

Учреждение образования «Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины»

УДК 512.534

НАУМИК
Михаил Иванович

**КОНГРУЭНЦИИ ПОЛУГРУППЫ
ЛИНЕЙНЫХ ОТНОШЕНИЙ**

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

по специальности 01.01.06 – математическая логика,
алгебра и теория чисел

Гомель, 2008

Работа выполнена в учреждении образования «Гродненский государственный университет имени П.М. Машерова»

Научный руководитель: **Баранский Виталий Анатольевич**,
доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры Уральского государственного университета, кафедра алгебры и дискретной математики

Официальные оппоненты: **Михалев Александр Васильевич**,
доктор физико-математических наук, профессор, проректор Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова
Гальмак Александр Михайлович,
кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры, учреждения образования «Могилевский государственный университет продовольствия», кафедра высшей математики

Оппонирующая организация – учреждение образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы»

Защита состоится 6 февраля 2009 года в 14⁰⁰ часов на заседании совета по защите диссертаций Д 02.12.01 при учреждении образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины» по адресу: 246019, г. Гомель, ул. Советская, 104, ауд. 1-20. Телефон ученого секретаря: +10375 232 573 791, e-mail: formation56@mail.ru

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале № 1 библиотеки учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».

Автореферат разослан 30 декабря 2008 года

Ученый секретарь совета
по защите диссертаций



А.Ф. Васильев

КРАТКОЕ ВВЕДЕНИЕ

В последнее время в различных областях математики все чаще приходится вводить гомоморфизмы, которые определены не на всем множестве, а на некотором его подмножестве и неоднозначно. Пусть V – векторное пространство над телом. Линейным отношением на V называется подпространство пространства $V \oplus V$. Множество всех линейных отношений на V с операцией умножения является полугруппой, которая обозначается $LR(V)$.

Первым (в 1961 г году) подробно исследовал алгебраические свойства линейных отношений С. Маклейн [1]. В его работе дана также система аксиом для категории, объектами в которой являются все (левые) модули $A, B, \dots$ над фиксированным кольцом, а морфизмами все линейные отношения в $A \oplus B$, т.е. подмодули в прямой сумме $A \oplus B$. В 1962 году Д. Пуппе [2] ввел некоторое усовершенствование в технику линейных отношений и показал, как она может быть использована в гомологической алгебре. В.А. Пономарев [3] в 1969 году исследует вопросы теории линейных отношений в конечномерном пространстве $V \oplus V$ над полем. Им решена задача нахождения инвариантов и приведения к каноническому виду линейного отношения, а также аналогичная задача в случае пространства с градуировкой. Можно отметить совместную работу И.М. Гельфонда и В.А. Пономарева [4], а также и работу Н.М. Добровольской и В.А. Пономарева [5], которые посвящены применению линейных отношений к решению некоторых задач алгебры.

Хорошо известна роль линейных групп в общей теории дискретных и топологических групп. Бинарные отношения широко используются в теории представлений полугрупп. Поэтому естественной задачей является задача применения линейных отношений в теории представлений полугрупп и, в первую очередь, топологических. В связи с этим возникает необходимость развития теории линейных отношений. Вместе с тем этот раздел теории полугрупп в настоящее время остается мало исследованным. Основной целью настоящей работы является задача применения методов линейной алгебры и теории полугрупп к изучению полугруппы линейных отношений. Заметим, что в теории полугрупп линейных отношений Л.Б. Шнеперманом [6] в 1982 г. было установлено, что любая периодическая подполугруппа полугруппы $LR(V)$ локально конечна, где V – конечномерное векторное пространство над полем. В 1987 году Л.Б. Шнеперман [7], используя идеи Бэра [8] и Л.М. Глускина [9], показал, что векторное пространство (и включая малые раз-

мерности) полностью определяется мультипликативной подгруппой рефлексивных линейных отношений. Этому направлению исследований были посвящены также работы А.В. Михалева [10, 11].

При исследовании любой подгруппы возникает, в первую очередь, вопрос о строении ее конгруэнций. Конгруэнции на подгруппе всех преобразований произвольного множества (симметрической подгруппы) описал А.И. Мальцев в [12]; на подгруппе всех частичных преобразований – Э.Г. Шутов в [13]; на подгруппе всех взаимнооднозначных преобразований – А.Е. Либер [14]. А.И. Мальцев [15] также описал конгруэнции на подгруппе линейных преобразований конечномерного векторного пространства над полем. В последующем Т.Н. Шароновой [16] были описаны конгруэнции на подгруппе линейных преобразований векторного пространства произвольной размерности над телом. В.М. Усенко в [17], изучая моноид полулинейных преобразований конечномерного векторного пространства над произвольным телом с помощью техники, возникшей при исследовании конструкции полупрямого произведения моноидов, описал конгруэнции моноида полулинейных преобразований.

Описание всех конгруэнций вполне о-простой подгруппы являлось предметом внимания многих авторов. Первое описание получено Л.М. Глускиным [18], позднее найдены другие описания этих конгруэнций: Климовым [19, 20], Ж. Лаллеман [21], Г. Престон [22], Т. Тамура [23], оказывающиеся более удобными в тех или иных ситуациях.

Таким образом, несмотря на интерес к данной проблеме, многие вопросы остаются недостаточно исследованными. Поэтому описание конгруэнций на подгруппе линейных отношений является актуальной задачей. К этому направлению теории подгрупп принадлежит данная диссертация.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с крупными научными программами и темами

Представленная работа выполнялась на кафедре алгебры и методики преподавания математики учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова» с 1990 по 2008 г. и кафедре алгебры и геометрии Уральского государственного университета в соответствии со следующими научными программами и темами:

– «Полугруппы линейных отношений» в учреждении образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Тема входит в план научно-исследовательских работ кафедры алгебры и методики преподавания математики 2001–2005 гг., 2006–2010 гг. Тема является внебюджетной;

– «Изучение различных типов алгебраических систем и классов по свойствам их производных структур». Руководитель темы – доктор физико-математических наук, профессор Л.Н. Шеврин, г. Екатеринбург, Россия (номер 0186003642 госбюджетной темы, 1991 г.).

Цель и задачи исследования

Целью данной диссертации является описание конгруэнций на полугруппе линейных отношений бесконечномерного векторного пространства над произвольным телом. Для достижения этой цели в диссертации необходимо было решить следующие задачи:

- нахождение идеалов и отношений эквивалентностей Грина на данной полугруппе;
- классификация замкнутых конгруэнций на подполугруппе полугруппы линейных отношений ранга ноль;
- описание конгруэнций на главных факторах полугруппы линейных отношений;
- классификация конгруэнций конечного индекса на данной полугруппе;
- нахождение всех конгруэнций на полугруппе линейных отношений с использованием конгруэнции на полугруппе линейных преобразований и замкнутых конгруэнций на подполугруппе линейных отношений ранга ноль;
- установление связи между конгруэнциями на полугруппе линейных отношений и полугруппе всех взаимно однозначных линейных отношений.

Объект исследования – конгруэнции на полугруппе линейных отношений и на ее подполугруппах и их взаимная связь.

Предмет исследования – описание конгруэнций на полугруппе линейных отношений.

Положения, выносимые на защиту

1. Классификация замкнутых конгруэнций на подполугруппе $LR_1(V)$ полугруппы линейных отношений ранга ноль, теорема 3.2.5 [6-А, 8-А, 9-А, 1-А].

2. Описание конгруэнций на конечных главных факторах полугруппы $LR(V)$, теорема 4.1.9 [4-А, 5-А, 1-А].

3. Классификация конгруэнций конечного индекса на полугруппе $LR(V)$, теорема 4.2.12 [20-А, 5-А]. Эта теорема является обобщением результата А.И. Мальцева [15] и Т.Н. Шароновой [16].

4. Установление связей конгруэнций на подполугруппах полугруппы линейных отношений дают следующие две теоремы 4.3.2 [9-А, 4-А, 8-А, 3-А], 4.4.1 [4-А]. Классификация конгруэнций на полугруппе $LR(V)$, теорема 4.3.23 [9-А, 4-А, 3-А].

Личный вклад соискателя

Диссертационная работа выполнена соискателем лично под руководством доктора физико-математических наук, профессора Баранского Виталия Анатольевича, Россия, г. Екатеринбург, Уральский университет. Вся работа выполнена самостоятельно и ее результаты опубликованы без соавторов.

Апробация результатов диссертации

Основные результаты диссертации докладывались на семинарах кафедры алгебры и методики преподавания математики Витебского государственного университета им. П.М. Машерова (1991–2008 гг.); алгебраическом семинаре Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова (2004 г.); алгебраическом семинаре Уральского государственного университета (1991–1992 гг.); алгебраическом семинаре Саратовского государственного университета (1991 г.); алгебраическом семинаре Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины (2008 г.), а также на следующих конференциях:

– XVII Всесоюзной алгебраической конференции (Минск, 14–17 сентября 1983 г.);

– XVIII Всесоюзной алгебраической конференции (Кишинев, 16–18 сентября 1985 г.);

- Международной конференции по алгебре, посвященной памяти А.И. Ширшова (Барнаул, 20–25 августа 1991 г.);
- VI конференции математиков Беларуси (Гродно, 29 сентября – 2 октября 1992 г.);
- III международной конференции по алгебре памяти М.И. Каргаполова (Красноярск, 23–28 августа, 1993 г.);
- Международной математической конференции, посвященной 25-летию Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины (Гомель, 1994 г.);
- VII Белорусской математической конференции (Минск, 18–22 ноября 1996 г.);
- I Международной научной математической конференции (Гомель, 12–13 ноября 1998 г.);
- VIII Белорусской математической конференции (Минск, 19–24 июня, 2000 г.);
- IV Международной алгебраической конференции, посвященной 60-летию профессора Ю.И. Мерзлякова (Новосибирск, 7–11 августа, 2000);
- Международной научной конференции, посвященной 80-летию профессора В. Гашюца (Гомель, 16–21 октября 2000 г.);
- Международной научной конференции «Классы групп и алгебр», посвященной 100-летию со дня рождения С.А. Чунихина (Гомель, 5–7 октября, 2005 г.);
- Международной алгебраической конференции, посвященной 70-летию со дня рождения Л.А. Шеметкова (Гомель, 9–11 июля 2007 г.);
- Международной алгебраической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения А.Г. Куроша (Москва, 28 мая – 3 июня 2008 г.);
- X Белорусской математической конференции (Минск, 3–7 ноября 2008 г.).

Опубликованность результатов

По теме диссертации опубликовано 21 работа, в том числе: 5 статей в научных журналах, 2 статьи в научных сборниках, 14 тезисов. Общий объем опубликованных материалов составляет 3,186 авторских листа, в том числе: статьи в научных журналах 2,725 авторских листа, тезисы – 0,461 авторских листа.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из перечня условных обозначений, введения, общей характеристики работы, четырех глав основной части, заключения и библиографического списка в алфавитном порядке в количестве 77 наименований. Полный объем диссертации составляет 89 страниц, из них 6 страниц занимает библиографический список.

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю – доктору физико-математических наук, профессору Баранскому Виталию Анатольевичу за внимание, оказанное им при написании данной диссертации.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Используются определения и обозначения, принятые в книгах [24, 25].

Данная диссертационная работа посвящена описанию конгруэнций на полугруппе линейных отношений.

Ниже охарактеризовано содержание по главам.

Глава 1 содержит обзор литературы по данной теме.

В главе 2 собраны некоторые известные результаты, использованные в основном тексте диссертации.

Основное содержание диссертации представлено в главах 3–4.

Целью третьей главы «Эквивалентности Грина на полугруппе $LR(V)$ и полугруппа линейных отношений $LR_1(V)$ ранга ноль» является описание классов эквивалентности Грина на полугруппе линейных отношений и получения некоторых результатов для полугруппы линейных отношений ранга ноль, которые мы будем использовать в дальнейшем.

Пусть V – левое векторное пространство над произвольным телом F . Бинарное отношение $a \subseteq V \times V$ между элементами множества V называется линейным, если оно является подпространством $V \oplus V$. Другими словами, линейное отношение a – это множество пар $(\bar{x}, \bar{y})$, где $\bar{x}, \bar{y} \in V$, замкнутое относительно операций сложения и умножения на элемент из F : если $(\bar{x}_1, \bar{y}_1) \in a$ и $(\bar{x}_2, \bar{y}_2) \in a$ при каких-либо $\bar{x}_i, \bar{y}_i \in V$, то $(\alpha\bar{x}_1 + \beta\bar{x}_2, \alpha\bar{y}_1 + \beta\bar{y}_2) \in a$ для любых $\alpha, \beta \in F$.

Множество $LR(V)$ всех линейных отношений на пространстве V является, как известно, полугруппой относительно операции умножения би-

нарных отношений: для $a, b \in LR(V)$, $(\bar{x}, \bar{y}) \in ab$ тогда и только тогда, когда существует такой элемент $\bar{z} \in V$, что $(\bar{x}, \bar{z}) \in a$ и $(\bar{z}, \bar{y}) \in b$.

Для любого $a \in LR(V)$ обозначим через a^{-1} множество $a^{-1} = \langle (\bar{y}, \bar{x}) : (\bar{x}, \bar{y}) \in a \rangle$. Легко показать, что $a^{-1} \in LR(V)$.

При изучении линейных отношений $a \in LR(V)$ будем рассматривать следующие подпространства пространства V :

$$pr_1 a = \{ \bar{x} \in V : \exists \bar{y} \in V, (\bar{x}, \bar{y}) \in a \}, \ker a = \{ \bar{x} \in V : (\bar{x}, \bar{0}) \in a \};$$

$$pr_2 a = \{ \bar{y} \in V : \exists \bar{x} \in V, (\bar{x}, \bar{y}) \in a \}, \operatorname{coker} a = \{ \bar{y} \in V : (\bar{0}, \bar{y}) \in a \}.$$

Ранг линейного отношения $a \in LR(V)$ определяется формулой:

$$\operatorname{rank} a = \dim (pr_1 a / \ker a).$$

Третья глава включает в себя два раздела.

Основным результатом первого раздела третьей главы являются теоремы, которые описывают отношения Грина и идеалы полугруппы $LR(V)$.

3.1.1 Теорема [1-A, 2-A]. Два элемента полугруппы линейных отношений $\mathcal{R}$ -эквивалентны тогда и только тогда, когда совпадают их первые проекции и ядра.

3.1.2 Теорема [1-A, 2-A]. Два элемента полугруппы линейных отношений $\mathcal{L}$ -эквивалентны тогда и только тогда, когда совпадают их вторые проекции и ядра.

3.1.3 Теорема [1-A, 2-A]. Два элемента полугруппы линейных отношений $\mathcal{D}$ -эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый ранг.

Обозначим $LR_\eta(V) = \{ a : a \in LR(V), \operatorname{rank} a < \eta \}$.

3.1.4 Теорема [1-A, 2-A]. Все идеалы полугруппы $LR(V)$, исчерпываемые полугруппами $LR_\eta(V)$, где $1 \leq \eta \leq (\dim V)'$ и $(\dim V)'$ – кардинальное число, следующее за $\dim V$.

Пусть η – кардинальное число, K – множество всех четверок (V_1, V_2, V_3, V_4) , где V_1, V_2, V_3, V_4 – подпространства пространства V такие, что $V_2 \subseteq V_1, V_4 \subseteq V_3$ и $\dim(V_1/V_2) = \dim(V_3/V_4) = \eta$.

3.1.5 Теорема [1-A, 2-A]. Существует взаимнооднозначное соответствие между множеством всех $\mathcal{H}$ -классов, содержащихся в D_η , и множеством K такое, что $\mathcal{H}$ -класс, соответствующий (V_1, V_2, V_3, V_4) , состоит из всех элементов a полугруппы $LR(V)$, для которых $pr_1 a = V_1, pr_2 a = V_3, \ker a = V_2, \operatorname{coker} a = V_4$.

Дано описание идемпотентов полугруппы $LR(V)$ в следующей теореме.

3.1.6 Теорема [1-А, 2-А]. Если линейное отображение a является идемпотентом в полугруппе $LR(V)$ и $pr_1 a = \ker a \oplus V_1$, то $pr_2 a = \operatorname{coker} a \oplus V_1$ и a тождественно на подпространстве V_1 .

Следующее следствие показывает, какой $\mathcal{H}$ -класс содержит идемпотент.

3.1.7 Следствие. Пусть $\mathcal{H}$ -класс H полугруппы $LR(V)$ определяется четверкой (V_1, V_2, V_3, V_4) . H содержит идемпотент тогда и только тогда, когда $V_1 = V_2 \oplus V_0$ и $V_3 = V_4 \oplus V_0$.

Второй раздел третьей главы посвящен полугруппе линейных отношений ранга ноль.

Для произвольного подпространства $A \subseteq V$ обозначим $\omega_A = \langle \bar{x}, \bar{0} \rangle : \bar{x} \in A \rangle$ и $\omega_{\{\bar{0}\}} = \omega$. Пусть $a \in LR_1(V)$, $\dim(pr_1 a / \ker a) = \dim(pr_2 a / \operatorname{coker} a) = 0$.

Ясно, что для любого $a \in LR(V)$ $a = \omega_A \omega_B^{-1}$, где $pr_1 a = A$, $pr_2 a = B$. Полугруппа $LR_1(V)$ является прямоугольной связкой и, в частности, вполне простой полугруппой.

Конгруэнцию σ на полугруппе $LR_1(V)$ будем называть замкнутой, если для любых $\omega_A \omega_C^{-1}, \omega_B \omega_D^{-1} \in LR_1(V)$, $a, b \in LR(V)$ из $\omega_A \omega_C^{-1} \sigma \omega_B \omega_D^{-1}$ следует $a \omega_A \omega_C^{-1} b \sigma a \omega_B \omega_D^{-1} b$.

Пусть σ – конгруэнция на полугруппе $LR_1(V)$. Для любых A и B , удовлетворяющих условию $\omega_A \sigma \omega_B$, существуют такие кардинальные числа v_i , что $\dim(A / (A \cap B)) < v_i$ и $\dim(B / (A \cap B)) < v_i$. Минимальное среди этих кардинальных чисел обозначим $v(\sigma)$. Для любых C и D , удовлетворяющих условию $\omega_C^{-1} \sigma \omega_D^{-1}$, существуют такие кардинальные числа v'_j , что $\dim(C / (C \cap D)) < v'_j$ и $\dim(D / (C \cap D)) < v'_j$. Минимальное среди этих кардинальных чисел обозначим $v'(\sigma)$.

Обозначим через $v(V)$ множество кардинальных чисел, определяемое условиями:

если $\dim V \geq \aleph_0$, то $v \in v(V) \Leftrightarrow v = 1$ или $\aleph_0 \leq v \leq (\dim V)'$;

если $\dim V < \aleph_0$, то $v \in v(V) \Leftrightarrow v = 1$ или $v = 1 + \dim V$.

Определим отношения $\sigma_1(v)$ и $\sigma_2(v')$, где $v, v' \in v(V)$ полугруппы $LR_1(V)$ следующим образом:

$$\omega_A \omega_C^{-1} \sigma_1(v) \omega_B \omega_D^{-1} \Leftrightarrow \dim(A / (A \cap B)) < v, \dim(B / (A \cap B)) < v;$$

$$\omega_A \omega_C^{-1} \sigma_2(v') \omega_B \omega_D^{-1} \Leftrightarrow \dim(C / (C \cap D)) < v', \dim(D / (C \cap D)) < v'.$$

Далее определим отношение $\sigma(v, v')$ полугруппы $LR_1(V)$, полагая

$$\sigma(v, v') = \sigma_1(v) \cap \sigma_2(v').$$

В разделе 3.2 доказана следующая, важная для дальнейшего изучения конгруэнций, теорема.

3.2.5 Теорема [8-A, 1-A, 6-A]. *Отношение $\sigma(v, v')$ является замкнутой конгруэнцией полугруппы $LR_1(V)$. Любая замкнутая конгруэнция полугруппы $LR_1(V)$ совпадает с одним из отношений $\sigma(v, v')$.*

Стабильный квазипорядок σ подполугруппы линейных отношений $LR_1(V)$ будем называть замкнутым квазипорядком σ , если для любых $a, b \in LR_1(V)$ и $c, d \in LR(V)$ из $a\sigma b$ следует $(cad)\sigma(cbd)$.

Пусть σ – стабильный квазипорядок полугруппы $LR_1(V)$. Для любых подпространств A и B , удовлетворяющих условию $\omega_A\sigma\omega_B$ существуют такие кардинальные числа v_i , что $\dim(A / (A \cap B)) < v_i$. Минимальное среди этих кардинальных чисел обозначим через $v(\sigma)$. Существуют такие кардинальные числа v_{1i} , что $\dim(B / (A \cap B)) < v_{1i}$. Минимальное среди этих кардинальных чисел обозначим через $v_1(\sigma)$. Для любых подпространств C и D , удовлетворяющих условию $\omega_C^{-1}\sigma\omega_D^{-1}$, существуют такие кардинальные числа v'_j , что $\dim(C / (C \cap D)) < v'_j$. Минимальные среди этих кардинальных чисел обозначим через $v'(\sigma)$. Существуют такие кардинальные числа v'_{1j} , что $\dim(D / (C \cap D)) < v'_{1j}$. Минимальное среди этих кардинальных чисел обозначим через $v'_1(\sigma)$.

Определим отношения $\sigma_1(v), \sigma_2(v_1), \sigma_3(v'), \sigma_4(v'_1)$, где $v, v_1, v', v'_1 \in v(V)$ на полугруппе $LR_1(V)$ следующим образом:

$$\omega_A\omega_C^{-1}\sigma_1(v)\omega_B\omega_D^{-1} \Leftrightarrow \dim(A / (A \cap B)) < v;$$

$$\omega_A\omega_C^{-1}\sigma_2(v_1)\omega_B\omega_D^{-1} \Leftrightarrow \dim(B / (A \cap B)) < v_1;$$

$$\omega_A\omega_C^{-1}\sigma_3(v')\omega_B\omega_D^{-1} \Leftrightarrow \dim(C / (C \cap D)) < v';$$

$$\omega_A\omega_C^{-1}\sigma_4(v'_1)\omega_B\omega_D^{-1} \Leftrightarrow \dim(D / (C \cap D)) < v'_1.$$

Далее, определим отношение $\sigma(v, v_1, v', v'_1)$ на полугруппе $LR_1(V)$, полагая $\sigma(v, v_1, v', v'_1) = \sigma_1(v) \cap \sigma_2(v_1) \cap \sigma_3(v') \cap \sigma_4(v'_1)$.

3.2.7 Теорема [11-A, 2-A, 13-A]. *Отношения $\sigma(v, v_1, v', v'_1)$ являются замкнутыми квазипорядками полугруппы $LR_1(V)$. Любой замкнутый квазипорядок полугруппы $LR_1(V)$ совпадает с одним из отношений $\sigma(v, v_1, v', v'_1)$.*

Стабильный порядок σ полугруппы $LR_1(V)$ будем называть замкнутым порядком σ , если для любых $a, b \in LR_1(V)$ и $c, d \in LR(V)$ из $a\sigma b$ следует $(cad)\sigma(cbd)$.

Пусть σ – стабильный порядок полугруппы $LR_1(V)$. Для любых подпространств A и B , удовлетворяющих условию $\omega_A\sigma\omega_B$ существуют такие кардинальные числа v , что $\dim(A/B) < v$, $B \subseteq A$ или $\dim(B/A) < v$, $A \subseteq B$. Минимальное среди этих кардинальных чисел обозначим $v(\sigma)$. Для любых подпространств C и D , удовлетворяющих условию $\omega_C^{-1}\sigma\omega_D^{-1}$, существуют такие кардинальные числа v' , что $\dim(C/D) < v'$, $D \subseteq C$ или $\dim(D/C) < v'$, $C \subseteq D$. Минимальное среди этих кардинальных чисел обозначим $v'(\sigma)$.

Определим отношения $\sigma_1(v, v')$ и $\sigma_2(v, v')$, где $v, v' \in v(V)$ на полугруппе $LR_1(V)$ следующим образом:

$\omega_A\omega_C^{-1}\sigma_1(v, v')\omega_B\omega_D^{-1} \Leftrightarrow \dim(A/B) < v, \dim(C/D) < v', B \subseteq A, D \subseteq C;$

$\omega_A\omega_C^{-1}\sigma_2(v, v')\omega_B\omega_D^{-1} \Leftrightarrow \dim(A/B) < v, \dim(D/C) < v', B \subseteq A, C \subseteq D.$

3.2.9 Теорема [11-A, 17-A]. *Отношения $\sigma_1(v, v')$ и $\sigma_2(v, v')$ являются замкнутыми порядками полугруппы $LR_1(V)$. Любой замкнутый порядок полугруппы $LR_1(V)$ совпадает с одним из отношений $\sigma_1(v, v')$, $\sigma_2(v, v')$ или их обратным.*

В четвертой главе нами получено описание конгруэнций конечного индекса. В разделе 4.1 «Конгруэнции на главных факторах полугруппы $LR(V)$ » для конечного n дано описание главного фактора $LR_{n+1}(V)\backslash LR_n(V)$ полугруппы $LR(V)$ как рисовской матричной вполне σ -простой полугруппы над полной линейной группой $GL(V_1)$, где V_1 – некоторое n -мерное подпространство пространства V . В терминах группы $GL(V_1)$ описаны все конгруэнции на главном факторе $LR_{n+1}(V)\backslash LR_n(V)$ в теореме.

4.1.9 Теорема [5-A, 1-A, 4-A]. *Главный фактор $LR_{n+1}(V)\backslash LR_n(V)$, где $1 < n \leq \dim V$, $n < \aleph_0$, полугруппы $LR(V)$ является вполне σ -простой полугруппой. Конгруэнции на $LR_{n+1}(V)\backslash LR_n(V)$, отличные от универсальной, находятся во взаимно однозначном соответствии с собственными нормальными делителями произвольного ненулевого $\mathcal{K}$ -класса из $LR_{n+1}(V)\backslash LR_n(V)$, являющегося группой. Если N – такой собственный нормальный делитель,*

то классами конгруэнции, соответствующей N , являются множества aNb , где $a, b \in LR_{n+1}(V) \setminus LR_n(V)$.

В разделе 4.2 введено следующее определение.

4.2.1 Определение [5-A]. Пусть ϕ ра, где линейное отношение a имеет ранг r . Минимальное кардинальное число, большее всех таких r , обозначим через $\eta(r)$ и будем называть индексом конгруэнции ρ .

Пусть n – целое положительное число; $v, v' \in v(V)$ (см. п. 3.2.4) из которых или хотя бы одно равно 1 (при $n = 1$) или превосходящее $\aleph_0$ (при любом n); Q_μ ($n + 1 \leq \mu \leq \dim V$) – подгруппы группы Z^* , удовлетворяющие условию $Q_\xi \subseteq Q_\mu$ при $\mu \leq \xi$. Пусть, далее, e – идемпотент некоторого $\mathcal{H}$ -класса $H_e \subseteq D_n$, N_e – нормальный делитель группы H_e такой, что $Q_{n+1}e \subseteq N_e$. Определим отношение σ на полугруппе $LR(V)$ следующим образом:

$$a, b \in LR_n(V) \quad \text{и} \quad \dim(pr_1 a / (pr_1 a \cap pr_1 b)) < v, \dim(pr_1 b / (pr_1 a \cap pr_1 b)) < v, \\ \dim(pr_2 a / (pr_2 a \cap pr_2 b)) < v', \dim(pr_2 b / (pr_2 a \cap pr_2 b)) < v',$$

$$a, b \in D_n \quad \text{и существуют такие } c, d \in D_n, \text{ что } a, b \in cN_e d,$$

$$a, b \in D_\mu \quad (\mu > n) \quad \text{и} \quad b = \alpha a \text{ при некотором } \alpha \in Q_\mu.$$

Основным результатом этого раздела является следующая теорема.

4.2.12 Теорема [4-A, 5-A, 20-A]. Отношение σ является конгруэнцией конечного индекса на полугруппе $LR(V)$. Любая конгруэнция конечного индекса на полугруппе $LR(V)$ совпадает с одним из отношений вида σ .

Из этой теоремы следует, что любая конгруэнция конечного индекса σ на полугруппе $LR(V)$ полностью определяется натуральным числом n , кардинальными числами $v, v' \in v(V)$, нормальным делителем N_e и невозрастающей последовательностью подгрупп $Q_\xi \subseteq Z^*$ ($n + 1 \leq \xi \leq \dim V$) таких, что $Q_{n+1}e \subseteq N_e$. Поэтому запись $\sigma = \sigma(n, \{Q_\xi\}, N_e, v, v')$ полностью определяет конгруэнцию.

Третий раздел четвертой главы посвящен описанию конгруэнций на полугруппе $LR(V)$ всех линейных отношений. Для формулировки теоремы 4.3.2 нам потребуется следующее определение.

4.3.1 Определение [5-A]. Пусть τ – произвольная конгруэнция на полугруппе $SL(V)$. Конгруэнции τ и $v\tau$ – замкнутая конгруэнция σ называются согласованными, если $\eta(\tau) \leq v(\sigma)$, $\eta(\tau) \leq v'(\sigma)$.

Доказано, если $\eta(\tau)$ конечно и $\eta(\tau) > 1$, то $v(\sigma) = \dim V + 1$, $v'(\sigma) = \dim V + 1$ в случае конечномерного пространства V и $\aleph_0 \leq v(\sigma)$, $v'(\sigma)$ в случае бесконечномерного пространства V .

Пусть δ – произвольное бинарное отношение на полугруппе S ; $\bar{\delta}$ – отношение на S : $(a, b) \in \bar{\delta}$ тогда и только тогда, когда существуют такие $(c, d) \in \delta$, $(p, r) \in \delta$, что $a = cpd$, $b = crd$.

Обозначим через $\bar{\delta}$ транзитивное замыкание отношения δ .

Основным результатом третьего раздела является следующая теорема.

4.3.2 Теорема [9-А, 4-А, 8-А, 3-А]. Пусть σ и τ – конгруэнции на полугруппах $LR_1(V)$ и $LS(V)$ соответственно. Если τ и σ согласованы, то ограничение конгруэнции $\sigma \cup \tau$ на полугруппе $LS(V)$ совпадает с τ , а её ограничение на полугруппе $LR_1(V)$ совпадает с σ . Обратно, пусть ρ – произвольная конгруэнция на полугруппе $LR(V)$, тогда ограничение τ конгруэнции ρ на полугруппе $LS(V)$ и σ на полугруппе $LR_1(V)$ являются согласованными конгруэнциями и $\rho = \sigma \cup \tau$.

Здесь дано и непосредственное описание конгруэнций.

4.3.21 Пусть n – целое положительное число, v, v' – кардинальные числа равные 1 (при $n = 1$) или превосходящие $\aleph_0$ при любом n : Q_μ ($n + 1 \leq \mu \leq \dim V$) – подгруппы группы Z^* , удовлетворяющие условию $Q_\xi \subseteq Q_\mu$ при $\mu \leq \xi$. Пусть, далее, e – идемпотент некоторого $\mathcal{H}$ -класса $H_e \subset D_n$, N_e – нормальный делитель группы H_e такой, что $Q_{n+1}e \subseteq N_e$. Определим отношение δ на полугруппе $LR(V)$ следующим образом: $a\delta b$ тогда и только тогда, когда

$a, b \in LR_n(V)$ и $\dim(pr_1a / (pr_1a \cap pr_1b)) < v$, $\dim(pr_1b / (pr_1a \cap pr_1b)) < v$,

$\dim(pr_2a / (pr_2a \cap pr_2b)) < v'$, $\dim(pr_2b / (pr_2a \cap pr_2b)) < v'$;

$a, b \in D_n$ и существуют такие $c, d \in D_n$, что $a, b \in cN_e d$ или $a, b \in D_\mu$ ($\mu > n$) и $b = \alpha a$ при некотором $\alpha \in Q_\mu$.

4.3.22 Пусть k – натуральное число, v_i, μ_i ($i = 1, \dots, k$), v, v' – кардинальные числа, удовлетворяющие условиям:

1) $v_k < v_{k-1} < \dots < v_1 \leq \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k \leq \dim V = v_{k+1}$;

2) все v_i и μ_i бесконечны за исключением, быть может, v_k , если v_k конечно, то $v_k = 0$;

3) $\mu_1 \leq v, \mu_1 \leq v'$.

Пусть, далее, Q_μ ($\mu_1 \leq \mu \leq \dim V$) – ненулевые мультипликативные подгруппы центра тела F такие, что $Q_\mu \subseteq Q_\xi$ при $\xi \leq \mu$. Определим следующее отношение σ' на полугруппе $LR(V)$:

$a\sigma' b$ тогда и только тогда, когда

$a, b \in LR_{\mu_1}(V)$ и $\dim(pr_1a / (pr_1a \cap pr_1b)) < v$, $\dim(pr_1b / (pr_1a \cap pr_1b)) < v$,

$\dim(pr_2a / (pr_2a \cap pr_2b)) < v'$, $\dim(pr_2b / (pr_2a \cap pr_2b)) < v'$, или

$a, b \in D_\mu \ (\mu_i \leq \mu < \mu_{i+1}),$

$b'_{pr_1a \cap pr_1b} = \alpha a'_{pr_1a \cap pr_1b} + f, b''_{pr_2a \cap pr_2b} = \alpha^{-1} a''_{pr_2a \cap pr_2b} + f_1$ при некоторых $\alpha \in Q_\mu, f, f_1 \in LR_{V_i}(V)$ ($pr_1f = pr_1a \cap pr_1b, \text{coker } f = \{\bar{0}\}$),

$pr_2f_1 = pr_2a \cap pr_2b, \ker f_1 = \{\bar{0}\}, b' = \langle (\bar{x}, \bar{y}) : \bar{y} \in V_2', (\bar{x}, \bar{y}) \in b \rangle,$

$b'' = \langle (\bar{x}, \bar{y}) : \bar{x} \in V_1', (\bar{x}, \bar{y}) \in b \rangle, a' = \langle (\bar{x}, \bar{y}) : \bar{y} \in V_2, (\bar{x}, \bar{y}) \in a \rangle,$

$a'' = \langle (\bar{x}, \bar{y}) : \bar{x} \in V_1, (\bar{x}, \bar{y}) \in a \rangle, pr_1a = \ker a \oplus V_1, pr_2a = \text{coker } a \oplus V_2,$

$pr_1b = \ker b \oplus V_1', pr_2b = \text{coker } b \oplus V_2',$ где V_1, V_2, V_1', V_2' – некоторые прямые дополнения пространства $\ker a, \text{coker } a, \ker b, \text{coker } b$ в $pr_1a, pr_2a, pr_1b, pr_2b$ соответственно и

$\dim(pr_1a / (pr_1a \cap pr_1b)) < v_i, \dim(pr_1b / (pr_1a \cap pr_1b)) < v_i,$

$\dim(pr_2a / (pr_2a \cap pr_2b)) < v_i, \dim(pr_2b / (pr_2a \cap pr_2b)) < v_i.$

4.3.23 Теорема [9-А, 4-А, 3-А]. *Отношения δ и σ' являются конгруэнциями на полугруппе $LR(V)$. Всякая конгруэнция на полугруппе $LR(V)$ совпадает с одним из отношений δ или σ' .*

В четвертом разделе установлена связь между конгруэнциями на полугруппе $LR(V)$ и на подполугруппе $LV(V)$ этой полугруппы.

Пусть δ – произвольная конгруэнция на полугруппе всех взаимно однозначных линейных отношений $LV(V)$; δ' – наименьшая конгруэнция на полугруппе $LR(V)$ содержащая δ . Имеет место следующая теорема.

4.4.1 Теорема [4-А]. *Если δ – конгруэнция на полугруппе $LV(V)$, δ' – наименьшая конгруэнция на $LR(V)$, содержащая δ , то $\delta' \cap (LV(V) \times LV(V)) = \delta$.*

В этом разделе также дано и более детальное описание конгруэнций на $LV(V)$, которое было получено ранее в [16]. Это описание близко к описанию конгруэнций на полугруппе всех взаимно однозначных преобразований произвольного множества, данное в [14].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

Одной из задач данной диссертационной работы является нахождение конгруэнций полугруппы линейных отношений. Для реализации этой задачи необходим специальный технический аппарат, развитию которого посвящена третья глава диссертации. Здесь получено описание эквивалентностей Грина и идеалов полугруппы $LR(V)$. Строение замкнутых конгруэнций полугруппы $LR(V)$ определяется теоремой 3.2.5 [8-А,

1-A, 6-A]. В этой главе описаны замкнутые порядки полугруппы $LR_1(V)$, теорема 3.2.7 [11-A, 2-A, 13-A] и замкнутые порядки полугруппы $LR_1(V)$, теорема 3.2.9 [11-A, 17-A]. Строение замкнутых конгруэнций на полугруппе $LR_1(V)$ существенно используется в следующей главе для доказательства теорем 4.2.12, 4.3.2, 4.3.23, которые являются основными в нашей диссертации.

В первом разделе четвертой главы получено описание конгруэнций на конечных главных факторах полугруппы $LR(V)$, теорема 4.1.9 [5-A, 4-A, 1-A].

Во втором разделе этой главы введено понятие индекса конгруэнции и найдены все конгруэнции конечного индекса, теорема 4.2.12 [20-A, 5-A]. Эта теорема является обобщением результата А.И. Мальцева [15] и Т.Н. Шароновой [16].

Третий раздел посвящен изучению конгруэнций полугруппы $LR(V)$. Сначала найдена связь конгруэнций полугруппы линейных отношений с конгруэнциями на полугруппе линейных преобразований и конгруэнциями на полугруппе $LR_1(V)$, теорема 4.3.2 [9-A, 4-A, 8-A, 3-A]. Затем найдены все конгруэнции на полугруппе $LR(V)$, теорема 4.3.23 [9-A, 4-A, 3-A]. Этот результат является развитием идеи А.И. Мальцева [15] описания конгруэнций на полугруппе квадратных матриц конечного порядка n над полем K и на ее подполугруппе ранга $\leq r$, где $r \leq n$.

В четвертом разделе этой главы установлена связь между конгруэнциями на полугруппе $LR(V)$ и на подполугруппе $LV(V)$ этой полугруппы, теорема 4.4.1 [4-A]. В этом разделе также дано и более детальное описание конгруэнций на $LV(V)$, которое было получено ранее в [16]. Это описание близко к описанию конгруэнций на полугруппе всех взаимно однозначных преобразований произвольного множества, данное в [14].

Рекомендации по практическому использованию результатов диссертации

Работа имеет теоретический характер. Полученные в диссертации результаты и методы могут быть использованы при дальнейшем изучении теории полугрупп, проводимом в Витебском, Белорусском, Омском, Новосибирском и Уральском государственных университетах и других центрах, где изучается строение конгруэнций на полугруппах.

Результаты диссертации могут быть использованы при исследовании теории полугрупп, а также при чтении спецкурсов для студентов математических специальностей, написании курсовых и дипломных работ.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Маклейн, С. Алгебра аддитивных отношений / С. Маклейн // Сб. переводов. Математика. – 1963. – № 7:6. – С. 1–12.
2. Пушис, Д. Соответствия в абелевых категориях / Д. Пушпе // Сб. переводов. Математика. – 1964. – № 8:6. – С. 109–139.
3. Пономарев, В.А. Начала теории аддитивных бинарных отношений в конечномерном векторном пространстве / В.А. Пономарев. – Пушкино, 1969. – 88 с. – Препринт / Институт биологической физики АН СССР. Деп. в ЦНИИ № 988-69.
4. Гельфанд, И.М. Неразложимые представления группы Лоренца / И.М. Гельфанд, В.А. Пономарев // Успехи математических наук. – 1968. – Вып. 2. – Т. 140. – С. 3–60.
5. Добровольская, Н.М. Пара встречных операторов / Н.М. Добровольская, В.А. Пономарев // Успехи математических наук. – 1965. – Вып. 6. – Т. 126. – С. 81–86.
6. Sneperman, L.B. The Shur theorem for periodic semigroups of linear relations / L.B. Sneperman // Semigroup Forum. – 1982. – Vol. 25. – S. 203–211.
7. Шнеперман, Л.Б. О полугруппе рефлексивных линейных отношений / Л.Б. Шнеперман // Вопросы алгебры. – Минск: Изд-во «Университетское», 1987. – № 3. – С. 117–123.
8. Бэр, Р. Линейная алгебра и проективная геометрия / Р. Бэр. – М.: Иностранлит, 1955. – 400 с.
9. Глускин, Л.М. Полугруппы и кольца эндоморфизмов линейных пространств / Л.М. Глускин // Известия АН СССР. – Сер. Математика. – 1959. – Т. 23. – С. 844–870.
10. Михалев, А.В. Изоморфизмы полугрупп эндоморфизмов модулей / А.В. Михалев // Алгебра и логика. Семинар. – 1966. – Т. 5, № 5. – С. 59–67.
11. Михалев, А.В. Изоморфизмы полугрупп эндоморфизмов модулей. II / А.В. Михалев // Алгебра и логика. Семинар. – 1967. – Т. 6, № 2. – С. 35–47.
12. Мальцев, А.И. Симметрические группоиды / А.И. Мальцев // Математический сборник. – 1952. – Т. 31. – С. 136–151.
13. Шутов, Э.Г. Гомоморфизмы полугрупп всех частичных преобразований / Э.Г. Шутов // Известия вузов. Математика. – 1961. – № 3 (22). – С. 178–184.
14. Либер, А.Е. О симметрических обобщениях групп / А.Е. Либер // Математический сборник. – 1953. – Т. 33, № 3. – С. 53–544.

1-А, 6-А]. В этой главе описаны замкнутые порядки полугруппы $LR_1(V)$, теорема 3.2.7 [11-А, 2-А, 13-А] и замкнутые порядки полугруппы $LR_1(V)$, теорема 3.2.9 [11-А, 17-А]. Строение замкнутых конгруэнций на полугруппе $LR_1(V)$ существенно используется в следующей главе для доказательства теорем 4.2.12, 4.3.2, 4.3.23, которые являются основными в нашей диссертации.

В первом разделе четвертой главы получено описание конгруэнций на конечных главных факторах полугруппы $LR(V)$, теорема 4.1.9 [5-А, 4-А, 1-А].

Во втором разделе этой главы введено понятие индекса конгруэнции и найдены все конгруэнции конечного индекса, теорема 4.2.12 [20-А, 5-А]. Эта теорема является обобщением результата А.И. Мальцева [15] и Т.Н. Шароновой [16].

Третий раздел посвящен изучению конгруэнций полугруппы $LR(V)$. Сначала найдена связь конгруэнций полугруппы линейных отношений с конгруэнциями на полугруппе линейных преобразований и конгруэнциями на полугруппе $LR_1(V)$, теорема 4.3.2 [9-А, 4-А, 8-А, 3-А]. Затем найдены все конгруэнции на полугруппе $LR(V)$, теорема 4.3.23 [9-А, 4-А, 3-А]. Этот результат является развитием идеи А.И. Мальцева [15] описания конгруэнций на полугруппе квадратных матриц конечного порядка n над полем и на ее подполугруппе ранга $\leq r$, где $r \leq n$.

В четвертом разделе этой главы установлена связь между конгруэнциями на полугруппе $LR(V)$ и на подполугруппе $LV(V)$ этой полугруппы, теорема 4.4.1 [4-А]. В этом разделе также дано и более детальное описание конгруэнций на $LV(V)$, которое было получено ранее в [16]. Это описание близко к описанию конгруэнций на полугруппе всех взаимно однозначных преобразований произвольного множества, данное в [14].

Рекомендации по практическому использованию результатов диссертации

Работа имеет теоретический характер. Полученные в диссертации результаты и методы могут быть использованы при дальнейшем изучении теории полугрупп, проводимом в Витебском, Белорусском, Омском, Новосибирском и Уральском государственных университетах и других центрах, где изучается строение конгруэнций на полугруппах.

Результаты диссертации могут быть использованы при исследовании теории полугрупп, а также при чтении спецкурсов для студентов математических специальностей, написании курсовых и дипломных работ.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Маклейн, С. Алгебра аддитивных отношений / С. Маклейн // Сб. переводов. Математика. – 1963. – № 7:6. – С. 1–12.
- 2 Пуппе, Д. Соответствия в абелевых категориях / Д. Пуппе // Сб. переводов. Математика. – 1964. – № 8:6. – С. 109–139.
- 3 Пономарев, В.А. Начала теории аддитивных бинарных отношений в конечномерном векторном пространстве / В.А. Пономарев. – Пушино, 1969. – 88 с. – Препринт / Институт биологической физики АН СССР. Деп. ВИНТИ № 988-69.
- 4 Гельфанд, И.М. Неразложимые представления группы Лоренца / И.М. Гельфанд, В.А. Пономарев // Успехи математических наук. – 1968. – Вып. 2. – Т. 140. – С. 3–60.
- 5 Добровольская, Н.М. Пара встречных операторов / Н.М. Добровольская, В.А. Пономарев // Успехи математических наук. – 1965. – Вып. 6. – Т. 126. – С. 81–86.
- 6 Sneperman, L.B. The Shur theorem for periodic semigroups of linear relations / L.B. Sneperman // Semigroup Forum. – 1982. – Vol. 25. – S. 203–211.
- 7 Шнеперман, Л.Б. О полугруппе рефлексивных линейных отношений / Л.Б. Шнеперман // Вопросы алгебры. – Минск: Изд-во «Университетское», 1987. – № 3. – С. 117–123.
- 8 Бэр, Р. Линейная алгебра и проективная геометрия / Р. Бэр. – М.: Иностр. лит., 1955. – 400 с.
- 9 Глушкин, Л.М. Полугруппы и кольца эндоморфизмов линейных пространств / Л.М. Глушкин // Известия АН СССР. – Сер. Математика. – 1959. – Т. 23. – С. 844–870.
- 10 Михалев, А.В. Изоморфизмы полугрупп эндоморфизмов модулей / А.В. Михалев // Алгебра и логика. Семинар. – 1966. – Т. 5, № 5. – С. 59–67.
- 11 Михалев, А.В. Изоморфизмы полугрупп эндоморфизмов модулей. II / А.В. Михалев // Алгебра и логика. Семинар. – 1967. – Т. 6, № 2. – С. 35–47.
- 12 Мальцев, А.И. Симметрические группоиды / А.И. Мальцев // Математический сборник. – 1952. – Т. 31. – С. 136–151.
- 13 Шутов, Э.Г. Гомоморфизмы полугрупп всех частичных преобразований / Э.Г. Шутов // Известия вузов. Математика. – 1961. – № 3 (22). – С. 178–184.
- 14 Либер, А.Е. О симметрических обобщениях групп / А.Е. Либер // Математический сборник. – 1953. – Т. 33, № 3. – С. 53–544.

- 15 Мальцев, А.И. Мультипликативные действия матриц / А.И. Мальцев // Доклады АН СССР. – 1953. – Т. 90, № 3. – С. 333–335.
- 16 Шаронова, Т.Н. Конгруэнции на полугруппах линейных преобразований / Т.Н. Шаронова // Доклады АН УРСР. – Сер. А. – 1979. – № 1. – С. 17–19.
- 17 Усенко, В.М. О полупрямых произведениях полугруппы / В.М. Усенко // Украинский математический журнал. – 1982. – Т. 34, № 2. – С. 185–189.
- 18 Глускин, Л.М. Вполне простые полугруппы / Л.М. Глускин // Ученые записки: сб. науч. тр. / Харьковский гос. пед. ин-т. – Харьков, 1956. – Т. 18, № 1. – С. 41–55.
- 19 Климов, В.Н. О конгруэнциях вполне о-простых полугрупп / В.Н. Климов // Вестник Московского ун-та. – Сер. Математика. Механика. – 1974. – № 6. – С. 136.
- 20 Климов, В.Н. О конгруэнциях вполне о-простых полугрупп / В.Н. Климов // Исследования по современной алгебре: сб. науч. тр. / Уральский госуниверситет; под ред. Л.Н. Шеврина. – Свердловск, 1976. – С. 16–23.
- 21 Lallement, G. A note on congruences on Rees matrix semigroups / G. Lallement // Semigroups Forum. – 1974. – Vol. 8, № 1. – S. 89–93.
- 22 Preston, G.B. Congruences on completely o-simple semigroups / G.B. Preston // Proc. Lond. Math. Soc. – Ser. 3, 11. – 1961. – № 43. – S. 557–576.
- 23 Tamura, T. Decomposition of a completely simple semigroups / T. Tamura // Osaka Math. J. – 1960. – 12, № 2. – S. 269–275.
- 24 Клиффорд, А. Алгебраическая теория полугрупп / А. Клиффорд, Г. Престон. – М., 1972. – Т. 1. – 286 с.
- 25 Артамонов, В.А. Общая алгебра / В.А. Артамонов [и др.]; под общ. ред. Л.А. Скорнякова. – М.: Наука, 1991. – Т. 1. – 480 с.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в научных журналах

- 1-А Наумик, М.И. Конгруэнции на полугруппе линейных отношений / М.И. Наумик // Вопросы алгебры. – Вып. 2. – Минск: Университетское, 1986. – С. 114–120.

2-А Наумик, М.И. Стабильные квазипорядки на подполугруппе $LR_1(V)$ и главных факторах полугруппы линейных отношений / М.И. Наумик // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 1998. – № 2. – С. 75–78.

3-А Наумик, М.И. О конгруэнциях на полугруппе линейных отношений / М.И. Наумик // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 1999. – № 2. – С. 51–55.

4-А Наумик, М.И. Полугруппа линейных отношений / М.И. Наумик // Доклады НАН Беларуси. – 2004. – Т. 48, № 3. – С. 34–37.

5-А Наумик, М.И. Конгруэнции конечного индекса на полугруппе линейных отношений / М.И. Наумик // Вестник Полоцкого госуниверситета. Сер. С. Фундаментальные науки. – 2008. – № 9. – С. 58–65.

Статьи в сборниках научных трудов

6-А Наумик, М.И. Конгруэнции на полугруппе нулевых линейных отношений / М.И. Наумик // Теория полугрупп и ее приложения: межвуз. сб. науч. тр.; редкол.: Г.И. Житомирский [и др.]; Саратовский ун-т, 1993. – Вып. 11. – С. 30–35.

7-А Наумик, М.И. Квазипорядки полугруппы линейных преобразований / М.И. Наумик // Материалы республиканской научно-методической конференции, посвященной 25-летию факультета прикладной математики и информатики, 10–14 апреля 1995 г. / редкол.: В.И. Корзюк [и др.]. – Минск, 1995. – С. 130–135.

Тезисы докладов

8-А Наумик, М.И. Конгруэнции на полугруппе линейных отношений / М.И. Наумик // XVIII Всесоюзная алгебраическая конференция, Минск, 14–17 сент. 1983 г.: тез. сообщ. / БГУ. – Минск, 1983. – Ч. 2. – С. 169–170.

9-А Наумик, М.И. О конгруэнциях на полугруппе линейных отношений / М.И. Наумик // Международная конференция по алгебре, посвященная памяти А.И. Ширшова, Барнаул, 20–25 авг. 1991 г.: тез. докл. по логике и универсальным алгебрам, прикладной алгебре / Алтайский гос. ун-т; ред.: Е.А. Палютин, А.Н. Ряскин. – Новосибирск, 1991. – С. 95.

10-А Наумик, М.И. О конгруэнциях на полугруппах $LR_\xi(V)$ линейных отношений / М.И. Наумик // Алгебра, теория чисел, математическая логика. Геометрия и топология. История математики и методика преподавания математики в вузах: конф. математиков Беларуси, Гродно, 29 сент. – 2 окт. 1992 г.: тез. докл. / ГрГУ; ред. Ю.П. Золотухин. – Гродно, 1992. – С. 38.

11-А Наумик, М.И. О стабильных порядках полугруппы линейных отношений / М.И. Наумик // Третья международная конференция по алгебре

памяти М.И. Каргаполова, Красноярск, 23–28 авг. 1993 г.: тез. докл. / Красноярский гос. ун-т. – Красноярск, 1993. – С. 458–459.

12-А Наумик, М.И. О решетке конгруэнций полугруппы линейных отношений / М.И. Наумик // Третья международная конференция по алгебре памяти М.И. Каргаполова, Красноярск, 23–28 авг. 1993 г.: тез. докл. / Красноярский гос. ун-т. – Красноярск, 1993. – С. 459.

13-А Наумик, М.И. Инвариантные квазипорядки полугруппы прямоугольных линейных отношений / М.И. Наумик // Проблемы математики и информатики: тез. Международной мат. конф., посв. 25-летию Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины; редкол.: Л.А. Шеметков [и др.]. – Гомель, 1994. – С. 46.

14-А Наумик, М.И. О строении идемпотентных подполугрупп линейных отношений / М.И. Наумик // Проблемы алгебры и кибернетики: материалы междунар. конф., посв. памяти академика С.А. Чунихина / ГГУ им. Ф. Скорины; редкол.: Л.А. Шеметков [и др.]. – Гомель, 1995. – С. 102.

15-А Наумик, М.И. О множестве всех конгруэнций на полугруппе линейных отношений / М.И. Наумик // VII Белорусская математическая конференция, Минск, 18–22 ноября 1996 г.: тез. докл. / БГУ. – Минск, 1996. – Ч. 1. – С. 116–117.

16-А Наумик, М.И. Идеалы полугрупп линейных отношений / М.И. Наумик // «Вычислительные методы и производство: реальность, проблемы, перспективы»: материалы I Междунар. науч. конф., 12–14 ноября 1998 г. / ГГУ им. Ф. Скорины. – Гомель, 1998. – С. 173–174.

17-А Наумик, М.И. Теорема о стабильных порядках полугруппы линейных отношений / М.И. Наумик // Гашюцова теория классов групп и других алгебраических систем: тез. докл. Междунар. науч. конф., 16–21 окт. 2000 г., посв. 80-летию профессора В. Гашюца / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; редкол.: Л.А. Шеметков [и др.]. – Гомель, 2000. – С. 42–43.

18-А Наумик, М.И. Конгруэнции на полугруппе аддитивных отношений конечно порожденной свободной абелевой группы / М.И. Наумик // «Классы групп и алгебр»: тез. докл. Междунар. конф., посв. 100-летию со дня рождения С.А. Чунихина, Гомель, 5–7 окт. 2005 г. / ГГУ им. Ф. Скорины; редкол.: Л.А. Шеметков [и др.]. – Гомель, 2005. – С. 82–83.

19-А Наумик, М.И. О максимальных коммутативных подполугруппах идемпотентов полугруппы линейных отношений / М.И. Наумик // «Классы групп, алгебр и их приложения»: тез. докл. Междунар. алгебраической конф., посв. 70-летию со дня рождения Л.А. Шеметкова, Гомель, 9–11 ию-

ля 2007 г. / ГТУ им. Ф. Скорины; редкол.: Л.А. Шеметков [и др.]. – Гомель, 2007. – С. 109–110.

20-А Наумик, М.И. Конгруэнции конечного индекса полугруппы линейных отношений / М.И. Наумик // Международная алгебраическая конф., посв. 100-летию со дня рождения А.Г. Куроша, г. Москва, 28 мая – 3 июня 2008 г.: тез. докл. / Московский гос. ун-т им. М.В. Ломоносова; редкол.: Э.Б. Винберг [и др.]. – М., 2008. – С. 172–173.

21-А Наумик, М.И. Конгруэнции бесконечного индекса полугруппы линейных отношений / / М.И. Наумик // X Белорусская математическая конференция, г. Минск, 3–7 ноября 2008 г.: тез. докл. / БГУ и Институт математики НАН Беларуси; редкол.: И.В. Гайшун [и др.]. – Минск, 2008. – Ч. 1. – С. 43.

Наумік Міхаіл Іванавіч

Кангруэнцыі паўгрупы лінейных адносін

Ключавыя словы: лінейныя адносіны, ранг лінейнай адносіны, паўгрупа, падпаўгрупа, кангруэнцыя канечнага індэкса, кангруэнцыя бясконцага індэкса, узгодненыя кангруэнцыі, замкнутая кангруэнцыя.

У дысертацыі знаходзяцца кангруэнцыі паўгрупы лінейных адносін вектарнай прасторы над цэлам. Атрымана апісанне замкнутых кангруэнцый падпаўгрупы лінейных адносін ранга нуля. Адначасова дадзена апісанне замкнутых стабільных парадкаў і квазіпарадкаў. Знойдзены кангруэнцыі на галоўным фактары паўгрупы ў тэрмінах лінейнай групы. Затым знойдзены ўсе кангруэнцыі канечнага індэксу на паўгрупе лінейных адносін. Атрыманы сувязі паміж кангруэнцыямі падпаўгрупы лінейных адносін ранга нуля, падпаўгрупы лінейных аператараў і паўгрупы лінейных адносін. Скарыстоўваючы апісанне кангруэнцый паўгрупы лінейных аператараў, знойдзены ўсе кангруэнцыі на паўгрупе лінейных адносін. Знойдзена сувязь паміж кангруэнцыямі паўгрупы лінейных адносін і на паўгрупе ўсіх узаемаадназначных лінейных аператараў.

Усе асноўныя вынікі дысертацыі з'яўляюцца новымі. Яны маюць тэарэтычны характар і могуць быць выкарыстаны ў даследаваннях па тэорыі паўгруп і яе прымянення, а таксама пры чытанні спецкурсаў ва ўніверсітэтах.

Наумик Михаил Иванович

Конгруэнции полугруппы линейных отношений

Ключевые слова: линейные отношения, ранг линейных отношений, полугруппа, подполугруппа, конгруэнция, конгруэнция конечного индекса, конгруэнция бесконечного индекса, согласованные конгруэнции, замкнутая конгруэнция.

В диссертации найдены конгруэнции полугруппы линейных отношений векторного пространства над телом. Получено описание замкнутых конгруэнций на подполугруппе линейных отношений ранга ноль. При этом дано описание замкнутых стабильных порядков и квазипорядков. Описываются конгруэнции на главном факторе полугруппы в терминах линейной группы. Найдены все конгруэнции конечного индекса на полугруппе линейных отношений. Установлены связи между конгруэнциями подполугруппы линейных отношений ранга ноль, подполугруппы линейных преобразований и полугруппе линейных отношений. С использованием описания конгруэнций на полугруппе линейных преобразований найдены все конгруэнции на полугруппе линейных отношений. Установлена связь между конгруэнциями на полугруппе линейных отношений и на полугруппе всех взаимнооднозначных линейных преобразований.

Все основные результаты диссертации являются новыми. Они носят теоретический характер и могут быть использованы в исследованиях по теории полугрупп и их приложениях, а также при чтении спецкурсов в университетах.

SUMMARY

Naumik Michael Ivanovich

Congruence of semigroup linear relations

Key words: linear relations, a rank of linear relations, a semigroup, a sub-semigroup, congruence, a congruence of the finite index, a congruence of the infinite index coordinated congruencies, a closed congruence.

The research of the congruence of the semigroup linear relations of vector space of the skew field was represented in the thesis. The description of the closed congruences of zero rank linear relations was established. Alongside with this it was given the specification of the closed stable orders and quasiorders. The congruences of the semigroup main factor in terms of linear group were outlined. All the congruences of the finite index of the semigroup linear relations were discovered. The connections between the congruencies of the semigroup linear relations of zero rank, subsemigroup linear transformation and semigroup linear relations were found out. Using the description of the congruences of the semigroup linear transformation were settled all the congruences of the semigroup linear relations. The connection between the congruences of the semigroup linear relations and the semigroup of all the reciprocally simple linear transformations was revealed.

The main results of the thesis are new. They have a theoretical character and can be used in researches of semigroup theory and their supplements and at delivering a special course at the universities.



Наумик Михаил Иванович

КОНГРУЭНЦИИ ПОЛУГРУППЫ ЛИНЕЙНЫХ ОТНОШЕНИЙ

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

Лицензия № 02330/0133208 от 30.04.04.

Подписано в печать 22.12.08. Формат 60×90 1/16. Бумага писчая № 1.

Гарнитура «Таймс». Усл. печ. л. 1,22. Уч. изд. 1,31. Тираж 60 экз.

Заказ № 114.

Отпечатано с оригинала-макета на ризографе учреждения образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Лицензия № 02330/0056611 от 16.02.04.

246019, г. Гомель, ул. Советская, 16