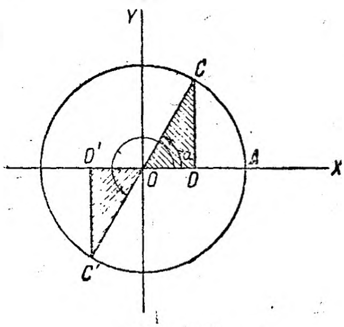
$$\sin 150° = \sin(180° - 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2},$$

$$\cos 150° = \cos(180° - 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 150° = \operatorname{tg}(180° - 30°) = -\operatorname{tg} 30° = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Формулы приведения для угла $(180° + \alpha)$

§ 113. Из черт. 79, построение которого вполне ясно, выписываем значения тригонометрических функций для $\angle AOC = \alpha$ и $\angle AOC' = 180° + \alpha$:



Черт. 79.

для угла α | для угла $(180° + \alpha)$

$$\sin\alpha = \frac{DC}{R}, \qquad \sin(180° + \alpha) = -\frac{D'C'}{R},$$

$$\cos\alpha = \frac{OD}{R}, \qquad \cos(180° + \alpha) = -\frac{OD'}{R}.$$

Так как из очевидного равенства треугольников OCD и $OC'D'$ следует, что $D'C' = DC$ и $OD' = OD$, то получаем

$$\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha,$$
$$\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha.$$

Из них путем деления получим

$$\operatorname{tg}(180° + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha.$$

Для остальных тригонометрических функций

$$\sec(180° + \alpha) = -\sec\alpha,$$
$$\operatorname{ctg}(180° + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha,$$
$$\operatorname{cosec}(180° + \alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha$$

Пример 1. Определить значения основных тригонометрических функций 225°.

$$\sin 225° = \sin(180° + 45°) = -\sin 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos 225° = \cos(180° + 45°) = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 225° = \operatorname{tg}(180° + 45°) = \operatorname{tg} 45° = 1.$$

Пример 2. Вычислить $\cos 240°$.

$$\cos 240° = \cos(180° + 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}.$$

Формулы приведения для угла $(270° - \alpha)$

§ 114. Пусть $\angle AOC = \alpha$ (черт. 80). Для получения на чертеже угла $(270° - \alpha)$ отсекаем от угла $270°$ $\angle B_1OC' = \alpha$. Тогда

$$\angle AOC' = 270° - \alpha.$$

Выписываем значения тригонометрических функций для $\angle AOC = \alpha$ и $\angle AOC' = 270° - \alpha$:

для угла α	для угла $(270° - \alpha)$
$\sin\alpha = \frac{DC}{R}$,	$\sin(270° - \alpha) = -\frac{D'C'}{R}$,
$\cos\alpha = \frac{OD}{R}$,	$\cos(270° - \alpha) = -\frac{OD'}{R}$.

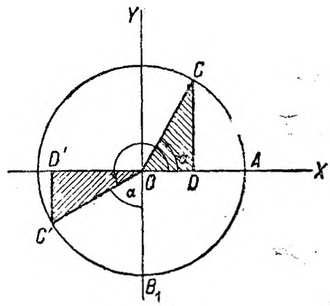
Но треугольники OCD и $OC'D'$ равны, а потому $D'C' = OD$ и $OD' = DC$.

Следовательно, из сравнения выписанных значений тригонометрических функций углов α и $(270° - \alpha)$ получаем

$$\sin(270° - \alpha) = -\cos\alpha,$$
$$\cos(270° - \alpha) = -\sin\alpha.$$

Из них путем деления получим

$$\operatorname{tg}(270° - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha.$$



Черт. 80.

Для остальных тригонометрических функций получим

$$\operatorname{ctg}(270° - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha,$$
$$\sec(270° - \alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha,$$
$$\operatorname{cosec}(270° - \alpha) = -\sec\alpha.$$

Пример 1. Определить значения тригонометрических функций 210°.

$$\sin 210° = \sin(270° - 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2},$$

$$\cos 210° = \cos(270° - 60°) = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 210° = \operatorname{tg}(270° - 60°) = \operatorname{ctg} 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Пример 2. Вычислить $\cos 252°$, если $\sin 18° = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$.

$$\cos 252° = \cos(270° - 18°) = -\sin 18° = -\frac{\sqrt{5} - 1}{4} = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}.$$

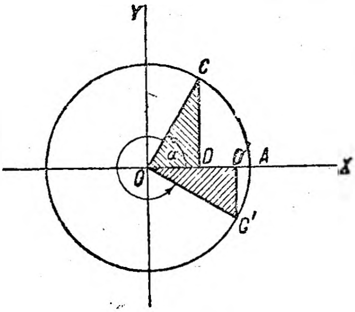
Формулы приведения для угла $(270° + \alpha)$

§ 115. Построение не представляет никаких затруднений. Из черт. 81 выписываем значения тригонометрических функций для $\angle AOC = \alpha$ и $\angle AOC' = 270° + \alpha$:

для угла α	для угла $(270° + \alpha)$
$\sin\alpha = \frac{DC}{R}$,	$\sin(270° + \alpha) = -\frac{D'C'}{R}$,
$\cos\alpha = \frac{OD}{R}$,	$\cos(270° + \alpha) = \frac{OD'}{R}$.

Но треугольники OCD и $OC'D'$ равны между собой, а потому

$$D'C' = OD \quad \text{и} \quad OD' = DC.$$



Черт. 81.

Следовательно, из сравнения выписанных значений тригонометрических функций углов α и $(270° + \alpha)$ получаем

$$\sin(270° + \alpha) = -\cos\alpha,$$
$$\cos(270° + \alpha) = \sin\alpha.$$

Из них путем деления получим

$$\operatorname{tg}(270° + \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Для остальных тригонометрических функций получим

$$\operatorname{ctg}(270° + \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha,$$
$$\sec(270° + \alpha) = \operatorname{cosec}\alpha,$$
$$\operatorname{cosec}(270° + \alpha) = -\sec\alpha.$$

Пример. Вычислить тригонометрические функции 300°.

$$\sin 300° = \sin(270° + 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 300° = \cos(270° + 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg} 300° = \operatorname{tg}(270° + 30°) = -\operatorname{ctg} 30° = -\sqrt{3}.$$

Формулы приведения для угла $(360° - \alpha)$

§ 116. Пусть $\angle AOC = \alpha$ и $\angle AOC' = 360° - \alpha$ (черт. 82). Выписываем значения тригонометрических функций этих углов:

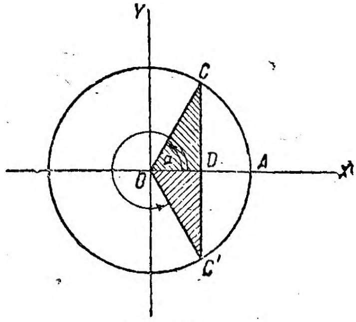
для угла α	для угла $(360° - \alpha)$
$\sin\alpha = \frac{DC}{R}$,	$\sin(360° - \alpha) = -\frac{DC'}{R}$,
$\cos\alpha = \frac{OD}{R}$,	$\cos(360° - \alpha) = \frac{OD}{R}$.

Но так как из очевидного равенства треугольников OCD и $OC'D$ следует, что $DC' = DC$, то из написанных равенств получаем

$$\sin(360° - \alpha) = -\sin\alpha,$$
$$\cos(360° - \alpha) = \cos\alpha.$$

Из них путем деления получим

$$\operatorname{tg}(360° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha.$$



Черт. 82.

Для остальных тригонометрических функций получим

$$\operatorname{ctg}(360° - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha,$$
$$\sec(360° - \alpha) = \sec\alpha,$$
$$\operatorname{cosec}(360° - \alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha.$$

Пример 1. Если $\sin 22°15' = m$, то чему равен $\sin 337°45'$?

$$\sin 337°45' = \sin(360° - 22°15') = -\sin 22°15' = -m.$$

Пример 2. Вычислить $\cos 330°$ и $\operatorname{ctg} 300°$.

$$\cos 330° = \cos(360° - 30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{ctg} 300° = \operatorname{ctg}(360° - 60°) = -\operatorname{ctg} 60° = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Правила приведения тригонометрических функций

§ 117. Все формулы приведения, выведенные в § 110—116, несмотря на их разнообразие, могут быть легко усвоены на основании легко запоминаемых правил, которые получаются из внимательного рассмотрения каждой группы формул.

Чтобы формулировать эти правила заметим сначала, что каждый из углов вида $90° \pm \alpha$, $180° \pm \alpha$, $270° \pm \alpha$ и $360° \pm \alpha$ можно представить одной формулой: $90° \cdot n \pm \alpha$, где n имеет одно из значений 1, 2, 3 и 4. Теперь мы можем высказать следующие правила:

1. Правило названий: если n есть число четное, то название приводимой тригонометрической функции не меняется; если n — нечетное, то название функции меняется на дополнительное.

2. Правило знаков: для углов вида $90 \cdot n + \alpha$ знак результата будет тот, который имеет заданная функция в $(n+1)$-ой [1]) четверти, а для углов вида $90 \cdot n - \alpha$ тот знак, который заданная функция имеет в n-ой четверти.

Примеры. Привести к углу α следующие функции:

а) $\sin(90° + \alpha)$, б) $\cos(270° - \alpha)$, в) $\operatorname{tg}(180° + \alpha)$.

---

[1]) При $n = 4$, $(n+1)$-ая четверть будет первой четвертью.

Рассуждаем так:

а) Угол $(90° + \alpha)$ мы рассматриваем как $(90° \cdot n + \alpha)$, где $n = 1$, число нечетное; следовательно, знак в правой части формулы будет плюс и функция меняет название на дополнительное, т. е. вместо синуса будет косинус, а потому

$$\sin(90° + \alpha) = + \cos\alpha.$$

б) Угол $(270° - \alpha)$ можно представить в виде $(90° \cdot n - \alpha)$, где $n = 3$ — число нечетное, а потому надо ставить знак минус и поменять название на дополнительное:

$$\cos(270° - \alpha) = - \sin\alpha.$$

в) Угол $(180° + \alpha)$ представляется в виде $(90° \cdot n + \alpha)$, при $n = 2$ — четном; следовательно,

$$\operatorname{tg}(180° + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha.$$

Для справок мы здесь приводим все формулы приведения в форме **таблицы**.

Формулы приведения

Функции / Углы	sin	cos	tg	ctg	sec	cosec
$90° - \alpha$	$+\cos\alpha$	$+\sin\alpha$	$+\operatorname{ctg}\alpha$	$+\operatorname{tg}\alpha$	$+\operatorname{cosec}\alpha$	$+\sec\alpha$
$90° + \alpha$	$+\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{cosec}\alpha$	$+\sec\alpha$
$180° - \alpha$	$+\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\sec\alpha$	$+\operatorname{cosec}\alpha$
$180° + \alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$+\operatorname{tg}\alpha$	$+\operatorname{ctg}\alpha$	$-\sec\alpha$	$-\operatorname{cosec}\alpha$
$270° - \alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$+\operatorname{ctg}\alpha$	$+\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{cosec}\alpha$	$-\sec\alpha$
$270° + \alpha$	$-\cos\alpha$	$+\sin\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$+\operatorname{cosec}\alpha$	$-\sec\alpha$
$360° - \alpha$	$-\sin\alpha$	$+\cos\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$+\sec\alpha$	$-\operatorname{cosec}\alpha$

Тригонометрические функции отрицательного угла

§ 118. До сих пор мы рассматривали тригонометрические функции только положительного угла. Перейдем теперь к рассмотрению тригонометрических функций отрицательного угла. Эти функции мы определим также, как мы это сделали в § 80. Именно, мы определим их, как отношения тригонометрических линий к радиусу, приписывая этим отношениям знак $+$, когда соответствующие линии имеют прямое расположение и знак $-$, когда они имеют обратное расположение. Между тригонометрическими функциями двух углов, равных по абсолютной величине, но противоположных по знаку существует связь.

Пусть угол AOC (черт. 83) образован вращением подвижного радиуса OC против движения часовой стрелки и потому положителен, а равный ему по абсолютной величине угол AOC_1 образован вращением подвижного радиуса OC в сторону движения часовой стрелки и потому отрицателен.

Проведем теперь тригонометрические линии обоих углов.

Замечая, что расположение тригонометрических линий DC, OD и AE является прямым, а линии DC_1 и AE_1 — обратным, имеем:

$$\text{для угла } \alpha \quad \sin\alpha = +\frac{DC}{R}, \quad \cos\alpha = +\frac{OD}{R}, \quad \operatorname{tg}\alpha = +\frac{AE}{R},$$

$$\text{для угла } (-\alpha) \quad \sin(-\alpha) = -\frac{DC_1}{R}, \quad \cos(-\alpha) = +\frac{OD}{R},$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\frac{AE_1}{R}.$$

Из равенства треугольников DOC и DOC_1 и треугольников AOE и AOE_1 видно, что

$$DC = DC_1 \quad \text{и} \quad AE = AE_1,$$

а потому, из сравнения значений одноименных функций углов (α) и $(-\alpha)$ находим:

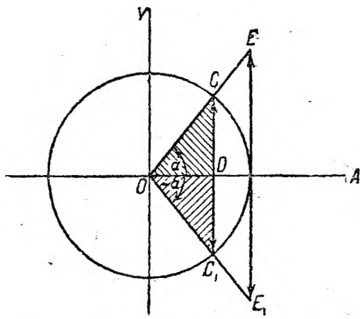
$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha; \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha; \quad \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha;$$

т. е. как синусы, так и тангенсы углов (α) и $(-\alpha)$ равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку, а косинусы углов (α) и $(-\alpha)$ равны как по абсолютной величине, так и по знаку.

Для остальных тригонометрических функций, значения которых обратны значениям первых трех функций, получим

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha; \quad \sec(-\alpha) = \sec\alpha;$$
$$\operatorname{cosec}(-\alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha.$$

Выведенные здесь формулы, которые служат для приведения тригонометрических функций отрицательного угла к положительному углу, по существу должны быть также отнесены к формулам приведения.



Черт. 83.

Замечание 1. Совершенно очевидно, что те же рассуждения, которыми мы пользовались здесь для вывода этих формул, могли быть применены и для случая, если бы угол α был взят не в первой четверти, а в любой другой четверти. Отсюда следует, что выведенные здесь формулы **остаются в силе для углов любой четверти.**

Замечание 2. Зная свойство периодичности (§ 92), мы заключаем, что формулы приведения отрицательных углов справедливы для углов любой величины. Так, $\sin(-1000°) = -\sin 1000°$, $\cos(-2375°) = \cos 2375°$.

Замечание 3. Просматривая вышеприведенные формулы, мы замечаем, что косинус и секанс не изменяют своих знаков от перемены знака угла, а все остальные функции (синус, тангенс, котангенс и косеканс) изменяют свои знаки на обратные от перемены знака угла.

Пример 1. Чему равны синус, косинус и тангенс угла $(-30°)$? Имеем

$$\sin(-30°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2}, \quad \cos(-30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg}(-30°) = -\operatorname{tg} 30° = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Пример 2. Вычислить:

а) $\operatorname{tg}(-45°)$, б) $-\operatorname{tg} 45°$, в) $-\operatorname{tg}(-45°)$,
г) $\cos(-60°)$, д) $-\cos 60°$, е) $-\cos(-60°)$.

Ответ. а) -1; б) -1; в) $+1$; г) $+\frac{1}{2}$; д) $-\frac{1}{2}$; е) $-\frac{1}{2}$.

Пример 3. Определить значения выражений:

а) $\sin(a-b)+\sin(b-a)$; б) $\operatorname{tg}(c-d)+\operatorname{tg}(d-c)$.

Так как разности $(a-b)$ и $(b-a)$ отличаются друг от друга только знаками [так же как и разности $(c-d)$ и $(d-c)$], а у таких углов синусы (и тангенсы) равны по величине и противоположны по знаку, то заключаем, что каждое из заданных выражений равно нулю.

Примеры для упражнений

§ 119. 1. Определить значения выражений:

а) $\cos(x-y)-\cos(y-x)$, б) $\cos(a-b-c)-\cos(b+c-a)$.

Ответ. Каждое выражение равно нулю.

2. Упростить выражение

$$\cos(a-b)+\sin(a-b)+\sin(b-a)+\cos(b-a).$$

Ответ. $2\cos(a-b)$ или $2\cos(b-a)$.

Упростить выражения (3 — 9):

3. $\sin 19° + \sin(-19°) - \cos 26° + \cos(-26°)$.
4. $\operatorname{tg}(x-a) + \operatorname{tg}(a-x) - \sin(x-y) - \sin(y-x)$.
5. $\sin(x+y-a) - \sin(a-x-y)$.
6. $\cos(x-y+z) - \cos(y-x-z)$.
7. $\operatorname{ctg}(a-x) - \operatorname{ctg}(x-a)$.
8. $\cos 52° - \cos 13° - \cos(-52°) - \sin 28° + \cos(-13°) - \sin(-28°)$.
9. $\cos 41° + \sin(-25°) + \cos(-41°) - \sin(-25°)$.

Приведение к углу первой четверти

§ 120. Пользуясь формулами приведения и свойством периодичности тригонометрических функций, мы можем свести нахождение значений тригонометрических функций какого угодно угла к нахождению значений тригонометрических функций некоторого острого угла (и даже угла, не бо́льшего 45°). Такая операция называется *приведением к углу первой четверти.*

Пример 1. Привести к углу первой четверти $\sin 1000^\circ$.

Делим 1000 на 360; получаем в частном 2 и в остатке 280, т. е.

$$1000^\circ = 360^\circ \cdot 2 + 280^\circ.$$

Следовательно,

$$\sin 1000^\circ = \sin (360^\circ \cdot 2 + 280^\circ).$$

Но $360^\circ \cdot 2$ есть удвоенный период, не имеющий влияния на значение тригонометрической функции угла, а потому его можно отбросить. Поэтому имеем

$$\sin 1000^\circ = \sin (360^\circ \cdot 2 + 280^\circ) = \sin 280^\circ.$$

Итак, пользуясь свойством периодичности, мы свели нахождение синуса угла в 1000°, т. е. бо́льшего 360° к нахождению синуса угла в 280°, т. е. меньшего 360°. Эта операция называется *приведением к углу, меньшему периода.*

Далее, рассматриваем угол 280° или как сумму $(270^\circ + 10^\circ)$, или же как разность $(360^\circ - 80^\circ)$, в зависимости от чего при помощи формул приведения получаем

$$\sin 1000^\circ = \sin 280^\circ = \sin (270^\circ + 10^\circ) = -\cos 10^\circ$$

или же

$$\sin 1000^\circ = \sin 280^\circ = \sin (360^\circ - 80^\circ) = -\sin 80^\circ.$$

Так как углы 10° и 80° — взаимно дополнительные, то

$$\cos 10^\circ = \sin 80^\circ,$$

т. е. полученные результаты тождественны.

Итак, $\sin 1000^\circ = -\cos 10^\circ$ или же $= -\sin 80^\circ$, т. е. нам удалось свести нахождение синуса угла бо́льшего 360° к нахождению синуса или косинуса острого угла.

В этом состоит операция приведения к углу первой четверти.

Замечание. Ввиду возможности получения двух тождественных ответов, иногда прибавляют дополнительное требование:

1) или привести к углу первой четверти с сохранением названия первоначальной тригонометрической функции; в этом случае ответ будет

$$\sin 1000^\circ = -\sin 80^\circ,$$

2) или привести к углу, меньшему 45°; тогда ответ будет

$$\sin 1000^\circ = -\cos 10^\circ.$$

Очевидно, что в случае первого требования приходится избегать формул приведения, содержащих углы в 90° и в 270° (т. е. формул § 111, 114, 115), так как они меняют название функции на дополнительное, а необходимо применять только формулы § 112, 113, 116 с углами в 180° и 360°, которые названия не меняют.

Пример 2. Привести к углу первой четверти $\cos 4187^\circ 17'$.

Деля угол на 360, получаем в частном 11 и в остатке $227^\circ 17'$, тогда

$$\cos 4187^\circ 17' = \cos (360^\circ \cdot 11 + 227^\circ 17') = \cos 227^\circ 17' =$$
$$= \cos (180^\circ + 47^\circ 17') = -\cos 47^\circ 17'.$$

Пример 3. Привести $\operatorname{cosec} 1000025^\circ$ к углу, меньшему 45°. Имеем

$$\operatorname{cosec} 1000025^\circ = \operatorname{cosec}(360 \cdot 2777 + 305^\circ) = \operatorname{cosec} 305^\circ =$$
$$= \operatorname{cosec}(270^\circ + 35^\circ) = -\sec 35^\circ.$$

Пример 4. Привести $\cos 1540^\circ$ к косинусу угла первой четверти. Имеем

$$\cos 1540^\circ = \cos(360^\circ \cdot 4 + 100^\circ) = \cos 100^\circ.$$

Далее мы можем рассматривать угол в 100° или как $(90^\circ + 10^\circ)$, или же как $(180^\circ - 80^\circ)$. Но нам поставлено дополнительное условие, чтобы получился косинус. Следовательно, для этой цели брать $(90^\circ + 10^\circ)$ не годится, так как от этого переменится название (т. е. будет уже не косинус, а синус), а потому берем $(180^\circ - 80^\circ)$ и получаем

$$\cos 1540^\circ = \cos 100^\circ = \cos(180^\circ - 80^\circ) = -\cos 80^\circ.$$

Справедливость основных зависимостей между тригонометрическими функциями для какого угодно угла

§ 121. Основные зависимости, связывающие тригонометрические функции одного и того же угла, были выведены нами в § 97 и 98 для угла, не превышающего 360°. Теперь, пользуясь периодичностью тригонометрических функций, можно показать, что установленные зависимости остаются верными для угла какой угодно величины.

Пусть требуется показать, что

$$\sin^2 6327^\circ + \cos^2 6327^\circ = 1 \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} 6327^\circ = \frac{\sin 6327^\circ}{\cos 6327^\circ}.$$

Приводим синус, косинус и тангенс 6327° к углу первой четверти с сохранением названия функции:

$$\sin 6327^\circ = \sin(360^\circ \cdot 17 + 207^\circ) = \sin 207^\circ = \sin(180^\circ + 27^\circ) = -\sin 27^\circ,$$
$$\cos 6327^\circ = \cos(360^\circ \cdot 17 + 207^\circ) = \cos 207^\circ = \cos(180^\circ + 27^\circ) = -\cos 27^\circ,$$
$$\operatorname{tg} 6327^\circ = \operatorname{tg}(360^\circ \cdot 17 + 207^\circ) = \operatorname{tg} 207^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ + 27^\circ) = \operatorname{tg} 27^\circ.$$

Теперь имеем

$$\sin^2 6327^\circ + \cos^2 6327^\circ = (-\sin 27^\circ)^2 + (-\cos 27^\circ)^2 =$$
$$= \sin^2 27^\circ + \cos^2 27^\circ = 1,$$

также

$$\frac{\sin 6327^\circ}{\cos 6327^\circ} = \frac{-\sin 27^\circ}{-\cos 27^\circ} = \operatorname{tg} 27^\circ = \operatorname{tg} 6327^\circ.$$

Итак, формулы (1) и (2) оказались верными для заданного угла в 6327°. Совершенно аналогично можно проверить эти формулы для произвольно взятого угла, так как использованный нами метод проверки является общим.

Следует заметить, что проверять формулу (3) после того, как установлены формулы (1) и (2), не требуется: эта формула выведена нами как простое следствие из (1) и (2), справедливость которых для любых углов уже доказана, и поэтому в отдельной проверке формула (3) не нуждается. То же относится и к другим формулам, полученным из формул (1) и (2) как следствия.

Разъяснение смысла двойного знака

§ 122. Данному значению какой-нибудь тригонометрической функции величина угла соответствует не один, а бесчисленное множество углов. Если даже не касаться свойства периодичности тригонометрических функций, то уже в пределах одного оборота имеются, вообще, два угла, удовлетворяющие заданию, что и вносит неопределенность в решение.

Пусть, например, требуется вычислить все тригонометрические функции угла x, если $\sin x = \frac{1}{2}$.

Известно, что $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.

С другой стороны, из формул приведения (§ 112) мы знаем, что $\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ$, т. е. углы в 30° и в 150° имеют одинаковые синусы. Следовательно, если нам дано, что $\sin x = \frac{1}{2}$, и ничего больше о величине угла x неизвестно, то мы не знаем в точности, о каком именно угле идет речь: об угле в 30° или же об угле в 150°.

Если предположить, что $x = 30^\circ$, то все тригонометрические функции угла x, как угла острого, будут положительны, и следовательно, мы получим

$$\cos x = +\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{tg} x = +\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \operatorname{ctg} x = +\sqrt{3}$$

и т. д.

Если же предположить, что $x = 150^\circ$, т. е. x — угол второй четверти, то все его тригонометрические функции, кроме синуса и косеканса, будут отрицательны, а потому получим

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \operatorname{ctg} x = -\sqrt{3} \text{ и т. д.}$$

Поэтому, если в условии задачи не дано никаких дополнительных указаний, которые могли бы уточнить вопрос об угле, мы должны дать такие общие ответы, которые годились бы для обоих возможных случаев, а потому мы и пишем:

$$\cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{tg} x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \operatorname{ctg} x = \pm\sqrt{3} \text{ и т. д.,}$$

т. е. ставим двойные знаки при найденных значениях функций.

Но если в условии задачи четверть указана, то тем самым определяется знак, который соответствует найденной тригонометрической функции сообразно с четвертью, в которой находится заданный угол.

Например, если задано $\operatorname{tg} x = -\frac{24}{7}$, причем указано, что угол x принадлежит четвертой четверти, т. е. $270^\circ < x < 360^\circ$, то имеем

$$\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 + \left(-\frac{24}{7}\right)^2 = 1 + \frac{576}{49} = \frac{625}{49},$$

откуда

$$\sec x = +\sqrt{\frac{625}{49}} = +\frac{25}{7}$$

(ставим знак $+$, так как в четвертой четверти секанс положителен).

Далее:

$$\cos x = +\frac{7}{25}, \quad \sin x = \operatorname{tg} x \cdot \cos x = -\frac{24}{7} \cdot \frac{7}{25} = -\frac{24}{25} \text{ и т. д.}$$

Пусть дано еще $\operatorname{ctg} x = \frac{5}{9}$, причем четверть неизвестна.

Так как котангенс задан положительным, то угол x может быть или в первой или в третьей четверти.

В первом случае все тригонометрические функции положительны, во втором случае, кроме тангенса и котангенса, все отрицательны.

О каком именно угле x идет речь, мы не знаем. Поэтому мы ставим двойной знак, чтобы получить общие ответы, одинаково пригодные для обоих случаев, т. е. имеем

$$\operatorname{tg} x = \frac{9}{5}; \quad \sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 + \frac{81}{25} = \frac{106}{25}; \quad \sec x = \pm\frac{\sqrt{106}}{5};$$

$$\cos x = \pm\frac{5}{\sqrt{106}}; \quad \sin x = \operatorname{tg} x \cdot \cos x = \frac{9}{5} \cdot \left(\pm\frac{5}{\sqrt{106}}\right) = \pm\frac{9}{\sqrt{106}} \text{ и т. д.}$$

Примеры для упражнений

§ 123. Упростить выражения (1—5):

1. $a^2 \cos^2 180^\circ + b^2 \operatorname{cosec}^2 270^\circ - 2ab \operatorname{tg} 225^\circ$;
2. $\sin (90^\circ + \alpha) \cos (270^\circ - \alpha) + \sin (\alpha - 90^\circ) \cos (\alpha - 180^\circ)$;
3. $\cos (180^\circ + \alpha) \cos (180^\circ - \alpha) + \sin (180^\circ + \alpha) \sin (180^\circ - \alpha)$;
4. $\sin (\alpha + 90^\circ) - \sin (\alpha - 90^\circ) + 3 \cos \alpha - 3 \cos (360^\circ - \alpha)$;
5. $2 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} (\alpha - 180^\circ) - \operatorname{ctg} (\alpha - 270^\circ) + \operatorname{ctg} (\alpha - 360^\circ)$.

Доказать тождества (6—10):

6. $\frac{\sin (180^\circ - \alpha)}{\operatorname{tg} (180^\circ + \alpha)} \cdot \frac{\operatorname{ctg} (90^\circ - \alpha)}{\operatorname{tg} (90^\circ + \alpha)} \cdot \frac{\cos (360^\circ - \alpha)}{\sin (-\alpha)} = \sin \alpha$;
7. $\cos x \operatorname{tg} (180^\circ + x) \operatorname{tg} (270^\circ - x) \operatorname{cosec} (90^\circ - x) = 1$;
8. $\operatorname{cosec}^2 (\alpha - 90^\circ) - \sin^2 (180^\circ - \alpha) \operatorname{cosec}^2 (90^\circ - \alpha) = 1$;
9. $\sin^2 (90^\circ - x) \operatorname{cosec} x - \operatorname{tg}^2 (x + 90^\circ) \sin (180^\circ - x) = 0$;
10. $[\sin x + \sin (90^\circ - x)]^2 + [\cos x - \cos (90^\circ - x)]^2 = 2$.

Решить уравнения (11—15):

11. $2 \sin^2 (90^\circ + x) = 3 \sin x + 2$;
12. $\sin (270^\circ - x) = 2 \operatorname{ctg} (90^\circ + x)$;
13. $\sin (90^\circ + x) + 1 = \cos^2 (180^\circ - x)$;
14. $\operatorname{ctg}^2 (270^\circ + x) = 2 \operatorname{tg} (180^\circ + x)$;
15. $\sin^2 (180^\circ + x) + 2 \sin (90^\circ + x) \cos (270^\circ - x) = 3 \cos^2 (360^\circ - x)$.

ГЛАВА XIII

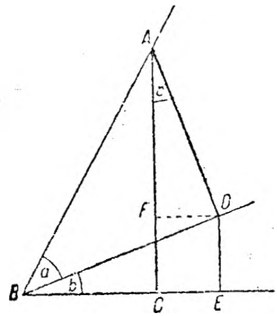
ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ И ВЫЧИТАНИЯ УГЛОВ

§ 124. В этой главе мы даем вывод основных зависимостей, выражающих тригонометрическую функцию, аргумент которой представляет собою сумму $(A+B)$ или разность $(A-B)$ двух углов (A и B), через тригонометрические функции этих отдельных углов (A и B).

Но раньше, чем приступить к выводу формул, укажем, что было бы грубой ошибкой думать, что, например, выражения $\sin(a+b)$ и $\sin a+\sin b$ тождественно равны. Чтобы убедиться в этом достаточно, например, положить $a=b=90^\circ$. Тогда получим $\sin(a+b)=\sin 180^\circ=0$, и $\sin a+\sin b=2\sin 90^\circ=2$.

Формулы сложения для синуса и косинуса

§ 125. Возьмем $\angle ABD=a$ и пристроим к нему $DBE=b$, тогда $\angle ABE=a+b$ (черт. 84).



Черт. 84.

Чтобы определить синус и косинус этого угла, берем на одной из его сторон произвольную точку A и опускаем из нее перпендикуляр AC на другую сторону.

Тогда имеем

$$\sin(a+b)=\frac{AC}{AB}$$

и

$$\cos(a+b)=\frac{BC}{AB}.$$

Но ведь мы хотим выразить синус и косинус суммы $(a+b)$ через тригонометрические функции углов a и b. С этой целью проводим $AD\perp BD$ и $DE\perp BE$. Теперь для угла a все тригонометрические функции могут быть найдены из треугольника ABD, а для угла b из треугольника DBE.

Проведем еще $DF\parallel BE$. Заметим, что $\angle DAF=\angle DBE$ (вследствие перпендикулярности сторон этих углов).

Из чертежа имеем

$$AC=AF+FC=AF+DE,$$

а потому

$$\sin(a+b)=\frac{AF+DE}{AB}.$$

Оставляя знаменатель AB без изменения, определим отрезки AF и DE из прямоугольных треугольников, по гипотенузе и синусу или косинусу углов a и b.

Отрезки AF и DE входят катетами в треугольники ADF и BDE, откуда имеем

$$AF=AD\cos b \quad \text{и} \quad DE=BD\sin b;$$

поэтому

$$\sin(a+b)=\frac{AD\cos b+BD\sin b}{AB}.$$

Но отрезки AD и BD являются катетами в треугольнике ABD и потому могут быть выражены так:

$$AD = AB \sin a \quad \text{и} \quad BD = AB \cos a,$$

после чего получаем

$$\sin(a+b) = \frac{AB \sin a \cos b + AB \cos a \sin b}{AB},$$

откуда после сокращения дроби на AB находим формулу:

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b. \tag{4}$$

Совершенно аналогично выводится формула для косинуса суммы:

$$\cos(a+b) = \frac{BC}{AB} = \frac{BE - CE}{AB} = \frac{BE - FD}{AB}.$$

Из треугольников BDE и ADF имеем

$$BE = BD \cos b \quad \text{и} \quad FD = AD \sin b,$$

а потому

$$\cos(a+b) = \frac{BD \cos b - AD \sin b}{AB}.$$

Теперь из треугольника ABD имеем

$$BD = AB \cos a \quad \text{и} \quad AD = AB \sin a,$$

поэтому

$$\cos(a+b) = \frac{AB \cos a \cos b - AB \sin a \sin b}{AB},$$

откуда после сокращения на AB находим формулу:

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b. \tag{5}$$

Словесное выражение формул[1]) (4) и (5) следующее:

синус суммы двух углов равен произведению синуса первого угла на косинус второго плюс произведение косинуса первого угла на синус второго;

косинус суммы двух углов равен произведению косинусов этих углов минус произведение их синусов.

Покажем применение этих формул на нескольких примерах.

Пример 1. Определить $\sin 75°$.

Имеем

$$\sin 75° = \sin(30° + 45°) = \sin 30° \cos 45° + \cos 30° \sin 45° =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}.$$

---

[1]) Эти формулы в тригонометрии известны под названием: *теоремы сложения*. Они были установлены впервые греческим математиком Клавдием Птоломеем.

Пример 2. Дано: $\sec x = -\frac{17}{8}$ и $\sec y = \frac{5}{4}$, причем известно, что x — угол третьей четверти, а y — четвертой. Определить $\operatorname{cosec}(x+y)$.

Определим сначала $\sin x$ и $\sin y$:

$$\sin x = -\sqrt{1-\cos^2 x} = -\sqrt{1-\frac{64}{289}} = -\sqrt{\frac{225}{289}} = -\frac{15}{17},$$

$$\sin y = -\sqrt{1-\cos^2 y} = -\sqrt{1-\frac{16}{25}} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}.$$

Следовательно,

$$\sin(x+y) = -\frac{15}{17}\cdot\frac{4}{5} + \left(-\frac{8}{17}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{60}{85}+\frac{24}{85} = -\frac{36}{85},$$

а потому

$$\operatorname{cosec}(x+y) = -\frac{85}{36}.$$

§ 126. Формулы (4) и (5) являются одними из самых основных в тригонометрии, так как все дальнейшие формулы (6 — 16) выводятся из них как простые следствия. Возникает вопрос: для всяких ли углов эти формулы верны? Ведь мы доказали их только для того случая, когда слагаемые углы a и b — оба острые[1]).

Оказывается, что эти формулы в е р н ы д л я л ю б ы х у г л о в. (Доказательство справедливости этих формул для любых углов довольно кропотливо и длинно; мы его здесь не приводим.)

Формулы вычитания для синуса и косинуса

§ 127. Так как формулы (4) и (5) верны для любых углов (§ 126), в том числе и для отрицательных углов, мы имеем право подставить в обе части этих формул $(-b)$ вместо (b):

$$\sin(a-b) = \sin a\cos(-b) + \cos a\sin(-b),$$
$$\cos(a-b) = \cos a\cos(-b) - \sin a\sin(-b).$$

Заменяя $\sin(-b) = -\sin b$ и $\cos(-b) = \cos b$, получаем

$$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b, \tag{4a}$$
$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b. \tag{5a}$$

Словесное выражение этих формул:

синус разности двух углов равен произведению синуса первого угла на косинус второго минус произведение косинуса первого угла на синус второго;

косинус разности двух углов равен произведению косинусов этих углов плюс произведение их синусов.

---

[1]) На черт. 90 не только каждый из углов a и b в отдельности меньше 90°, но даже и сумма их тоже меньше 90°. Нетрудно при помощи вполне аналогичного вывода доказать (из чертежа), что формулы (4) и (5) остаются верными и для того случая, когда $a < 90°$ и $b < 90°$, но сумма $(a+b) > 90°$, т. е. что эти формулы верны для всяких острых углов.

Покажем применение этих формул на нескольких примерах.

Пример 1. Вычислить $\cos 15°$.

Имеем

$$\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30° =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Если сравним найденный результат с $\sin 75°$, полученным раньше, то обнаружим тождественность ответов, так как $\cos 15° = \sin 75°$.

Пример 2. Дано: $\sec a = \frac{29}{20}$ и $\operatorname{cosec} b = -\frac{41}{40}$, причем известно, что a — угол первой четверти, а b — угол третьей четверти. Определить $\operatorname{cosec}(b-a)$.

Прежде всего находим $\cos b$ и $\sin a$:

$$\cos b = -\sqrt{1-\sin^2 b} = -\sqrt{1-\left(-\frac{40}{41}\right)^2} = -\sqrt{1-\frac{1600}{1681}} =$$
$$= -\sqrt{\frac{81}{1681}} = -\frac{9}{41};$$
$$\sin a = +\sqrt{1-\cos^2 a} = +\sqrt{1-\left(\frac{20}{29}\right)^2} =$$
$$= +\sqrt{1-\frac{400}{841}} = +\sqrt{\frac{441}{841}} = +\frac{21}{29}.$$

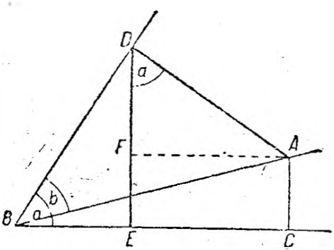
Поэтому

$$\sin(b-a) = -\frac{40}{41} \cdot \frac{20}{29} - \left(-\frac{9}{41}\right) \cdot \frac{21}{29} = \frac{-800+189}{1189} = -\frac{611}{1189}.$$

А следовательно,

$$\operatorname{cosec}(b-a) = -\frac{1189}{611}.$$

Замечание. Сравнивая формулы (4) и (4а), мы видим, что в случае синуса знаки в правой и левой частях формулы одинаковы: для синуса суммы получается сумма двух произведений, для синуса разности — разность. Из сравнения же формул (5) и (5а) видим, что для косинуса знаки в правой и левой частях противоположны: для косинуса суммы получается разность двух произведений, для косинуса разности — сумма.



Черт. 85.

§ 128. Формулы (4а) и (5а), выведенные нами как простые следствия из формул (4) и (5), можно также вывести из чертежа.

Пусть $\angle DBC = a$ и $\angle DBA = b$; тогда $\angle ABC = a - b$ (черт. 85).

Из произвольной точки A стороны BA угла ABC опускаем перпендикуляр AC на другую сторону. Тогда имеем

$$\sin(a-b) = \frac{AC}{AB} \quad \text{и} \quad \cos(a-b) = \frac{BC}{AB}.$$

Чтобы определить из чертежа тригонометрические функции углов a и b, проведем $AD \perp BD$, $DE \perp BC$ и $AF \parallel BC$.

Тогда, придерживаясь того же метода, как в § 125, получим

$$\sin(a-b)=\frac{AC}{AB}=\frac{DE-DF}{AB}=\frac{BD\sin a-AD\cos a}{AB}=$$
$$=\frac{AB\cos b\sin a-AB\sin b\cos a}{AB}=\sin a\cos b-\cos a\sin b;$$

$$\cos(a-b)=\frac{BC}{AB}=\frac{BE+AF}{AB}=\frac{BD\cos a+AD\sin a}{AB}=$$
$$=\frac{AB\cos b\cos a+AB\sin b\sin a}{AB}=\cos a\cos b+\sin a\sin b.$$

Формулы сложения и вычитания для тангенса

§ 129. На основании формулы (2) имеем

$$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}=\frac{\sin a\cos b+\cos a\sin b}{\cos a\cos b-\sin a\sin b}.$$

Целесообразно преобразовать правую часть полученного равенства так, чтобы в нее входили только тангенсы. Для этого достаточно разделить почленно числитель и знаменатель на произведение $\cos a\cos b$:

$$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\dfrac{\sin a\cos b}{\cos a\cos b}+\dfrac{\cos a\sin b}{\cos a\cos b}}{\dfrac{\cos a\cos b}{\cos a\cos b}-\dfrac{\sin a\sin b}{\cos a\cos b}}=\frac{\dfrac{\sin a}{\cos a}+\dfrac{\sin b}{\cos b}}{1-\dfrac{\sin a}{\cos a}\cdot\dfrac{\sin b}{\cos b}}=\frac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b}{1-\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b}.$$

Итак,

$$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b}{1-\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b}. \tag{6}$$

Совершенно так же найдем

$$\operatorname{tg}(a-b)=\frac{\operatorname{tg}a-\operatorname{tg}b}{1+\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b}. \tag{6a}$$

Формулы эти словесно могут быть выражены так:

тангенс суммы двух углов равен сумме тангенсов, разделенной на единицу минус произведение тангенсов тех же углов;

тангенс разности двух углов равен разности тангенсов, разделенной на единицу плюс произведение тангенсов тех же углов.

Покажем применение формул (6) и (6а) на нескольких примерах.

Пример 1. Дано: $\operatorname{ctg}a=\frac{2}{3}$ и $\operatorname{ctg}b=\frac{4}{7}$. Определить $\operatorname{ctg}(a-b)$.

Имеем

$$\operatorname{tg}(a-b)=\frac{\operatorname{tg}a-\operatorname{tg}b}{1+\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b}=\frac{\frac{3}{2}-\frac{7}{4}}{1+\frac{3}{2}\cdot\frac{7}{4}}=\frac{12-14}{8+21}=-\frac{2}{29},$$

а следовательно,

$$\operatorname{ctg}(a-b)=-\frac{29}{2}.$$

Пример 2. Определить $\operatorname{tg} 75°$.

Имеем

$$\operatorname{tg} 75° = \operatorname{tg}(45° + 30°) = \frac{\operatorname{tg} 45° + \operatorname{tg} 30°}{1 - \operatorname{tg} 45° \operatorname{tg} 30°} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{3+2\sqrt{3}+1}{3-1} = 2+\sqrt{3}.$$

§ 130. Зная формулы для синуса, косинуса и тангенса алгебраической суммы **двух углов**, мы можем найти синус, косинус и тангенс суммы **трех, четырех** и, **вообще, какого угодно числа углов**. Для этого придется применять выведенные формулы последовательно по несколько раз, как показано на следующих примерах.

Пример 1. Выразить $\sin(a+b-c)$ через синусы и косинусы углов a, b и c.

Решение.

$$\sin(a+b-c) = \sin[(a+b)-c] = \sin(a+b)\cos c - \cos(a+b)\sin c =$$
$$= (\sin a\cos b + \cos a\sin b)\cos c - (\cos a\cos b - \sin a\sin b)\sin c =$$
$$= \sin a\cos b\cos c + \cos a\sin b\cos c - \cos a\cos b\sin c + \sin a\sin b\sin c.$$

Пример 2. Выразить $\cos(a+b+c)$ через синусы и косинусы углов a, b и c.

Решение.

$$\cos(a+b+c) = \cos[(a+b)+c] = \cos(a+b)\cos c - \sin(a+b)\sin c =$$
$$= (\cos a\cos b - \sin a\sin b)\cos c - (\sin a\cos b + \cos a\sin b)\sin c =$$
$$= \cos a\cos b\cos c - \sin a\sin b\cos c - \sin a\cos b\sin c - \cos a\sin b\sin c.$$

Пример 3. Дано: $\operatorname{tg} a = \frac{2}{3}$, $\operatorname{ctg} b = -\frac{5}{7}$, $\operatorname{ctg} c = \frac{1}{2}$. Определить $\operatorname{ctg}(a-b-c)$.

Решение.

$$\operatorname{tg}(a-b-c) = \operatorname{tg}[(a-b)-c] = \frac{\operatorname{tg}(a-b) - \operatorname{tg} c}{1 + \operatorname{tg}(a-b)\operatorname{tg} c}.$$

Можно теперь или раскрывать $\operatorname{tg}(a-b)$ по формуле (6а), или же предварительно его **отдельно вычислить** и потом **подставить** найденное значение.

Избираем второй способ, как более простой.

$$\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} = \frac{\frac{2}{3} + \frac{7}{5}}{1 - \frac{2}{3}\cdot\frac{7}{5}} = \frac{10+21}{15-14} = 31.$$

Теперь находим

$$\operatorname{tg}(a-b-c) = \frac{31-2}{1+31\cdot 2} = \frac{29}{63},$$

откуда

$$\operatorname{ctg}(a-b-c) = \frac{63}{29}.$$

§ 131. Нередко приходится пользоваться формулами в обращенном виде, т. е. когда левую и правую части формулы переменить местами.

Пример 1. Доказать тождество

$$\sin(x-z)\cos(y+z)+\cos(x-z)\sin(y+z)=\sin(x+y).$$

Находим по формулам (4), (5), (4а), (5а):

$$\sin(x-z)\cos(y+z)+\cos(x-z)\sin(y+z)=$$
$$=(\sin x\cos z-\cos x\sin z)(\cos y\cos z-\sin y\sin z)+$$
$$+(\cos x\cos z+\sin x\sin z)(\sin y\cos z+\cos y\sin z).$$

После раскрытия скобок и приведения подобных членов получим

$$\sin x\cos y+\cos x\sin y,$$

что согласно формуле (4) равно $\sin(x+y)$.

Такой способ решения является очень длинным и громоздким.

Лучше поступить иначе. Мы видим, что левая часть данного тождества представляет собой сумму произведения синуса $(x-z)$ на косинус $(y+z)$ и произведения косинуса $(x-z)$ на синус $(y+z)$, и по формуле (4) заключаем, что левая часть есть не что иное, как синус суммы двух углов $(x-z)$ и $(y+z)$. А потому

$$\sin(x-z)\cos(y+z)+\cos(x-z)\sin(y+z)=$$
$$=\sin[(x-z)+(y+z)]=\sin(x+y).$$

Пример 2. Доказать, что значение выражения

$$\cos(a-b)\cos b-\sin(a-b)\sin b$$

не зависит от угла b.

Условие на первый взгляд довольно странное: величина b входит в данное выражение. Как же это может быть, чтобы величина b не влияла на значение выражения?

Вопрос решается очень просто: данное выражение представляет собой не что иное, как косинус суммы двух углов $(a-b)$ и b, а потому

$$\cos(a-b)\cos b-\sin(a-b)\sin b=\cos[(a-b)+b]=\cos a.$$

Так как величина b в окончательный результат не входит, то значение заданного выражения не зависит от b.

Пример 3. Вычислить выражение $\frac{\operatorname{tg}10^\circ+\operatorname{tg}35^\circ}{1-\operatorname{tg}10^\circ\operatorname{tg}35^\circ}$.

Данное выражение есть не что иное, как тангенс суммы углов 10° и 35°, а потому

$$\frac{\operatorname{tg}10^\circ+\operatorname{tg}35^\circ}{1-\operatorname{tg}10^\circ\operatorname{tg}35^\circ}=\operatorname{tg}(10^\circ+35^\circ)=\operatorname{tg}45^\circ=1.$$

Примеры для упражнений

§ 132. 1. Дано: $\sin x=\frac{7}{25}$; $\operatorname{cosec} y=\frac{61}{11}$, причем x — угол второй четверти, а y — первой четверти. Вычислить $\sin(x-y)$.

2. Дано: $\sec a = -\frac{17}{8}$; $\operatorname{cosec} b = \frac{29}{20}$, причем известно, что a — угол третьей четверти, а b — второй четверти. Определить $\cos(a-b)$.

3. Дано: $\operatorname{ctg} a = \frac{7}{3}$; $\operatorname{ctg} b = \frac{5}{6}$. Найти $\operatorname{ctg}(a-b)$.

4. Вычислить $\operatorname{tg}(a+b)$ и $\operatorname{tg}(a-b)$, если $\sin a = \frac{3}{5}$ и $\cos b = \frac{15}{17}$, причем углы a и b — оба острые.

5. Дано: $\sin a = -\frac{9}{41}$; $\sin b = \frac{40}{41}$; $\sin c = \frac{11}{61}$. Определить $\cos(a+b-c)$, если известно, что угол a находится в третьей четверти, а b и c — во второй.

6. Дано: $\operatorname{ctg} a = \frac{2}{3}$; $\operatorname{ctg} b = \frac{3}{4}$. Определить $\operatorname{tg}(a+b-45^\circ)$.

7. Вывести формулу для тангенса суммы трех углов A, B и C. Что получится из этой формулы, если это углы треугольника?

Доказать тождества (8 — 15):

8. $\frac{\cos 2a}{\sec a} - \frac{\sin 2a}{\operatorname{cosec} a} = \cos 3a$.

9. $\cos(x+y)\cos y + \sin(x+y)\sin y = \cos x$.

10. $\operatorname{ctg} 2a + \operatorname{tg} a = \frac{1}{2}\operatorname{cosec} a$.

11. $\cos(30^\circ + a)\cos(30^\circ - a) - \sin(30^\circ + a)\sin(30^\circ - a) = \frac{1}{2}$.

12. $1 + \operatorname{ctg} 2x \operatorname{ctg} x = \operatorname{cosec} 2x \operatorname{ctg} x$.

13. $1 + \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x = \sec 2x$.

14. $\frac{\operatorname{tg}^2 40^\circ - \operatorname{tg}^2 17^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 40^\circ \operatorname{tg}^2 17^\circ} = \operatorname{tg} 57^\circ \operatorname{tg} 23^\circ$.

15. $\frac{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 y}{1 - \operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 y} = \operatorname{tg}(x+y)\operatorname{tg}(x-y)$.

ГЛАВА XIV

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ УДВОЕННОГО УГЛА

§ 133. Мы переходим теперь к выводу формул удвоения угла, т. е. формул, выражающих тригонометрические функции удвоенного угла ($2a$) через тригонометрические функции угла a.

Вывод интересующих нас формул очень прост: мы применяем известные уже формулы (4), (5), (6) для $\sin(a+b)$, $\cos(a+b)$ и $\operatorname{tg}(a+b)$ к случаю, когда оба угла a и b равны между собою. Таким образом мы получим новые формулы, которые будут простыми следствиями формул (4), (5) и (6).

Формулы удвоения

§ 134. Полагая в формуле

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$$

$b = a$, получим

$$\sin(a+a) = \sin a \cos a + \cos a \sin a$$

или

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a. \tag{7}$$

Так же из формулы

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$

принимая $b = a$, находим

$$\cos(a + a) = \cos a \cos a - \sin a \sin a$$

или

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a. \tag{8}$$

Наконец, из формулы

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$

при $b = a$ получаем

$$\operatorname{tg}(a + a) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} a}$$

или

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}. \tag{9}$$

Формуле (8) для косинуса удвоенного угла можно дать еще и другой вид.

А именно, пользуясь зависимостью

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1,$$

можно заменить $\cos^2 a$ через $(1 - \sin^2 a)$ или же, наоборот, $\sin^2 a$ через $(1 - \cos^2 a)$. Тогда получим

$$\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a, \tag{8а}$$

и

$$\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1. \tag{8б}$$

В таком виде формулы для $\cos 2a$ более удобны. Преимущество их заключается в том, что здесь косинус удвоенного угла выражается через одну какую-нибудь функцию угла a: либо $\sin a$, либо $\cos a$, тогда как в формуле (8) $\cos 2a$ выражается через две функции: $\sin a$ и $\cos a$.

Пример 1. Определить $\operatorname{cosec} 10x$, если $\operatorname{cosec} 5x = \frac{7}{4}$.

Замечаем, что угол $10x$ вдвое больше угла $5x$, а потому можно применить формулы удвоения. Сначала определяем $\sin 10x$ по формуле (7)

$$\sin 10x = 2 \sin 5x \cos 5x.$$

Но

$$\sin 5x = \frac{1}{\operatorname{cosec} 5x} = \frac{4}{7}$$

и

$$\cos 5x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 5x} = \pm\sqrt{1 - \frac{16}{49}} = \pm\sqrt{\frac{33}{49}} = \pm\frac{\sqrt{33}}{7}.$$

Следовательно,

$$\sin 10x = 2 \cdot \frac{4}{7} \cdot \left(\pm\frac{\sqrt{33}}{7}\right) = \pm\frac{8}{49}\sqrt{33},$$

а потому

$$\operatorname{cosec} 10x = \pm \frac{49}{8\sqrt{33}}.$$

Пример 2. Дано $\sec 6x = \frac{5}{2}$. Вычислить $\sec 12x$.

Пользуясь формулой (8б), имеем

$$\cos 12x = 2\cos^2 6x - 1 = 2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 - 1 = \frac{8}{25} - 1 = -\frac{17}{25},$$

а потому

$$\sec 12x = -\frac{25}{17}.$$

Пример 3. Вычислить $\cos 36°$, зная, что $\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Так как для угла 18° известен только синус, то удобнее всего воспользоваться формулой (8а):

$$\cos 36° = 1 - 2\sin^2 18° = 1 - 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{5+1-2\sqrt{5}}{8} =$$

$$= 1 - \frac{3-\sqrt{5}}{4} = \frac{4-3+\sqrt{5}}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

Пример 4. Найти $\operatorname{ctg} 6x$, если $\operatorname{ctg} 3x = \frac{2}{9}$.

Имеем по формуле (9)

$$\operatorname{tg} 6x = \frac{2\operatorname{tg} 3x}{1-\operatorname{tg}^2 3x} = \frac{2 \cdot \frac{9}{2}}{1-\frac{81}{4}} = \frac{36}{4-81} = -\frac{36}{77},$$

следовательно,

$$\operatorname{ctg} 6x = -\frac{77}{36}.$$

§ 135. Для решения некоторых задач полезно иметь в виду, что все тригонометрические функции удвоенного угла могут быть выражены рационально через одну и ту же функцию, а именно: через тангенс. Для вывода соответствующих формул поступаем так.

Берем формулу (7)

$$\sin 2a = 2\sin a \cos a$$

и делим правую часть ее на равное единице выражение $(\sin^2 a + \cos^2 a)$:

$$\sin 2a = \frac{2\sin a \cos a}{\sin^2 a + \cos^2 a}.$$

Если теперь числитель и знаменатель правой части поделить почленно на $\cos^2 c$, то получится

$$\sin 2a = \frac{2\operatorname{tg} a}{1+\operatorname{tg}^2 a}.$$

Также из формулы (8)

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

делением правой части на $(\cos^2 a + \sin^2 a)$ находим

$$\cos 2a = \frac{\cos^2 a - \sin^2 a}{\cos^2 a + \sin^2 a},$$

откуда, деля почленно на $\cos^2 a$, получаем

$$\cos 2a = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 a}{1 + \operatorname{tg}^2 a}.$$

Итак, имеем

$$\sin 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 + \operatorname{tg}^2 a}, \quad \cos 2a = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 a}{1 + \operatorname{tg}^2 a}, \quad \operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a},$$

$$\operatorname{ctg} 2a = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 a}{2 \operatorname{tg} a}, \quad \sec 2a = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}, \quad \operatorname{cosec} 2a = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 a}{2 \operatorname{tg} a}.$$

Пример 1. Определить $\sin 8x$, если $\operatorname{tg} 4x = \frac{3}{7}$.

Решение.

$$\sin 8x = \frac{2 \operatorname{tg} 4x}{1 + \operatorname{tg}^2 4x} = \frac{\frac{6}{7}}{1 + \frac{9}{49}} = \frac{42}{49 + 9} = \frac{42}{58} = \frac{21}{29}.$$

Пример 2. Найти $\cos 5x$, если $\operatorname{ctg} 2\frac{1}{2} x = \frac{4}{9}$.

Решение.

$$\cos 5x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 2\frac{1}{2} x}{1 + \operatorname{tg}^2 2\frac{1}{2} x} = \frac{1 - \frac{81}{16}}{1 + \frac{81}{16}} = \frac{16 - 81}{16 + 81} = -\frac{65}{97}.$$

Пример 3. Зная, что $\operatorname{tg} x = \frac{2}{3}$, найти $\cos 4x$.

Сперва находим

$$\cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1 - \frac{4}{9}}{1 + \frac{4}{9}} = \frac{9 - 4}{9 + 4} = \frac{5}{13}.$$

Теперь по формуле (8б) определяем

$$\cos 4x = 2 \cos^2 2x - 1 = 2 \cdot \left(\frac{5}{13}\right)^2 - 1 = \frac{50}{169} - 1 = -\frac{119}{169}.$$

§ 136. Нетрудно вывести формулы тригонометрических функций утроенного угла ($3a$). Для этого достаточно рассматривать угол $3a$ как сумму $(2a + a)$ и применить сперва формулы сложения, а потом применить формулы тригонометрических функций удвоенного угла.

Так,

$$\begin{aligned}\sin 3a &= \sin (2a + a) = \sin 2a \cos a + \cos 2a \sin a = \\ &= (2 \sin a \cos a) \cos a + (1 - 2 \sin^2 a) \sin a = \\ &= 2 \sin a \cos^2 a + \sin a - 2 \sin^3 a = \\ &= 2 \sin a (1 - \sin^2 a) + \sin a - 2 \sin^3 a = \\ &= 2 \sin a - 2 \sin^3 a + \sin a - 2 \sin^3 a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 3a &= \cos(2a + a) = \cos 2a \cos a - \sin 2a \sin a = \\ &= (2\cos^2 a - 1)\cos a - (2\sin a \cos a)\sin a = \\ &= 2\cos^3 a - \cos a - 2\sin^2 a \cos a = \\ &= 2\cos^3 a - \cos a - 2(1 - \cos^2 a);\end{aligned}$$

$$\cos a = 2\cos^3 a - \cos a - 2\cos a + 2\cos^3 a = 4\cos^3 a - 3\cos a.$$

Чтобы получить формулу для $\operatorname{tg} 3a$, рассматриваем последнее как $\operatorname{tg}(2a + a)$ или же как $\frac{\sin 3a}{\cos 3a}$ и в результате найдем

$$\operatorname{tg} 3a = \frac{3\operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3\operatorname{tg}^2 a}.$$

Таким же способом можно вывести формулы и для $4a$, $5a$, $6a$ и т. д.

§ 137. Приводим несколько примеров на применение формул удвоения.

Пример 1. Упростить выражение $\frac{\sin 3a}{\sin a} + \frac{\cos 3a}{\cos a}$.

Можно, конечно, подставить в левую часть вместо синуса и косинуса утроенного угла их выражения по формулам, выведенным в § 136. Но если внимательно рассмотреть левую часть, то можно легко догадаться поступить так.

Приводим левую часть к общему знаменателю:

$$\frac{\sin 3a}{\sin a} + \frac{\cos 3a}{\cos a} = \frac{\sin 3a \cos a + \cos 3a \sin a}{\sin a \cos a} = \frac{\sin(3a + a)}{\sin a \cos a} = \frac{\sin 4a}{\frac{1}{2}\sin 2a} =$$

$$= \frac{2 \cdot 2 \sin 2a \cos 2a}{\sin 2a} = 4\cos 2a.$$

Пример 2. Проверить тождество $\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = \sec 2x - \operatorname{tg} 2x$.

Здесь удобнее взять для преобразования не левую, а правую часть

$$\sec 2x - \operatorname{tg} 2x = \frac{1}{\cos 2x} - \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{1 - \sin 2x}{\cos 2x} = \frac{1 - 2\sin x \cos x}{\cos 2x}.$$

Заменим теперь 1 через $(\sin^2 x + \cos^2 x)$:

$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x}{\cos 2x} = \frac{(\cos x - \sin x)^2}{\cos^2 x - \sin^2 x},$$

после чего, сокращая дробь на $(\cos x - \sin x)$, получим

$$\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}.$$

Пример 3. Доказать тождество

$$\cos^6 a + \sin^6 a = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2a.$$

$$\begin{aligned}\cos^6 a + \sin^6 a &= (\cos^2 a)^3 + (\sin^2 a)^3 = \\ &= (\cos^2 a + \sin^2 a)(\cos^4 a - \cos^2 a \sin^2 a + \sin^4 a) = \\ &= \cos^4 a + 2\sin^2 a \cos^2 a + \sin^4 a - 3\cos^2 a \sin^2 a = \\ &= (\cos^2 a + \sin^2 a)^2 - 3(\cos a \sin a)^2 = \\ &= 1 - 3\left(\frac{1}{2}\sin 2a\right) = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2a.\end{aligned}$$

Пример 4. Доказать тождество

$$\frac{1-\cos 2x+\sin 2x}{1+\cos 2x+\sin 2x}=\operatorname{tg} x.$$

Заменяем в левой части $\cos 2x$ в числителе по формуле (8а), а в знаменателе по формуле (8б):

$$\frac{1-\cos 2x+\sin 2x}{1+\cos 2x+\sin 2x}=\frac{1-(1-2\sin^2 x)+\sin 2x}{1+(2\cos^2 x-1)+\sin 2x}=\frac{2\sin^2 x+2\sin x\cos x}{2\cos^2 x+2\sin x\cos x}=$$

$$=\frac{2\sin x(\sin x+\cos x)}{2\cos x(\cos x+\sin x)}=\operatorname{tg} x.$$

Примеры для упражнений

§ 138. 1. Вычислить $\cos 2a$, если дано значение $\cos a$, равное:

а) $\frac{2}{5}$; б) $\frac{3}{7}$; в) $\frac{\sqrt{7}-5}{4}$; г) $\frac{3+\sqrt{5}}{4}$.

2. Определить $\cos 2a$, если дано значение $\sin a$, равное:

а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{4}{9}$; в) $\frac{\sqrt{5}-3}{7}$; г) $\frac{1+\sqrt{7}}{3}$.

3. Найти $\sin 6x$, если дано, что $\sin 3x$ равен:

а) $\frac{5}{13}$; б) $\frac{8}{11}$; в) $\frac{\sqrt{7}}{5}$; г) $\frac{\sqrt{13}}{3}$.

4. Найти $\operatorname{cosec} 2x$, если известно значение $\sec x$, равное:

а) $\frac{25}{7}$; б) $\frac{14}{9}$; в) $\sqrt{\frac{11}{5}}$; г) $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

5 Вычислить $\operatorname{tg} 10x$, если $\operatorname{ctg} 5x$ равен:

а) $3\frac{1}{2}$; б) $\frac{9}{7}$; в) $-\frac{2}{5}$.

6. Найти все тригонометрические функции угла $14x$, если известно, что $\operatorname{tg} 7x$ равен:

а) $\frac{3}{4}$; б) $\frac{5}{7}$; в) $\frac{8}{13}$; г) $2\frac{1}{3}$.

7. Дано, что $\cos 3a=\frac{2}{3}$. Найти $\cos 12a$.

8. Дано, что $\operatorname{ctg} 2a=\frac{5}{3}$. Найти $\sec 8a$.

9. Определить $\cos 4x$ и $\operatorname{tg} 4x$, если $\operatorname{tg} x=5$.

10. Зная, что $\operatorname{ctg} 7x=\frac{2}{5}$, найти $\operatorname{ctg} 28x$.

Доказать тождества (11 — 16).

11. $\frac{\cos 2a}{1+\sin 2a}=\operatorname{tg}(45^\circ-a)$.

12. $\dfrac{\cos^3 a - \cos 3a}{\cos a} + \dfrac{\sin^3 a + \sin 3a}{\sin a} = 3.$

13. $\operatorname{tg} 2a - \sec a \sin a = \operatorname{tg} a \sec 2a.$

14. $4\sin^3 a \cos 3a + 4\cos^3 a \sin 3a = 3\sin 4a.$

15. $\cos^3 a \cos 3a + \sin^3 a \sin 3a = \cos^3 2a.$

16. $4(\cos^6 x + \sin^6 x) = 1 + 3\cos^2 2x.$

ГЛАВА XV

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ПОЛОВИННОГО УГЛА

§ 139. В предыдущих главах мы вывели формулы, относящиеся к сложению, вычитанию и умножению углов. В естественном порядке на очереди у нас *деление*. Но здесь оказывается, что при помощи элементарной математики возможно установить формулы, относящиеся к делению углов только на 2, т. е. можно выразить $\sin\frac{a}{2}$, $\cos\frac{a}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$, а применяя эти же формулы последовательно по несколько раз, можно получить $\sin\frac{a}{4}$, $\cos\frac{a}{8}$, $\operatorname{tg}\frac{a}{16}$ и т. д.

Что же касается, например, формул для $\sin\frac{a}{3}$, $\cos\frac{a}{3}$, $\operatorname{tg}\frac{a}{3}$, то вывод их приводит к решению кубического уравнения, что выходит из рамок элементарного курса математики.

Формулы половинного угла

§ 140. Формулы для половинного угла выводятся очень просто: эти формулы являются простыми *следствиями* формул (8а) и (8б).

В самом деле, мы имели

$$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a \quad \text{и} \quad \cos 2a = 2\cos^2 a - 1.$$

Заменим здесь $2a$ буквой x и, следовательно, $a = \frac{x}{2}$. Получится

$$\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2} \text{ и } \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1.$$

Рассмотрим, что представляют собой написанные формулы. Первая из них дает зависимость между косинусом угла x и синусом половинного угла $\frac{x}{2}$. Но очевидно, что из этой же самой формулы мы можем легко получить выражение $\sin\frac{x}{2}$ через $\cos x$, а именно:

$$\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}; \quad 2\sin^2\frac{x}{2} = 1 - \cos x; \quad \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2},$$

а следовательно,

$$\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}. \tag{10}$$

Это и есть формула для синуса половинного угла.

Подобным же образом из формулы

$$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$$

легко найдем

$$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}. \qquad (11)$$

Наконец, деля почленно формулу (10) на формулу (11), получим

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}. \qquad (12)$$

Последней формуле можно придать и другую форму, а именно: умножив числитель и знаменатель подкоренной величины на $(1-\cos x)$ получаем

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos x)(1-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x)}} = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos x)^2}{1-\cos^2 x}} = \pm\sqrt{\left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)^2},$$

откуда, извлекая квадратный корень,

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x}. \qquad (A)$$

Подобным же образом, умножая числитель и знаменатель подкоренной величины в формуле (12) на $(1+\cos x)$, получим

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}. \qquad (B)$$

Замечание. При выводе двух последних формул мы опустили двойной знак, стоявший ранее в формуле (12). Это объясняется тем, что выражения

$$\frac{1-\cos x}{\sin x} \quad \text{и} \quad \frac{\sin x}{1+\cos x}$$

сами уже определяют знак значения $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Действительно, если x — угол 1-й или 2-й четверти, то указанные выражения дадут знак положительный, и одновременно и значение $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ будет положительным, ибо тогда угол $\frac{x}{2}$ — острый. Если же x — угол 3-й или 4-й четверти, то указанные выражения, как легко видеть, будут иметь знак отрицательный, и одновременно и значение $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ будет отрицательным, так как угол $\frac{x}{2}$ есть угол 2-й четверти.

Пример 1. Вычислить $\sec 7x$, если $\sec 14x = -\frac{9}{7}$.

Так как угол $7x$ вдвое меньше угла $14x$, то применяем формулу половинного угла, причем вместо $\sec 7x$ ищем сначала $\cos 7x$.

$$\cos 7x = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 14x}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1+\left(-\frac{7}{9}\right)}{2}} = \pm\sqrt{\frac{9-7}{18}} =$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1}{9}} = \pm\frac{1}{3},$$

следовательно,

$$\sec 7x = \pm 3.$$

Пример 2. Определить $\operatorname{tg} 22^\circ 30'$.

Применяем формулу (А):

$$\operatorname{tg} 22^\circ 30' = \frac{1-\cos 45^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}-1.$$

Пример 3. Вычислить $\operatorname{tg}\frac{a}{4}$, если $\operatorname{tg}\frac{a}{2}=7$, причем $\frac{a}{2}$ — угол третьей четверти.

Сперва определяем

$$\sec\frac{a}{2} = -\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}} = -\sqrt{1+7^2} = -\sqrt{50}.$$

Теперь находим

$$\cos\frac{a}{2} = -\frac{1}{\sqrt{50}};$$

затем

$$\sin\frac{a}{2} = -\sqrt{1-\cos^2\frac{a}{2}} = -\sqrt{1-\frac{1}{50}} = -\frac{7}{\sqrt{50}}.$$

По формуле (А) получаем

$$\operatorname{tg}\frac{a}{4} = \frac{1-\cos\frac{a}{2}}{\sin\frac{a}{2}} = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{50}}}{-\frac{7}{\sqrt{50}}} = -\frac{\sqrt{50}+1}{7}.$$

§ 141. Из формул (8а) и (8б) легко получить:

$$\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}, \qquad (10а)$$

$$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}. \qquad (11а)$$

Словесное выражение этих формул следующее:

квадрат синуса угла равен полуразности между единицей и косинусом удвоенного угла;

квадрат косинуса угла равен полусумме единицы и косинуса удвоенного угла.

В таком виде формулы имеют довольно широкое применение. Как мы увидим в дальнейшем, часто бывает, что квадраты синусов и косинусов неудобны для преобразования. В таких случаях их выражают через косинусы удвоенных углов по формулам (10а) и (11а).

Примеры.

$$\sin^2 117^\circ = \frac{1-\cos 234^\circ}{2}, \quad \cos^2 500^\circ = \frac{1+\cos 1000^\circ}{2},$$

$$\sin^2 5x = \frac{1-\cos 10x}{2}, \quad \cos^2 8\frac{1}{2}x = \frac{1+\cos 17x}{2},$$

$$\sin^2(a+b) = \frac{1-\cos(2a+2b)}{2}, \quad \cos^2(a-b) = \frac{1+\cos(2a-2b)}{2}.$$

Из формул (10а) и (11а) посредством умножения на 2 и перемены мест правой и левой частей получаем

$1-\cos 2a = 2\sin^2 a$	или заменой	$1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$,	(10б)
$1+\cos 2a = 2\cos^2 a$	a через $\frac{x}{2}$	$1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$.	(11б)

Словесное выражение этих формул такое:

сумма единицы и косинуса угла равна удвоенному квадрату косинуса половинного угла;

разность между единицей и косинусом угла равна удвоенному квадрату синуса половинного угла.

Примеры.

$$1+\cos 10^\circ = 2\cos^2 5^\circ, 1-\cos 17^\circ = 2\sin^2 8^\circ 30', 1-\cos 130^\circ = 2\sin^2 65^\circ,$$

$$1+\cos 200^\circ = 2\cos^2 100^\circ, \ 1-\cos 5x = 2\sin^2 2\frac{1}{2}x,$$

$$1+\cos 12x = 2\cos^2 6x,$$

$$1+\sin 14^\circ = 1+\cos 76^\circ = 2\cos^2 38^\circ,$$

$$1-\sin 20^\circ = 1-\cos 70^\circ = 2\sin^2 35^\circ,$$

$$1+\sin a = 1+\cos(90^\circ - a) = 2\cos^2\left(45^\circ - \frac{a}{2}\right),$$

$$1-\sin x = 1-\cos(90^\circ - x) = 2\sin^2\left(45^\circ - \frac{x}{2}\right).$$

Примеры для упражнений

§ 142. 1. Определить $\sin\frac{A}{2}$ и $\cos\frac{A}{2}$, если $\sin A = \frac{24}{25}$, причем A — угол второй четверти.

2. Определить $\operatorname{ctg}\frac{a}{2}$, если $\operatorname{ctg} a = \frac{21}{29}$, причем a — угол третьей четверти.

3. Вычислить все тригонометрические функции угла $5x$, если $\cos 10x = \frac{12}{25}$.

4. Дано, что $\cos x = -\frac{161}{289}$, причем $630^\circ > x > 540^\circ$. Определить все тригонометрические функции угла $\frac{x}{2}$.

5. Дано, что $\sin 6x = \frac{28}{53}$, причем $1080^\circ > 6x > 990^\circ$. Определить все тригонометрические функции угла $3x$.

Доказать тождества (6 — 10):

6. $(\cos a - \cos b)^2 + (\sin a - \sin b)^2 = 4\sin^2\frac{1}{2}(a-b)$.

7. $\frac{1+\cos a + \cos 2a + \cos 3a}{2\cos^2 a + \cos a - 1} = 2\cos a$.

8. $\operatorname{tg}^2\left(45^\circ+\frac{a}{2}\right)=\frac{\sec a+\operatorname{tg} a}{\sec a-\operatorname{tg} a}$.

9. $\frac{1+\operatorname{tg} a \operatorname{tg}\frac{a}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{a}{2}+\operatorname{tg}\frac{a}{2}}=\frac{1}{2}\operatorname{tg} a$.

10. $2(\operatorname{tg} a+\operatorname{ctg} a)\operatorname{tg}\frac{a}{2}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}\right)=\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}\right)^2$.

ГЛАВА XVI

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СУММЫ И РАЗНОСТИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

§ 143. Часто при вычислениях выражений, содержащих тригонометрические функции, бывает удобно применять логарифмы. Предварительно данное выражение приводят к *виду, удобному для логарифмирования*, или, короче, к *логарифмическому виду*, т. е. представляют его в форме одночлена.

В тригонометрии имеется ряд формул, которые могут быть использованы для этой цели. В некоторых случаях, например, могут быть применены формулы (10б) и (11б):

$$1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2} \quad \text{и} \quad 1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2},$$

позволяющие привести к логарифмическому виду сумму или разность единицы и косинуса.

Большое применение в преобразованиях тригонометрических выражений к логарифмическому виду имеют формулы суммы и разности тригонометрических функций.

Формулы суммы и разности синусов

§ 144. Выпишем формулы для синуса суммы и для синуса разности двух углов:

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b,$$
$$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b.$$

Путем почленного сложения их, а затем вычитания получим

$$\left.\begin{aligned}\sin(a+b)+\sin(a-b)&=2\sin a\cos b,\\ \sin(a+b)-\sin(a-b)&=2\cos a\sin b.\end{aligned}\right\} \quad \text{(A)}$$

Так как в левых частях полученных формул содержатся алгебраические суммы тригонометрических функций, а в правых частях — п р о и з в е д е н и я, то эти формулы могут служить для приведения суммы тригонометрических функций к логарифмическому виду. Остается только придать им другую, более удобную, ф о р м у. Для этой цели введем следующие обозначения:

$$a+b=x \quad \text{и} \quad a-b=y,$$

откуда сложением и вычитанием получаем

$$a=\frac{x+y}{2} \quad \text{и} \quad b=\frac{x-y}{2}.$$

Теперь формулы (A) перепишутся так:

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}, \tag{13}$$

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}, \tag{14}$$

что словесно выражается так:

сумма синусов двух углов равна удвоенному произведению синуса полусуммы на косинус полуразности этих углов;

разность синусов двух углов равна удвоенному произведению косинуса полусуммы на синус полуразности тех же углов.

Примеры.

$$\sin 14^\circ+\sin 26^\circ=2\sin\frac{14^\circ+26^\circ}{2}\cos\frac{26^\circ-14^\circ}{2}=2\sin 20^\circ\cos 6^\circ.$$

$$\sin 17^\circ-\sin 3^\circ=2\cos\frac{17^\circ+3^\circ}{2}\sin\frac{17^\circ-3^\circ}{2}=2\cos 10^\circ\sin 7^\circ.$$

$$\sin 63^\circ-\sin 81^\circ=2\cos\frac{63^\circ+81^\circ}{2}\sin\frac{63^\circ-81^\circ}{2}=$$

$$=2\cos 72^\circ\sin(-9^\circ)=-2\cos 72^\circ\sin 9^\circ.$$

$$\sin 5a-\sin 3a=2\cos\frac{5a+3a}{2}\sin\frac{5a-3a}{2}=2\cos 4a\sin a.$$

$$\sin(30^\circ+a)+\sin(30^\circ-a)=2\sin 30^\circ\cos a^{1)}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos a=\cos a.$$

Формулы суммы и разности косинусов

§ 145. Возьмем формулы для косинуса суммы и для косинуса разности двух углов:

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b,$$

$$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b.$$

Путем почленного сложения их, а затем вычитания получим

$$\cos(a+b)+\cos(a-b)=2\cos a\cos b,$$

$$\cos(a+b)-\cos(a-b)=-2\sin a\sin b=2\sin a\sin(-b).$$

Вводя такие же обозначения, как в § 144, т. е.

$$a+b=x \text{ и } a-b=y,$$

откуда

$$a=\frac{x+y}{2} \text{ и } b=\frac{x-y}{2},$$

---

1) $\frac{(30^\circ+a)+(30^\circ-a)}{2}=30^\circ;\quad \frac{(30^\circ+a)-(30^\circ-a)}{2}=a.$

получим

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}, \qquad (15)$$

$$\cos x - \cos y = 2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{y-x}{2}. \qquad (16)$$

Словесно эти формулы выражаются так:

сумма косинусов двух углов равна удвоенному произведению косинуса полусуммы на косинус полуразности этих углов;

разность косинусов двух углов равна удвоенному произведению синуса полусуммы на синус обратной полуразности тех же углов.

Примеры.

$$\cos 23° + \cos 40° = 2\cos\frac{23° + 40°}{2}\cos\frac{40° - 23°}{2} = 2\cos 31°30'\cos 8°30'.$$

$$\cos 70° - \cos 52° = 2\sin\frac{70° + 52°}{2}\sin\frac{52° - 70°}{2} =$$

$$= 2\sin 61°\sin(-9°) = -2\sin 61°\sin 9°.$$

$$\cos 13° - \cos 27° = 2\sin\frac{13° + 27°}{2}\sin\frac{27° - 13°}{2} = 2\sin 20°\sin 7°.$$

$$\cos 9a - \cos 13a = 2\sin\frac{9a + 13a}{2}\sin\frac{13a - 9a}{2} = 2\sin 11a\sin 2a.$$

$$\cos(60° + a) + \cos(60° - a) = 2\cos 60°\cos a^{1)} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos a = \cos a.$$

$$\cos(30° - x) + \cos(30° + x) = 2\cos 30°\cos x.$$

§ 146. При помощи формул (13) — (16) мы можем сложить или вычесть любую пару одноименных тригонометрических функций — синусов или косинусов. Если приходится складывать две взаимнодополнительные тригонометрические функции — синус и косинус, то следует заменить предварительно одну из них через дополнительную функцию дополнительного угла, как показано на следующих примерах:

Примеры.

$$\sin 17° + \cos 29° = \sin 17° + \sin 61° = 2\sin 39°\cos 22°$$

или

$$\sin 17° + \cos 29° = \cos 73° + \cos 29° = 2\cos 51°\cos 22°.$$

Полученные в обоих случаях результаты ($2\sin 39°\cos 22°$ и $2\cos 51°\cos 22°$), очевидно, тождественно равны, так как 39° и 51° углы взаимно дополнительные, а потому $\sin 39° = \cos 51°$.

$$\cos 40° - \sin 40° = \cos 40° - \cos 50° = 2\sin 45°\sin 5°.$$

---

1) $\frac{(60° + a) + (60° - a)}{2} = 60°, \quad \frac{(60° + a) - (60° - a)}{2} = a.$

$$\sin a + \cos b = \sin a + \sin (90^\circ - b) = 2 \sin \frac{a + 90^\circ - b}{2} \cos \frac{90^\circ - b - a}{2} =$$

$$= 2 \sin \left(45^\circ + \frac{a - b}{2}\right) \cos \left(45^\circ - \frac{a + b}{2}\right).$$

§ 147. Часто приходится суммировать не две, а три или четыре тригонометрические функции. В этом случае представить окончательный результат в форме произведения не всегда возможно, а лишь при соответствующем соотношении заданных углов. А именно:

1. В случае трех углов требуется, чтобы сумма или полусумма, разность или полуразность двух углов равнялась третьему углу.

2. В случае четырех углов требуется, чтобы сумма или разность одной пары углов равнялась сумме или разности другой пары.

Пример 1. Преобразовать в произведение выражение

$$\sin 19^\circ + \sin 25^\circ + \sin 31^\circ.$$

Так как полусумма углов 19° и 31° дает 25°, то преобразование возможно.

$$\sin 19^\circ + \sin 25^\circ + \sin 31^\circ = (\sin 19^\circ + \sin 31^\circ) + \sin 25^\circ =$$

$$= 2 \sin 25^\circ \cos 6^\circ + \sin 25^\circ = \sin 25^\circ (2 \cos 6^\circ + 1).$$

Чтобы преобразовать стоящее в скобках выражение, можно прибегнуть к такому приему: выносим 2 за скобки и в полученном выражении $\left(\cos 6^\circ + \frac{1}{2}\right)$ заменяем $\frac{1}{2}$ через $\cos 60^\circ$, после чего применяем формулу (15):

$$2 \sin 25^\circ (\cos 6^\circ + \cos 60^\circ) = 2 \sin 25^\circ \cdot 2 \cos 33^\circ \cos 27^\circ =$$

$$= 4 \sin 25^\circ \cos 33^\circ \cos 27^\circ.$$

Итак,

$$\sin 19^\circ + \sin 25^\circ + \sin 31^\circ = 4 \sin 25^\circ \cos 33^\circ \cos 27^\circ.$$

Пример 2. Представить в виде произведения сумму

$$\cos 2a + \cos 5a + \cos a.$$

Складывать первое слагаемое со вторым нельзя, так как ни сумма ($7a$), ни разность ($3a$), ни полусумма $\left(\frac{7a}{2}\right)$, ни полуразность $\left(\frac{3a}{2}\right)$ не дают третьего угла a. По этой же причине нельзя соединять первое слагаемое с третьим. Но при комбинировании второго слагаемого ($\cos 5a$) с третьим ($\cos a$) видим, что полуразность взятых углов $\left(\frac{5a - a}{2}\right)$ дает оставшийся угол ($2a$).

Следовательно, преобразование возможно, и мы получаем

$$\cos 2a + \cos 5a + \cos a = \cos 2a + (\cos 5a + \cos a) = \cos 2a +$$

$$+2\cos 3a\cos 2a = \cos 2a\,(1+2\cos 3a)^{1)} = 2\cos 2a\left(\frac{1}{2}+\cos 3a\right) =$$
$$= 2\cos 2a\,(\cos 60^\circ + \cos 3a) =$$
$$= 4\cos 2a\cos\left(30^\circ + \frac{3}{2}a\right)\cos\left(30^\circ - \frac{3}{2}a\right).$$

Пример 3. Представить в виде произведения выражение

$$\sin a - \sin 2a + \sin 3a.$$

Суммируя первое слагаемое со вторым, имеем

$$\sin a - \sin 2a + \sin 3a = 2\cos\frac{3a}{2}\sin\left(-\frac{a}{2}\right) + \sin 3a =$$
$$= -2\cos\frac{3a}{2}\sin\frac{a}{2} + \sin 3a.$$

Заметив, что угол $3a$ является удвоенным по отношению к углу $\frac{3a}{2}$, применим формулу (7)

$$\sin 3a = 2\sin\frac{3a}{2}\cos\frac{3a}{2}.$$

Тогда получим

$$-2\cos\frac{3a}{2}\sin\frac{a}{2} + 2\sin\frac{3a}{2}\cos\frac{3a}{2} = 2\cos\frac{3a}{2}\left(\sin\frac{3a}{2} - \sin\frac{a}{2}\right) =$$
$$= 2\cos\frac{3a}{2}\cdot 2\cos\frac{\frac{3}{2}a + \frac{1}{2}a}{2}\sin\frac{\frac{3}{2}a - \frac{1}{2}a}{2} = 4\cos\frac{3a}{2}\cos a\sin\frac{a}{2}.$$

Пример 4. Представить в виде произведения выражение

$$\sin 27^\circ - \sin 1^\circ - \sin 17^\circ + \sin 11^\circ.$$

Так как сумма углов первой пары $(27^\circ + 1^\circ)$ равна сумме углов второй пары $(17^\circ + 11^\circ)$, то преобразование возможно, и мы получаем

$$\sin 27^\circ - \sin 1^\circ - \sin 17^\circ + \sin 11^\circ = (\sin 27^\circ - \sin 1^\circ) - (\sin 17^\circ - \sin 11^\circ) =$$
$$= 2\cos 14^\circ\sin 13^\circ - 2\cos 14^\circ\sin 3^\circ =$$
$$= 2\cos 14^\circ(\sin 13^\circ - \sin 3^\circ) = 4\cos 14^\circ\cos 8^\circ\sin 5^\circ.$$

Пример 5. Доказать тождество

$$\sin(b+c-a) + \sin(c+a-b) + \sin(a+b-c) - \sin(a+b+c) =$$
$$= 4\sin a\sin b\sin c.$$

Здесь возможна любая комбинация: можно взять первое слагаемое со вторым, или первое с третьим, или первое с четвертым.

---

1) Применяя тот же метод, что и в предыдущей задаче, т. е. выносим 2 за скобку и заменяем $\frac{1}{2}$ через $\cos 60^\circ$.

Производим суммирование хотя бы в том порядке, как слагаемые записаны, т. е. первое со вторым и третье с четвертым:

$$\sin(b+c-a)+\sin(c+a-b)+\sin(a+b-c)-\sin(a+b+c)=$$
$$=2\sin\frac{b+c-a+c+a-b}{2}\cos\frac{b+c-a-c-a+b}{2}-$$
$$-2\cos\frac{a+b-c+a+b+c}{2}\sin\frac{a+b+c-a-b+c}{2}=$$
$$=2\sin c\cos(b-a)-2\cos(a+b)\sin c=$$
$$=2\sin c\,[\cos(b-a)-\cos(a+b)]=$$
$$=2\sin c\cdot 2\sin\frac{b-a+a+b}{2}\sin\frac{a+b-b+a}{2}=4\sin c\sin b\sin a.$$

§ 148. Для преобразования суммы или разности квадратов синусов и косинусов предварительно пользуются формулами (10а) и (11а):

$$\sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2},\quad \cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}.$$

Пример 1. Доказать тождество

$$\sin^2 5x-\sin^2 3x=\sin 8x\sin 2x.$$

Имеем

$$\sin^2 5x-\sin^2 3x=\frac{1-\cos 10x}{2}-\frac{1-\cos 6x}{2}=\frac{1}{2}(\cos 6x-\cos 10x)=$$
$$=\frac{2\sin 8x\sin 2x}{2}=\sin 8x\sin 2x.$$

Пример 2. Доказать тождество

$$\cos^2 a+\cos^2(60^\circ+a)+\cos^2(60^\circ-a)=\frac{3}{2}.$$

Заменяя квадраты косинусов по формуле (11а), имеем

$$\cos^2 a+\cos^2(60^\circ+a)+\cos^2(60^\circ-a)=$$
$$=\frac{1+\cos 2a+1+\cos(120^\circ+2a)+1+\cos(120^\circ-2a)}{2}=$$
$$=\frac{3+\cos 2a+2\cos 120^\circ\cos 2a}{2}=\frac{3+\cos 2a+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\cos 2a}{2}=$$
$$=\frac{3+\cos 2a-\cos 2a}{2}=\frac{3}{2}.$$

Пример 3. Доказать тождество

$$\cos^2(b-c)+\cos^2(c-a)+\cos^2(a-b)-1=$$
$$=2\cos(b-c)\cos(c-a)\cos(a-b).$$

Заменяя два квадрата по формуле (11а), получаем

$$\cos^2(b-c)+\cos^2(c-a)+\cos^2(a-b)-1=$$
$$=\frac{1}{2}[1+\cos(2b-2c)+1+\cos(2c-2a)]+\cos^2(a-b)-1=$$
$$=\frac{1}{2}[2+2\cos(a-b)\cos(b-2c+a)]+\cos^2(a-b)-1=$$
$$=\cos(a-b)\cos(b-2c+a)+\cos^2(a-b)=$$
$$=\cos(a-b)[\cos(b-2c+a)+\cos(a-b)]=$$
$$=\cos(a-b)\cdot 2\cos\frac{b-2c+a+a-b}{2}\cos\frac{b-2c+a-a+b}{2}=$$
$$=2\cos(a-b)\cos(a-c)\cos(b-c).$$

Примеры для упражнений

§ 149. Доказать тождества (1 — 10):

1. $\sin 3a+\sin 7a+\sin 10a=4\sin 5a\cos\frac{7a}{2}\cos\frac{3a}{2}$.
2. $\sin a+2\sin 3a+\sin 5a=4\sin 3a\cos^2 a$.
3. $\cos a+\cos 2a+\cos 4a+\cos 5a=4\cos 3a\cos\frac{3a}{2}\cos\frac{a}{2}$.
4. $\cos(b+c-a)-\cos(c+a-b)+\cos(a+b-a)-\cos(a+b+c)=$ $=4\sin a\cos b\sin c$.
5. $\dfrac{\sin 2a+\sin 5a-\sin a}{\cos 2a+\cos 5a+\cos a}=\operatorname{tg} 2a$.
6. $\cos a+\cos b+\cos c+\cos(a+b+c=4\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{b+c}{2}\cos\frac{a+c}{2}$.
7. $\dfrac{\cos 7x+\cos 3x-\cos 5x-\cos x}{\sin 7x-\sin 3x-\sin 5x+\sin x}=\operatorname{ctg} 2x$.
8. $\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)=\sin^2(\alpha+\beta)$.
9. $\sin^2(\alpha-\beta)+\sin^2\beta+2\sin(\alpha-\beta)\sin\beta\cos\alpha=\sin^2\alpha$.
10. $\cos^2(x-y)+\cos^2(y-z)+\cos^2(z-x)-$ $-2\cos(x-y)\cos(y-z)\cos(z-x)=1$.

Доказать тождества (11—16) при условии, что $A+B+C=180°$.

11. $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$.
12. $\cos A+\cos B+\cos C-1=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.
13. $\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C=\operatorname{tg} A\operatorname{tg} B\operatorname{tg} C$.
14. $\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$.
15. $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C-2=2\cos A\cos B\cos C$.
16. $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C-1=-2\cos A\cos B\cos C$.

Формулы суммы и разности тангенсов и котангенсов

§ 150. Мы уделили много места формулам суммирования синусов и косинусов и способам применения этих формул.

Покажем теперь, что можно вывести аналогичные зависимости для тангенсов и котангенсов.

Преобразуем сумму $\operatorname{tg} a+\operatorname{tg} b$ к виду, удобному для логарифмирования. Для этой цели выражаем прежде всего тангенсы по формуле (2)

$$\operatorname{tg} a+\operatorname{tg} b=\frac{\sin a}{\cos a}+\frac{\sin b}{\cos b}=\frac{\sin a\cos b+\cos a\sin b}{\cos a\cos b},$$

или, заменяя числитель полученной дроби по формуле (4) через синус суммы, получаем

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b}.$$

Таким же способом найдем

$$\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b}. \qquad (B)$$

Словесно эти формулы могут быть выражены так:

сумма тангенсов двух углов равна синусу суммы этих же углов, разделенному на произведение их косинусов;

разность тангенсов двух углов равна синусу разности этих же углов, разделенному на произведение их косинусов.

При помощи аналогичного преобразования можно получить формулы

$$\operatorname{ctg} a + \operatorname{ctg} b = \frac{\sin(a+b)}{\sin a \sin b}, \qquad (C)$$

$$\operatorname{ctg} a - \operatorname{ctg} b = \frac{\sin(b-a)}{\sin a \sin b}, \qquad (D)$$

которые словесно выражаются так:

сумма котангенсов двух углов равна синусу суммы этих же углов, разделенному на произведение их синусов;

разность котангенсов двух углов равна синусу обратной разности этих же углов, разделенному на произведение их синусов.

Пример 1. Привести к логарифмическому виду выражения:

а) $\operatorname{tg} 13° + \operatorname{tg} 25°$, б) $\operatorname{tg} 43° - \operatorname{tg} 14°$, в) $\operatorname{ctg} 4° - \operatorname{ctg} 62°$.

Применяя формулы (A), (B), (D), получим

а) $\dfrac{\sin 38°}{\cos 13° \cos 25°}$, б) $\dfrac{\sin 29°}{\cos 43° \cos 14°}$, в) $\dfrac{\sin 58°}{\sin 4° \sin 62°}$.

Пример 2. Привести к логарифмическому виду выражение $\operatorname{tg} 22° + \operatorname{ctg} 33°$.

Решение.

$$\operatorname{tg} 22° + \operatorname{ctg} 33° = \operatorname{tg} 22° + \operatorname{tg} 57° = \frac{\sin 79°}{\cos 22° \cos 57°}.$$

Пример 3. Доказать тождество

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} 2a - \operatorname{tg} 3a = -\operatorname{tg} a \operatorname{tg} 2a \operatorname{tg} 3a.$$

Решение.

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} 2a - \operatorname{tg} 3a = \frac{\sin(a+2a)}{\cos a \cos 2a} - \frac{\sin 3a}{\cos 3a} = \frac{\sin 3a(\cos 3a - \cos a \cos 2a)}{\cos a \cos 2a \cos 3a} =$$

$$= \frac{\sin 3a[\cos(2a+a) - \cos a \cos 2a]}{\cos a \cos 2a \cos 3a} =$$

$$= \frac{\sin 3a[\cos 2a \cos a - \sin 2a \sin a - \cos a \cos 2a]}{\cos a \cos 2a \cos 3a} =$$

$$= \frac{\sin 3a(-\sin 2a \sin a)}{\cos a \cos 2a \cos 3a} = -\operatorname{tg} a \operatorname{tg} 2a \operatorname{tg} 3a.$$

Примеры для упражнений

§ 151. Доказать тождества (1 — 8):

1. $\mathrm{ctg}(15^\circ - a) + \mathrm{tg}(15^\circ + a) = \frac{4\cos 2a}{1 - 2\sin 2a}$;
2. $\mathrm{tg}(b - c) + \mathrm{tg}(c - a) + \mathrm{tg}(a - b) = \mathrm{tg}(b - c)\,\mathrm{tg}(c - a)\,\mathrm{tg}(a - b)$;
3. $\mathrm{tg}\,3x - \mathrm{tg}\,2x - \mathrm{tg}\,x = \mathrm{tg}\,3x\,\mathrm{tg}\,2x\,\mathrm{tg}\,x$;
4. $\mathrm{tg}\,30^\circ + \mathrm{tg}\,40^\circ + \mathrm{tg}\,50^\circ + \mathrm{tg}\,60^\circ = \frac{8}{\sqrt{3}}\cos 20^\circ$;
5. $\mathrm{tg}\,a + \mathrm{tg}\,b + \mathrm{tg}\,c - \mathrm{tg}\,a\,\mathrm{tg}\,b\,\mathrm{tg}\,c = \frac{\sin(a + b + c)}{\cos a\cos b\cos c}$;
6. $\mathrm{tg}\,a\,\mathrm{tg}(60^\circ + a)\,\mathrm{tg}(120^\circ + a) = -\mathrm{tg}\,3a$;
7. $\mathrm{tg}\,20^\circ\,\mathrm{tg}\,40^\circ\,\mathrm{tg}\,80^\circ = \mathrm{tg}\,60^\circ$;
8. $\frac{1}{2}\mathrm{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\mathrm{tg}\frac{x}{4} + \mathrm{ctg}\,x = \frac{1}{4}\mathrm{ctg}\frac{x}{4}$.

ГЛАВА XVII

ПРИВЕДЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ К ЛОГАРИФМИЧЕСКОМУ ВИДУ

§ 152. Для приведения тригонометрических выражений к логарифмическому виду можно пользоваться, главным образом, формулами для суммирования тригонометрических функций (гл. XVI) и формулами (10а), (11а), (10б) и (11б).

Здесь мы покажем некоторые приемы, ведущие к требуемой цели.

Пример 1. Привести к логарифмическому виду выражения:

а) $1 + 2\cos x$, б) $1 - 2\sin x$, в) $\sqrt{3} - 3\cos x$, г) $1 + \mathrm{tg}\,x$.

Решение.

а) $$1 + 2\cos x = 2\left(\frac{1}{2} + \cos x\right) = 2(\cos 60^\circ + \cos x) = \\ = 4\cos\left(30^\circ + \frac{x}{2}\right)\cos\left(30^\circ - \frac{x}{2}\right),$$

б) $$1 - 2\sin x = 2\left(\frac{1}{2} - \sin x\right) = 2(\sin 30^\circ - \sin x) = \\ = 4\cos\left(15^\circ + \frac{x}{2}\right)\sin\left(15^\circ - \frac{x}{2}\right),$$

в) $$\sqrt{3} - 2\cos x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x\right) = 2(\cos 30^\circ - \cos x) = \\ = 4\sin\left(15^\circ + \frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2} - 15^\circ\right),$$

г) $$1 + \mathrm{tg}\,x = \mathrm{tg}\,45^\circ + \mathrm{tg}\,x = \frac{\sin(45^\circ + x)}{\cos 45^\circ\cos x}.$$

Пример 2. Привести к логарифмическому виду выражения:

а) $1 - 4\sin^2 a$, б) $3 - 4\cos^2 a$, в) $1 - \cos^2 a - \cos^2 b$, *Решение.*

а) $1-4\sin^2 a=4\left(\frac{1}{4}-\sin^2 a\right)=4(\sin^2 30^\circ-\sin^2 a)=$
$$=4\left[\frac{1-\cos 60^\circ}{2}-\frac{1-\cos 2a}{2}\right]=2(\cos 2a-\cos 60^\circ)=$$
$$=4\sin(a+30^\circ)\sin(30^\circ-a),$$

б) $3-4\cos^2 a=4\left(\frac{3}{4}-\cos^2 a\right)=4(\cos^2 30^\circ-\cos^2 a)=$
$$=4\left[\frac{1+\cos 60^\circ}{2}-\frac{1+\cos 2a}{2}\right]=2(\cos 60^\circ-\cos 2a)=$$
$$=4\sin(30^\circ+a)\sin(a-30^\circ),$$

в) $1-\cos^2 a-\cos^2 b=\sin^2 a-\cos^2 b=\frac{1-\cos 2a}{2}-\frac{1+\cos 2b}{2}=$
$$=-\frac{1}{2}(\cos 2a+\cos 2b)=-\cos(a+b)\cos(a-b).$$

Пример 3. Привести к логарифмическому виду выражение
$$1-3\,\mathrm{tg}^2 a.$$

Решение.
$$1-3\,\mathrm{tg}^2 a=3\left(\frac{1}{3}-\mathrm{tg}^2 a\right)=3(\mathrm{tg}^2 30^\circ-\mathrm{tg}^2 a)=$$
$$=3(\mathrm{tg}\,30^\circ+\mathrm{tg}\,a)(\mathrm{tg}\,30^\circ-\mathrm{tg}\,a)=3\cdot\frac{\sin(30^\circ+a)}{\cos 30^\circ\cos a}\cdot\frac{\sin(30^\circ-a)}{\cos 30^\circ\cos a}=$$
$$=\frac{3\sin(30^\circ+a)\sin(30^\circ-a)}{\cos^2 30^\circ\cos^2 a}=\frac{4\sin(30^\circ+a)\sin(30^\circ-a)}{\cos^2 a}.$$

Пример 4. Привести к логарифмическому виду выражения:
$$\text{а) } 1+\sin a+\cos a,\quad \text{б) } 1-\sin a+\cos a.$$

Решение.

а) $1+\sin a+\cos a=\sin a+(1+\cos a)=\sin a+2\cos^2\frac{a}{2}=$
$$=2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}+2\cos^2\frac{a}{2}=2\cos\frac{a}{2}\left(\sin\frac{a}{2}+\cos\frac{a}{2}\right)=$$
$$=2\cos\frac{a}{2}\left[\sin\frac{a}{2}+\sin\left(90^\circ-\frac{a}{2}\right)\right]=4\cos\frac{a}{2}\sin 45^\circ\cos\left(45^\circ-\frac{a}{2}\right).$$

б) Пользуясь таким же приемом, найдем
$$1-\sin a+\cos a=4\cos\frac{a}{2}\cos 45^\circ\sin\left(45^\circ-\frac{a}{2}\right).$$

Пример 5. Привести к логарифмическому виду выражение
$$\sin^2(a+b)-\cos^2 a-\cos^2 b.$$

Решение.
$$\sin^2(a+b)-\cos^2 a-\cos^2 b=\sin^2(a+b)-\frac{1+\cos 2a}{2}-\frac{1+\cos 2b}{2}=$$
$$=\sin^2(a+b)-1-\frac{\cos 2a+\cos 2b}{2}=$$
$$=-\cos^2(a+b)-\cos(a+b)\cos(a-b)=$$
$$=-\cos(a+b)[\cos(a+b)+\cos(a-b)]=-2\cos a\cos b\cos(a+b).$$

Примеры для упражнений

§ 153. Привести к логарифмическому виду выражения (1—25):

1. $1-2\cos a$;
2. $1+2\sin b$;
3. $\sqrt{3}+2\sin x$;
4. $\sqrt{3}-2\cos x$;
5. $1-4\cos^2 x$;
6. $0{,}25-\sin^2 y$;
7. $3-4\sin^2 a$;
8. $\cos^2 x-\sin^2 y$;
9. $3-\operatorname{tg}^2 x$;
10. $1-3\operatorname{ctg}^2 x$;
11. $\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{ctg}^2 y$;
12. $\sin^2(a+b)-\sin^2 a-\sin^2 b$;
13. $1+\sin x-\cos x$;
14. $1+\sin 6x$;
15. $1-\sin 17x$;
16. $\sin x+\cos x-1$;
17. $\sin x+\sin 2x+\sin 3x$;
18. $\cos x+\cos 2x+\cos 3x$;
19. $\cos x-\cos 2x+\cos 3x$;
20. $\sin(a+b)+\cos a+\cos b$;
21. $\sin a+\cos a+\sin 2a+\cos 2a+$ $+\sin 3a+\cos 3a$;
22. $\cos 5x+\cos 9x+\cos 3x+\cos 7x$;
23. $2\sin^2\alpha+\sqrt{3}\sin 2\alpha-1$;
24. $1+\sin x+\cos x+\operatorname{tg} x$;
25. $\cos 5a+3\cos 7a+3\cos 9a+$ $+\cos 11a$.

§ 154. В некоторых случаях для приведения выражений к виду, удобному для логарифмирования, применяется особый прием, который называется *способом введения вспомогательного угла*. Этот способ заключается, вообще, в следующем:

Имеется алгебраическая сумма двух слагаемых, например $A+B$, где под буквами A и B могут подразумеваться какие угодно выражения. Требуется преобразовать эту сумму к виду, удобному для логарифмирования.

Для этого берем в данном выражении $(A+B)$ какое-нибудь слагаемое, например A, за скобку:

$$A+B=A\left(1+\frac{B}{A}\right).$$

Отношение $\frac{B}{A}$ есть некоторое число — положительное или отрицательное. Но тангенсы углов могут принимать любые значения. Поэтому при всяком значении отношения $\frac{B}{A}$ всегда найдется такой угол, тангенс которого будет равен этому отношению $\left(\frac{B}{A}\right)$.

Обозначая такой угол греческой буквой φ (читается „фи“), имеем

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{B}{A}.$$

Теперь данное нам выражение $(A+B)$ можно преобразовать так:

$$A+B=A\left(1+\frac{B}{A}\right)=A(1+\operatorname{tg}\varphi)=A(\operatorname{tg}45^\circ+\operatorname{tg}\varphi)=$$

$$=\frac{A\sin(45^\circ+\varphi)}{\cos 45^\circ\cos\varphi},$$

где вспомогательный угол φ определяется из условия

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{B}{A}.$$

В указанном общем методе возможны иногда и некоторые упрощения, а именно:

1. Если слагаемые A и B имеют одинаковые знаки, то отношение положительно, и потому мы можем принять его равным квадрату тангенса вспомогательного угла φ, т. е. $\frac{B}{A} = \operatorname{tg}^2\varphi$, после чего имеем

$$A + B = A\left(1 + \frac{B}{A}\right) = A(1 + \operatorname{tg}^2\varphi) = A\sec^2\varphi = \frac{A}{\cos^2\varphi}.$$

2. Если возьмем за скобки бо́льшее (по абсолютному значению) из двух слагаемых, то отношение, полученное в скобках, как число по абсолютному значению меньшее единицы, может быть принято за $\cos\varphi$.

Пусть, например, A по абсолютному значению больше B. Тогда имеем

$$A + B = A\left(1 + \frac{B}{A}\right) = A(1 + \cos\varphi) = 2A\cos^2\frac{\varphi}{2}.$$

Покажем применение способа введения вспомогательного угла для преобразования к логарифмическому виду выражения

$$a\sin x + b\cos x.$$

Берем за скобку один из коэфициентов (a или b — безразлично), а получающееся при этом в скобках отношение коэфициентов определяем как тангенс[1]) вспомогательного угла.

$$a\sin x + b\cos x = a\left(\sin x + \frac{b}{a}\cos x\right) = a(\sin x + \operatorname{tg}\varphi\cos x) =$$

$$= a\left(\sin x + \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos x\right) = \frac{a(\sin x\cos\varphi + \cos x\sin\varphi)}{\cos\varphi} = \frac{a\sin(x+\varphi)}{\cos\varphi}.$$

Итак,

$$a\sin x + b\cos x = \frac{a\sin(x+\varphi)}{\cos\varphi},$$

причем вспомогательный угол φ определяется из условия

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}.$$

Таким же образом получим

$$a\sin x - b\cos x = \frac{a\sin(x-\varphi)}{\cos\varphi},$$

где угол φ определяется из того же условия

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}.$$

---

[1]) Или котангенс.

Пример 1. Привести к логарифмическому виду выражение

$$3\sin 40^\circ + 5\cos 40^\circ.$$

Решение.

$$3\sin 40^\circ + 5\cos 40^\circ = 3\left(\sin 40^\circ + \frac{5}{3}\cos 40^\circ\right) =$$

$$= 3(\sin 40^\circ + \operatorname{tg}\varphi\cos 40^\circ) = 3\left(\sin 40^\circ + \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos 40^\circ\right) =$$

$$= 3\,\frac{(\sin 40^\circ\cos\varphi + \sin\varphi\cos 40^\circ)}{\cos\varphi} = \frac{3\sin(40^\circ+\varphi)}{\cos\varphi},$$

причем угол φ определяется из условия

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{5}{3}.$$

Пример 2. Привести к логарифмическому виду

$$\sin 29^\circ - \sqrt{3}\cos 29^\circ.$$

Так как здесь один из коэфициентов равен единице, то заменяем непосредственно второй коэфициент ($\sqrt{3}$) через $\operatorname{tg}\varphi$, или, так как

$$\sqrt{3} = \operatorname{tg} 60^\circ,$$

то вспомогательный угол будет 60°. Получаем

$$\sin 29^\circ - \sqrt{3}\cos 29^\circ = \sin 29^\circ - \operatorname{tg} 60^\circ\cos 29^\circ =$$

$$= \sin 29^\circ - \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ}\cos 29^\circ = \frac{\sin 29^\circ\cos 60^\circ - \cos 29^\circ\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} =$$

$$= \frac{\sin(29^\circ - 60^\circ)}{\cos 60^\circ} = -2\sin 31^\circ.$$

На этом примере видно, что указанный метод особенно удобен тогда, когда вспомогательный угол определяется сразу без вычислений.

Пример 3. Привести к логарифмическому виду

$$9\cos 4x + \sin 4x.$$

Решение.

$$9\cos 4x + \sin 4x = \operatorname{tg}\varphi\cos 4x + \sin 4x =$$

$$= \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos 4x + \sin 4x = \frac{\sin\varphi\cos 4x + \cos\varphi\sin 4x}{\cos\varphi} = \frac{\sin(\varphi + 4x)}{\cos\varphi}$$

причем угол φ определяется из условия

$$\operatorname{tg}\varphi = 9.$$

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

ГЛАВА XVIII

РАДИАЛЬНОЕ ИЗМЕРЕНИЕ УГЛОВ

§ 155. До сих пор учащимся известна одна система измерения углов, в которой за единицу измерения принимается одна девяностая часть прямого угла, называемая *градусом*. В свою очередь один градус делится на 60 частей, называемых *минутами*, а одна минута делится на 60 частей, называемых *секундами*.

Кроме этой системы измерения углов существуют еще другие.

Так во Франции с введением метрической системы мер было предложено установить десятичную систему измерения углов, соответствующую в принципе метрической системе мер. В десятичной системе измерения углов за единицу измерения принимается одна сотая ($^1/_{100}$) часть прямого угла, называемая *градом* (^{g}), сотую ($^1/_{100}$) часть града называют *минутой* ($'$), а сотую ($^1/_{100}$) часть минуты называют *секундой* ($''$). Эта система совершенно очевидно имеет большие удобства при арифметических вычислениях, вследствие того, что, как в метрической системе мер вообще, составное именованное число легко заменяется десятичными дробями, что сводит превращение и раздробление именованных чисел при этой системе измерения углов к перестановке запятой. Так, например, чтобы раздробить $24^g21'37''$ в секунды, пишем сразу $242137''$. Этот же угол в минутах выразится так: $2421',37$, в градах — $24,2137^g$, в прямых углах — $0,242137d$. Однако, несмотря на удобства при вычислениях, десятичная система измерения углов не получила во Франции широкого распространения, и пользуются ею преимущественно при геодезических измерениях.

В математике особое значение имеет так называемое *радиальное измерение* углов.

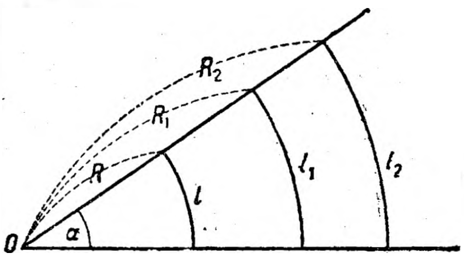
§ 156. Из геометрии известно, что длины дуг, соответствующих одному и тому же центральному углу, относятся между собою как радиусы, т. е. имеем (черт. 86)

$$\frac{l}{R}=\frac{l_1}{R_1}=\frac{l_2}{R_2}=\dots$$

Таким образом оказывается, что для каждого данного угла отношение длины дуги к длине радиуса есть величина вполне определенная, совершенно не зависящая от выбора радиуса и зависящая только от величины взятого угла.

Каждому заданному значению угла α отвечает вполне определенное значение отношения $\frac{l}{R}$, а с изменением угла α изменяется и значение отношения $\frac{l}{R}$, а потому это отношение $\left(\frac{l}{R}\right)$ есть функция угла α.

При этом зависимость, существующая между углом α и отношением $\frac{l}{R}$, очень простая, а именно: прямая пропорциональность. Это значит, что если углу в a° соответствует некоторое значение m отношения $\frac{l}{R}$, то, например, углу удвоенному $(2a^\circ)$ соответствует значение $(2m)$, вдвое большее.



Черт. 86.

В самом деле, если удвоить угол, то (при сохранении того же радиуса) удвоится и длина (l) соответствующей данному углу дуги, а следовательно, значение отношения $\frac{l}{R}$ также удвоится. Вообще, значение отношения $\frac{l}{R}$ увеличится во столько же раз, во сколько раз увеличится значение угла α. А это и значит, что отношение $\frac{l}{R}$ пропорционально углу α.

Вследствие этой пропорциональности отношение $\frac{l}{R}$ может служить мерой угла α.

В математике, главным образом в высшей математике, это отношение $\frac{l}{R}$ принимается за меру угла α, и эта мера называется *радиальной мерой* угла.

Так как величины l и R измеряются одними и теми же единицами — линейными, — то численные значения отношения $\frac{l}{R}$ суть отвлеченные числа.

Определим для примера радиальную меру углов в 180°, 90° и 60°.

Если обозначим буквой R длину произвольного радиуса, то дуга в 180° равна половине окружности, т. е. ее длина равна

$$\frac{1}{2}\cdot 2\pi R = \pi R,$$

а потому радиальная мера 180° равна

$$\frac{\pi R}{R} = \pi \text{ (т. е. } = 3{,}1415926\ldots);$$

дуга в 90° составляет четверть окружности, т. е. ее длина равна

$$\frac{1}{4}\cdot 2\pi R = \frac{\pi R}{2},$$

а потому радиальная мера 90° равна

$$\frac{\frac{1}{2}\pi R}{R} = \frac{\pi}{2} \text{ (т. е.} = 1{,}5707963\ldots);$$

таким же образом найдем, что радиальная мера 60° равна

$$\frac{\frac{1}{3}\pi R}{R} = \frac{\pi}{3} \text{ (т. е.} = 1{,}0471975\ldots).$$

Ввиду того, что иногда бывает надобность в переводе градусной меры угла в радиальную меру, приведем сравнительную таблицу градусной и радиальной меры некоторых часто встречающихся углов.

Градусная мера угла	Радиальная мера угла	Радиальная мера угла с точностью до 0,0000001
180°	π	3,1415926
90°	$\frac{\pi}{2}$	1,5707963
60°	$\frac{\pi}{3}$	1,0471975
45°	$\frac{\pi}{4}$	0,7853981
36°	$\frac{\pi}{5}$	0,6283185
30°	$\frac{\pi}{6}$	0,5235987
22°30′	$\frac{\pi}{8}$	0,3926990
18°	$\frac{\pi}{10}$	0,3141593
15°	$\frac{\pi}{12}$	0,2617994

§ 157. За единицу радиального измерения углов (*радиан*) принят такой угол, радиальная мера которого выражается числом 1, т. е., иначе говоря, такой угол, у которого **длина центральной дуги равна длине радиуса, которым эта дуга описана**[1]).

Вычислим градусную меру этого угла (в один радиан). Мы видели (§ 156), что радиальная мера угла в 180° равна π, а следовательно:

радиальная мера угла в $\frac{180°}{\pi}$ равна 1 (радиан).

Заменяя здесь π его приближенным значением 3,1415926536 и выполнив деление 180° на это число, найдем:

$$\frac{180°}{\pi} = 57°17'45'' \text{ (с точностью до } 1''\text{)}.$$

Это и есть градусная мера одного радиана.

§ 158. Итак, теперь мы имеем два различных способа измерения углов: общепринятый — градусный — и специальный — радиальный. Для перевода одной меры угла в другую необходимо найти соотношение между этими двумя мерами.

Пусть градусная мера угла равна $a°$, а его радиальная мера равна α. Мы знаем из § 156, что радиальная мера угла прямопропорциональна его градусной мере. Кроме того, из § 156 нам известно, что, в

---

[1]) Отношение $\frac{l}{R}$ принимает значение 1, когда $l = R$, т. е. когда длина дуги равна длине радиуса.

частности, радиальная мера угла в 180° равна π. Отсюда следует, что имеет место пропорция

$$\frac{\alpha}{a}=\frac{\pi}{180}.$$

Определяя из этого соотношения между радиальной и градусной мерой угла один раз α, а другой раз a, получим формулы, выражающие радиальную меру (α) угла через его градусную меру (a) и градусную меру (a) угла через его радиальную меру (α), в следующем виде:

$$\alpha=\frac{\pi}{180}\cdot a \qquad \text{(I)}$$

и

$$a^\circ=\frac{180^\circ}{\pi}\cdot\alpha. \qquad \text{(II)}$$

Примеры. Радиальная мера угла в 15° равна (по формуле I)

$$\frac{\pi\cdot 15}{180}=\frac{\pi}{12};$$

радиальная мера угла в $1'$ равна

$$\frac{\pi\cdot\frac{1}{60}}{180}=\frac{\pi}{10800}.$$

Градусная мера угла в $\frac{\pi}{20}$ (радианов) равна (по формуле II)

$$\frac{180^\circ\cdot\frac{\pi}{20}}{\pi}=9^\circ;$$

градусная мера угла в $\frac{\pi}{900}$ (радианов) равна

$$\frac{180^\circ\cdot\frac{\pi}{900}}{\pi}=\left(\frac{1}{5}\right)^\circ=12'.$$

Мы видели в § 157, что отношение $\frac{180^\circ}{\pi}$ есть не что иное, как градусная мера одного радиана, равная $57^\circ17'45''$. Поэтому формулу (II) мы можем представить еще в виде

$$a^\circ=57^\circ17'45''\cdot\alpha.$$

Примеры. Сколько градусов содержит угол, радиальная мера которого равна $\frac{2}{3}$?

$$57^\circ17'45''\cdot\frac{2}{3}=\frac{114^\circ35'30''}{3}=38^\circ11'50''.$$

Сколько градусов содержится в угле в 3 радиана?

$$57^\circ17'45''\cdot 3=171^\circ53'15''.$$

Примеры для упражнений

§ 159. 1) Написать радиальную меру углов:

$$105°, \quad 18°, \; 57°30', \quad 14°24', \quad 78°45'.$$

2) Принимая $\pi = 3{,}1416$ [1]), вычислить радиальную меру углов:

$$25°50', \quad 37°30', \quad 82°30', \quad 157°30'.$$

3) Принимая $\pi = \frac{22}{7}$, вычислить с точностью до 0,01 радиальную меру углов:

$$36°22'24'', \quad 70°33'36'', \quad 116°2'46'', \quad 171°41'50''.$$

4) Определить градусную меру углов:

$$\frac{7\pi}{45}, \quad \frac{5\pi}{27}, \quad \frac{5\pi}{24}, \quad \frac{3}{4}, \quad 2\frac{1}{2}, \quad 0{,}3927, \quad 2{,}8798.$$

§ **160**. Приведем (без доказательства) две важные теоремы о соотношении между радиальной мерой (α) угла (первой четверти) и его тригонометрическими функциями ($\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$).

Теорема 1. Отношение синуса к величине угла (в радиальном измерении) стремится к единице при стремлении величины угла к нулю что записывается так:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1.$$

Теорема 2. Значение угла (в радиальном измерении) заключено между значениями его синуса и тангенса, причем оно больше значения синуса и меньше значения тангенса, т. е.

$$\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha.$$

ГЛАВА XIX

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

§ **161**. Вместо того, чтобы при вычислениях с тригонометрическими функциями, требующих применения логарифмов сначала брать значения этих функций, по таблицам натуральных значений, а потом по логарифмическим таблицам отыскивать их логарифмы, гораздо удобнее пользоваться заранее составленными таблицами логарифмов тригонометрических функций.

Такие таблицы действительно составлены и носят название таблиц логарифмов тригонометрических функций.

§ **162**. Применяемые на практике логарифмические таблицы бывают по большей части четырехзначными, пятизначными или семизначными.

Следует иметь в виду, что в практических задачах точность данных часто не превышает 3, 4 и, очень редко, 5 десятичных знаков и что,

---

[1]) Полезно иметь в виду, что число 31416 разлагается на множители следующим образом: $2^3\cdot 3\cdot 7\cdot 11\cdot 17$.

конечно, результаты вычислений не могут быть точнее, чем данные, из коих они получены. Поэтому для решения многих задач вполне пригодны четырехзначные таблицы, которые дают результаты с достаточной точностью. Когда требуется получать более точные результаты, пользуются пятизначными или семизначными таблицами.

Так как способ пользования логарифмическими таблицами всегда дается в объяснениях к любым таблицам, то было бы совершенно излишним повторять то же самое в этой книге; поэтому в дальнейшем изложении приведены только несколько примеров вычисления при помощи таблиц.

В этих примерах рекомендуется обратить внимание на расположение действий при вычислениях. Дело в том, что при выписывании из таблиц значительного числа логарифмов всегда возможно сделать какую-нибудь ошибку, которую в случае неаккуратности расположения действий очень трудно отыскать.

Все дальнейшие вычисления в этой книге произведены при помощи „Четырехзначных математических таблиц" В. Брадиса, но учащиеся могут пользоваться и всякими другими четырехзначными таблицами.

§ 163. При помощи логарифмических тригонометрических таблиц решаются две задачи:

1. Дана величина угла, и требуется найти логарифм какой-нибудь его тригонометрической функции.

2. Дан логарифм какой-нибудь тригонометрической функции угла, и требуется найти величину угла.

Нахождение логарифма тригонометрической функции данного угла

§ 164. Если заданный угол выражается только в градусах и минутах, причем число минут кратно 6, то искомые значения логарифмов выписываются непосредственно из таблиц[1]).

Так, например, прямо из таблиц находим:

$$\begin{aligned} \lg\sin\ 25^\circ 54' &= \bar{1},6403, \\ \lg\cos\ 56^\circ 18' &= \bar{1},7442, \\ \lg\operatorname{tg}\ 42^\circ 00' &= \bar{1},9544, \\ \lg\operatorname{ctg}\ 7^\circ 22' &= 0,8844, \\ \lg\cos\ 84^\circ 35' &= \bar{2},9750. \end{aligned}$$

Если же величина угла выражается в градусах и минутах, причем число минут не кратно 6, то приходится выписывать табличное значение логарифма ближайшего угла меньшего, чем данный, и затем вводить так называемую поправку на минуты (от 1' до 5').

Вычисление поправки на минуты производится интерполированием и основано на допущении наличия пропорциональности между прираще-

[1]) В четырехзначных таблицах В. Брадиса логарифмы тригонометрических функций даются для углов через 6', за следующими исключениями: для синусов углов от 0° до 9°, для косинусов углов от 81° до 90° и для тангенсов и котангенсов углов от 0° до 9° и от 81° до 90° логарифмы даются для углов через 1'.

ниями логарифма тригонометрической функции и приращениями угла при малых приращениях последнего.

Так, например, для логарифмов синусов углов от 17°1′ до 17°48′ все время разность двух последовательных логарифмов равна 24, потом она переходит в 23, до этого была 25 (см. таблицу логарифмов).

Если, например, при увеличении угла на 6′ логарифм синуса увеличивается на 0,0024, то при увеличении угла на 1′, 2′, 3′, 4′... логарифмы синусов увеличатся на 0,0004, 0,0008, 0,0012, 0,0016,..., т. е. приращения логарифма синуса пропорциональны приращениям угла при малых приращениях последнего.

Покажем общий прием, при помощи которого производится вычисление поправки интерполированием.

Положим, например, требуется найти $\lg \sin A^\circ (B+C)'$, где B есть число кратное 6, а C есть остаток от деления числа минут данного угла на 6.

Непосредственно из таблиц найдем значения логарифмов синусов двух углов, между которыми заключен данный угол $A^\circ (B+C)'$.

Пусть, например, $\lg \sin A^\circ B' = M_1$ и $\lg \sin A^\circ (B+6)' = M_2$.

Разность между этими логарифмами $M_2 - M_1 = \Delta$ [1]).

Эта разность Δ соответствует приращению угла на 6′. Соответствующее же приращение (x) логарифма синуса при увеличении угла на C' определится из пропорции

$$x : \Delta = C : 6,$$

откуда

$$x = \frac{\Delta C}{6}.$$

Это и есть та поправка, которую надо прибавить к $\lg \sin A^\circ B'$ или вычесть из $\lg \sin A^\circ (B+6)'$, чтобы получить $\lg \sin A^\circ (B+C)'$.

Поэтому искомый $\lg \sin A^\circ (B+C)'$ равен

$$M_1 + \frac{\Delta C}{6}$$

или

$$M_2 - \frac{\Delta C}{6}.$$

Для сбережения времени можно и не вычислять величины поправки по выведенной формуле, а брать ее в *готовом виде* из таблиц „пропорциональных частей“ (partes proportionales), помещенных с правой стороны каждой страницы логарифмических таблиц. Однако на всякий случай необходимо уметь обходиться и без этой вспомогательной таблицы.

Пример 1. Найти $\lg \sin 25°53'$.

Из таблиц находим:

$$\lg \sin 25°54' = \bar{1},6403.$$

---

[1]) Греческой буквой Δ (читается „дельта“) обыкновенно обозначается табличная разность двух смежных логарифмов.

Поправка на $1'$ равна 3 единицам 4-го десятичного знака. Следовательно,

$$\lg \sin 25°53' = \bar{1},6403 - 0,0003 = \bar{1},6400.$$

Действия удобно располагать так:

$$\begin{array}{r} \lg \sin 25°54' = \bar{1},6403 \\ -1 \qquad\quad -3 \\ \hline \lg \sin 25°53' = \bar{1},6400. \end{array}$$

Поправка вычитается, так как при уменьшении угла уменьшается его синус, а следовательно, уменьшается и логарифм синуса.

Замечание. Указанного расположения действия полезно придерживаться только на первых порах. После же достаточной тренировки надобность в такой записи отпадает, так как учащиеся приобретут навыки достаточно быстро производить указанные вычисления в уме.

Пример 2. Найти $\lg \cos 56°17'$.

$$\begin{array}{r} \lg \cos 56°18' = \bar{1},7442 \\ -1' \qquad\quad +2 \\ \hline \lg \cos 56°17' = \bar{1},7444. \end{array}$$

Поправка прибавляется, так как при уменьшении угла увеличивается его косинус, а следовательно, увеличивается и логарифм косинуса.

Пример 3. Найти $\lg \operatorname{tg} 42°26'$.

$$\begin{array}{r} \lg \operatorname{tg} 42°24' = \bar{1},9605 \\ +2' \qquad\quad +5 \\ \hline \lg \operatorname{tg} 42°26' = \bar{1},9610. \end{array}$$

Поправка прибавляется, так как с увеличением угла увеличивается его тангенс, а следовательно, увеличивается и логарифм тангенса.

Пример 4. Найти $\lg \operatorname{ctg} 21°51'$.

$$\begin{array}{r} \lg \operatorname{ctg} 21°48' = 0,3980 \\ +3' \qquad\quad -11 \\ \hline \lg \operatorname{ctg} 21°51' = 0,3969. \end{array}$$

Поправка вычитается, так как при увеличении угла уменьшается его котангенс, а значит, уменьшается и логарифм котангенса.

Пример 5. Найти $\lg \sin 37°50'$.

$$\begin{array}{r} \lg \sin 37°48' = \bar{1},7874 \\ +2' \qquad\quad +2 \\ \hline \lg \sin 37°50' = \bar{1},7876. \end{array}$$

Пример 6. Найти $\lg \cos 50°22'$.

$$\begin{array}{r} \lg \cos 50°24' = \bar{1},8044 \\ -2' \qquad\quad +3 \\ \hline \lg \cos 50°22' = \bar{1},8047. \end{array}$$

Пример 7. Определить $\lg \operatorname{tg} 57°33'$.

$$\begin{array}{rr} \lg \operatorname{tg} 57°30' = & 0,1958 \\ +3' & +8 \\ \hline \lg \operatorname{tg} 57°33' = & 0,1966. \end{array}$$

Пример 8. Вычислить $\lg \operatorname{ctg} 39°52'$.

$$\begin{array}{rr} \lg \operatorname{ctg} 39°54' = & 0,0777 \\ -2' & +5 \\ \hline \lg \operatorname{ctg} 39°52' = & 0,0782. \end{array}$$

Пример 9. Вычислить без таблиц $\lg \cos 47°16'$, если дано:

$$\lg \cos 47°12' = \bar{1},8322 \quad \text{и} \quad \lg \cos 47°18' = \bar{1},8313.$$

Вычисляем табличную разность:

$\Delta = \bar{1},8322 - \bar{1},8313 = 0,0009$, т. е. 9 единиц 4-го десятичного знака. Следовательно, поправка на минуты определится из пропорции

$$x : 9 = 2 : 6,$$

откуда

$$x = \frac{9 \cdot 2}{6} = 3,$$

а потому

$$\lg \cos 47°16' = \bar{1},8313 + 0,0003 = \bar{1},8316.$$

Действия удобно располагать так:

$$\begin{array}{rr|c} \lg \cos 47°18' = & \bar{1},8313 & \Delta = 22 - 13 = 9, \\ -2' & +3 & \\ \hline \lg \cos 47°16' = & \bar{1},8316. & x = \frac{2 \cdot 9}{6} = 3. \end{array}$$

Примеры для упражнений

§ 165. При помощи таблиц найти:

1) $\lg \sin 19°28'$; 2) $\lg \cos 58°37'$; 3) $\lg \operatorname{tg} 71°40'$; 4) $\lg \operatorname{ctg} 63°3'$;

5) вычислить без таблиц $\lg \cos 31°50'$, если дано: $\lg \cos 31°48' = \bar{1},9294$ и $\lg \cos 31°54' = \bar{1},9289$.

Нахождение величины угла по данному логарифму его тригонометрической функции

§ 166. Если заданное значение логарифма имеется в таблицах, то искомая величина угла находится без всяких вспомогательных вычислений.

Так, например, сразу из таблиц находим:

$$\text{если } \lg \sin x = \bar{1},9191, \text{ то } \angle x = 56°6',$$
$$\text{если } \lg \cos x = \bar{2},5050, \text{ то } \angle x = 88°10',$$
$$\text{если } \lg \operatorname{tg} x = \bar{1},1025, \text{ то } \angle x = 7°13',$$
$$\text{если } \lg \operatorname{ctg} x = \bar{0},4227, \text{ то } \angle x = 20°42'.$$

Если же заданное значение логарифма в таблицах не помещено, то приходится пользоваться интерполяцией.

Общий прием в этом случае заключается в следующем.

Пусть, например, дано $\lg \sin x = M$. Если в таблицах логарифмов синусов не находится данное значение M, то всегда можно [1]) найти в этих таблицах такие два последовательных значения логарифма, между которыми заключается данное значение M.

Пусть, например, в таблицах имеются два смежных значения M_1 и M_2 логарифма синуса таких, что $M_1 < M < M_2$.

Если значению M_1 соответствует угол $A°B'$, то значению M_2 соответствует угол $A°(B+6)'$ и, следовательно, искомый угол x заключается между $A°B'$ и $A°(B+6)'$, а потому можно положить

$$x = A°(B+C)',$$

где

$$C < 6.$$

Для определения поправки C рассуждаем так.

Если табличной разности $(M_2 - M_1 = \Delta)$ между двумя смежными значениями (M_1 и M_2) логарифма синуса соответствует приращение угла на $6'$, а разности $(M - M_1 = d)$ между заданным значением (M) логарифма синуса и ближайшим меньшим [2]) (M_1) соответствует приращение угла на C', то на основании допущения наличия пропорциональности между приращениями логарифма тригонометрической функции и приращениями угла, при малых приращениях последнего, поправка C определяется из пропорции

$$C : 6 = d : \Delta,$$

откуда

$$C = \frac{d \cdot 6}{\Delta}.$$

Итак, для определения поправки на минуты надо определить разность (d) между данным значением (M) логарифма и ближайшим к нему меньшим (M_1), взятым из таблиц, умножить эту разность на 6 и разделить полученное произведение на табличную разность Δ двух смежных значений (M_1 и M_2) логарифма, между которыми заключено данное значение (M).

Найденное число минут (C) прибавляется (в случае синуса и тангенса) к углу $A°B'$, соответствующему ближайшему меньшему значению (M_1) логарифма, или вычитается из него (в случае косинуса и котангенса) [3]).

---

[1]) Если только задача возможна, т. е. если для $\lg \sin x$ дано значение отрицательное.

[2]) Можно взять также разность между данным значением (M) логарифма и ближайшим к нему бо́льшим (M_2), т. е. $M_2 - M$.

[3]) Если из таблиц берется ближайшее бо́льшее значение (M_2) логарифма и соответствующий ему угол $A°(B+6)'$, то найденное число минут (C) вычитается из угла $A°(B+6)'$ в случае синуса и тангенса или прибавляется к нему в случае косинуса и котангенса.

При делении произведения $(d \cdot 6)$ на табличную разность Δ, надо определять и цифру десятых долей, и если она равна 5 или более 5, то число при округлении увеличивают на 1.

Можно производить интерполяцию и при помощи таблиц пропорциональных частей (partes proportionales), но на всякий случай нужно уметь вычислять самостоятельно.

Пример 1. Вычислить угол x, если $\lg \sin x = \bar{1},8022$.

Из таблиц находим, что ближайшее меньшее значение логарифма синуса равно $\bar{1},8017$, а потому

$$\begin{array}{rcr} \bar{1},8017 & = \lg \sin & 39°18' \\ +5 & & +3' \\ \hline \bar{1},8022 & = \lg \sin & 39°21', \end{array}$$

следовательно, $x = 39°21'$.

Для сокращения письма можно записать действия в такой форме:

$$\begin{array}{rcr} \bar{1},8017 & \ldots & 39°18' \\ +5 & \ldots & +3' \\ \hline \bar{1},8022 & \ldots & 39°21'. \end{array}$$

Пример 2. Определить x, если $\lg \cos x = \bar{1},7346$.

$$\begin{array}{rcr} \bar{1},7349 & \ldots\ldots & 57°6' \\ -3 & \ldots\ldots & +2' \\ \hline \bar{1},7346 & \ldots\ldots & 57°8'. \end{array}$$

Пример 3. Найти x, если $\lg \operatorname{tg} x = 0,1441$.

$$\begin{array}{rcr} 0,1435 & \ldots & 54°18' \\ +6 & \ldots & +2' \\ \hline 0,1441 & \ldots & 54°20'. \end{array}$$

Пример 4. Определить x, если $\lg \operatorname{ctg} x = \bar{1},5890$.

$$\begin{array}{rcr} \bar{1},5887 & \ldots & 68°48' \\ +3 & \ldots & -1' \\ \hline \bar{1},5890 & \ldots & 68°47'. \end{array}$$

Пример 5. Вычислить x (без таблиц), если $\lg \sin x = \bar{1},9105$; при этом $\lg \sin 54°24' = \bar{1},9101$ и $\lg \sin 54°30' = \bar{1},9107$.

$$\begin{array}{rcr|l} \bar{1},9107 & \ldots & 54°30' & \Delta = 7 - 1 = 6, \\ -2 & \ldots & -2' & \\ \hline \bar{1},9105 & \ldots & 54°28'. & C = \frac{2 \cdot 6}{6} = 2. \end{array}$$

Примеры для упражнений

§ 167. Определить угол x, если дано:

1) $\lg \sin x = \bar{1},4102$; 2) $\lg \cos x = \bar{1},6239$; 3) $\lg \operatorname{tg} x = 1,7662$; 4) $\lg \operatorname{ctg} x = 0,1245$; 5) Вычислить без помощи таблиц угол x, если $\lg \sin x = \bar{1},8906$; при этом $\lg \sin 51° = \bar{1},8905$ и $\lg \sin 51°6' = \bar{1},8911$.

Пользование таблицами при решении тригонометрических уравнений

§ 168. Покажем применение таблиц при решении тригонометрических уравнений.

Пример 1. Решить уравнение

$$7 \cos x - 9 \sin x = 11.$$

Подобный тип уравнений, где имеются синус и косинус одного и того же угла с различными коэфициентами и свободный член, удобнее решать способом введения вспомогательного угла (§ 154).

Делим обе части уравнения на 9:

$$\frac{7}{9} \cos x - \sin x = \frac{11}{9}.$$

Принимая

$$\frac{7}{9} = \operatorname{tg} \varphi,$$

будем иметь

$$\operatorname{tg} \varphi \cos x - \sin x = \frac{11}{9}$$

или

$$\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cos x - \sin x = \frac{11}{9}.$$

Умножив на $\cos \varphi$, получим

$$\sin \varphi \cos x - \cos \varphi \sin x = \frac{11}{9} \cos \varphi,$$

откуда

$$\sin (\varphi - x) = \frac{11}{9} \cos \varphi. \qquad (A)$$

Вычисляем вспомогательный угол φ из условия

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{7}{9}.$$

Имеем

$$\lg \operatorname{tg} \varphi = \lg 7 - \lg 9 = 0,8451 - 0,9542 = \bar{1},8909.$$

$$\begin{array}{l} \bar{1},8912 \ \ldots \ 37°54' \\ \underline{\quad -3 \ \ldots \ \ -1'} \\ \bar{1},8909 \ \ldots \ 37°53'. \end{array}$$

Итак, $\varphi = 37°53'$.

Теперь уравнение (A) перепишется так:

$$\sin(37°53' - x) = \frac{11}{9}\cos 37°53'.$$

Логарифмируя, получаем

$+\lg 11$	$1,0414$
$+\lg\cos 37°53'$	$\bar{1},8972$
$-\lg 9$	$0,9542$
$\lg\sin(37°53' - x)$	$\bar{1},9844.$

Зная, что

$$\lg\sin(37°53' - x) = \bar{1},9844,$$

найдем по таблицам:

$$37°53' - x = 74°44'.$$

Но $\sin 74°44' = \sin 105°16'$ (так как $74°44' + 105°16' = 180°$). Следовательно, имеем два решения в пределах одного оборота:

$$(37°53' - x)_1 = 74°44' \quad \text{и} \quad (37°53' - x)_2 = 105°16',$$

откуда окончательно находим

$$x_1 = -36°51' \quad \text{и} \quad x_2 = -67°23'.$$

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} y} = \frac{7}{13}, \quad x + y = 114°29'.$$

Перепишем первое уравнение так:

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} = \frac{13}{7}$$

и составим производную пропорцию:

$$\frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y} = \frac{13 - 7}{13 + 7} = \frac{6}{20} = 0,3.$$

Пользуясь формулами суммы и разности тангенсов, преобразуем левую часть последнего уравнения:

$$\frac{\sin(x - y)}{\sin(x + y)} = 0,3.$$

Заменяя сумму $(x + y)$ данным ее значением $114°29'$, получаем

$$\frac{\sin(x - y)}{\sin 114°29'} = 0,3.$$

Откуда

$$\sin(x - y) = 0,3\sin 114°29' = 0,3\sin 65°31'.$$

Логарифмируя, найдем

$\lg 0,3$	$\bar{1},4771$
$\lg\sin 65°31'$	$\bar{1},9591$
$\lg\sin(x - y)$	$\bar{1},4362.$

Если

$$\lg\sin(x-y)=\bar{1},4362,$$

то по таблицам найдем

$$(x-y)=15°51'.$$

Но $\sin 15°51'=\sin 164°9'$ (так как $15°51'+164°9'=180°$), а потому получаем два значения разности $(x-y)$:

$$(x-y)_1=15°51' \quad \text{и} \quad (x-y)_2=164°9'.$$

Теперь получаем две системы уравнений:

$$\text{I}\left\{\begin{aligned} x+y&=114°29'\\ x-y&=\ \ 15°51'\end{aligned}\right. \quad \text{и} \quad \text{II}\left\{\begin{aligned} x+y&=114°29'\\ x-y&=164°09',\end{aligned}\right.$$

решая которые, находим:

$$\text{I}\left\{\begin{aligned} x&=65°10'\\ y&=49°19'\end{aligned}\right. \quad \text{и} \quad \text{II}\left\{\begin{aligned} x&=\ \ 139°19'\\ y&=-24°50'.\end{aligned}\right.$$

Пример 4. Решить систему уравнений

$$5^{\sin x}+3^{\sin y}=4; \quad 3\cdot 5^{\sin x}-2\cdot 3^{\sin y}=5.$$

Пусть

$$5^{\sin x}=z \quad \text{и} \quad 3^{\sin y}=v.$$

Тогда данные уравнения перепишутся:

$$z+v=4 \quad \text{и} \quad 3z-2v=5,$$

откуда найдем

$$z=2,6 \quad \text{и} \quad v=1,4.$$

Итак, имеем

$$5^{\sin x}=2,6 \quad \text{и} \quad 3^{\sin y}=1,4.$$

Логарифмируя, получаем

$$\sin x=\frac{\lg 2,6}{\lg 5} \quad \text{и} \quad \sin y=\frac{\lg 1,4}{\lg 3}.$$

Взяв из таблиц значения логарифмов, получим

$$\sin x=\frac{0,4150}{0,6990} \quad \text{и} \quad \sin y=\frac{0,1461}{0,4771}.$$

Прологарифмировав обе части последних равенств, получаем

$$\lg\sin x=\bar{1},6180-\bar{1},8445=\bar{1},7735$$

и

$$\lg\sin y=\bar{1},1647-\bar{1},6786=\bar{1},4861,$$

после чего из таблиц находим

$$x=36°25' \quad \text{и} \quad y=17°50'.$$

Кроме того, x и y имеют еще по одному значению:

$$x=143°35' \quad \text{и} \quad y=162°10',$$

так как

$$\sin 143°35'=\sin 36°25' \quad \text{и} \quad \sin 162°10'=\sin 17°50'.$$

Примеры для упражнений

§ 169. 1. Вычислить

$$x = \frac{384{,}8 \sin 45°48'}{32{,}86 \operatorname{tg} 32°36'} .$$

2. Вычислить

$$y = \sqrt[46]{0{,}00014 \operatorname{ctg} 70°12'} .$$

3. Вычислить

$$x = \frac{247 \cos 47°}{\cos \varphi} \cos (35° + \varphi),$$

где угол φ определяется из условия

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} 47° \cos 69° .$$

4. Решить уравнение

$$2 \sin x + 3 \cos x = 0{,}8 .$$

5. Вычислить

$$24{,}5 \sin 26°8' \cos 63°20' .$$

6. Определить наименьшее значение x, если

$$\sin x = \frac{\operatorname{tg} 20°29'}{\sqrt[50]{\operatorname{ctg} 70°7'}} .$$

Точность вычислений по четырехзначным таблицам

§ 170. Рассмотрим вопрос о точности вычислений по четырехзначным таблицам логарифмов тригонометрических функций.

Если табличную разность каких-нибудь двух последовательных логарифмов обозначим через Δ, то это значит, что при изменении логарифма на Δ угол изменяется на $6'$ (по таблицам Брадиса).

Следовательно, изменению логарифма на одну единицу четвертого десятичного знака соответствует изменение угла на

$$\left(\frac{6}{\Delta}\right)' .$$

И, обратно, если два угла отличаются друг от друга на $\left(\frac{6}{\Delta}\right)'$, то соответствующие этим углам логарифмы их тригонометрических функций будут отличаться на одну единицу четвертого десятичного знака. Если же два угла отличаются друга от друга **менее**, чем на $\left(\frac{6}{\Delta}\right)'$, то соответствующие этим углам логарифмы отличаются друг от друга меньше, чем на одну единицу четвертого десятичного знака, а следовательно, эта разница между логарифмами проявится не ближе пятого десятичного знака, не отражаясь на четвертом десятичном знаке. Поэтому, если пользоваться таблицами **четырехзначных** логарифмов тригонометрических функций, то для двух углов, отличающихся друг от друга **менее**, чем на $\left(\frac{6}{\Delta}\right)'$, соответствующие этим двум углам **четырехзначные** логарифмы их тригонометрических функций будут **одинаковы**.

Поясним сказанное на примере.

Пусть требуется найти $\lg \sin 68°19'$.

Из таблиц находим два последовательных логарифма $\bar{1},9681$ и $\bar{1},9684$, соответствующих углам $68°18'$ и $68°24'$, между которыми находится данный угол ($68°19'$).

Как видим, табличная разность $\Delta = 3$, а это означает, что изменению угла на $\left(\frac{6}{\Delta}\right)' = \left(\frac{6}{3}\right)' = 2'$ соответствует изменение логарифма на одну единицу четвертого десятичного знака.

Но данный угол $68°19'$ отличается от угла $68°18'$ на $1'$, т. е. меньше чем на $\left(\frac{6}{\Delta}\right)' = 2'$.

Ясно, что логарифм, соответствующий углу $68°19'$, будет отличаться от логарифма, соответствующего углу $68°18'$, меньше чем на одну единицу четвертого десятичного знака, т. е. их четырехзначные логарифмы будут одинаковы.

Следовательно, четырехзначный логарифм для угла $68°19'$ будет тот же, что и для угла $68°18'$, т. е. $\bar{1},9681$. Вот почему в таблице поправок мы находим здесь для $1'$ поправку 0.

Рассмотрим теперь обратную задачу.

Пусть требуется найти x, если $\lg \sin x = \bar{1},9681$.

В таблицах сразу находим, что этот логарифм соответствует углу $68°18'$, и как будто задача решена. Однако это не совсем так. В самом деле, изменению угла, меньшему, чем на $\left(\frac{6}{\Delta}\right)' = 2'$, например на $1'$, будет соответствовать изменение логарифма, меньшее, чем на одну единицу четвертого десятичного знака, т. е. это изменение угла на $1'$ не отразится на четвертом десятичном знаке логарифма, а поскольку мы имеем дело с четырехзначными логарифмами, то это изменение уже не отразится на логарифме.

Поэтому и для угла $68°19'$ будет тот же четырехзначный логарифм $\bar{1},9681$, что и для угла $68°18'$.

Но рассуждая аналогично, мы придем к заключению, что и для угла $68°17'$, который отличается от угла $68°18'$ на $1'$, т. е. меньше, чем на $\left(\frac{6}{\Delta}\right)' = 2'$, четырехзначный логарифм будет тот же, что и для угла $68°18'$, т. е. $\bar{1},9681$.

Таким образом для нашей задачи: по заданному значению ($\bar{1},9681$) логарифма синуса угла x найти этот угол, мы с одинаковым основанием могли бы взять любое из трех значений:

$$63°17',\ 68°18',\ 68°19',$$

причем так как разница между крайними значениями составляет $2'$, то мы должны сказать, что, взяв какое-нибудь из этих трех значений, мы делаем ошибку меньше чем на $2'$, т. е. любое из трех значений угла x есть решение с точностью до $2'$.

Итак, мы видим, что если два угла различаются меньше, чем на $\left(\frac{6}{\Delta}\right)'$, то соответствующие этим углам четырехзначные логарифмы будут одинаковы, а отсюда следует, что величина ошибки при определении угла может доходить до $\left(\frac{6}{\Delta}\right)'$.

Поэтому заключаем, что ошибка будет тем меньше, чем меньше будет дробь $\frac{6}{\Delta}$, т. е. чем больше будет ее знаменатель (табличная разность Δ).

Если мы теперь начнем просматривать логарифмические таблицы, следя за изменением табличной разности Δ, то легко заметим, что для синуса величина табличной разности Δ убывает с увеличением угла, и, следовательно, ошибка в определении угла по синусу возрастает с увеличением угла.

Так, например, приблизительно до 51° табличная разность логарифмов синусов остается все время больше 6, так что ошибка при определении угла в этом случае меньше, чем $\left(\frac{6}{\Delta}\right)' = \left(\frac{6}{6}\right)'$, т. е. меньше $1'$. Примерно до 63° табличная разность Δ остается больше 3, т. е. предел ошибки равен $\left(\frac{6}{\Delta}\right)' = \left(\frac{6}{3}\right)' = 2'$. Просматривая логарифмы дальше, увидим, что приблизительно до 74°6′ табличная разность остается больше 2, т. е. предел ошибки равен $\left(\frac{6}{\Delta}\right)' = \left(\frac{6}{2}\right)' = 3'$. Таким образом оказывается, что если искомый угол находится между 51° и 63°, то при определении угла возможна ошибка до $2'$, и если искомый угол находится между 63° и 74°, то ошибка может доходить до $3'$.

В пределах между 74°6′ и 81°12′ табличная разность будет равна 2 или 1, а поэтому пределом ошибки при определении угла будет в первом случае $\left(\frac{6}{2}\right)' = 3'$, а во втором случае $\left(\frac{6}{1}\right)' = 6'$.

Так как в пределах от 81°12′ до 90° табличная разность не превышает единицы, то предел ошибки будет равен, по крайней мере, $\left(\frac{6}{1}\right)' = 6'$.

Очевидно, для косинуса изменение табличной разности будет итти в обратном порядке, т. е., чем ближе угол к 90°, тем больше и табличная разность (Δ) и тем меньше ошибка.

Наконец, рассматривая общую табличную разность для логарифмов тангенсов и котангенсов и сравнивая ее с табличными разностями логарифмов синусов и косинусов тех же углов, нетрудно заметить, что она всегда больше каждой из них и приблизительно равна их сумме.

Из всего вышеизложенного можно сделать следующие основные выводы:

1. Вычисление углов при помощи таблиц производится точнее всего по тангенсам или котангенсам: наименьшее значение Δ в этом случае равно 15 (при углах близких к 45°), т. е. максимум возможной ошибки будет $\left(\frac{6}{15}\right)' = 0{,}4'$.

2. Вычисление по синусам дает результаты тем более точные, чем меньше данный угол.

3. Вычисление по косинусам тем точнее, чем угол ближе к 90°.

ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ

РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

ГЛАВА XX

РЕШЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ТАБЛИЦ

§ 171. В гл. VI были приведены примеры основных случаев решения прямоугольных треугольников. При этом мы пользовались таблицами натуральных значений тригонометрических функций, а всякие вычисления производили без помощи логарифмических таблиц, в том числе логарифмических тригонометрических таблиц. Поэтому в тех случаях, когда встречались многозначные числа, вычисления были слишком громоздкими и кропотливыми. Теперь, ознакомившись с логарифмическими тригонометрическими таблицами, мы, пользуясь ими и таблицами логарифмов чисел, можем значительно упростить вычисления.

Для образца здесь и будут приведены примеры тех же основных случаев решения прямоугольных треугольников с использованием при вычислении логарифмических таблиц. Ради удобства сравнения мы берем те же самые числовые примеры, какие в гл. VI (§ 59—62) решались без помощи логарифмов.

§ 172. 1-й случай. *Решение прямоугольного треугольника по гипотенузе и острому углу*[1].

Данные: $c = 9{,}35$, $\angle A = 65°14'$. *Искомые*: $\angle B$, a, b.

Решение.

1) Определение угла B:

$$\angle B = 90° - \angle A = 90° - 65°14' = 24°46'.$$

2) Определение катета a (по формуле $a = c \sin A$):

$\lg c$	$\lg 9{,}35$	$0{,}9708$
$+\ \lg \sin A$	$\lg \sin 65°14'$	$\bar{1}{,}9581$
$\lg a$	—	$0{,}9289$
a	—	$8{,}489$

[1]) При вычислении здесь и в дальнейшем мы пользовались четырехзначными математическими таблицами В. Брадиса.

3) Определение катета b (по формуле $b = c\cos A$):

$\lg c$ + $\lg \cos A$	$\lg 9{,}35$ $\lg \cos 65°14'$	$0{,}9708$ $\overline{1},6221$
$\lg b$	—	$0{,}5929$
b	—	$3{,}916$

4) Контрольное вычисление угла $A\left(\text{по формуле } \operatorname{tg} A = \frac{a}{b}\right)$:

$\lg a$ − $\lg b$	$\lg 8{,}489$ $\lg 3{,}916$	$0{,}9289$ $0{,}5929$
$\lg \operatorname{tg} A$	—	$0{,}3360$
$\angle A$	—	$65°14'$

§ **173. 2-й случай.** *Решение прямоугольного треугольника по катету и острому углу.*

Данные: $a = 6{,}37$; $\angle A = 60°18'$. *Искомые:* $\angle B, b, c$.

Решение.

1) Определение угла B:

$$\angle B = 90° - \angle A = 90° - 60°18' = 29°42'.$$

2) Определение катета b (по формуле $b = a \operatorname{ctg} A$):

$\lg a$ + $\lg \operatorname{ctg} A$	$\lg 6{,}37$ $\lg \operatorname{ctg} 60°18'$	$0{,}8041$ $\overline{1},7562$
$\lg b$	—	$0{,}5603$
b	—	$3{,}634$

3) Определение гипотенузы c $\left(\text{по формуле } c = \frac{a}{\sin A}\right)$:

$\lg a$ − $\lg \sin A$	$\lg 6{,}37$ $\lg \sin 60°18'$	$0{,}8041$ $\overline{1},9388$
$\lg c$	—	$0{,}8653$
c	—	$7{,}333$

4) Контрольное вычисление угла A $\left(\text{по формуле } \cos A = \frac{b}{c}\right)$:

$\lg b$ − $\lg c$	$\lg 3{,}634$ $\lg 7{,}333$	$0{,}5603$ $0{,}8653$
$\lg \cos A$	—	$\overline{1},6950$
$\angle A$	—	$60°18'$

§ 174. 3-й случай. *Решение прямоугольного треугольника по гипотенузе и катету.*

Данные: $c = 697$; $a = 528$. *Искомые:* $\angle A$, $\angle B$, b.

1) Определение угла A $\left(\text{по формуле } \sin A = \frac{a}{c}\right)$:

$\lg a$	$\lg 528$	2,7226
− $\lg c$	$\lg 697$	2,8432
$\lg \sin A$	—	$\bar{1}$,8794
$\angle A$	—	49°15′

2) Определение угла B:

$$\angle B = 90° - \angle A = 90° - 49°15' = 40°45'.$$

3) Определение катета b [по формуле $b^2 = (c + a)(c - a)$]:

$\lg (c + a)$	$\lg 1225$	3,0882
+ $\lg (c - a)$	$\lg 169$	2,2279
$2 \lg b$	—	5,3161
$\lg b$	—	2,6580
b	—	455,0

4) Контрольное вычисление катета a (по формуле $a = b \operatorname{tg} A$):

$\lg b$	$\lg 455$	2,6580
+ $\lg \operatorname{tg} A$	$\lg \operatorname{tg} 49°15'$	0,0647
$\lg a$	—	2,7227
a	—	528,1

§ 175. 4-й случай. *Решение прямоугольного треугольника по двум катетам.*

Данные: $a = 261$; $b = 380$. *Искомые:* $\angle A$, $\angle B$, c.

Решение.

1) Определение угла A $\left(\text{по формуле } \operatorname{tg} A = \frac{a}{b}\right)$:

$\lg a$	$\lg 261$	2,4166
− $\lg b$	$\lg 380$	2,5798
$\lg \operatorname{tg} A$	—	$\bar{1}$,8368
$\angle A$	—	34°29′

2) Определение угла B:

$$\angle B = 90° - \angle A = 90° - 34°29' = 55°31'.$$

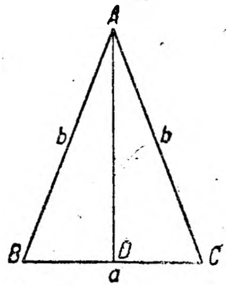
3) Определение гипотенузы c $\left(\text{по формуле } c = \frac{a}{\sin A}\right)$:

$\lg a$	$\lg 261$	$2,4166$
− $\lg \sin A$	$\lg \sin 34°29'$	$\bar{1},7529$
$\lg c$	—	$2,6637$
c	—	$461,0$

4) Контрольное вычисление угла B $\left(\text{по формуле } \sin B = \frac{b}{c}\right)$:

$\lg b$	$\lg 380$	$2,5798$
− $\lg c$	$\lg 461$	$2,6637$
$\lg \sin B$	—	$\bar{1},9161$
$\angle B$	—	$55°31'$

§ 176. Если из вершины A равнобедренного треугольника (черт. 87) провести высоту AD, то получаются два равных прямоугольных треугольника ABD и ACD. Вследствие этого решение равнобедренного треугольника можно свести к решению прямоугольного треугольника.



Черт. 87.

Пусть, например, в треугольнике ABC (черт. 87) известны основание a и боковая сторона b. Тогда в прямоугольном треугольнике ABD известны: катет $BD = \frac{1}{2}a$ и гипотенуза $AB = b$ и, следовательно, задача сводится к 3-му основному случаю решения прямоугольных треугольников.

Если даны основание и угол при нем, т. е. a и $\angle B$, то в треугольнике ABD известны: катет $BD = \frac{1}{2}a$ и острый угол B, и задача сводится ко 2-му основному случаю.

Если даны боковая сторона и угол при вершине, т. е. b и $\angle A$, то в прямоугольном треугольнике ABD известны: гипотенуза b и острый угол $BAD = \frac{1}{2}A$, и задача сводится к 1-му основному случаю.

Рассмотрим одну более сложную задачу, решение которой также легко сводится к одному из основных случаев решения прямоугольных треугольников.

Пусть, например, даны угол при вершине ($\angle A$) и сумма основания с боковой стороной ($a + b = m$).

Из треугольника ABD (черт. 87) имеем

$$BD = AB \sin BAD$$

или

$$\frac{a}{2} = b \sin \frac{A}{2},$$

откуда

$$a = 2b \sin \frac{A}{2}.$$

Подставив найденное выражение для a в данное равенство $a + b = m$, получим

$$m = a + b = 2b \sin \frac{A}{2} + b = 2b \left(\sin \frac{A}{2} + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= 2b \left(\sin \frac{A}{2} + \sin 30^\circ\right) = 4b \sin\left(\frac{A}{4} + 15^\circ\right) \cos\left(\frac{A}{4} - 15^\circ\right),$$

откуда

$$b = \frac{m}{4 \sin\left(\frac{A}{4} + 15^\circ\right) \cos\left(\frac{A}{4} - 15^\circ\right)}.$$

Теперь в прямоугольном треугольнике ABD известны: гипотенуза b и острый угол $BAD = \frac{1}{2}A$, и, следовательно, решение свелось к 1-му основному случаю решения прямоугольных треугольников.

Примеры для упражнений

§ 177. Решить равнобедренные треугольники ($b = c$), если дано:

1. $b = 13, \quad \angle B = 67^\circ 22'$,
2. $a = 16, \quad \angle C = 61^\circ 55'$,
3. $a = 40, \quad \angle A = 87^\circ 12'$,
4. $a + b = 11, \quad \angle A = 53^\circ 7'$,
5. $a + b + c = 36, \quad \angle A = 45^\circ 14'$,
6. $b + c - a = 18, \quad \angle B = 61^\circ 55'$.

ГЛАВА XXI

ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ КОСОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

§ 178. В главе III и IV рассматривались основные зависимости между сторонами и углами прямоугольного треугольника, а именно:

$$a = c \sin A, \qquad b = c \cos A, \qquad a = b \operatorname{tg} A, \qquad b = a \operatorname{ctg} A.$$

Предметом настоящей главы будет вывод зависимостей между сторонами и углами косоугольных треугольников.

§ 179. Прежде всего условимся относительно обозначений.

Величины углов всякого треугольника будем обозначать большими буквами латинского алфавита, а длины сторон, выраженных в каких-нибудь линейных мерах, — маленькими буквами, соответствующими буквам, выражающим величины противолежащих углов.

Таким образом, если величины углов треугольника обозначим буквами A, B, C, то длины противолежащих им сторон будем обозначать соответственно буквами a, b, c.

Длины высот, опущенных на стороны a, b, c, будем обозначать соответственно буквами h_a, h_b, h_c.

Длину радиуса вписанной окружности будем обозначать буквой r, а описанной — буквой R.

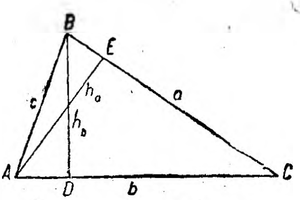
Периметр треугольника — через $2p$.

Площадь треугольника — через S.

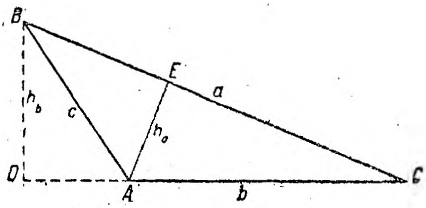
Теорема синусов

§ **180.** *Во всяком треугольнике стороны пропорциональны синусам противолежащих углов.*

Будем вести доказательство этой теоремы одновременно для остроугольного (черт. 88) и тупоугольного (черт. 89) треугольника.



Черт. 88.



Черт. 89.

Проведя высоту $BD = h_b$ (черт. 88 и 89), мы можем из прямоугольных треугольников BDA и BDC написать:

	Для остроугольного треугольника (черт. 88)	Для тупоугольного треугольника (черт. 89)
Из треугольника BDA	$h_b = c \sin A$	$h_b = c \sin (180° - A) = c \sin A$
Из треугольника BDC	$h_b = a \sin C$	$h_b = a \sin C$

Сопоставляя полученные для h_b выражения, находим в обоих случаях (как для остроугольного, так и для тупоугольного треугольника) соотношение

$$c \sin A = a \sin C,$$

которое можно представить в форме пропорции:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}. \qquad (A)$$

Проведя теперь вторую высоту, например $AE = h_a$ (черт. 88 и 89), мы из прямоугольных треугольников AEB и AEC записываем:

Из треугольника AEB	$h_a = c \sin B$
Из треугольника AEC	$h_a = b \sin C$

Сопоставляя полученные для h_a выражения, находим соотношение

$$c \sin B = b \sin C,$$

которое можно переписать в форме пропорции:

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}. \tag{B}$$

Сопоставляя равенства (A) и (B), можно их соединить в одну формулу:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}. \tag{17}$$

Теорема доказана нами для треугольников остроугольных и тупоугольных. Эта теорема справедлива и для треугольников прямоугольных, в чем легко убедиться, если в формулу (17) поставить $C = 90°$.

§ 181. Итак, мы сейчас установили, что во всяком треугольнике стороны пропорциональны синусам противолежащих углов или, иначе говоря, для каждого данного треугольника отношение любой стороны к синусу противолежащего угла есть величина постоянная.

Обозначив эту постоянную величину буквой k, будем иметь

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = k, \tag{17a}$$

где k есть, как видим, коэфициент пропорциональности.

Следствие. Из соотношения

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = k \tag{17a}$$

легко получить следующие три равенства:

$$a = k \sin A, \quad b = k \sin B, \quad c = k \sin C, \tag{17б}$$

т. е. оказывается возможным выразить все стороны треугольника через синусы противолежащих им углов и через одну и ту же для всех сторон величину k.

Теорема косинусов

§ 182. *Во всяком треугольнике квадрат любой стороны равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения тех же сторон на косинус угла между ними.*

Ведем доказательство одновременно для остроугольного (черт. 90) и тупоугольного (черт. 91) треугольника.

На основании известной из геометрии теоремы о квадрате стороны против острого и тупого угла имеем:

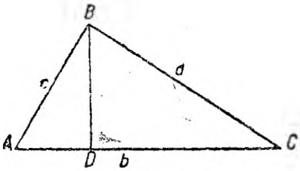
Для остроугольного треугольника (черт. 90)	Для тупоугольного треугольника (черт. 91)
$a^2 = b^2 + c^2 - 2b\,AD$	$a^2 = b^2 + c^2 + 2b\,AD$

Но из прямоугольного треугольника ABD находим:

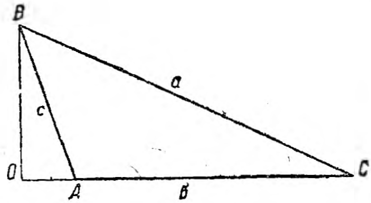
$$AD = c\cos A \quad (\text{черт. } 90),$$
$$AD = c\cos(180^\circ - A) = -c\cos A \quad (\text{черт. } 91).$$

Подставляя эти значения AD в написанные формулы для квадрата стороны, получим общую формулу для остроугольного и тупоугольного треугольника в виде:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A. \tag{18}$$



Черт. 90.



Черт. 91.

Очевидно, эта формула остается верной и для треугольников прямоугольных. В самом деле, если $\angle A = 90^\circ$, то $\cos A = \cos 90^\circ = 0$, и формула (18) принимает вид:

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

т. е. обращается в формулу Пифагора.

Итак, благодаря применению тригонометрических функций, три различные геометрические формулы для квадрата стороны против острого, тупого и прямого угла объединились в одну общую формулу (18).

§ 183. Только что установленная зависимость дает возможность определять углы треугольника по трем данным сторонам его, для чего формулу (18) применяют в таком виде:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}. \tag{18a}$$

Пример 1. Вычислить углы треугольника, зная его стороны $a = 7$, $b = 5$, $c = 8$.

По формуле (18а) имеем

$$\cos A = \frac{5^2 + 8^2 - 7^2}{2\cdot5\cdot8} = \frac{1}{2},$$

откуда

$$\angle A = 60^\circ.$$

Также имеем

$$\cos B = \frac{7^2 + 8^2 - 5^2}{2 \cdot 7 \cdot 8} = \frac{11}{14},$$

а по найденному значению $\cos B$ находим по таблицам

$$\angle B = 38^\circ 11'.$$

Наконец,

$$\angle C = 180^\circ - (60^\circ + 38^\circ 11') = 81^\circ 49'.$$

Пример 2. Определить углы треугольника, если даны его стороны: $a = 10$, $b = 12$, $c = 8$.

По формуле (18a) имеем

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{12^2 + 8^2 - 10^2}{2 \cdot 12 \cdot 8} = \frac{9}{16},$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{10^2 + 8^2 - 12^2}{2 \cdot 10 \cdot 8} = \frac{1}{8},$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{10^2 + 12^2 - 8^2}{2 \cdot 10 \cdot 12} = \frac{3}{4}.$$

Зная косинусы углов, находим при помощи таблиц:

$$\angle A = 55^\circ 46', \quad \angle B = 82^\circ 49', \quad \angle C = 41^\circ 25'.$$

Для проверки, сложив найденные углы, получим 180°.

§ 184. В предыдущем параграфе мы вычисляли углы треугольников при помощи формулы косинусов. Однако формула эта удовлетворить нас не может: она требует много вычислений и притом не дает возможности непосредственного применения логарифмов, так как она нелогарифмична. Если стороны треугольника заданы такими однозначными или двузначными числами, как в разобранных нами примерах, то такие вычисления производятся легко. Но если длины сторон a, b, c выражаются трех- или четырехзначными числами, как это обыкновенно и бывает, то возведение в квадрат, перемножение и деление таких чисел приводят к очень громоздким вычислениям. Поэтому целесообразно преобразовать эти формулы так, чтобы вычисление было возможно по ним при помощи логарифмов.

Преобразуем формулу (18a).

На основании формулы (8a) имеем

$$2 \sin^2 \frac{A}{2} = 1 - \cos A.$$

Заменив в этой формуле $\cos A$ его выражением $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ из формулы (18a), получим

$$2 \sin^2 \frac{A}{2} = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Приведя выражение в правой части к общему знаменателю, получим

$$2 \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} = \frac{a^2 - (b - c)^2}{2bc}.$$

Разлагая разность квадратов, имеем

$$2\sin^2\frac{A}{2}=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc},$$

откуда

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}}\ ^{1)}.$$

Обозначим $a+b+c$ через $2p$. Тогда

$$a+b-c=2p-2c=2(p-c),$$
$$a-b+c=2p-2b=2(p-b).$$

Теперь формула для $\sin\frac{A}{2}$ перепишется так:

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{2(p-c)\cdot 2(p-b)}{4bc}}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}.$$

Итак, имеем формулу для $\sin\frac{A}{2}$ и аналогичные формулы для $\sin\frac{B}{2}$ и $\sin\frac{C}{2}$:

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},\\ \sin\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}},\\ \sin\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}.\end{aligned}\right\}\qquad(19)$$

Формулы эти логарифмичны, и потому вычисление углов по ним можно производить при помощи логарифмов.

Подставив то же выражение $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ вместо $\cos A$ в формулу (8b)

$$2\cos^2\frac{A}{2}=1+\cos A,$$

получим

$$2\cos^2\frac{A}{2}=1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc},$$

или, разлагая разность квадратов:

$$2\cos^2\frac{A}{2}=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc},$$

откуда

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}}\ ^{1)}.$$

---

1) В правой части этой формулы надо ставить только один знак плюс. Это вытекает из следующих соображений: угол в треугольнике меньше 180°, поэтому половина этого угла меньше 90°, а синус и косинус острого угла положительны.

Вводя, как и прежде, обозначение $a+b+c=2p$, получим

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{2p\cdot 2(p-a)}{4bc}}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}.$$

Итак, имеем формулу для $\cos\frac{A}{2}$ и аналогичные формулы для $\cos\frac{B}{2}$ и $\cos\frac{C}{2}$:

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},\\ \cos\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}},\\ \cos\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}.\end{aligned}\right|\qquad(20)$$

Если мы возьмем формулы для синусов половинных углов треугольника (19) и каждую из них разделим на соответствующую формулу для косинусов половинных углов (20), то получим

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},\\ \operatorname{tg}\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}},\\ \operatorname{tg}\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.\end{aligned}\right|\qquad(21)$$

Теорема тангенсов

§ 185. *Сумма двух сторон треугольника относится к разности тех же сторон, как тангенс полусуммы противолежащих им углов относится к тангенсу их полуразности, т. е.*

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}.$$

Доказательство. Выразим отношение $\frac{a+b}{a-b}$ в тригонометрической форме, пользуясь формулами (17б):

$$a=k\sin A \text{ и } b=k\sin B.$$

Получим

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{k\sin A+k\sin B}{k\sin A-k\sin B}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}.$$

Преобразуем теперь полученное выражение, пользуясь формулами суммы и разности двух синусов:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}.$$

Таким образом получаем

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}. \qquad (22)$$

На основании того, что

$$A+B=180^\circ-C, \quad \frac{A+B}{2}=90^\circ-\frac{C}{2};$$

$$\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}=\operatorname{tg}\left(90^\circ-\frac{C}{2}\right)=\operatorname{ctg}\frac{C}{2},$$

переписываем формулу (22) так:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}. \qquad (22')$$

ГЛАВА XXII

ОСНОВНЫЕ СЛУЧАИ РЕШЕНИЯ КОСОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

§ 186. В гл. VI и XX было изложено решение прямоугольных треугольников. Переходя к вопросу о решении косоугольных треугольников, мы здесь напомним учащимся о том, что решить треугольник (какой угодно) значит по достаточному числу заданных элементов треугольника найти все остальные его элементы. Какое же число элементов треугольника является достаточным, чтобы решить его? Из геометрии известно, что три элемента треугольника, если в числе этих трех элементов имеется не менее одного линейного, вполне определяют треугольник, т. е. по этим трем заданным элементам можно построить вполне определенный треугольник [1]). Если по трем элементам (если в их числе один линейный) можно построить треугольник, т. е. графически решить его, то, следовательно, и для аналитического решения, т. е. при помощи вычисления, достаточно этих трех элементов (если в их числе один линейный).

Под термином „решить треугольник“ мы (как и в случае прямоугольных треугольников) будем понимать требование вычислить лишь основные элементы треугольника. Если же требуется вычислить какие-

---

[1]) При некоторых заданиях (например, если заданы две стороны и угол, противолежащий меньшей из двух данных сторон) могут получиться два различных треугольника, каждый из которых удовлетворяет условиям задачи (см. § 195 и 196).

Строго говоря, не всегда по трем элементам треугольника можно его определить. Могут быть заданы такие три и даже больше элементов, по которым треугольник не определяется. См. статью Зетеля в журнале „Математика и физика в средней школе“ № 1 за 1934 г.

нибудь другие элементы его, то об этом должно быть специально оговорено при задании.

Наиболее простые и наиболее часто встречающиеся на практике случаи решения треугольников называются *основными*. Во всех основных случаях как в число данных, так и в число искомых входят только основные элементы треугольника, т. е. стороны и углы.

Основные случаи решения косоугольных треугольников

§ 187. Имеются четыре основных случая решения косоугольных треугольников в зависимости от заданных элементов:

1. По трем сторонам.
2. По двум сторонам и углу между ними.
3. По стороне и двум углам.
4. По двум сторонам и углу, противолежащему одной из них.

§ 188. **1-й случай.** *Решение косоугольного треугольника по трем сторонам.*

Данные: a, b, c. *Искомые*: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.

Для определения углов можно взять любую из формул (19), (20) или (21).

Если мы сравним три указанные формулы, то увидим, что в случае вычисления всего лишь одного угла, вычисление по формуле (19) или (20) потребует меньше действий, чем при помощи формулы (21). Но когда требуется полное решение треугольника, т. е. определение всех углов его, то применение формул (19) потребует отыскания шести логарифмов: $\lg(p-a)$, $\lg(p-b)$, $\lg(p-c)$, $\lg a$, $\lg b$, $\lg c$; для пользования формулами (20), кроме тех же шести логарифмов, придется найти еще $\lg p$, т. е. всего семь логарифмов; в случае же вычисления всех углов по формуле (21) придется искать всего четыре логарифма, а именно:

$$\lg p, \quad \lg(p-a), \quad \lg(p-b), \quad \lg(p-c).$$

Так как, кроме потери времени, каждое лишнее логарифмическое вычисление увеличивает шансы на возрастание ошибок из-за неточности таблиц, то целесообразнее пользоваться формулами (21).

Кроме того, следует иметь в виду, что углы, близкие к 90°, вычисляются очень плохо по синусам, а углы, близкие к 0°, по косинусам (§ 170). Так как формулы (19)—(21) дают значения половинных углов, то вычисление по синусу целесообразно в случае углов близких к 0°, а по косинусу при углах близких к 180°. Вообще же вычисление по тангенсам дает более точные результаты (§ 170), а потому и с этой точки зрения формулы (21) имеют преимущество перед формулами (19) и (20).

При решении числовых примеров на определение углов треугольника по трем сторонам целесообразно произвести предварительно вспомогательные вычисления для определения полупериметра p и разностей $(p-a)$, $(p-b)$ и $(p-c)$. Найдя эти числа, следует сразу же отыскать их логарифмы. При этом удобнее всего располагать эти значения в форме таблицы, выполняя все остальные вычисления, не указанные в решенном здесь примере, на стороне.

Числовой пример.

Решить треугольник, если дано: $a = 3875$, $b = 8159$, $c = 4698$.

Решение.

$$2p = a + b + c = 3875 + 8159 + 4698 = 16732,$$

откуда

$$p = 8366.$$

Составим таблицу:

Обозначения	Числа	Логарифмы
p	8366	3,9225
$p-a$	4491	3,6523
$p-b$	207	2,3160
$p-c$	3668	3,5645

1. Вычисление угла A $\left(\text{по формуле } \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}\right)$:

$\lg(p-b)$	2,3160
$\lg(p-c)$	3,5645
$\lg(p-a)$	3,6523
$\lg p$	3,9225
$2\lg\operatorname{tg}\frac{A}{2}$	$\bar{2},3057$
$\lg\operatorname{tg}\frac{A}{2}$	$\bar{1},1528$
$\angle\frac{A}{2}$	$8°5'$
$\angle A$	$16°10'$

2. Вычисление угла B $\left(\text{по формуле } \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}\right)$:

$\lg(p-a)$	3,6523
$\lg(p-c)$	3,5645
$\lg(p-b)$	2,3160
$\lg p$	3,9225
$2\lg\operatorname{tg}\frac{B}{2}$	0,9783
$\lg\operatorname{tg}\frac{B}{2}$	0,4891
$\angle\frac{B}{2}$	$72°2'$
$\angle B$	$144°4'$

3. Вычисление угла C $\left(\text{по формуле } \operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}\right)$:

$\lg(p-a)$	3,6523
$\lg(p-b)$	2,3160
$\lg(p-c)$	3,5645
$\lg p$	3,9225
$2\lg\operatorname{tg}\frac{C}{2}$	$\bar{2}$,4813
$\lg\operatorname{tg}\frac{C}{2}$	$\bar{1}$,2406
$\angle\frac{C}{2}$	9°52′
$\angle C$	19°44′

4. Проверка:

$$\angle A+\angle B+\angle C=16°10'+144°4'+19°44'=179°58'.$$

Разница в 2′ объясняется тем, что мы вычисляли углы по логарифмам тангенсов с точностью до 1′.

Примеры для упражнений

§ 189. Решить треугольник по трем данным сторонам:

1. $a=195$, $b=169$, $c=182$,
2. $a=841$, $b=725$, $c=1044$,
3. $a=4107$, $b=1665$, $c=4884$,
4. $a=26{,}486$, $b=25{,}968$, $c=50.376$,
5. $a=207{,}65$, $b=88{,}925$, $c=248{,}64$,
6. $a=2{,}6147$, $b=1{,}047$, $c=1{,}5701$.

§ 190. **2-й случай.** *Решение треугольника по двум сторонам и углу между ними.*

Данные: a, b, $\angle C$. *Искомые:* $\angle A$, $\angle B$, c.

Из формулы (22′)

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}},$$

в которой по заданию нам известны a, b и $\angle C$, определяем $\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}$, после чего по найденному значению тангенса находим из таблиц $\frac{A-B}{2}$.

Зная теперь $\frac{A-B}{2}$ и $\frac{A+B}{2}$ $(=90°-C)$, находим углы A и B.

Для определения стороны c воспользуемся теоремой синусов (17):

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C},$$

откуда

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}.$$

Для контроля можно определить из формулы (17) угол B или заданный угол C:

$$\sin B = \frac{b \sin C}{c}$$

или

$$\sin C = \frac{c \sin B}{b}.$$

Замечание 1. При решении треугольника по a, b, $\angle C$ мы прибегли к формуле (22') вместо того, чтобы определить сразу сторону c из формулы (18) и тем самым привести решение к 1-му случаю. Мы сделали так потому, что вычисление стороны c по формуле (18) затруднительно вследствие ее нелогарифмичности.

Замечание 2. Контрольная проверка производится по формуле $\sin C = \frac{c \sin B}{b}$, требующей логарифмирования, а не простым сложением углов: $A + B + C = 180°$, потому что углы A и B определяются из сложения и вычитания значений $\frac{A+B}{2}$ и $\frac{A-B}{2}$, и если даже эта полуразность вычислена совсем не верно, то все же сумма углов даст 180°. Таким образом равенство $A + B + C = 180°$ не может служить для контроля.

Числовой пример.

Решить треугольник, если дано: $a = 86$; $b = 58$; $\angle C = 60°40'$.

1. Вычисление полуразности углов $\left(\frac{A-B}{2}\right)$.

Подставив в формулу (22') значения

$$a + b = 86 + 58 = 144, \quad a - b = 86 - 58 = 28, \quad \angle \frac{C}{2} = 30°20',$$

получим

$$\frac{144}{28} = \frac{\operatorname{ctg} 30°20'}{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}},$$

откуда

$$\operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \frac{28 \operatorname{ctg} 30°20'}{144}.$$

Логарифмируем:

$$\lg \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = 1{,}4472 + 0{,}2327 - 2{,}1584 = \bar{1}{,}5215,$$

откуда по таблицам находим:

$$\frac{A-B}{2} = 18°23'.$$

2. Вычисление углов A и B.

Имеем систему уравнений:

$$\frac{A+B}{2} = 90° - \frac{C}{2} = 90° - 30°20' = 59°40',$$

и

$$\frac{A-B}{2} = 18°23',$$

решая которую, получаем

$$\angle A = 78°03' \quad \text{и} \quad \angle B = 41°17'.$$

3. Вычисление стороны c.

Имеем

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C},$$

откуда

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{86 \sin 60°40'}{\sin 78°3'}.$$

Логарифмируем:

$$\lg c = 1{,}9345 + \bar{1}{,}9405 - \bar{1}{,}9905 = 1{,}8845,$$

откуда

$$c = 76{,}65.$$

4. Контрольное вычисление угла B.

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

$$\sin B - \frac{b \sin C}{c} = \frac{58 \sin 60°40'}{76{,}65}.$$

Логарифмируем:

$$\lg \sin B = 1{,}7634 + \bar{1}{,}9405 - 1{,}8845 = \bar{1}{,}8194,$$

откуда

$$\angle B = 41°17'.$$

Примеры для упражнений

§ 191. Решить треугольники, в которых дано:

1. $a = 195,\quad b = 169,\quad \angle C = 59°29',$
2. $b = 725,\quad c = 1044,\quad \angle A = 53°7',$
3. $a = 841,\quad c = 174,\quad \angle B = 43°36',$
4. $a = 260,\quad b = 169,\quad \angle C = 75°45',$
5. $a = 260,\quad c = 143,\quad \angle B = 36°52'.$

§ 192. 3-й случай. *Решение треугольника по стороне и двум углам.*

Данные: $a,\ \angle B,\ \angle C.$ *Искомые:* $\angle A,\ b,\ c.$

1. Третий угол определяется вычитанием:

$$\angle A = 180° - (\angle B + \angle C).$$

2. Для вычисления сторон воспользуемся теоремой синусов (17):

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

откуда

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A} \qquad c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

3. Для контроля можно проверить данный угол C (или B) из формулы (17):

$$\sin C = \frac{c \sin B}{b}.$$

Ч и с л о в о й п р и м е р.

Решить треугольник, в котором дано: $a = 1295$, $\angle B = 36°56'$, $\angle C = 74°25'$.

1. Вычисление угла A.

$$\angle A = 180° - (36°56' + 74°25') = 68°39'.$$

2. Вычисление стороны b.

Из формулы

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$$

имеем

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{1295 \sin 36°56'}{\sin 68°39'}.$$

Логарифмируем:

$$\lg b = 3{,}1123 + \bar{1}{,}7788 - \bar{1}{,}9691 = 2{,}9220.$$

По таблицам определяем

$$b = 835{,}6.$$

3. Вычисление стороны c.

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A},$$

откуда

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{1295 \sin 74°25'}{\sin 68°39'}.$$

Логарифмируем:

$$\lg c = 3{,}1123 + \bar{1}{,}9837 - \bar{1}{,}9691 = 3{,}1269.$$

По таблицам находим

$$c = 1340.$$

4. Контрольное вычисление угла C.

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

$$\sin C = \frac{c \sin B}{b} = \frac{1340 \sin 36°56'}{835{,}6}.$$

Логарифмируем:

$$\lg \sin C = 3{,}1269 + \bar{1}{,}7788 - 2{,}9220 = \bar{1}{,}9837,$$

откуда

$$\angle C = 74°25'.$$

Примеры для упражнений

§ 193. Решить треугольник, если дано:

1. $a = 195$, $\angle A = 67°22'$, $\angle B = 53°7'$,
2. $b = 169$, $\angle A = 112°37'$, $\angle C = 14°15'$,
3. $a = 1044$, $\angle B = 43°36'$, $\angle C = 83°16'$,
4. $a = 4107$, $\angle A = 53°7'$, $\angle B = 18°55'$,
5. $b = 1665$, $\angle A = 126°52'$, $\angle C = 34°12'$.

§ **194. 4-й случай.** *Решение треугольника по двум сторонам и углу, противолежащему одной из них:*

Данные: a, b, $\angle A$. *Искомые:* $\angle B$, $\angle C$, c.

Из формулы (17)

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

находим

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a},$$

после чего определяем угол B [1]).

Угол C найдется вычитанием:

$$\angle C = 180° - (\angle A + \angle B).$$

Из той же формулы (17)

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$

определим сторону c:

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

Для контроля можно вычислить данный угол A из формулы (17):

$$\sin A = \frac{a \sin C}{c}.$$

§ 195. Возьмем формулу

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a},$$

по которой определяется угол B, и исследуем ее для решения вопроса, какое значение угла надо брать: острый ли угол, получаемый непосредственно из таблиц, или тупой угол, дополняющий его до 180°.

Исследование подразделяется на три части в зависимости от соотношения между сторонами a и b.

I. Если $b < a$, т. е. если искомый угол B лежит против **меньшей** из данных сторон, то и подавно

$$b \sin A < a,$$

т. е. в дроби $\frac{b \sin A}{a}$ числитель меньше знаменателя, а потому $\sin B$ в этом случае выражается **правильной дробью**, т. е. решение всегда **возможно**. При этом искомый угол B, лежащий против **меньшей** стороны, **не может быть тупым**. Следовательно, для угла B приемлемо всего только **одно значение** — меньшее 90°, т. е. задача в этом случае будет вполне определенная и будет **одно** решение.

---

[1]) Здесь по заданному значению $\sin B$ мы находим значение B. Но так как каждому значению синуса вообще соответствуют два значения угла в пределах 180°, то и здесь вообще могут быть два значения угла B. Более подробно по этому вопросу см. § 195.

II. Если $b = a$, то треугольник равнобедренный, $\angle B = \angle A$, и опять будет одно решение.

III. Если $b > a$, т. е. если искомый угол B лежит против бо́льшей стороны, то могут представиться следующие три случая:

1. Если $\frac{b \sin A}{a} > 1$, то для $\sin B$ получается значение невозможное, что указывает на невозможность решения треугольника, т. е. на неправильность его задания.

2. Если $\frac{b \sin A}{a} = 1$, т. е. если $\sin B = 1$, то $\angle B = 90°$, и, следовательно, возможно одно решение: треугольник — прямоугольный.

3. Если $\frac{b \sin A}{a} < 1$, то для $\sin B$ получается значение, вполне возможное и притом бо́льшее, чем $\sin A$, так как $\sin B = \frac{b}{a} \sin A$, а по условию $b > a$, т. е. $\frac{b}{a} > 1$. Если же $\sin B > \sin A$, то угол B больше угла A, чего и следовало ожидать, так как против бо́льшей стороны (b) лежит и бо́льший угол (B).

При этом угол B, как угол противолежащий бо́льшей стороне, может быть и острым и тупым, так что в этом случае по $\sin B$ найдутся два угла, удовлетворяющие требованию, т. е. задача будет иметь два решения. Следовательно, найдя из таблиц острый угол B, надо взять и второе значение $B_1 = 180° - B$, также удовлетворяющее заданию.

Дальнейшее решение треугольника, т. е. определение угла C и стороны c, придется вести уже отдельно для каждого из найденных значений угла B.

Итак, задача на решение треугольника по двум сторонам и углу, противолежащему одной из них, может иметь два решения только лишь в том случае, когда ищется угол, лежащий против бо́льшей из двух данных сторон.

§ 196. Графическое исследование сомнительного случая дает очень наглядную иллюстрацию к рассуждениям предыдущего параграфа.

Пусть требуется построить треугольник по данным сторонам a и b и углу A.

Поступаем для этого так. На произвольной прямой строим угол, равный A (черт. 92), на одной из сторон этого угла откладываем от вершины отрезок $AC = b$ и из точки C радиусом, равным стороне a, описываем дугу.

Здесь могут встретиться три различных случая.

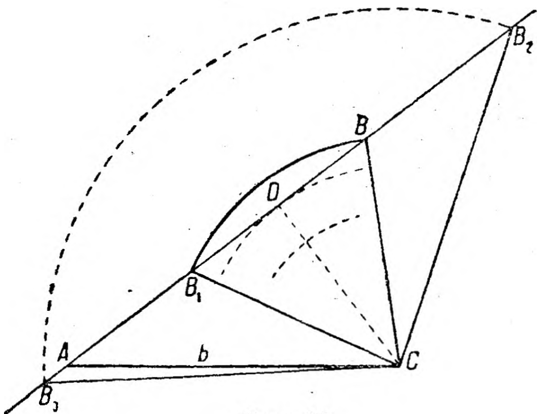
1. Если сторона a окажется меньше перпендикуляра CD, то дуга эта не будет иметь общих точек с другой стороной угла A, т. е. построение треугольника окажется невозможным (§ 195, случай III, 1).

2. Если сторона a окажется равной перпендикуляру CD, то дуга будет касаться другой стороны угла A, и получится одно решение: треугольник ADC—прямоугольный (§ 195, случай III, 2).

3. Если сторона a окажется больше перпендикуляра CD, то дуга пересечет прямую AD в двух точках.

При этом, если $a < b$, то обе точки пересечения B и B_1 будут лежать по одну сторону от вершины A, и оба полученных треугольника ABC и AB_1C будут удовлетворять всем условиям, т. е. построение даст два решения: $\triangle ABC$ с острым углом B и $\triangle AB_1C$ с тупым углом $B_1 = 180° - \angle BB_1C = 180° - \angle B$ (§ 195, случай III, 3).

Но если $a > b$, то точки пересечения дуги со стороной AD расположатся по разные стороны от вершины A, и из двух полученных треугольников AB_2C и AB_3C только первый будет удовлетворять всем требованиям задачи. Треугольник же AB_3C не будет содержать требуемого угла A и потому не годится (§ 195, случай 1).



Черт. 92.

Чтобы яснее была связь графического исследования с аналитическим, следует заметить, что из треугольника ADC имеем $CD = b \sin A$.

Исследуем предложенные ниже задачи:

1. $\angle A = 30°$, $a = 40$, $b = 100$.

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{100 \cdot \frac{1}{2}}{40} = \frac{5}{4} > 1.$$

Треугольник невозможен (см. § 195, случай III, 1).

Если бы здесь для $\sin B$ получилось значение, меньшее единицы, то было бы два решения, так как мы ищем угол B, лежащий против бо́льшей стороны (см. § 195, случай III, 3).

2. $a = 35$, $b = 17$, $\angle A = 84°$.

Возможно одно решение, так как искомый угол B, находясь против меньшей стороны, не может быть тупым (см. § 195, случай I).

3. $a = 459$, $b = 514$, $\angle A = 50°$.

Возможны два решения (см. § 195, случай III, 3).

4. $a = 173$, $b = 200$, $\angle A = 47°$.

Возможны два решения (см. § 195, случай III, 3).

§ 197. Приведем несколько числовых примеров на четвертый случай решения треугольника.

Пример 1. Решить треугольник, если дано:

$$a = 700, \quad b = 650, \quad \angle A = 40°25'.$$

Так как мы должны искать угол B, лежащий против меньшей стороны, то будет одно решение.

1. Вычисление угла B:

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{650 \sin 40°25'}{700}.$$

Логарифмируем:

$$\lg \sin B = 2{,}8129 + \bar{1}{,}8118 - 2{,}8451 = \bar{1}{,}7796,$$

откуда

$$\angle B = 37°1'.$$

2. Вычисление угла C:

$$\angle C = 180° - (40°25' + 37°1') = 102°34'.$$

3. Вычисление стороны c:

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{700 \sin 102°34'}{\sin 40°25'}.$$

Логарифмируем:

$$\lg c = 2{,}8451 + \bar{1}{,}9895 - \bar{1}{,}8118 = 3{,}0228,$$

откуда

$$c = 1054.$$

4. Контрольное вычисление угла A:

$$\sin A = \frac{a \sin C}{c} = \frac{700 \sin 102°34'}{1054},$$

$$\lg \sin A = 2{,}8451 + \bar{1}{,}9895 - 3{,}0228 = \bar{1}{,}8118,$$

откуда по таблицам получаем

$$\angle A = 40°25'.$$

Пример 2. Решить треугольник, если дано:

$$a = 30, \quad b = 57, \quad \angle A = 42°.$$

1. Вычисление угла B:

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{57 \sin 42°}{30}.$$

Логарифмируем:

$$\lg \sin B = 1{,}7559 + \bar{1}{,}8255 - 1{,}4771 = 0{,}1043.$$

Так как для $\lg \sin B$ получилось положительное значение, то $\sin B$ больше единицы, т. е. треугольник невозможен (см. § 195, случай III, 1).

Пример 3. Решить треугольник, в котором дано:

$$a = 360, \quad b = 309, \quad \angle B = 21°14'.$$

1. Вычисление угла A:

$$\sin A = \frac{a \sin B}{b} = \frac{360 \sin 21°14'}{309},$$

$$\lg \sin A = 2{,}5563 + \bar{1}{,}5591 - 2{,}4900 = \bar{1}{,}6254,$$

откуда

$$\angle A = 24°58'.$$

Второе значение для угла A будет:

$$A_1 = 180° - 24°58' = 155°2'.$$

В дальнейшем решение разветвляется на две части: для острого угла A и для тупого угла A_1.

2. Вычисление угла C:

Первое решение	Второе решение
$\angle C = 180° - (24°58' + 21°14') = 133°48'$.	$\angle C = 180° - (155°2' + 21°14') = 3°44'$.

3. Вычисление стороны c $\left(\text{по формуле } c = \frac{b \sin C}{\sin B}\right)$:

Первое решение	Второе решение
$c = \frac{309 \sin 133°48'}{\sin 21°14'}$	$c = \frac{309 \sin 3°44'}{\sin 21°14'}$,
$\lg c = 2{,}4900 + \bar{1}{,}8584 - \bar{1}{,}5591 = 2{,}7893$,	$\lg c = 2{,}4900 + \bar{2}{,}8137 - \bar{1}{,}5591 = 1{,}7446$,
по таблицам находим:	по таблицам находим:
$c = 615{,}6$.	$c = 55{,}54$.

Итак, задача имеет два решения:

$$1)\ \angle A = 24°58',\quad \angle C = 133°48',\quad c = 615{,}6;$$
$$2)\ \angle A = 155°2',\quad \angle C = 3°44',\quad c = 55{,}54.$$

Контрольное определение стороны a по формуле

$$a = \frac{c \sin A}{\sin C}$$

для обоих случаев подтверждает правильность решения.

Примеры для упражнений

§ 198. Решить треугольник, если дано:

1. $a = 970{,}6$, $c = 1144$, $\angle A = 35°43'$;
2. $a = 0{,}339$, $c = 0{,}3880$, $\angle B = 45°2'$;
3. $a = 4{,}732$, $b = 3{,}390$, $\angle A = 80°55'$;
4. $a = 388{,}2$, $c = 672{,}3$, $\angle A = 35°16'$;
5. $a = 2889$, $b = 2582$, $\angle A = 84°32'$.

ГЛАВА XXIII

ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЛОЩАДИ, ВЫСОТ И ДРУГИХ ЭЛЕМЕНТОВ ТРЕУГОЛЬНИКА

§ 199. В этой главе мы даем вывод формул для вычисления площади треугольника, его высот и радиусов описанной (около него) и вписанной (в него) окружностей.

Определение высот треугольника

§ 200. Из черт. 93 имеем

$$h_a = b\sin C = c\sin B,$$
$$h_b = a\sin C = c\sin A,$$
$$h_c = a\sin B = b\sin A.$$

Определение площади треугольника

§ 201. Из геометрии известно, что

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c.$$

Если сюда вместо высоты подставить ее значение из § 200, то получится:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}bc\sin A, \tag{24}$$

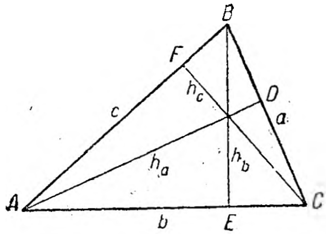
т. е. площадь треугольника равна половине произведения двух сторон на синус угла между ними.

Если возьмем только что полученную формулу и перепишем ее так:

$$S = \frac{1}{2}ab\cdot 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} = ab\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2},$$

то, заменяя здесь $\sin\frac{C}{2}$ и $\cos\frac{C}{2}$ их значениями из формул (19) и (20), получим

$$S = ab\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}\cdot\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}},$$



Черт. 93.

а после упрощений

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Формула эта известна из геометрии[1]). Она очень удобна для вычисления площади треугольника по трем сторонам его. Если, кроме площади, требуется найти и углы, то вычисление по этой формуле не потребует нахождения ни одного нового логарифма, так как все требуемые логарифмы будут уже предварительно определены для вычисления углов.

Возьмем еще раз формулу

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C$$

(выражающую площадь через две стороны и угол) и преобразуем ее так, чтобы получить выражение площади через какую-нибудь одну сторону и углы.

Для этого исключим из этой формулы b, пользуясь его выражением $b = \frac{a\sin B}{\sin A}$, полученным из формулы (17).

[1]) Формула Герона.

После подстановки этого значения b получится:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot \frac{a \sin B}{\sin A} \cdot \sin C = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}.$$

Итак,

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}. \tag{25}$$

Аналогичным способом получим

$$S = \frac{b^2 \sin A \sin C}{2 \sin B} \quad \text{и} \quad S = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2 \sin C}. \tag{25}$$

Кроме этих формул, имеющих применение при вычислении площади, полезно отметить еще следующие две зависимости.

Если равенство

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

почленно разделить на равенство

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},$$

то получится

$$\frac{S}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}} = p(p-a),$$

откуда

$$S = p(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}.$$

Подобным же образом получим

$$S = p(p-b)\operatorname{tg}\frac{B}{2} \quad \text{и} \quad S = p(p-c)\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

Таким образом, если при решении треугольников требуется, кроме сторон и углов его, определить и площадь, то для этой цели служат следующие формулы.

1. При решении первого случая (по трем сторонам) площадь вычисляется по формуле

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

2. Для второго случая (по a, b, $\angle C$) применяют формулу (24)

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C.$$

3. Для третьего случая (по a, $\angle B$, $\angle C$) пользуются формулой (25)

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}.$$

4. Для четвертого случая (по a, b, $\angle A$) специальной формулы не имеется, и приходится выражать площадь через два данных и один

из найденных элементов по формуле (24)

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C.$$

Радиус описанной окружности

§ 202. Возьмем произвольный треугольник ABC и опишем около него окружность (черт. 94).

Через любую из вершин, например B, проведем диаметр BK и соединим K с вершиной A (или C). Тогда вписанный угол BAK опирается на диаметр, т. е. треугольник ABK — прямоугольный, а потому имеем

$$AB=BK\sin AKB$$

или

$$AB=BK\sin ACB$$

или, применяя сокращенные обозначения, получим

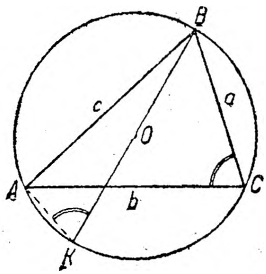
$$c=2R\sin C,$$

откуда

$$\frac{c}{\sin C}=2R,$$

следовательно

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$



Черт. 94.

Итак, оказывается, что отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру окружности, описанной около этого треугольника (ср. § 181, форм. 17a).

Отсюда сразу получается формула для определения радиуса описанной окружности через основные элементы треугольника:

$$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{b}{2\sin B}=\frac{c}{2\sin C}.$$

Из этой основной формулы легко получить еще две (известные из геометрии) формулы для определения радиуса описанной окружности.

Из формулы $h_b=a\sin C$ имеем $\sin C=\frac{h_b}{a}$, а потому формула

$$R=\frac{c}{2\sin C}$$

может быть переписана так:

$$R=\frac{ac}{2h_b}.$$

Если числитель и знаменатель дроби, стоящей в правой части полученной формулы, умножить на b, то будем иметь

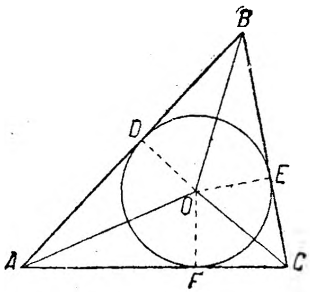
$$R=\frac{abc}{2bh_b}$$

или

$$R=\frac{abc}{4S}.$$

Радиус вписанной окружности

§ 203. Пусть ABC (черт. 95) будет произвольный треугольник и r — радиус вписанной в него окружности. Так как центр O лежит на пересечении трех биссектрис, то



Черт. 95.

$$\angle OAF = \frac{1}{2} A \quad \text{и} \quad \angle OCF = \frac{1}{2} C,$$

а потому из прямоугольных треугольников OAF и OCF имеем

$$AF = OF \operatorname{ctg} OAF = r \operatorname{ctg} \frac{A}{2},$$

$$CF = OF \operatorname{ctg} OCF = r \operatorname{ctg} \frac{C}{2}.$$

Складывая эти равенства, имеем

$$AF + CF = r\left(\operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2}\right),$$

или, суммируя котангенсы, получим

$$b = r \cdot \frac{\sin\left(\frac{A}{2} + \frac{C}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2} \sin\frac{C}{2}} = \frac{r \cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2} \sin\frac{C}{2}},$$

откуда

$$r = \frac{b \sin\frac{A}{2} \sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}}.$$

Подобным же образом найдем

$$r = \frac{a \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}} \quad \text{и} \quad r = \frac{c \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}.$$

Из чертежа видно, что площадь треугольника ABC складывается из суммы площадей треугольников OBC, OAC и OAB, а потому

$$S = \frac{1}{2} ar + \frac{1}{2} br + \frac{1}{2} cr = \frac{r}{2}(a + b + c) = \frac{r}{2} \cdot 2p = rp,$$

откуда получаем известную из геометрии формулу $r = \frac{S}{p}$.

Подставляя сюда вместо S его выражение из формулы

$$S = p(p - a) \operatorname{tg} \frac{A}{2},$$

получаем еще одну формулу:

$$r = (p - a) \operatorname{tg} \frac{A}{2} \text{ [1]}.$$

---

[1]) Формула эта легко выводится из черт. 95, а именно: сначала доказываем, что отрезок AF равен $(p - a)$. Теперь из прямоугольного треугольника OAF имеем $OF = AF \operatorname{tg} OAF$ или $r = (p - a) \operatorname{tg} \frac{A}{2}$.

ЧАСТЬ ПЯТАЯ

ОБЩИЙ ВИД УГЛОВ. ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

ГЛАВА XXIV

ОБЩИЙ ВИД УГЛОВ

§ 204. Тригонометрические функции являются функциями однозначными. Другими словами, каждому данному углу, соответствует одно, и только одно, значение каждой тригонометрической функции.

Мы уже знаем, что обратное утверждение: „каждому данному значению тригонометрической функции соответствует один, и только один, угол",—неверно.

Например, синус 30° имеет одно, и только одно, значение $\left(\frac{1}{2}\right)$. Между тем, обратно, если дано значение синуса, равное $\frac{1}{2}$, то этому значению синуса соответствует не только угол в 30°, но и угол в 150°, так как $\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ$. Кроме того, по свойству периодичности углы

$$360^\circ + 30^\circ, \quad 360^\circ \cdot 2 + 30^\circ, \quad 360^\circ \cdot 3 + 30^\circ, \ldots$$

имеют то же значение синуса, что и угол в 30°.

Итак, если угол рассматривать как функцию его синуса, то эта функция — многозначная.

Формулы общего вида углов для синуса и косеканса

§ 205. Несмотря, однако, на бесчисленное множество углов, удовлетворяющих каждому данному значению тригонометрической функции, все же можно объединить все эти углы в определенные формулы, которые будут заключать в себе все без исключения углы, удовлетворяющие тому или иному заданному условию.

Формулы эти называются в тригонометрии *формулами общего вида углов*. К выводу этих формул мы теперь и переходим.

Возьмем для простоты тот же самый пример: дано, что $\sin x = \frac{1}{2}$, и требуется определить все углы, удовлетворяющие этому условию.

Рассуждаем так.

Нам известно, что $\sin 30° = \frac{1}{2}$, откуда ясно, что значение $x_1 = 30°$ будет одним из решений данного уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$.

Так как $\sin(180° - 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$, то значение $x_2 = 180° - 30°$ тоже будет одним из решений данного уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$.

Итак, в пределах одного оборота заданному уравнению удовлетворяют два значения:

$$x_1 = 30° \quad \text{и} \quad x_2 = 180° - 30°.$$

Все же остальные углы, имеющие тот же синус, получаются из двух уже найденных значений, путем прибавления к ним или вычитания из них, на основании свойства периодичности, произвольного целого числа периодов.

Итак, искомые углы будут:

$$x = 360°k + 30°, \quad \text{или} \quad x = 180°\cdot 2k + 30°$$

и

$$x = 360°k + 180° - 30°, \quad \text{или} \quad x = 180°(2k+1) - 30°,$$

где k есть произвольное (положительное или отрицательное) целое число или нуль.

В этих двух формулах $x = 180°\cdot 2k + 30°$ и $x = 180°(2k+1) - 30°$ заключаются действительно **все** углы, имеющие синус равный $\frac{1}{2}$, и потому это и есть **формулы общего вида**. Входящий сюда неопределенный множитель k есть **произвольное** положительное или отрицательное **целое** число или нуль.

В общем случае, если дано, что $\sin x = m \ (|m| \leqslant 1)$, и если нам удастся установить (по таблицам или как-нибудь иначе), что **одно** из значений, удовлетворяющих этому условию, будет $x_1 = \alpha$, то общий вид **всех** углов, определяемых данным уравнением, будет

$$x = 180°\cdot 2k + \alpha \quad \text{и} \quad x = 180°(2k+1) - \alpha.$$

Пример. Если $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то $x_1 = 60°$, а общий вид углов будет

$$x = \begin{cases} 180°\cdot 2k + 60°, \\ 180°(2k+1) - 60°. \end{cases}$$

Так как все углы, имеющие равные косекансы, будут иметь также и равные синусы, то очевидно, что и общий вид углов для косеканса будет тот же, что и для синуса, т. е.

$$x = 180°\cdot 2k + \alpha \quad \text{и} \quad x = 180°(2k+1) - \alpha,$$

где α — один из углов, удовлетворяющих данному условию.

Например, если дано, что $\operatorname{cosec} x = \sqrt{2}$, то $x_1 = 45°$, а общий вид углов будет

$$x = \begin{cases} 180°\cdot 2k + 45° \\ 180°(2k+1) - 45°. \end{cases}$$

Две формулы, выражающие общий вид всех углов, имеющих равные синусы (или косекансы), можно объединить в одну:

$$x = 180°k + (-1)^k\alpha.$$

В самом деле, при k четном получается четное число полуоборотов плюс угол α, а при k нечетном получается нечетное число полуоборотов минус угол α, т. е. как раз то, что требуется.

Если, например, $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то $x_1 = 60°$, и вместо отдельных формул

$$x = \begin{cases} 180°\cdot 2k + 60° \\ 180°(2k+1) - 60° \end{cases}$$

можно написать одну общую:

$$x = 180°k + (-1)^k 60°.$$

Формулы общего вида углов для косинуса и секанса

§ 206. Пусть требуется найти все углы, удовлетворяющие уравнению $\cos x = \frac{1}{2}$.

Мы знаем, что $\cos 60° = \frac{1}{2}$, а потому заключаем, что значение $x = 60°$ будет одним из решений предложенного уравнения. Так как $\cos(360° - 60°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$, то второе значение, удовлетворяющее требуемому условию, будет $(360° - 60°)$. Мы можем, однако, за это второе значение вместо угла $(360° - 60°)$ взять угол $(-60°)$, так как, отбрасывая период 360°, мы не изменяем значения тригонометрической функции.

Итак, имеем

$$x_1 = +60° \quad \text{и} \quad x_2 = -60°.$$

Все же остальные углы, имеющие тот же косинус, получатся из этих двух найденных уже значений путем прибавления (или вычитания) произвольного числа периодов.

Поэтому имеем

$$x = 360°k + 60° \quad \text{и} \quad x = 360°k - 60°$$

или

$$x = 360°k \pm 60°.$$

где k есть произвольное (положительное или отрицательное) целое число или нуль.

Это и есть формула общего вида для углов, имеющих равные косинусы (или секансы).

В общем случае, если дано $\cos x = m$ ($|m| \leqslant 1$) и если по таблицам (или как-нибудь иначе) удастся установить, что одним из углов, удовлетворяющих этому уравнению, будет $x_1 = \alpha$, то общий вид всех таких углов выразится формулой

$$x = 360^\circ k \pm \alpha.$$

Пример. Если $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то $x_1 = 30^\circ$, а $x = 360^\circ k \pm 30^\circ$.

Формулы общего вида углов для тангенса и котангенса

§ 207. Пусть требуется найти все углы, удовлетворяющие уравнению $\operatorname{tg} x = + \sqrt{3}$.

Мы знаем, что $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$, откуда заключаем, что значение $x_1 = 60^\circ$ является одним из решений предложенного уравнения.

Так так $\operatorname{tg}(180^\circ + 60^\circ) = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$, то значение $x_2 = 180^\circ + 60^\circ$ тоже будет удовлетворять данному уравнению.

Все остальные углы получаются из этих двух найденных значений путем прибавления (или вычитания) произвольного числа периодов и, следовательно, будем иметь

$$x = 360^\circ k + 60^\circ, \text{ или } x = 180^\circ \cdot 2k + 60^\circ$$

и

$$x = 360^\circ k + 180^\circ + 60^\circ, \text{ или } x = 180^\circ\ (2k + 1) + 60^\circ,$$

где k есть произвольное (положительное или отрицательное) целое число или нуль.

Рассматривая полученные две формулы:

$$x = 180^\circ \cdot 2k + 60^\circ \text{ и } x = 180^\circ(2k + 1) + 60^\circ,$$

замечаем следующее:

первая формула дает произвольное четное число ($2k$) полуоборотов плюс 60°;

вторая формула дает произвольное нечетное число ($2k + 1$) полуоборотов опять-таки плюс 60°, т. е. заключаем, что можно взять любое целое число полуоборотов — четное или нечетное, безразлично — и прибавить 60°.

Следовательно, две формулы

$$x = 180^\circ \cdot 2k + 60^\circ \quad \text{и} \quad x = 180^\circ (2k + 1) + 60^\circ$$

могут быть объединены в одной:

$$x = 180^\circ k + 60^\circ,$$

где k есть произвольное (положительное или отрицательное) целое число или нуль. Эта формула и является окончательной формулой общего вида для углов, имеющих равные тангенсы (или котангенсы).

В общем случае, если дано $\operatorname{tg} x = m$, и каким-нибудь образом удалось установить, что одним из углов, имеющих тангенс, равный m, будет угол $x_1 = \alpha$, то все углы, удовлетворяющие данному уравнению, будут заключены в формуле

$$x = 180°k + \alpha.$$

Пример. Если $\operatorname{tg} x = 1$, то $x_1 = 45°$, а общий вид углов будет

$$x = 180°k + 45°.$$

Принимая в общей формуле для тангенса ($x = 180°k + \alpha$) коэфициент k равным 0, 1, 2, 3, 4 ..., получим ряд углов, имеющих равные тангенсы:

$$\alpha,\ 180° + \alpha,\ 180° \cdot 2 + \alpha,\ 180° \cdot 3 + \alpha$$

и т. д.

Отсюда заключаем, что при изменении угла на 180° значение его тангенса (а следовательно, и котангенса) не меняется, а это показывает, что 180° является периодом для тангенса (и котангенса).

Таким образом мы теперь убедились из формулы в том, что нам уже было известно из графика (§ 94).

§ 208. Решим несколько более трудных примеров на нахождение общего вида углов.

Пример 1. Найти угол x, если $\sin 8x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Так как $\sin(-60°) = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, то одним из углов, удовлетворяющих уравнению, будет $(-60°)$, т. е. $(8x)_1 = -60°$.

Поэтому общий вид углов будет:

$$8x = \begin{cases} 180° \cdot 2k - 60° \\ 180°(2k+1) + 60°, \end{cases}$$

а следовательно,

$$x = \begin{cases} 45°k - 7°30' \\ 22°30'(2k+1) + 7°30'. \end{cases}$$

Пример 2. Определить x, если $\cos 6x = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$, при этом дано $\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Имеем

$$\cos 6x = \frac{1-\sqrt{5}}{4} = -\frac{\sqrt{5}-1}{4} = -\sin 18° = \cos(90°+18°) = \cos 108°.$$

Таким образом

$$(6x)_1 = 108°,$$

поэтому

$$6x = 360°k \pm 108°,$$

а следовательно,

$$x = 60°k \pm 18°.$$

Пример 3. Решить уравнение $\operatorname{tg} 12x = -\sqrt{3}$.

Имеем

$$\operatorname{tg} 12x = -\sqrt{3} = -\operatorname{tg} 60° = \operatorname{tg}(-60°).$$

Таким образом

$$(12x)_1 = -60°,$$

поэтому

$$12x = 180°k - 60°,$$

а следовательно,

$$x = 15°k - 5°.$$

§ 209. При составлении общих формул, содержащих все углы, удовлетворяющие данному уравнению, надо иметь в виду следующее.

Прежде всего необходимо найти какой-нибудь один из углов, удовлетворяющих требованию (так называемый „первый угол").

Найденное значение первого угла подставить вместо α в формулы общего вида:

$x = 180° \cdot 2k + \alpha$ и $x = 180°(2k + 1) - \alpha$ (для синуса и косеканса),

$x = 360°k \pm \alpha$ (для косинуса и секанса),

$x = 180°k + \alpha$ (для тангенса и котангенса).

Следует, однако, заметить, что иногда приходится выписывать формулы общего вида, не определяя предварительно числового значения первого угла.

Пусть, например, дано $\sin x = \frac{2}{3}$, и требуется найти общий вид углов, не определяя предварительно ни одного числового значения x.

Для этого можно воспользоваться понятием о так называемых аркусах (см. § 213).

Если нам дано

$$\sin x = \frac{2}{3},$$

то, не зная значения угла x, мы можем про этот угол x сказать только то, что „x есть такой угол, синус которого $\frac{2}{3}$". Для записи этой мысли существует символ

$$x = \arcsin \frac{2}{3}\text{,}^{1)}$$

что читается

$$x \text{ есть арксинус } \frac{2}{3}.$$

---

[1]) Латинское слово „arcus" (сокращенно arc) означает в переводе „дуга". Мы здесь употребляем это слово в смысле угла, так как угол измеряется дугой.

Поэтому, если мы хотим написать формулу общего вида углов, удовлетворяющих уравнению $\sin x = \frac{2}{3}$, не определяя предварительно ни одного числового значения x, то подставляют выражение $\arcsin \frac{2}{3}$ вместо α в формулу, что дает:

$$x = \begin{cases} 180^\circ \cdot 2k + \arcsin \frac{2}{3} \\ 180^\circ (2k+1) - \arcsin \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Подобным же образом, если $\cos x = \frac{4}{7}$, то $x_1 = \arccos \frac{4}{7}$ [1]), поэтому имеем

$$x = 360^\circ k \pm \arccos \frac{4}{7}.$$

Если $\operatorname{tg} x = \frac{19}{13}$, то $x_1 = \operatorname{arctg} \frac{19}{13}$ [2]),

поэтому имеем

$$x = 180^\circ k + \operatorname{arctg} \frac{19}{13}.$$

К подобному способу выражения углов через „аркусы" можно прибегать во всех тех случаях, когда требуется написать общий вид углов без предварительного определения числового значения угла.

Примеры для упражнений

§ 210. Написать общий вид углов, удовлетворяющих следующим уравнениям:

1. $\sin 3x = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$;
2. $\cos 5x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
3. $\operatorname{tg} 9x = -1$;
4. $\operatorname{ctg} 15x = -\sqrt{\frac{1}{3}}$;
5. $\sec 6x = -2$;
6. $\operatorname{cosec} 15x = -\sqrt{2}$;
7. $\sin 6x = 0$;
8. $\cos 9x = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$;
9. $\sec 15x = -1$;
10. $\operatorname{ctg} 6x = 0$;
11. $\operatorname{cosec} 12x = -1$;
12. $\cos 4x = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$;
13. $\operatorname{tg} 10x = \frac{2}{13}$;
14. $\operatorname{tg} 5x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
15. $\cos 3x = 0$;
16. $\sec 12x = -\frac{5}{4}$;
17. $\operatorname{cosec} 3x = -8{,}9$;
18. $\cos 6x = 1$;
19. $\operatorname{tg} 8x = -\sqrt{3}$;
20. $\sin \frac{x}{3} = -\frac{1}{2}$;
21. $\cos \frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
22. $\operatorname{tg} \frac{x}{10} = 1$;
23. $\operatorname{ctg} \frac{x}{5} = 0$;
24. $\sec \frac{x}{7} = -2$;
25. $\operatorname{cosec} \frac{x}{4} = -5$.

---

[1]) Читается „арккосинус $\frac{4}{7}$".

[2]) Читается „арктангенс $\frac{19}{13}$".

§ 211. Нередко приходится писать общий вид углов, для которых значение какой-нибудь тригонометрической функции этих углов не дано непосредственно, а выражено через одноименную или дополнительную функцию некоторого другого угла. Таковы, например, уравнения:

$$\sin 5x = \sin 17°, \ \cos 4x = -\cos 32°, \ \operatorname{tg} 6x = -\operatorname{ctg} 53°,$$

$$\sin 9x = -\sin x, \ \cos\frac{x}{3} = -\sin 2x, \ \operatorname{tg} 5x = -\operatorname{ctg} 10x \text{ и т. п.}$$

Все такие уравнения решаются очень просто при помощи формул общего вида и весьма элементарных соображений.

Пример 1. Определить x, если $\sin 9x = \sin 33°$.

Прежде всего заметим, что из равенства синусов отнюдь еще не следует, что и углы тоже обязательно равны между собой. Однако все же несомненно, что одно из значений, при которых заданное уравнение $\sin 9x = \sin 33°$ обратится в тождество, может быть получено в том частном случае, когда углы $9x$ и $33°$ равны между собой, а потому мы в праве написать первое возможное решение:

$$(9x)_1 = 33°.$$

Но, определив первый угол, мы можем по формуле общего вида выписать уже все значения:

$$9x = \begin{cases} 180° \cdot 2k + 33° \\ 180° (2k + 1) - 33°, \end{cases}$$

откуда

$$x = \begin{cases} 40°k + 3°40' \\ 20° (2k + 1) - 3°40'. \end{cases}$$

Это и есть искомое решение, содержащее все углы, удовлетворяющие заданному уравнению.

Пример 2. Решить уравнение $\sin 7x = -\sin 3x$.

Переписываем наше уравнение так:

$$\sin 7x = \sin (-3x),$$

после чего получаем одно из возможных решений:

$$(7x)_1 = -3x,$$

а все решения найдутся из формул общего вида:

$$7x = \begin{cases} 180° \cdot 2k - 3x \\ 180° (2k + 1) + 3x, \end{cases}$$

откуда находим

$$10x = 180° \cdot 2k$$

и

$$4x = 180° (2k + 1),$$

а из этих уравнений окончательно получим

$$x = 36°k$$

и

$$x = 45° (2k + 1).$$

Пример 3. Решить уравнение $\cos 5x = -\cos\frac{x}{2}$.

Переписываем:

$$\cos 5x = \cos\left(180^\circ - \frac{x}{2}\right)$$

и заключаем, что одно из решений будет

$$(5x)_1 = 180^\circ - \frac{x}{2},$$

а следовательно, для всех решений будет служить формула

$$5x = 360^\circ k \pm \left(180^\circ - \frac{x}{2}\right),$$

откуда после приведения и упрощения:

$$11x = 720^\circ k + 360^\circ$$

и

$$9x = 720^\circ k - 360^\circ,$$

а из этих уравнений найдем

$$x = \frac{360^\circ}{11}(2k+1)$$

и

$$x = 40^\circ(2k-1).$$

Пример 4. Найти все значения x, если $\operatorname{tg} 8x = -\operatorname{ctg} 7x$.

Переписываем так:

$$\operatorname{tg} 8x = \operatorname{tg}(90^\circ + 7x),$$

после чего получаем одно из решений:

$$(8x)_1 = 90^\circ + 7x,$$

а потому

$$8x = 180^\circ k + (90^\circ + 7x),$$

откуда окончательно получим

$$x = 90^\circ(2k+1).$$

§ 212. Примеры для упражнений

1. $\sin\frac{x}{2} = \sin\frac{x}{3}$;
2. $\sin 17x = -\sin 13x$;
3. $\cos 6x = \cos\frac{x}{5}$;
4. $\cos 9x = -\cos 3x$;
5. $\operatorname{tg} 3x = -\operatorname{tg} 10x$;
6. $\operatorname{tg} 5x = \operatorname{ctg} 3x$;
7. $\sin 11x = -\cos 7x$;
8. $\cos 9x = -\sin 7x$;
9. $\sin 7x + \cos 3x = 0$;
10. $\operatorname{tg} 5x + \operatorname{ctg} 4x = 0$.

ГЛАВА XXV

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Понятие обратных тригонометрических функций

§ 213. Если обозначить через x величину угла (или соответствующей дуги), — в градусной или радиальной мере, безразлично, — а соответствующие значения его синуса, косинуса, тангенса и т. д. через y, то существующие между величиной угла (дуги) и указанными тригонометрическими функциями зависимости обозначатся равенствами:

$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \operatorname{tg} x \quad \text{и т. д.}$$

Здесь x — независимая переменная, а y — функция.

Однако, если существует функциональная зависимость между двумя переменными величинами (y и x), то любую из двух переменных можно рассматривать как независимую переменную (аргумент), а тогда другая является функцией от первой. Если y рассматривать как независимую переменную (аргумент), то x есть функция от y.

Если в функциональных зависимостях:

$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \operatorname{tg} x \quad \text{и т. д.}$$

принять y за независимую переменную (аргумент), а x за функцию, то для обозначения x как функции от y служат следующие символические равенства:

$$x = \operatorname{Arcsin} y, \quad x = \operatorname{Arccos} y, \quad x = \operatorname{Arctg} y \quad \text{и т. д.}$$

Эти равенства выражают, что

x есть угол[1]), синус которого равен y;
x есть угол, косинус которого равен y;
x есть угол, тангенс которого равен y; и т. д.

Функции $\operatorname{Arcsin} y$, $\operatorname{Arccos} y$, $\operatorname{Arctg} y$ и т. д. в отличие от тригонометрических функций $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и т. д. называются *обратными тригонометрическими функциями* или *обратными круговыми функциями*. (Их называют также *циклометрическими функциями*, от слова „цикл"—круг.)

Здесь мы должны подчеркнуть, что так же как равенства $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ и т. д. не выражают алгебраической зависимости между y и x, так и равенства $x = \operatorname{Arcsin} y$, $x = \operatorname{Arccos} y$, $x = \operatorname{Arctg} y$ и т. д. такой зависимости не выражают. Первые равенства в символической форме выражают мысль, что y есть некоторая определенная функция от x, а вторые равенства выражают мысль, что x есть некоторая определенная функция от y. При этом надо иметь в виду, что вторые равенства отнюдь не получаются из первых в результате каких-нибудь алгебраических операций над ними.

---

[1]) *Arc* (арк) сокращенно обозначает латинское слово „*Arcus*" (аркус), что означает „дуга". Но так как центральный угол измеряется дугой, то вместо величины дуги можно говорить о величине угла.

§ 217. Приводим некоторые приемы, применяемые в задачах, содержащих обратные тригонометрические функции.

Пример 1. Вычислить $\sin\left(2 \arccos\frac{3}{5}\right)$.

Пусть $\arccos\frac{3}{5}=a$, и, значит, мы должны найти $\sin 2a$.

Но из равенства $\arccos\frac{3}{5}=a$ заключаем, что $\cos a=\frac{3}{5}$, а следовательно,

$$\sin a=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5},$$

поэтому

$$\sin 2a=2\sin a\cos a=2\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{24}{25}.$$

Итак,

$$\sin\left(2\arccos\frac{3}{5}\right)=\frac{24}{25}.$$

Пример 2. Вычислить $\operatorname{ctg}\left(\arcsin\frac{3}{7}+\arccos\frac{3}{7}\right)$?

Выражение $\left(\arcsin\frac{3}{7}+\arccos\frac{3}{7}\right)$ представляет собой сумму двух наименьших углов (аркусов), синус одного из которых равен косинусу другого $\left(\text{по } \frac{3}{7} \text{ каждый}\right)$. Такие углы — взаимно дополнительные, т. е. сумма их равна 90°, а потому

$$\operatorname{ctg}\left(\arcsin\frac{3}{7}+\arccos\frac{3}{7}\right)=\operatorname{ctg}90^\circ=0.$$

Пример 3. Доказать, что $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=45^\circ$.

Обозначим $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}=a$ и $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=b$,

откуда

$$\operatorname{tg}a=\frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}b=\frac{1}{3}.$$

По формуле (6) имеем

$$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b}{1-\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=\frac{3+2}{6-1}=1.$$

Итак,

$$\operatorname{tg}(a+b)=1,$$

а следовательно,

$$a+b=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=180^\circ\cdot k+\operatorname{arctg}1=180^\circ\cdot k+45^\circ.$$

Остается показать, что k должно равняться нулю. Но это следует из того, что $0 < \operatorname{arctg}\frac{1}{2} < 90°$, $0 < \operatorname{arctg}\frac{1}{3} < 90°$ и поэтому сумма $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$ заключается между 0 и 180°. Таким образом k не может быть ни меньше нуля (иначе $180°\cdot k + 45°$ было бы меньше нуля), ни больше нуля (иначе $180°\cdot k + 45°$ было бы больше 180°) и, следовательно $k = 0$, т. е.

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} = 45°.$$

Можно решить тот же вопрос другим способом.

Применим к $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)$ формулу тангенса суммы двух углов:

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right) =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)}{1 - \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{1}{6}} = 1\,.$$

Итак,

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right) = 1.$$

Отсюда, как и выше заключаем:

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} = 45°\,.$$

Пример 4. Преобразовать выражение $2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arcctg}\frac{3}{7}$.

Обозначим $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$ через a и $\operatorname{arcctg}\frac{3}{7}$ через b. Тогда данное выражение примет вид: $2a + b$. Вычислим теперь $\operatorname{tg}(2a + b)$. Имеем по формуле (6)

$$\operatorname{tg}(2a + b) = \frac{\operatorname{tg} 2a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} 2a \operatorname{tg} b}.$$

Но $\operatorname{tg} 2a$, по формуле (9), равен

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2\operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a} = \frac{2\cdot\frac{1}{3}}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{3}{4},$$

так как $\operatorname{tg} a = \frac{1}{3}$. Кроме того, $\operatorname{tg} b = \frac{7}{3}$, так как $\operatorname{ctg} b = \frac{3}{7}$. Подставляя найденные значения $\operatorname{tg} 2a$ и $\operatorname{tg} b$ в формулу для $\operatorname{tg}(2a + b)$, получим:

$$\operatorname{tg}(2a + b) = \frac{\frac{3}{4} + \frac{7}{3}}{1 - \frac{3}{4}\cdot\frac{7}{3}} = -\frac{37}{9},$$

откуда

$$2a + b = 180°\cdot k + \operatorname{arctg}\left(-\frac{37}{9}\right) = 180°\cdot k - \operatorname{arctg}\frac{37}{9}.$$

Остается найти значение k. Для этого заметим, что $0 < a < 90°$, $0 < b < 90°$, а следовательно, $0 < 2a < 180°$ и $0 < 2a + b < 270°$.

С другой стороны, $0 < \operatorname{arctg} \frac{37}{9} < 90°$. Поэтому $180° \cdot k = 2a + b + \operatorname{arctg} \frac{37}{9}$ должно быть больше нуля и меньше, чем $270° + 90° = 360°$. Таким образом k должно быть больше нуля и меньше двух, т. е. $k = 1$, откуда следует, что

$$2a + b = 180° - \operatorname{arctg} \frac{37}{9}.$$

Вот другой способ решения той же задачи.

Заметим сначала, что $\operatorname{arcctg} \frac{3}{7}$ тождественно равен $\operatorname{arctg} \frac{7}{3}$, ибо это означает не что иное, как то, что угол, котангенс которого равен $\frac{3}{7}$, имеет тангенс, равный $\frac{7}{3}$, т. е. обратному числу.

Теперь находим

$$\operatorname{tg}\left(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{7}{3}\right) = \frac{\operatorname{tg}\left(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3}\right) + \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \frac{7}{3}\right)}{1 - \operatorname{tg}\left(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3}\right) \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \frac{7}{3}\right)}.$$

Но

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \frac{7}{3}\right) = \frac{7}{3}.$$

Остается вычислить

$$\operatorname{tg}\left(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3}\right).$$

Применяя формулу тангенса двойного угла, получаем

$$\operatorname{tg}\left(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3}\right) = \frac{2 \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{3}\right)}{1 - \operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{3}\right)} = \frac{2 \cdot \frac{1}{3}}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{3}{4}.$$

Теперь имеем

$$\operatorname{tg}\left(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{7}{3}\right) = \frac{\frac{3}{4} + \frac{7}{3}}{1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{3}} = -\frac{37}{9}.$$

Откуда, рассуждая как и выше, получим

$$2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{7}{3} = 180° + \operatorname{arctg}\left(-\frac{37}{9}\right) = 180° - \operatorname{arctg} \frac{37}{9}.$$

Следовательно,

$$2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{7}{3} = 180° - \operatorname{arctg} \frac{37}{9}.$$

Пример 5. Доказать, что $\arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{5}{13} - \arcsin \frac{63}{65} = 0$.

Пусть $\arcsin \frac{4}{5} = a$ и $\arcsin \frac{5}{13} = b$; тогда $\sin a = \frac{4}{5}$ и $\sin b = \frac{5}{13}$. Зная синусы, по формуле (1) найдем $\cos a = \frac{3}{5}$ и $\cos b = \frac{12}{13}$.

Будем искать $\sin(a+b)$ по формуле (4):

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b=\frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13}+\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13}=\frac{48+15}{65}=\frac{63}{65}.$$

Если

$$\sin(a+b)=\frac{63}{65},$$

то

$$a+b=180^\circ\cdot k+(-1)^k\cdot\arcsin\frac{63}{65}.$$

Так как $0<a<90^\circ$ и $0<b<90^\circ$, то $0<a+b<180^\circ$ и поэтому k может равняться лишь либо 0, либо 1. В первом случае мы получили бы для $a+b$ значение $\arcsin\frac{63}{65}$, лежащее в первой четверти, так как $\arcsin\frac{63}{65}<90^\circ$, во втором случае — значение $180^\circ-\arcsin\frac{63}{65}$, лежащее во второй четверти. Чтобы выяснить, какому именно из этих двух значений равна сумма $a+b$, вычислим еще $\cos(a+b)$. Получим, по формуле (5):

$$\cos(a+b)=\cos a\cdot\cos b-\sin a\cdot\sin b=\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13}-\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13}=\frac{16}{65}>0.$$

Отсюда мы заключаем, что $a+b$ является углом первой четверти и, следовательно, для k нужно взять значение, равное 0:

$$a+b=\arcsin\frac{63}{65}.$$

и потому данное выражение перепишется так:

$$\arcsin\frac{63}{65}-\arcsin\frac{63}{65},$$

что, очевидно, равно нулю.

Примеры для упражнений

§ 218. 1. Доказать тождество

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} a)=\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} a).$$

2. Найти $\operatorname{cosec}(\operatorname{arcctg} a)$ и $\operatorname{ctg}(\operatorname{arccosec} a)$.

3. Представить $\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg} a)$ в виде алгебраической функции от a. *Указание.* Применить формулу

$$\operatorname{tg}2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2 x}.$$

4. Выразить в функции (алгебраической) от a:

а) $\sin(\operatorname{arccosec} a)$,

б) $\operatorname{cosec}(\arcsin a)$.

5. Показать справедливость тождеств:

а) $a\sin(\operatorname{arccosec} a)=1$,

б) $a\operatorname{cosec}(\arcsin a)=1$.

6. Проверить следующие тождества:

$$\text{а) } \arcsin\frac{a}{b} = \operatorname{arccosec}\frac{b}{a},$$

$$\text{б) } \arccos\frac{a}{b} = \operatorname{arcsec}\frac{b}{a},$$

$$\text{в) } \operatorname{arctg}\frac{a}{b} = \operatorname{arcctg}\frac{b}{a}.$$

Словесно сформулировать эти равенства и объяснить их смысл.

7. Вычислить:

а) $\arcsin y + \arccos y$,

б) $\operatorname{arctg} z + \operatorname{arcctg} z$,

в) $\operatorname{arcsec} t + \operatorname{arccosec} t$.

8. Вычислить:

а) $\sin(\arcsin a + \arccos a)$,

б) $\cos(\operatorname{arctg} z + \operatorname{arcctg} z)$,

в) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcsec} t + \operatorname{arccosec} t)$,

г) $\operatorname{tg}(\arcsin y + \arccos y)$.

9. Доказать тождества:

а) $\cos(2\arccos a) = 2a^2 - 1$,

б) $\cos(2\arcsin a) = 1 - 2a^2$,

в) $\cos(2\arccos a) + \cos(2\arcsin a) = 0$.

10. Доказать тождества:

$$\text{а) } 2\sin^2\left(\frac{1}{2}\arccos a\right) = 1 - a,$$

$$\text{б) } 2\cos^2\left(\frac{1}{2}\arccos a\right) = 1 + a.$$

11. Вычислить выражения:

$$\text{а) } \sin\left(\arccos\frac{5}{13}\right), \quad \text{б) } \operatorname{tg}\left(\operatorname{arccosec}\frac{17}{15}\right), \quad \text{в) } \cos\left(2\arcsin\frac{1}{3}\right),$$

$$\text{г) } \operatorname{ctg}\left(2\operatorname{arcctg}\frac{3}{7}\right), \quad \text{д) } \cos\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{5}\right).$$

12. Проверить тождества:

а) $\operatorname{Arcctg}(-a) = 180^\circ k - \operatorname{Arctg}\left(\frac{1}{a}\right)$,

б) $2\operatorname{arctg} k = \operatorname{arctg}\frac{2k}{1-k^2}$,

в) $\arccos x = 2\arccos\sqrt{\frac{1+x}{2}}$,

г) $4\operatorname{arcctg}\frac{2}{3} = \operatorname{arcctg}\frac{119}{120}$,

д) $\sin(\arccos x)\cos(\arcsin x) + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arcsec}\sqrt{x})\sec^2(\operatorname{arctg}\sqrt{x}) = 0$,

е) $\operatorname{arctg}\frac{4}{3} - \operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{7}$,

ж) $2\operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{4} = \operatorname{arctg}\frac{32}{43}$,

з) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} - \operatorname{arctg}\frac{5}{6} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \operatorname{arctg}\frac{1}{11}$, и) $\arcsin\frac{4}{5}+\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}=\operatorname{arcctg}\frac{2}{11}$,

к) $\arccos\frac{9}{\sqrt{82}}+\operatorname{arccosec}\frac{\sqrt{41}}{4}=45^\circ$,

л) $\operatorname{arctg}\frac{2a-b}{b\sqrt{3}}+\operatorname{arctg}\frac{2b-a}{a\sqrt{3}}=60^\circ$,

м) $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}-\arccos\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}=30^\circ$,

н) $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}2A\right)+\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}A)+\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}^3 A)=0$.

ГЛАВА XXVI

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Основные приемы решений тригонометрических уравнений

§ 219. Как было ранее определено (§ 107), *тригонометрическим уравнением* называется такое уравнение, в котором неизвестное находится под знаком тригонометрической функции.

Решить тригонометрическое уравнение значит найти общий вид всех значений неизвестного, подстановка которых вместо неизвестного обращает данное уравнение в тождество.

Но для того чтобы составить формулу общего вида, надо предварительно знать значение какой-нибудь тригонометрической функции, под знаком которой находится неизвестное. Поэтому ясно, что решение тригонометрических уравнений состоит из двух частей:

1) из данного уравнения определяют значение какой-нибудь тригонометрической функции;

2) по найденному значению тригонометрической функции находят общий вид углов, соответствующих этому значению тригонометрической функции.

Решение второго из двух указанных вопросов не может представить особых затруднений, так как с этим мы достаточно знакомы из предыдущего (гл. XXIV).

Поэтому нам остается только остановиться более подробно на способах определения из уравнений какой-нибудь тригонометрической функции, под знаком которой находится неизвестное.

Само собою разумеется, что совершенно невозможно дать какие-нибудь универсальные правила, руководствуясь которыми, можно было бы решить любое уравнение.

Покажем на отдельных примерах некоторые обычные способы решений уравнений.

Пример 1. Решить уравнение

$$5\sin x+9\cos x=0.$$

Делим на $\cos x$ [1]). Получается

$$5 \operatorname{tg} x + 9 = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} x = -\frac{9}{5},$$

и, следовательно, угол уже может быть найден из таблиц по тангенсу.

Найдя его, напишем общий вид по формуле. Пользуясь аркусами, общий вид решения можно написать так:

$$x = 180^\circ k + \operatorname{arctg}\left(-\frac{9}{5}\right).$$

Пример 2. Решить уравнение

$$4 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x - 7 \cos^2 x = 0.$$

Деля на $\cos^2 x$ [1]), приходим к квадратному уравнению

$$4 \operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{tg} x - 7 = 0,$$

решая которое относительно $\operatorname{tg} x$, получаем два корня:

$$(\operatorname{tg} x)_1 = 1 \quad \text{и} \quad (\operatorname{tg} x)_2 = -\frac{7}{4},$$

откуда

$$x = 180^\circ k + 45^\circ \quad \text{и} \quad x = 180^\circ k + \operatorname{arctg}\left(-\frac{7}{4}\right).$$

Пример 3. Решить уравнение

$$5 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x - 9 \cos^2 x = 4.$$

Это уравнение легко приводится к тому же типу, как предыдущее, для этого достаточно в правой части вместо 4 написать $4(\sin^2 x + \cos^2 x)$ и сделать приведение подобных членов. Получается

$$\sin^2 x - 2 \sin x \cos x - 13 \cos^2 x = 0.$$

После чего делением на $\cos^2 x$ приходим к квадратному уравнению

$$\operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x - 13 = 0.$$

Пример 4. Решить уравнение

$$3 \sin x - 3 \cos x = 2.$$

Разделим обе части уравнения на $3\sqrt{2}$. Тогда получим:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Но левая часть, по формуле (4а), равна $\sin(x - 45^\circ)$.
Отсюда

$$\sin(x - 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{3},$$

$$x - 45^\circ = 180^\circ \cdot k + (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{2}}{3}$$

[1]) Легко убедиться (подстановкой), что в данном уравнении $\cos x$ не равен нулю, и потому можно делить на него, не опасаясь потери корней.

$$x = 180^\circ \cdot k + 45^\circ + (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{2}}{8}.$$

Пример 5. Решить уравнение

$$\sin 13x + \cos 13x = \sqrt{2} \cos 17x.$$

Деля обе части уравнения на $\sqrt{2}$, получаем:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 13x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 13x = \cos 17x.$$

Левая часть, по формуле (5), равна $\cos(13x - 45^\circ)$. Отсюда

$$\cos(13x - 45^\circ) = \cos 17x$$

и, следовательно,

$$\pm (13x - 45^\circ) + 360^\circ \cdot k = 17x.$$

Беря сначала знак $+$, а потом $-$, получаем:

$$4x = -45^\circ + 360^\circ \cdot k; \quad x = -11^\circ 15' + 90^\circ \cdot k$$

и

$$30x = 45^\circ + 360^\circ \cdot k; \quad x = 1^\circ 30' + 12^\circ \cdot k.$$

Пример 6. Решить уравнение [1]

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1.$$

Так как $\sqrt{3} = \operatorname{tg} 60^\circ$, пишем:

$$\sin x + \operatorname{tg} 60^\circ \cos x = 1$$

или

$$\sin x + \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} \cos x = 1.$$

Умножаем на $\cos 60^\circ$:

$$\sin x \cos 60^\circ + \cos x \sin 60^\circ = \cos 60^\circ$$

или

$$\sin(x + 60^\circ) = \frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$(x + 60^\circ)_1 = 30^\circ,$$

а по формулам общего вида:

$$x + 60^\circ = \begin{cases} 180^\circ \cdot 2k + 30^\circ \\ 180^\circ (2k+1) - 30^\circ, \end{cases}$$

откуда

$$x = \begin{cases} 180^\circ \cdot 2k - 30^\circ \\ 180^\circ (2k+1) - 90^\circ, \end{cases} \quad \text{или} \quad x = \begin{cases} 30^\circ (12k - 1) \\ 90^\circ (4k + 1). \end{cases}$$

Пример 7. Решить уравнение

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x.$$

---

[1] Это уравнение легко решается способом введения вспомогательного угла (см. § 168).

В обеих частях уравнения складываем первые и третьи члены:

$$2\sin 2x\cos x+\sin 2x=2\cos^2 x+\cos x,$$

или

$$\sin 2x(2\cos x+1)=\cos x(2\cos x+1).$$

Перенеся все члены в левую часть и взяв $(2\cos x+1)$ за скобку, получаем

$$(2\cos x+1)(\sin 2x-\cos x)=0.$$

Это уравнение распадается на два отдельных уравнения:

$$2\cos x+1=0 \text{ и } \sin 2x=\cos x.$$

Решая уравнение $2\cos x+1=0$, получим:

$$\cos x=-\frac{1}{2},$$

откуда

$$x_1=120°,$$

т. е.

$$x=360°k\pm 120°.$$

Решая уравнение

$$\sin 2x=\cos x \text{ или } \sin 2x=\sin(90°-x),$$

получим

$$(2x)_1=90°-x.$$

Следовательно,

$$2x=\begin{cases}180°\cdot 2k+(90°-x)\\ 180°(2k+1)-(90°-x),\end{cases}$$

$$x=\begin{cases}120°k+30°\\ 180°(2k+1)-90°,\end{cases} \text{ или } x=\begin{cases}30°(4k+1)\\ 90°(4k+1).\end{cases}$$

Пример 8. Решить систему уравнений

$$\sin x+\sin y=a,\quad x+y=2b.$$

Из первого уравнения получаем:

$$2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=a,$$

или

$$2\sin b\cos\frac{x-y}{2}=a.$$

Найдя отсюда полуразность $\left(\frac{x-y}{2}\right)$ искомых углов и зная их полусумму (b), сложением и вычитанием определим оба неизвестные.

Пример 9. Решить систему уравнений

$$\operatorname{tg} x\operatorname{ctg} y=a,\quad x+y=2b.$$

Перепишем первое уравнение в виде пропорции

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y}=\frac{a}{1}$$

и составим производную пропорцию:

$$\frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y} = \frac{a-1}{a+1},$$

откуда

$$\frac{\sin(x-y)}{\sin(x+y)} = \frac{a-1}{a+1}.$$

Заменив $(x+y)$ через $2b$, будем иметь

$$\frac{\sin(x-y)}{\sin 2b} = \frac{a-1}{a+1},$$

откуда

$$\sin(x-y) = \frac{a-1}{a+1}\sin 2b.$$

Найдя отсюда разность $(x-y)$ углов и зная их сумму $(2b)$, определим искомые углы.

Примеры для упражнений

§ 220. 1. $\sin 3x = \cos 3x$;
2. $8\sin x - 9\cos x = 0$;
3. $4\cos^2 x - 5\sin^2 x = 0$;
4. $3\sin^2 x + 4\sin x\cos x = 2\cos^2 x$;
5. $8\sin^2 x + 6\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 4$;
6. $\sec x = \sin x + 2\cos x$;
7. $\sin^2 x + \sin 2x = 4\cos^2 x$;
8. $\sin^5 3x + \sin^3 3x\cos^2 3x + 8\sin^2 3x\cos^3 3x + 8\cos^5 3x = 0$;
9. $\sin^6 x + \sin^4 x\cos^2 x = \sin^3 x\cos^3 x + \sin x\cos^5 x$;
10. $4\sin x + 4\cos x = 5$;
11. $\sec x + \operatorname{cosec} x = 0{,}5$;
12. $2\sin 2x = 3(\sin x + \cos x)$;
13. $a\sin 2x + b(\sin x + \cos x) = c$;
14. $\sin x + \cos x = 2\sqrt{2}\cdot\sin x\cos x$;
15. $\sin 9x - \cos 9x = \sqrt{2}\cdot\cos 15x$;
16. $5\sin 2x - 3\cos 2x = 4$;
17. $\sqrt{3}\cdot\sin x - \cos x = 1$;
18. $\sqrt{3}\cdot\cos x - \sin x = 1$;
19. $\sqrt{3}\cdot\sin x + \cos x = \sqrt{3}$;
20. $\sin 3x + \sin 2x + \sin x = 0$;
21. $\cos 3x + \cos 2x + \cos x = 0$;
22. $\sin x + \sin 3x = \sin 2x + \sin 4x$;
23. $\cos x - \cos 3x + \cos 5x = 0$;
24. $\cos 4x + \sin 2x - \cos 2x = 0$;
25. $\sin x + \cos 2x + \sin 3x + \cos 4x = 0$;
26. $\cos 7x + \cos x = \cos 4x$;
27. $\sin 7x - \sin x = \sin 3x$;
28. $\sin 9x + \sin 5x + 2\sin^2 x = 1$;
29. $\cos x + \cos nx + \cos(2n-1)x = 0$;
30. $\cos x - \cos y = a,\ x - y = 2b$;
31. $\sin x + \cos y = a,\ x + y = 2b$;
32. $\sin^2 x + \cos^2 y = a,\ x + y = 2b$;
33. $\cos^2 x - \sin^2 y = a,\ x - y = 2b$;
34. $\sin x\sin y = a,\ \cos x\cos y = b$;
35. $\sin x\cos y = a,\ \cos x\sin y = b$;
36. $\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y = a,\ x - y = 2b$;
37. $\operatorname{ctg} x\operatorname{ctg} y = a,\ x + y = 2b$;
38. $\dfrac{\sin x}{\sin y} = a,\ x - y = 2b$;
39. $\dfrac{\cos x}{\sin y} = a,\ x + y = 2b$;
40. $\sin x = a\sin y,\ \cos x = b\cos y$.

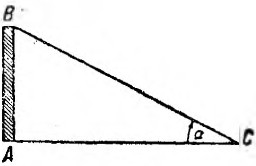
ЧАСТЬ ШЕСТАЯ

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИИ

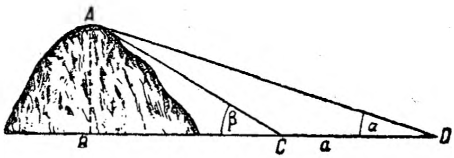
ГЛАВА XXVII

ПРИМЕНЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИИ К ПРАКТИЧЕСКИМ ИЗМЕРЕНИЯМ НА МЕСТНОСТИ

§ 221. Из многочисленных научных дисциплин, пользующихся тригонометрией, следует отметить г е о д е з и ю — специальную науку об измерении земной поверхности. В частности, начальный отдел геодезии — так называемая т о п о г р а ф и я — имеет целью составление планов, определение ширины рек, высот всевозможных сооружений и гор, вычисление расстояний между различными пунктами и т. п. Решение всех таких вопросов приводит к решению или отдельного треугольника,



Черт. 96.



Черт. 97.

или же целого ряда треугольников, связанных друг с другом и составляющих так называемую триангуляционную (или тригонометрическую) сеть.

Краткое ознакомление с методами вычислений, применяемых при топографической съемке, полезно всякому изучающему тригонометрию.

Существует целый ряд специальных приборов,—так называемых у г л о м е р н ы х   и н с т р у м е н т о в,—как астролябия, пантометр, теодолит и др., служащих для измерения углов в горизонтальной, вертикальной и иных плоскостях. Не входя в описание их устройства, что составляет предмет геодезии, скажем только, что, в зависимости от предъявляемых требований, точность измерения этими приборами колеблется от половины градуса (в дешевых астролябиях) до долей секунды (в дорогих теодолитах).

§ 222. Приводим несколько задач на измерения на местности.

З а д а ч а 1. Определить высоту мачты (черт. 96).

Поступают так: при помощи специального землемерного прибора — мерной цепи, или ленты (или рулетки) — измеряют расстояние AC от основания A мачты до точки C, где поставлен угломерный инструмент, которым измеряют угол ACB.

После произведенных измерений легко вычислить искомую высоту AB мачты из прямоугольного треугольника ABC:

$$AB = AC \operatorname{tg} ACB.$$

З а д а ч а 2. Измерить высоту горы AB (черт. 97).

Выбирают где-нибудь неподалеку от подошвы горы горизонтальную площадку; проводят (*провешивают*) на ней некоторую прямую CD (*базис*) так, чтобы она находилась с точкой A (вершиной горы) в одной вертикальной плоскости; измеряют мерной цепью длину прямой $CD = a$ и определяют при помощи угломерных инструментов углы, под которыми видна вершина горы из пунктов D и C, т. е. углы α и β.

Теперь из треугольника ADC имеем

$$\frac{AC}{\sin ADC} = \frac{CD}{\sin CAD}.$$

Но

$$\angle ADC = \alpha, \quad CD = a, \quad \angle CAD = \beta - \alpha\ [1]),$$

а потому

$$\frac{AC}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin(\beta - \alpha)},$$

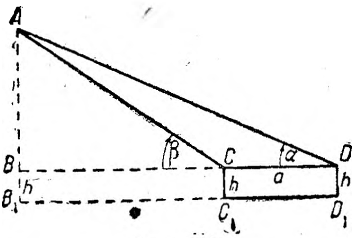
откуда

$$AC = \frac{a \sin \alpha}{\sin(\beta - \alpha)},$$

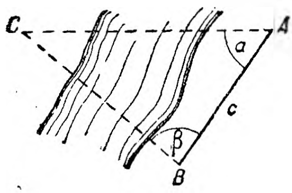
после чего из треугольника ACB находим

$$AB = AC \sin \beta = \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\beta - \alpha)}.$$

З а м е ч а н и е. Так как измерение углов производится при помощи угломерного инструмента, стоящего на треножнике высотою, например



Черт. 98.



Черт. 99.

h, то для получения вышины измеряемых предметов надо к найденным результатам прибавить еще значение h (черт. 98).

З а д а ч а 3. Определить расстояние от точки A до точки C, лежащей по другую сторону реки (черт. 99).

Отмечают от точки A некоторую прямую AB (базис) и измеряют ее длину c и углы α и β, образуемые направлениями AC и BC с этой прямой.

---

[1]) Угол ACB, как внешний угол треугольника ACD, равен сумме двух внутренних с ним несмежных, т. е. $\beta = \angle CAD + \alpha$, откуда $\angle CAD = \beta - \alpha$.

Теперь из треугольника ABC имеем

$$\frac{AC}{\sin\beta}=\frac{AB}{\sin ACB} \quad \text{или} \quad \frac{AC}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin(\alpha+\beta)},$$

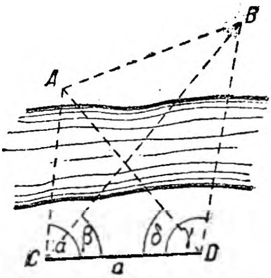
откуда

$$AC=\frac{c\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

При помощи этого приема обычно производится измерение ширины рек.

Задача 4. Определить расстояние между предметами A и B (черт. 100), которые недоступны для нас (например, лежат по другую сторону реки).

Поступают так: в любом месте откладывают и измеряют базис $CD=a$ и определяют при помощи угломерного инструмента углы, под которыми видны из точек C и D точки A и B, т. е. углы $ACD=\alpha$, $BCD=\beta$, $BDC=\gamma$ и $ADC=\delta$.



Черт. 100.

Теперь из треугольника ACD имеем

$$\frac{AC}{\sin ADC}=\frac{CD}{\sin CAD}$$

или

$$\frac{AC}{\sin\delta}=\frac{a}{\sin(\alpha+\delta)},$$

откуда

$$AC=\frac{a\sin\delta}{\sin(\alpha+\delta)}.$$

Из треугольника BCD находим

$$\frac{BC}{\sin BDC}=\frac{CD}{\sin CBD}$$

или

$$\frac{BC}{\sin\gamma}=\frac{a}{\sin(\beta+\gamma)},$$

откуда

$$BC=\frac{a\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}.$$

Теперь в треугольнике ABC известны две стороны AC и BC (из предыдущего вычисления) и угол $ACB=\alpha-\beta$, а следовательно, третью сторону AB уже нетрудно определить, или решив треугольник полностью или же непосредственно из формулы

$$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\,BC\cos(\alpha-\beta).$$

Примеры для упражнений

§ 223. 1) Для определения высоты горы AB (черт. 97) измерили базис $CD=500$ *м* и углы $\alpha=18°13'$ и $\beta=37°16'$. Определить высоту горы.

2) Чтобы измерить расстояние от точки A в крепости до неприятельского лагеря K, измерили базис $AB=385$ *м* и углы $KAB=77°13'$ и $KBA=72°50'$. Найти расстояние AK.

3) Наблюдатель, находясь на некотором расстоянии от башни, определил ее угловую высоту и получил 20°50′. Приблизившись к башне на 150 *м*, он опять измерил ее угловую высоту и получил 51°30′. Определить высоту башни, если высота угломерного инструмента была 1,45 *м*.

4) С крутого берега моря высотою в 150 *м* над его уровнем видно само облако и его отражение в воде. Угловая высота первого 14°30′, угловое понижение второго 32°40′. Как высоко над морем находится облако?

5) Определить расстояние между двумя недоступными точками A и B на черт. 109, если базис $CD = 375$ *м*, а измерение углов дало следующие результаты: $\alpha = 13°29'$, $\beta = 62°43'$, $\gamma = 81°58'$ и $\delta = 51°16'$.

ПРИЛОЖЕНИЯ

СПИСОК ФОРМУЛ ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ ТРИГОНОМЕТРИИ

I. Формулы, связывающие тригонометрические функции одного и того же угла

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{1}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \tag{2}$$

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x \tag{3}$$

$$\operatorname{ctg}^2 x + 1 = \operatorname{cosec}^2 x \tag{3а}$$

II. Формулы алгебраического сложения углов

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \tag{4}$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \tag{5}$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y \tag{4а}$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \tag{5а}$$

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} \tag{6}$$

$$\operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} \tag{6а}$$

III. Формулы удвоенных углов

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \tag{7}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \tag{8}$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \tag{9}$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \tag{8а}$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \tag{8б}$$

IV. Формулы половинных углов

$$\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \tag{10}$$

$$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} \tag{11}$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} \tag{12}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \tag{10а}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \tag{11а}$$

$$1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x \tag{10б}$$

$$1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x \tag{11б}$$

V. Формулы алгебраического сложения тригонометрических функций

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \tag{13}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \tag{14}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \tag{15}$$

$$\cos x - \mathrm{cox}\, y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{y-x}{2} \tag{16}$$

VI. Зависимости между сторонами и углами в треугольнике

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \tag{17}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = k, \tag{17а}$$

где $k = 2R$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \tag{18}$$

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \tag{19}$$

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \tag{20}$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \tag{21}$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}} \tag{22}$$

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C \tag{23}$$

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A} \tag{24}$$

НАТУРАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

с точностью до 0,0001 (через каждые 10′)

°	′	sin	*d*	tg	*d*	ctg	cos	*d*	′	°
0°	0	0.0000	29	0.0000	29	∞	1.0000	0	0	90°
	10	0.0029	29	0.0029	29	343.774	1.0000	0	50	
	20	0,0058	29	0 0058	29	171.885	1.0000	0	40	
	30	0.0087	29	0.0087	29	114.589	1.0000	1	30	
	40	0.0116	29	0.0116	30	85.940	0.9999	0	20	
	50	0.0145	30	0.0146	29	68.750	0.9999	0	10	
1°	0	0.0175	29	0,0175	29	57.2900	0.9999	1	0	89°
	10	0.0204	29	0.0204	29	49.1039	0.9998	1	50	
	20	0.0233	29	0.0233	29	42.9641	0.9997	0	40	
	30	0.0262	29	0.0262	29	38.1885	0.9997	1	30	
	40	0.0291	29	0.0291	29	34.3678	0.9996	1	20	
	50	0.0320	29	0.0320	29	31.2416	0.9995	1	10	
2°	0	0.0349	29	0.0349	29	28.6363	0.9994	1	0	88°
	10	0.0378	29	0.0378	30	26.4316	0.9993	1	50	
	20	0.0407	29	0.0408	29	24.5418	0.9992	1	40	
	30	0.0436	29	0.0437	29	22.9038	0.9991	2	30	
	40	0.0465	29	0.0466	29	21.4704	0.9989	1	20	
	50	0.0494	29	0.0495	29	20.2056	0.9988	2	10	
3°	0	0.0523	29	0.0524	29	19.0811	0.9986	1	0	87°
	10	0.0552	29	0.0553	29.	18.0750	0.9985	2	50	
	20	0.0581	30	0.0582	30	17.1693	0.9983	2	40	
	30	0.0611	29	0.0612	29	16.3499	0.9981	1	30	
	40	0.0640	29	0.0641	29	15.6048	0.9980	2	20	
	50	0.0669	29	0.0670	29	14.9244	0.9978	2	10	
4°	0	0.0698	29	0.0699	30	14.3007	0.9976	2	0	86°
	10	0.0727	29	0.0729	29	13.7267	0.9974	3	50	
	20	0.0756	29	0.0758	29	13.1969	0.9971	2	40	
	30	0.0785	29	0.0787	29	12.7062	0.9969	2	30	
	40	0.0814	29	0.0816	30	12.2505	0.9967	3	20	
	50	0.0843	29	0.0846	29	11.8262	0.9964	2	10	
5°	0	0.0871	29	0.0875	29	11.4301	0.9962	3	0	85°
	10	0.0901	29	0.0904	30	11.0594	0,9959	2	50	
	20	0.0930	29	0.0934	29	10.7119	0.9957	3	40	
	30	0.0959	28	0.0963	29	10.3854	0.9954	3	30	
	40	0.0987	29	0.0992	30	10.0780	0.9951	3	20	
	50	0.1016	29	0.1022	29	9.7882	0.9948	3	10	
6°	0	0.1045	29	0,1051	30	9.5144	0.9945	3	0	84°
	10	0.1074	29	0.1081	29	9.2553	0.9942	3	50	
	20	0.1103	29	0.1110	29	9.0098	0.9939	3	40	
	30	0.1132	29	0.1139	30	8.7769	0.9936	4	30	
	40	0.1161	29	0.1169	29	8.5556	0.9932	3	20	
	50	0.1190	29	0.1198	30	8.3450	0.9929	3	10	
7°	0	0.1219		0.1228		8.1444	0.9926		0	83°
		cos	*d*	ctg	*d*	tg	sin	*d*	′	°

°	′	sin	d	tg	d	ctg	cos	d	′	°
7°	0	0.1219	29	0.1228	29	8.1444	0.9926	4	0	83°
	10	0.1248	28	0.1257	30	7.9530	0.9922	4	50	
	20	0.1276	29	0.1287	30	7.7704	0.9918	4	40	
	30	0.1305	29	0.1317	29	7.5958	0.9914	3	30	
	40	0.1334	29	0.1346	30	7.4287	0.9911	4	20	
	50	0.1363	29	0.1376	29	7.2687	0.9907	4	10	
8°	0	0.1392	29	0.1405	30	7.1154	0.9903	4	0	82°
	10	0.1421	28	0.1435	30	6.9682	0.9899	5	50	
	20	0.1449	29	0.1465	30	6.8269	0.9894	4	40	
	30	0.1478	29	0.1495	29	6.6912	0.9890	4	30	
	40	0.1507	29	0.1524	30	6.5606	0.9886	5	20	
	50	0.1536	28	0.1554	30	6.4348	0.9881	4	10	
9°	0	0.1564	29	0.1584	30	6.3138	0.9877	5	0	81°
	10	0.1593	29	0·1614	30	6.1970	0.9872	4	50	
	20	0.1622	29	0.1644	29	6.0804	0.9868	5	40	
	30	0.1651	28	0.1673	30	5.9758	0.9863	5	30	
	40	0.1679	29	0.1703	30	5.8708	0.9858	5	20	
	50	0.1708	29	0.1733	30	5.7694	0.9853	5	10	
10°	0	0.1737	28	0.1763	30	5.6713	0.9848	5	0	80°
	10	0.1765	29	0.1793	30	5.5764	0.9843	5	50	
	20	0.1794	28	0.1823	30	5.4845	0.9838	5	40	
	30	0.1822	29	0.1853	31	5.3955	0.9833	4	30	
	40	0.1851	29	0.1884	30	5.3093	0.9827	5	20	
	50	0.1880	28	0.1914	30	5.2257	0.9822	6	10	
11°	0	0.1908	29	0.1944	30	5.1446	0.9816	5	0	79°
	10	0.1937	28	0.1974	30	5.0658	0,9811	6	50	
	20	0.1965	29	0.2004	31	4.9894	0.9805	6	40	
	30	0.1994	28	0.2035	30	4.9152	0.9799	6	30	
	40	0.2022	29	0.2065	30	4.8430	0.9793	5	20	
	50	0.2051	28	0.2095	31	4.7729	0.9788	6	10	
12°	0	0.2079	29	0.2126	30	4.7046	0.9782	7	0	78°
	10	0.2108	28	0.2156	30	4 6383	0.9775	6	50	
	20	0.2136	28	0.2186	31	4.5736	0.9769	6	40	
	30	0.2164	29	0.2217	31	4.5107	0.9763	6	30	
	40	0.2193	28	0.2248	31	4.4494	0.9757	7	20	
	50	0.2221	29	0.2278	31	4.3897	0.9750	6	10	
13°	0	0.2250	28	0.2309	30	4.3315	0.9744	7	0	77°
	10	0.2278	28	0.2339	31	4.2747	0.9737	7	50	
	20	0.2306	29	0.2370	31	4.2193	0.9730	6	40	
	30	0.2335	28	0,2401	31	4.1653	0.9724	7	30	
	40	0.2363	28	0.2432	31	4.1126	0.9717	7	20	
	50	0.2391	28	0.2462	31	4.0611	0.9710	7	10	
14°	0	0.2419	28	0.2493	31	4.0108	0.9708	7	0	76°
	10	0.2447	29	0.2524	31	4.9617	0.9696	7	50	
	20	0.2476	28	0.2555	31	3.9136	0.9689	7	40	
	30	0.2504	28	0.2586	31	3.8667	0.9682	8	30	
	40	0.2532	28	0.2617	31	3.8208	0.9674	7	20	
	50	0.2560	28	0.2648	32	3.7760	0.9667	8	10	
15°	0	0.2588		0.2680		3.7321	0.9659		0	75°
		cos	d	ctg	d	tg	sin	d	′	°

°	′	sin	d	tg	d	ctg	d	cos	d	′	°
15°	0	0.2588		0,2680		3.7321		0.9659		0	75°
			28		31		—		7		
	10	0.2616		0.2711		3.6891		0.9652		50	
			28		31		—		8		
	20	0.2644		0.2742		3.6471		0.9644		40	
			28		31		—		8		
	30	0.2672		0.2773		3.6059		0.9636		30	
			28		32		—		7		
	40	0.2700		0.2805		3.5656		0.9629		20	
			28		31		—		8		
	50	0.2728		0.2836		3.5261		0.9621		10	
			28		32		—		8		
16°	0	0.2756		0.2868		3.4874		0.9613		0	74°
			28		31		379		8		
	10	0.2784		0.2899		3.4495		0.9605		50	
			28		32		371		9		
	20	0.2812		0.2931		3.4124		0.9596		40	
			28		31		365		8		
	30	0.2840		0.2962		3.3759		0.9588		30	
			28		32		357		8		
	40	0.2868		0.2994		3.3402		0.9580		20	
			28		32		350		8		
	50	0.2896		0.3026		3.3052		0.9572		10	
			28		31		343		9		
17°	0	0.2924		0.3057		3.2709		0.9563		0	73°
			28		32		338		8		
	10	0.2952		0.3089		3.2371		0.9555		50	
			27		32		330		9		
	20	0.2979		0.3121		3.2041		0.9546		40	
			28		32		325		9		
	30	0.3007		0.3153		3.1716		0.9537		30	
			28		32		319		9		
	40	0.3035		0.3185		3.1397		0.9528		20	
			28		32		313		8		
	50	0.3063		0.3217		3.1084		0,9520		10	
			27		32		307		9		
18°	0	0.3090		0.3249		3.0777		0.9511		0	72°
			28		32		302		9		
	10	0.3118		0.3281		3.0475		0.9502		50	
			27		33		297		10		
	20	0.3145		0.3314		3.0178		0.9492		40	
			28		32		291		9		
	30	0.3173		0.3346		2.9887		0.9488		30	
			28		32		287		9		
	40	0.3201		0.3378		2.9600		0.9474		20	
			27		33		281		9		
	50	0.3228		0.3411		2.9319		0.9465		10	
			28		32		277		10		
19°	0	0.3256		0.3443		2.9042		0.9455		0	71°
			27		33		272		9		
	10	0.3283		0.3476		2.8770		0.9446		50	
			28		33		268		10		
	20	0.3311		0.3509		2.8502		0.9436		40	
			27		32		263		10		
	30	0.3338		0.3541		2.8239		0.9426		30	
			28		33		259		9		
	40	0.3366		0.3574		2.7980		0.9417		20	
			27		33		255		10		
	50	0.3393		0.3607		2.7725		0.9407		10	
			27		33		250		10		
20°	0	0.3420		0.3640		2.7475		0.9397		0	70°
			28		33		247		10		
	10	0.3448		0.3673		2.7228		0.9387		50	
			27		33		243		10		
	20	0.3475		0.3706		2.6985		0.9377		40	
			27		33		239		10		
	30	0.3502		0.3739		2.6746		0.9367		30	
			27		33		235		10		
	40	0.3529		0.3772		2.6511		0.9357		20	
			28		33		232		11		
	50	0.3557		0.3805		2.6279		0.9346		10	
			27		34		228		10		
21°	0	0.3584		0.3839		2.6051		0.9336		0	69°
			27		33		225		11		
	10	0.3611		0.3872		2.5826		0.9325		50	
			27		34		221		10		
	20	0.3638		0.3906		2.5605		0.9315		40	
			27		33		218		11		
	30	0.3665		0.3939		2.5387		0.9304		30	
			27		34		215		10		
	40	0.3692		0.3973		2.5172		0.9294		20	
			27		34		212		11		
	50	0.3719		0.4007		2.4960		0.9283		10	
			27		33		209		11		
22°	0	0.3746		0.4040		2.4751		0,9272		0	68°
			27		34		206		11		
	10	0.3773		0.4074		2.4545		0.9261		50	
			27		34		203		11		
	20	0.3800		0.4108		2.4342		0.9250		40	
			27		34		200		11		
	30	0.3827		0.4142		2.4142		0.9239		30	
			27		34		197		11		
	40	0.3854		0.4176		2.3945		0.9228		20	
			27		35		195		12		
	50	0.3881		0.4211		2.3750		0.9216		10	
			26		34		191		11		
23°	0	0.3907		0.4245		2.3559		0,9205		0	67°
		cos	d	ctg	d	tg	d	sin	d	′	°

°	′	sin	d	tg	d	ctg	d	cos	d		
23°		0.3907		0.4245		2.3559		0.9205		0	67°
	10	0.3934	27	0.4279	34	2.3369	190	0.9194	11	50	
	20	0.3961	27	0.4314	35	2.3183	186	0.9182	12	40	
	30	0.3988	27	0.4348	34	2.2998	185	0.9171	11	30	
	40	0.4014	27	0.4383	35	2.2817	181	0.9159	12	20	
	50	0.4041	27	0.4418	35	2.2637	180	0.9147	12	10	
24°	0	0.4067	26	0.4452	34	2.2460	177	0.9136	11	0	66°
	10	0.4094	27	0.4487	35	2.2286	174	0.9124	12	50	
	20	0.4120	26	0.4522	35	2.2113	173	0.9112	12	40	
	30	0.4147	27	0.4557	35	2.1943	170	0.9100	12	30	
	40	0.4173	26	0.4592	35	2.1775	168	0.9088	12	20	
	50	0.4200	27	0.4628	36	2.1609	166	0.9075	13	10	
25°	0	0.4226	26	0.4663	35	2.1445	164	0.9063	12	0	65°
	10	0.4253	27	0.4699	36	2.1283	162	0.9051	12	50	
	20	0.4279	26	0.4734	35	2.1123	160	0.9038	13	40	
	30	0.4305	26	0.4770	36	2.0965	158	0.9026	12	30	
	40	0.4331	26	0.4806	36	2.0809	156	0.9013	13	20	
	50	0.4358	27	0.4841	35	2.0655	154	0.9001	12	10	
26°	0	0.4384	26	0.4877	36	2.0503	152	0.8988	13	0	64°
	10	0.4410	26	0.4913	36	2.0353	150	0.8975	13	50	
	20	0.4436	26	0.4950	37	2.0204	149	0.8962	13	40	
	30	0.4462	26	0.4986	36	2.0057	147	0.8949	13	30	
	40	0.4488	26	0.5022	36	1.9912	145	0.8936	13	20	
	50	0.4514	26	0.5059	37	1.9768	144	0.8923	13	10	
27°	0	0.4540	26	0.5095	36	1.9626	142	0.8910	13	0	63°
	10	0.4566	26	0.5132	37	1.9486	140	0.8897	13	50	
	20	0.4592	26	0.5169	37	1.9347	139	0.8884	13	40	
	30	0.4618	26	0.5206	37	1.9210	137	0.8870	14	30	
	40	0.4643	25	0.5243	37	1.9074	136	0.8857	13	20	
	50	0.4669	26	0.5280	37	1.8940	134	0.8843	14	10	
28°	0	0.4695	26	0.5317	37	1.8807	133	0.8830	13	0	62°
	10	0.4720	25	0.5355	38	1.8676	131	0.8816	14	50	
	20	0.4746	26	0.5392	37	1.8546	130	0.8802	14	40	
	30	0.4772	26	0.5430	38	1.8418	128	0.8788	14	30	
	40	0.4797	25	0.5467	37	1.8291	127	0.8774	14	20	
	50	0.4823	26	0.5505	38	1.8165	126	0.8760	14	10	
29°	0	0.4848	25	0.5543	38	1.8041	124	0.8746	14	0	61°
	10	0.4874	26	0.5581	38	1.7917	124	0.8732	14	50	
	20	0.4899	25	0.5619	38	1.7796	121	0.8718	14	40	
	30	0.4924	25	0.5658	39	1.7675	121	0.8704	14	30	
	40	0.4950	26	0.5696	38	1.7556	119	0.8689	15	20	
	50	0.4975	25	0.5735	39	1.7438	118	0.8675	14	10	
30°	0	0.5000	25	0.5774	39	1.7321	117	0.8660	15	0	60°
	10	0.5025	25	0.5812	38	1.7205	116	0.8646	14	50	
	20	0.5050	25	0.5851	39	1.7090	115	0.8631	15	40	
	30	0.5075	25	0.5891	40	1.6977	113	0.8616	15	30	
	40	0.5100	25	0.5930	39	1.6864	113	0.8602	14	20	
	50	0.5125	25	0.5969	39	1.6753	111	0.8587	15	10	
31°	0	0.5150	25	0.6009	40	1.6643	110	0.8572	15	0	59°
		cos	d	ctg	d	tg	d	sin	d	′	°

°	′	sin	d	tg	d	ctg	d	cos	d		
31°	0	0.5150	25	0.6009	39	1.6643	109	0.8572	15	0	59°
	10	0.5175	25	0.6048	40	1.6534	108	0.8557	15	50	
	20	0.5200	25	0.6088	40	1.6426	107	0.8542	16	40	
	30	0.5225	25	0.6128	40	1.6319	106	0.8526	15	30	
	40	0.5250	25	0.6168	40	1.6213	106	0.8511	15	20	
	50	0.5275	24	0.6208	41	1.6107	104	0.8496	15	10	
32°	0	0.5299	25	0.6249	40	1.6003	103	0.8481	16	0	58°
	10	0.5324	24	0.6289	41	1.5900	102	0.8465	15	50	
	20	0.5348	25	0.6330	41	1.5798	101	0.8450	16	40	
	30	0.5373	25	0,6371	41	1.5697	100	0.8434	16	30	
	40	0.5398	24	0.6412	41	1.5597	100	0.8418	15	20	
	50	0.5422	24	0.6453	41	1.5497	98	0.8403	16	10	
33°	0	0.5446	25	0.6494	42	1.5399	68	0.8387	16	0	57°
	10	0.5471	24	0.6536	41	1.5301	97	0.8371	16	50	
	20	0.5495	24	0.6577	42	1.5204	96	0,8355	16	40	
	30	0.5519	25	0.6619	42	1.5108	95	0.8339	16	30	
	40	0.5544	24	0.6661	42	1.5013	94	0.8323	16	20	
	50	0.5568	24	0.6703	42	1.4919	93	0.8307	17	10	
34°	0	0.5592	24	0.6745	43	1.4826	93	0.8290	16	0	56°
	10	0.5616	24	0.6788	42	1.4733	92	0.8274	16	50	
	20	0.5640	24	0.6830	43	1.4641	91	0.8258	17	40	
	30	0.5664	24	0.6873	43	1.4550	90	0.8241	16	30	
	40	0.5688	24	0.6916	43	1.4460	90	0.8255	17	20	
	50	0.5712	24	0.6959	43	1.4370	89	0.8208	16	10	
35°	0	0.5736	24	0.7002	44	1.4282	89	0.8192	17	0	55°
	10	0.5760	23	0.7046	43	1.4193	87	0.8175	17	50	
	20	0.5783	24	0.7089	44	1.4106	86	0.8158	17	40	
	30	0.5807	24	0.7133	44	1.4020	86	0.8141	17	30	
	40	0.5831	23	0.7177	44	1.3934	86	0.8124	17	20	
	50	0.5854	24	0.7221	44	1.3848	84	0.8107	17	10	
36°	0	0,5878	23	0.7265	45	1.3764	84	0.8090	17	0	54°
	10	0.5901	24	0.7310	45	1.3680	83	0.8073	17	50	
	20	0.5925	23	0.7355	45	1.3597	83	0.8056	17	40	
	30	0.5948	24	0.7400	45	1.3514	82	0.8039	18	30	
	40	0.5972	23	0.7445	45	1.3432	81	0.8021	17	20	
	50	0.5995	23	0.7490	46	1.3351	81	0.8004	18	10	
37°	0	0.6018	23	0.7536	45	1.3270	80	0.7986	17	0	53°
	10	0.6041	24	0.7581	46	1.3190	79	0.7969	18	50	
	20	0.6065	23	0.7627	46	1.3111	79	0.7951	17	40	
	30	0.6088	23	0.7673	47	1.3032	78	0.7934	18	30	
	40	0.6111	23	0.7720	46	1.2954	78	0.7916	18	20	
	50	0.6134	23	0.7766	47	1.2876	77	0.7898	18	10	
38°	0	0.6157	23	0.7813	47	1.2799	76	0.7880	18	0	52°
	10	0.6180	22	0.7860	47	1.2723	76	0.7862	18	50	
	20	0.6202	23	0.7907	47	1.2647	75	0.7844	18	40	
	30	0.6225	23	0.7954	48	1.2572	75	0.7826	18	30	
	40	0.6248	23	0.8002	48	1.2497	74	0.7808	18	20	
	50	0.6271	22	0.8050	48	1.2423	74	0.7790	18	10	
39°	0	0.6293		0.8098		1.2349		0.7772		0	51°
		cos	d	ctg	d	tg	d	sin	d	′	°

°	′	sin	d	tg	d	ctg	d	cos	d		
39°	0	0.6293	23	0.8098	48	1.2349	73	0.7772	19	0	51°
	10	0.6316	22	0.8146	49	1.2276	73	0.7753	18	50	
	20	0.6338	23	0.8195	48	1.2203	72	0.7735	19	40	
	30	0.6361	22	0.8243	49	1.2131	72	0.7716	18	30	
	40	0.6383	23	0.8292	50	1.2059	71	0.7698	19	20	
	50	0.6406	22	0.8342	49	1.1988	70	0.7679	19	10	
40°	0	0.6428	22	0.8391	50	1.1918	71	0.7660	18	0	50°
	10	0.6450	22	0.8441	50	1.1847	69	0.7642	19	50	
	20	0.6472	23	0.8491	50	1.1778	69	0.7623	19	40	
	30	0.6495	22	0.8541	50	1.1709	69	0.7604	19	30	
	40	0.6517	22	0.8591	51	1.1640	68	0.7585	19	20	
	50	0.6539	22	0.8642	51	1.1572	68	0.7566	19	10	
41°	0	0.6561	22	0.8693	51	1.1504	68	0.7546	19	0	49°
	10	0.6583	21	0.8744	52	1.1436	67	0.7528	19	50	
	20	0.6604	22	0.8796	51	1.1369	66	0.7509	19	40	
	30	0.6626	22	0.8847	52	1.1303	65	0.7490	20	30	
	40	0.6648	22	0.8899	53	1.1237	66	0.7470	19	20	
	50	0.6670	21	0.8952	52	1.1171	65	0.7451	20	10	
42°	0	0.6691	22	0.9004	53	1.1106	65	0.7431	19	0	48°
	10	0.6713	21	0.9057	53	1.1041	64	0.7412	20	50	
	20	0.6734	22	0.9110	53	1.0977	64	0.7392	19	40	
	30	0.6756	21	0.9163	54	1.0913	63	0.7373	20	30	
	40	0,6777	22	0.9217	54	1.0850	64	0.7353	20	20	
	50	0.6799	21	0.9271	54	1.0786	62	0.7333	19	10	
43°	0	0.6820	21	0.9325	55	1.0724	63	0.7314	20	0	47°
	10	0.6841	21	0.9380	55	1.0661	62	0.7294	20	50	
	20	0.6862	22	0.9435	55	1.0599	61	0.7274	20	40	
	30	0.6884	21	0.9490	55	1.0538	61	0.7254	20	30	
	40	0.6905	21	0.9545	56	1.0477	61	0.7234	20	20	
	50	0.6926	21	0.9601	56	1.0416	61	0.7214	21	10	
44°	0	0.6947	21	0.9657	56	1.0355	60	0.7193	20	0	46°
	10	0.6968	20	0.9713	57	1.0295	59	0.7173	20	50	
	20	0.6988	21	0.9770	57	1.0236	60	0.7153	20	40	
	30	0.7009	21	0.9827	57	1.0176	59	0.7133	21	30	
	40	0.7030	21	0.9884	58	1.0117	59	0.7112	20	20	
	50	0.7051	20	0.9942	58	1.0058	58	0.7092	21	10	
45°	0	0.7071		1.0000		1.0000		0.7071		0	45°
		cos	d	ctg	d	tg	d	sin	d	′	°

инв. 962

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ

Решение треугольников

ЧАСТЬ ПЯТАЯ

Общий вид углов. Обратные тригонометрические функции

ЧАСТЬ ШЕСТАЯ

Некоторые приложения тригонометрии