способность эффективно противодействовать организованному противнику, путем определения координат стреляющих огневых средств, а также корректировку огня своей артиллерии. Представленный подход к определению точек страта (падения) снарядов позволяет решать задачи обнаружения огневых позиций и корректировку огня своих огневых средств.

1. Ю.А.Шишов, Ракетно-артиллерийское вооружение / Ю.А. Шишов, А.Д. Леднев, Ю.Н. Агеев – М.: Министерство обороны СССР, 1988. –147 с.

2. Фарина, А. Цифровая обработка радиолокационной информации. Сопровождение целей / А. Фарина, Ф. Студер ; пер. с англ. А. М. Бочкарева – М.: Радио и связь, 1993. – 320 с.

ЗАДАЧА ФАНЬЯНО ДЛЯ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА

Минчук И.С.,

студент УО «БГПУ имени Максима Танка», г. Минск, Республика Беларусь

Научный руководитель – ***Гриб Н.В.,*** *канд. физ.-мат. наук, доцент*

Задача о нахождении треугольника наименьшего периметра, вписанного в данный остроугольный треугольник, была поставлена и решена итальянским математиком, членом Лондонского королевского общества и Берлинской академии наук, инженером Фаньяно деи Тоски XVIII веке (см. [1, с. 5]). Искомым треугольником является ортотреугольник, именно он обладает тем свойством, что любые две его стороны образуют равные углы с соответствующей им стороной данного треугольника (рис. 1). Как и множество других экстремальных задач на минимизацию расстояний, задача Фаньяно имеет прикладной смысл, а их решение основано на следующем факте (см. [1, с. 3]).

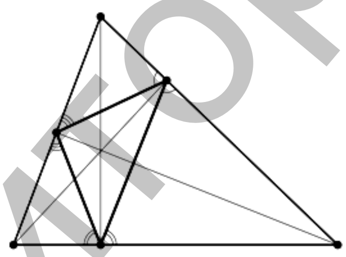

Рис. 1

Лемма 1 (Герона)*. На плоскости дана прямая l и точки A и B по одну сторону от неё. В точке C ∈ l, для которой сумма AC+BC наименьшая, углы, образованные AC и BC с прямой l, равны.*

Результаты и их обсуждение. Поставим аналогичную задачу для четырехугольника.

Задача (Фаньяно для четырехугольника). *На сторонах данного четырехугольника ABCD найти по точке K, L, M, N, чтобы сумма KL+LM+MN+NK была минимальной.*

Как и в исходной задаче Фаньяно, лемма 1 требует равенства углов между сторонами искомого и данного четырехугольников в точках, не совпадающих с *A, B, C, D*. Выделим все возможные конфигурации точек *K, L, M, N*, которые могут доставлять решение задачи.

1. Ни одна из точек не совпадает с вершинами четырехугольника (рис. 2(1)).
2. Две соседние точки совпадают с вершиной четырехугольника (рис. 2(2)).
3. Две противоположные точки находятся в двух соседних вершинах четырехугольника (рис. 2(3)).
4. Две пары соседних точек совпадают с двумя противоположными вершинами четырехугольника (рис. 2(4)).

Будем называть эти расположения конфигурациями 1, 2, 3 и 4 типов. Количество конфигураций второго типа не превышает количества острых углов четырехугольника. Для построения одной такой конфигурации необходимо выполнить две симметрии вершины, лежащей напротив вершины острого угла, относительно не инцидентных ей сторон. Конфигураций типа 3, очевидно, не более четырех, типа 4 – ровно две.

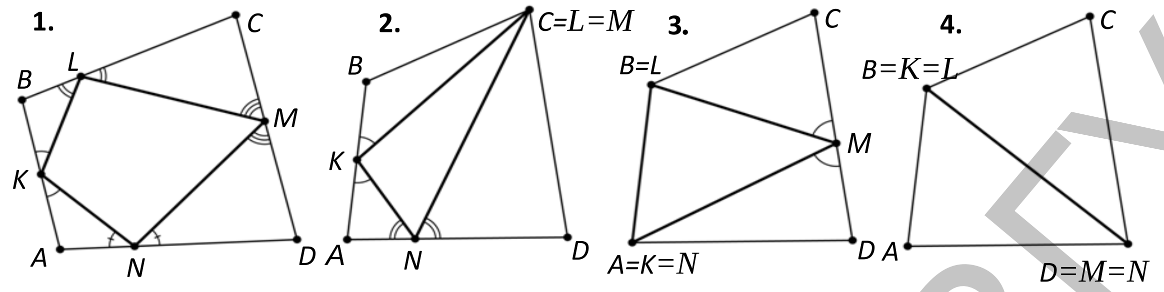

Рис. 2

Теорема 1. *Конфигурация типа 1 существует в четырехугольнике тогда и только тогда, когда сумма его противоположных углов равна 180 ° и все углы между сторонами и диагоналями острые.*

Доказательство. Пусть конфигурация типа 1 существует. Обозначая углы данного четырехугольника через α_1, α_2, α_3, α_4, а пары углов между сторонами искомого и данного четырехугольников через β_1, β_2, β_3, β_4 (рис. 3), придем к системе

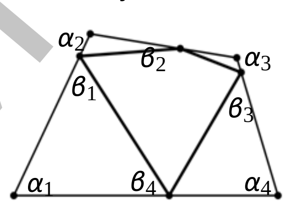

Рис. 3

$$\begin{cases} \alpha_1+\beta_1+\beta_4=\pi, \\ \alpha_2+\beta_2+\beta_1=\pi, \\ \alpha_3+\beta_3+\beta_2=\pi, \\ \alpha_4+\beta_4+\beta_3=\pi, \end{cases}$$

откуда легко находим $\alpha_1+\alpha_3=\alpha_2+\alpha_4=\pi$.

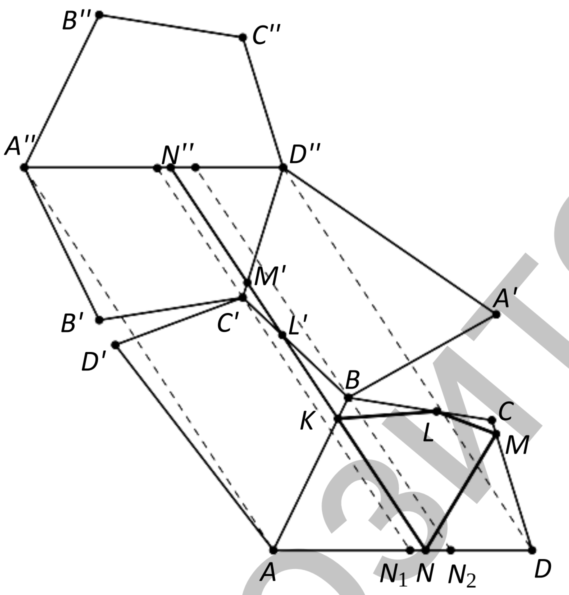

Рис. 4

Представим теперь, что луч света выходит из точки N на AD и, последовательно отражаясь от сторон AB, BC, CD и AD, возвращается в исходную точку. Для спрямления траектории луча последовательно отразим четырехугольник $ABCD$ относительно AB, BC, CD и AD (рис. 4). Соответствующие симметрии обозначим через φ_{AB}, φ_{BC}, φ_{CD}, φ_{AD}. Как известно, композиция осевых симметрий с пересекающимися осями есть поворот относительно точки их пересечения на удвоенный угол между этими осями (см. [2, с. 88]), потому $\varphi_{BC}\circ\varphi_{AB}=\psi_B^{2\alpha_2}$ – поворот около точки B на угол $2\alpha_2$, $\varphi_{CD}\circ\varphi_{AD}=\psi_{D''}^{2\alpha_4}$, где $D''=\psi_B^{2\alpha_2}$ (D). Композиция двух поворотов на углы $2\alpha_2$ и $2\alpha_4$ – это параллельный перенос, так как $2\alpha_2+2\alpha_4=2\pi$. Таким образом, полученный на последнем шаге четырехугольник $A''B''C''D''$ образован из исходного параллельным переносом на вектор $\overline{DD''}$. При этом траектория светового луча выпрямится в отрезок NN'', пересекающий стороны AB, BC', $C'D''$. Это пересечение возможно лишь в случае, когда $\angle C'BD > \angle BD''D$. Пусть $\angle ABD=\gamma$ (рис. 5). Из того, что поворот точки D к D'' около B

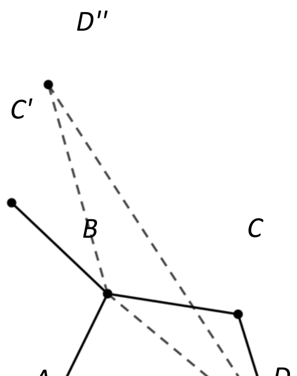

Рис. 5

по часовой стрелке равен $2\alpha_2$, следует $\angle C'BD = \alpha_2 - \gamma$, $\angle BD''D = (\pi - \angle DBD'')/2 = \alpha_2 - \pi/2$, и нужное неравенство примет вид $\alpha_2 - \gamma > \alpha_2 - \pi/2$, откуда $\gamma < \pi/2$. Так как четырехугольник *ABCD* можно вписать в окружность, имеет место равенство $\angle ABD = \angle ACD$, тем самым необходимость в условии теоремы доказана. Достаточность следует из возможности непосредственного нахождения конфигурации первого типа с помощью построений на рис. 4. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Если в четырехугольнике *существует* одна *конфигурация типа 1, то в нем существует бесконечное количество конфигураций типа 1 и ровно две конфигурации типов 2 или 4, причем каждая из всех этих конфигураций является решением задачи Фаньяно.*

Справедливость теоремы следует из рис. 4, указанные конфигурации представлены на рис. 6.

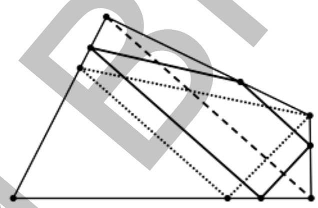
Рис. 6

Теперь составим алгоритм решения задачи.

1. Если выполняются условия теоремы 1, то минимум реализуют конфигурации из теоремы 2.
2. В противном случае нужно построить все конфигурации типов 2, 3 и 4 и выбрать из них конфигурацию наименьшего периметра.

Заключение. Отметим, что рассмотренная задача родственна задаче из области математических бильярдов (см., например, [3]) о поиске простейших периодических траекторий в многоугольниках. Необходимое и достаточное условие существования таких траекторий в четырехугольнике дается в теореме 1.

1. Протасов, В.Ю. Максимумы и минимумы в геометрии / В.Ю. Протасов. – М. : МЦНМО, 2006. – 176 с.
2. Базылев, В.Т. Геометрия. Учеб. пособие для студентов I курса физ.-мат. фак-тов пед. ин.-тов. / В.Т. Базылев, К.И. Дуничев. – М. : Просвещение, 1974. – 351 с.
3. Гальперин, Г.А. Математические бильярды / Г.А. Гальперин, А.Н. Земляков. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 288 с.

СОЗДАНИЕ ВЕБ-РЕСУРСА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Никитин Д.А.,
учащийся 4-го курса Оршанского колледжа ВГУ имени П.М. Машерова,
г. Орша, Республика Беларусь
Научный руководитель – ***Алейников М.А.,*** *магистр пед. наук*

Геометрия применяется во всех сферах деятельности, где присутствуют площади, объёмы и т.п. Вся техника активно использует геометрию, поскольку в ней играют роль форма и размеры тел.

Ряд крупнейших сфер: астрономия, геодезия, механика и все графические методы не существовали бы без геометрии.

Одним из примеров важности геометрии является вращения планет по эллипсам. Это открытие было выявлено немецким учёным И. Кеплером. Это открытие свершилось благодаря научным сведениям об эллипсе, который был изучен ещё в древности.

Общая роль геометрии в математике состоит в том, что с ней связано появившееся синтетическое мышление от пространственных представлений, которое позволяет объять в целом то, к чему приходит анализ лишь через большое количество итераций.

Аналитическая геометрия охватывает широкую область геометрии. Она применяется для исследования геометрических фигур средствами алгебры, используя метод координат. Методы аналитической геометрии можно применить как к фигурам на плоскости и к поверхностям в трехмерном пространстве, так и на пространства более высоких размерностей.