

Министерство образования Республики Беларусь

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ «ВИТЕБСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМ. П.М. МАШЕРОВА»  
(УО «ВГУ им. П.М. Машерова»)

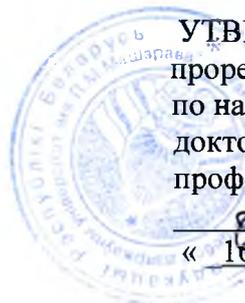
УДК 517.927 + 517.956

№ госрегистрации 20062118

Инв. №

ББК 22.161.627.03

Н49



УТВЕРЖДАЮ

проректор университета

по научной работе

доктор биологических наук,

профессор

 И.М. Прищепа

« 16 » декабря 2010 г.

ОТЧЕТ  
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

по ГПФИ «Математические модели 09»

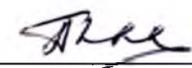
НЕЛИНЕЙНЫЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ И СТАЦИОНАРНЫЕ УРАВНЕНИЯ  
(заключительный)

Начальник  
научно-исследовательского сектора,  
кандидат исторических наук, доцент

  
15.12.2010

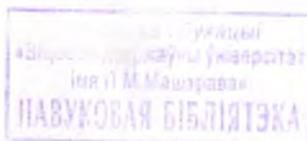
А.Л. Дединкин

Научный руководитель НИР,  
первый проректор,  
доктор физико-математических наук,  
профессор

  
15.12.2010

А.Л. Гладков

Витебск, 2010



Н - 324

## Список исполнителей

Руководитель темы, доктор  
физ.-мат. наук, первый  
проректор ВГУ

 09.12.2010  
подпись, дата

А.Л. Гладков  
(введение,  
раздел 2—4,  
заключение)

Исполнители темы

кандидат физ.- мат. наук, доцент  
кафедры геометрии и  
математического анализа ВГУ

 09.12.2010  
подпись, дата

О.В. Храпцов  
(раздел 6—8)

кандидат физ.- мат. наук, ст.  
преподаватель кафедры  
информатики и информационных  
технологий ВГУ

 09.12.10  
подпись, дата

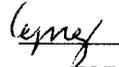
С.А. Прохожий  
(раздел 1)

кандидат физ.- мат. наук,  
старший инженер-программист  
иностранного предприятия  
«Эпам-системз»

 09.12.10  
подпись, дата

Н.Л. Слепченков  
(раздел 1)

аспирант кафедры геометрии и  
математического анализа ВГУ

 09.12.2010  
подпись, дата

С.В. Сергееenko  
(раздел 6)

Нормоконтролер

 09.12.2010  
подпись, дата

Т.В. Харкевич

## Реферат

Отчет 66 с., 81 источник.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, НЕЛИНЕЙНЫЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, ЗАДАЧА КОШИ, СУЩЕСТВОВАНИЕ, ЕДИНСТВЕННОСТЬ, ЦЕЛЫЕ РЕШЕНИЯ, ГЛОБАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ, АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ.

Объектом исследования являются нелинейные обыкновенные дифференциальные, эллиптические и параболические уравнения.

Для задачи Коши для уравнения диффузии-абсорбции с некоторым классом нелинейностей были получены ограничения на рост начальных данных, выполнение которых достаточно для обращения в нуль решения в каждой точке некоторой области пространства за конечное время.

В форме ограничения на рост начальной функции получены достаточные условия как существования, так и единственности решения задачи Коши обобщённого уравнения Кардара—Паризи—Жана. Также были рассмотрены автомодельные разрушающиеся за конечное время решения.

Рассмотрена начально-краевая задача для уравнения реакции-диффузии с нелинейными нелокальными граничными условиями и неотрицательными начальными значениями. Для рассмотренной задачи были получены критерий единственности и теорема о локальном существовании решения.

Доказано, что решения задачи Коши для системы полулинейных параболических уравнений сходятся к решениям задачи Коши для соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений при  $|x| \rightarrow \infty$ .

Рассмотрен процесс, описываемый сублинейным обыкновенным уравнением первого порядка, для которого задача Коши с нулевым начальным условием имеет неединственное решение. За счёт введения вспомогательных функций-управлений была построена математическая модель управления, для которой доказывается свойство управляемости для различных вариантов развития процесса. Найдено оптимальное управление по критерию минимума нормы в  $L_2$  при фиксированном моменте срабатывания наблюдателя.

Рассмотрен процесс, описываемый стационарной системой уравнений Коши—Ковалевской с частными производными с аналитическими начальными и конечными условиями. Для рассмотренного процесса был доказан критерий полной управляемости системы в классе аналитических управлений.

Рассмотрен процесс, описываемый линейной системой Пфаффа с постоянными коэффициентами с управлением. Предполагается, что управление — непрерыв-

но дифференцируемая вектор-функция из пространства меньшей размерности, чем пространство независимой переменной. Предполагается выполнение условий единственности решения. Для рассмотренного процесса с управлением из 2-мерного пространства доказан критерий континуум управляемости.

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>7</b>
<b>1 Уравнение диффузии-абсорбции с определенным классом нелинейностей</b>	<b>9</b>
1.1 Обращение в нуль решений квазилинейных параболических уравнений . . . . .	10
1.1.1 Стационарные решения . . . . .	11
1.1.2 Обращение в нуль обобщенных решений . . . . .	13
1.1.3 Примеры . . . . .	15
<b>2 Задача Коши для уравнения Кардара— Паризи— Жана с неограниченными начальными данными: корректность и разрушение</b>	<b>18</b>
2.1 Введение . . . . .	18
2.2 Существование . . . . .	19
2.3 Единственность . . . . .	21
2.4 Автомодельные решения . . . . .	22
<b>3 Разрушение решений уравнения теплопроводности с нелинейными нелокальными граничными условиями</b>	<b>24</b>
3.1 Введение . . . . .	24
3.2 Глобальное существование . . . . .	25
3.3 Разрушение и глобальное существование для случая $\max(p, l) > 1$ .	26
3.4 Случаи $p = 1$ либо $l = 1$ . . . . .	28
<b>4 Единственность и неединственность решений уравнения реакции-диффузии с нелокальным граничным условием</b>	<b>31</b>
4.1 Введение . . . . .	31
4.2 Локальное существование решения . . . . .	32
4.3 Единственность и неединственность . . . . .	33
<b>5 Стабилизация решений полулинейных параболических систем при <math> x  \rightarrow \infty</math></b>	<b>38</b>
5.1 Введение . . . . .	38
5.2 Существование минимального решения . . . . .	39
5.3 Поведение минимального решения при $ x  \rightarrow \infty$ . . . . .	40
<b>6 Проблема управления в случае неединственного решения задачи Коши в начальной точке</b>	<b>43</b>

<b>7</b>	<b>Управляемость одной нелинейной стационарной системы в частных производных</b>	<b>49</b>
<b>8</b>	<b>Задача континуум управляемости линейных стационарных систем Пфаффа</b>	<b>52</b>
8.1	Континуум управляемость для класса $\Theta_{11}$ . . . . .	53
8.2	Континуум управляемость для класса $\Theta_{12}$ . . . . .	53
8.3	Вполне максимальная управляемость систем Пфаффа $\Theta_{12}$ . . . . .	57
	<b>Заключение</b>	<b>58</b>
	<b>Список использованных источников</b>	<b>60</b>