БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 517.95

ПРОХОЖИЙ
СЕРГЕЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ

О РАСТУЩИХ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения

Минск, 2007

Работа выполнена в Учреждении образования «Витебский государственный университет им. П.М. Машерова»

Научный руководитель – **Гладков Александр Львович,**
доктор физико-математических наук, доцент,
УО «Витебский государственный университет им. П.М. Машерова», первый проректор.

Официальные оппоненты: **Корзюк Виктор Иванович,**
доктор физико-математических наук, профессор,
Белорусский государственный университет,
факультет прикладной математики и информатики, заведующий кафедрой математической физики.

Жестков Сергей Васильевич,
доктор физико-математических наук, профессор,
УО «Могилевский государственный университет им. А.Л. Кулешова», физико-математический факультет, профессор кафедры математического анализа, информатики и вычислительной техники.

Оппонирующая организация – Государственное научное учреждение «Институт математики Национальной академии наук Беларуси».

Защита состоится 22 июня 2007 г. в $12^{\underline{00}}$ на заседании совета по защите диссертаций Д 02.01.07 при Белорусском государственном университете по адресу: 220030, г. Минск, ул. Ленинградская, 8, корпус юридического факультета, ауд. 407.

Телефон ученого секретаря: 209-55-58.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Белорусского государственного университета.

Автореферат разослан “ ” мая 2007 г.

Ученый секретарь совета
по защите диссертаций,
доктор физико-математических наук,
профессор Н.В. Лазакович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с крупными научными программами и темами

Исследования проводились в рамках задания «Нелинейные параболические и стационарные уравнения» (№ гос. рег. 20021090) темы «Корректные и некорректные задачи для линейных нестационарных уравнений в частных производных и дифференциально–операторных уравнений и нелинейных эволюционных и стационарных уравнений» («Математические структуры 11», 2002–2005 гг., ГПФИ Республики Беларусь), а также задания «Нелинейные параболические и стационарные уравнения» (№ гос. рег. 20062118) темы «Априорные оценки в исследовании корректных и некорректных краевых задач для дифференциальных уравнений и их приложения» («Математические модели 9», 2006–2010 гг., ГПФИ Республики Беларусь).

Цель и задачи исследования

Целью работы является получение новых результатов для неограниченных обобщенных решений нелинейных параболических уравнений:

— описать классы однозначной разрешимости задачи Коши для вырождающихся квазилинейных параболических уравнений, имеющих важное значение для приложений;

— получить условия обращения в нуль неограниченных обобщенных решений этих уравнений;

— выделить некоторые нелинейные параболические уравнения как второго, так и высокого порядков, обладающие свойством однозначной разрешимости без каких-либо предположений о поведении начальных данных и обобщенного решения на бесконечности.

Объектом исследования являются неограниченные обобщенные решения задачи Коши для нелинейных параболических уравнений. Предмет исследования — условия существования, единственности и обращения в нуль этих решений.

Положения, выносимые на защиту

В диссертации рассматриваются уравнения следующего вида:

$$u_t = a(u^m)_{xx} + b(u^n)_x - cu^p, \tag{1}$$

$$u_t = a(u^m)_{xx} + \sum_{i=1}^{k} c_i u^{\gamma_i} + \sum_{j=1}^{l} b_j u^{\beta_j - 1} u_x - cu^p, \tag{2}$$

$$u_t = (\varphi(u))_{xx} - g(u), \qquad (3)$$

$$u_t + \sum_{i=1}^{m}(-1)^i a_i D^{2i} u + \sum_{j=1}^{m} b_j D^{2j-1} u + cu + d(x,t)|u|^{\alpha} u = f(x,t). \qquad (4)$$

Получены следующие новые результаты:

— описаны классы существования и единственности обобщенных решений задачи Коши для уравнения (1) при различных соотношениях показателей m, n, p;

— для уравнений (1) и (3) получены условия на рост начальных данных, при выполнении которых обобщенное решение соответствующей задачи Коши обращается в нуль в каждой точке некоторой области пространства за конечное время;

— для определенного вида уравнений (2) и (4) установлена однозначная разрешимость задачи Коши без каких-либо предположений о поведении начальных данных и обобщенного решения на бесконечности.

Показана определенная точность полученных результатов.

Личный вклад соискателя

Основные результаты диссертации получены автором самостоятельно. Научному руководителю принадлежит общая методика доказательств этих результатов. Постановка задачи, исследуемой в главе 4, принадлежит профессору M. Guedda (университет г.Амьен, Франция).

Апробация результатов диссертации

Результаты работы докладывались и обсуждались на VII научной конференции студентов, магистрантов и аспирантов (Витебск 2002), на международных математических конференциях «Еругинские чтения – VII, VIII, IX, X и XI» (Гродно 2001, Брест 2002, Витебск 2003, Могилев 2005, Гомель 2006), на VIII и IX Белорусских международных математических конференциях (Минск 2000, Гродно 2004), на научном семинаре кафедры геометрии и математического анализа УО «Витебский государственный университет им. П.М. Машерова» (Витебск 2000 – 2006).

Опубликованность результатов диссертации

Опубликовано 6 статей в научных журналах (общий объем статей составляет 3,5 авторских листа), 1 статья в сборнике материалов и 7 тезисов докладов научных конференций. Общий объем опубликованных материалов составляет 4 авторских листа.

Структура и объем диссертации

Диссертация содержит введение, общую характеристику работы, четыре главы, включающие в себя пять разделов, приложения, заключение и список использованных источников. Полный объем диссертации — 113 страниц. Приложения в совокупности занимают 9 страниц. Библиографический список включает 104 наименования и занимает 10 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В *первой главе* содержится обзор важнейших работ по теории нелинейных параболических уравнений, к которым примыкает тема настоящей диссертации.

Во *второй главе* рассматривается уравнение

$$u_t = a(u^m)_{xx} + b(u^n)_x - cu^p, \tag{5}$$

где $m \geq 1$, $n \geq 1 > p > 0$, a, b, c — положительные постоянные. Уравнение (5) возникает как модельное для большого числа физических явлений. Например, оно описывает фильтрацию жидкости через однородную пористую среду, диффузию газа и процесссы распространения тепла в нелинейной среде. Присутствие первого слагаемого в правой части (5) означает наличие в среде диффузии, второго слагаемого — конвективного переноса, третьего — поглощения. В полуплоскости $S = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ переменных (x, t) изучается задача Коши с начальным условием

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Здесь $u_0(x)$ — неотрицательная непрерывная функция, которая может расти на бесконечности. Как известно, вследствие вырождения уравнения (5) при $u = 0$, задача (5), (6) может не иметь классического решения. Поэтому рассматриваются обобщенные решения этой задачи.

Определение 1. *Неотрицательную непрерывную в S функцию $u(x,t)$ назовем обобщенным решением уравнения (5) в S, если выполнено интегральное тождество*

$$\iint_P [uf_t + au^m f_{xx} - bu^n f_x - cu^p f]\,dx\,dt - \int_{x_1}^{x_2} uf\,dx\Big|_{t_1}^{t_2} - a\int_{t_1}^{t_2} u^m f_x\,dt\Big|_{x_1}^{x_2} = 0 \tag{7}$$

для всех ограниченных прямоугольников $P = [x_1, x_2] \times [t_1, t_2] \in S$ *и любой неотрицательной функции* $f \in C^{2,1}_{x,t}(P)$ *такой, что* $f(x_1, t) = f(x_2, t) = 0$ *при* $t \in [t_1, t_2]$.

При замене в (7) знака равенства знаком $\geq$ $(\leq)$ получаем определение обобщенного субрешения (суперрешения) уравнения (5) в S.

Определение 2. *Функцию* $u(x,t)$ *назовем обобщенным решением задачи Коши (5), (6), если она является обобщенным решением уравнения (5) в* S, *непрерывна в* $\overline{S}$, *и выполняется условие (6).*

Аналогично вводятся понятия обобщенного решения, обобщенного суб- и суперрешения уравнения (5) и задачи Коши (5), (6) в полосе $S_T = \mathbb{R}\times(0,T)$.

В разделе 2.1 доказан ряд теорем существования и единственности растущих на бесконечности обобщенных решений задачи (5), (6) и установлена определенная точность полученных результатов. Классы существования и единственности обобщенного решения задачи Коши для уравнения (5) с $c = 0$ изучены в работе [1], а с $b = 0$ — в [2].

Подраздел 2.1.1 посвящен случаю $n < (m+1)/2$. Определим класс $\mathcal{K}_1$ неотрицательных функций $v(x,t)$, для которых в полосе S_T выполнено неравенство

$$v(x,t) \leq M_1(\alpha_1 + x^2)^{1/(m-1)}. \tag{8}$$

Здесь и далее через M_i и α_i условимся обозначать соответственно положительные и неотрицательные постоянные. Постоянные T, M_1 и α_1 в (8) могут зависеть от функции $v(x,t)$.

Теорема 2.1 [4-А]. *Пусть* $u_0(x)$ *удовлетворяет неравенству*

$$u_0(x) \leq M_2(\alpha_2 + x^2)^h, \quad h \geq 0. \tag{9}$$

Тогда, если $h < 1/(m-1)$, *то задача (5), (6) имеет обобщенное решение* $u(x,t) \in \mathcal{K}_1$ *в* S. *При* $h = 1/(m-1)$ *задача (5), (6) разрешима в некоторой полосе* S_T *и* $u(x,t) \in \mathcal{K}_1$.

Теорема 2.2 [4-А]. *Обобщенное решение задачи Коши (5), (6) единственно в произвольной полосе* S_T *в классе функций* $\mathcal{K}_1$.

В подразделе 2.1.2 изучается случай $n = (m+1)/2$. Уравнение (5) имеет

[1]Гладков, А.Л. О задаче Коши в классах растущих функций для некоторых вырождающихся квазилинейных параболических уравнений с конвекцией / А.Л. Гладков // Мат. сб. – 1995. – Т. 186, №6. – С. 35-56.

[2]Гладков, А.Л. Задача Коши для некоторых вырождающихся квазилинейных параболических уравнений с поглощением / А.Л. Гладков // Сиб. мат. журнал. – 1993. – Т. 34, №1. – С. 47-64.

семейство стационарных классических решений $u_{st}(x)$, удовлетворяющих обыкновенному дифференциальному уравнению

$$a(u_{st}^m)'' + b(u_{st}^n)' - cu_{st}^p = 0. \tag{10}$$

Асимптотическое поведение при $x \to -\infty$ решений задачи Коши для уравнения (10) с начальными условиями

$$u_{st}(0) = M_3, \quad u'_{st}(0) = 0$$

при $(m+p)/2 < n < m$ описывается формулой

$$u_{st}(x) = c^-|x|^{1/(m-n)} + o(|x|^{1/(m-n)}),$$

где

$$c^- = \left(\frac{b(m-n)}{am}\right)^{1/(m-n)}. \tag{11}$$

Здесь и далее через $o(z(\zeta))$ условимся обозначать функции, удовлетворяющие условию

$$\lim_{\zeta\to+\infty} \frac{o(z(\zeta))}{z(\zeta)} = 0.$$

Теорема 2.3 [4-А]. *При выполнении неравенства (9) с* $h = 1/(m-1)$ *задача (5), (6) имеет обобщенное решение в некоторой полосе* S_T. *Если* $u_0(x)$ *удовлетворяет при* $x \geq 0$ *неравенству (9) с* $h < 1/(m-1)$, *а при* $x < 0$ *выполнено неравенство*

$$u_0(x) \leq u_{st}(x) \tag{12}$$

для некоторой функции $u_{st}(x)$, *удовлетворяющей (10), то задача (5), (6) разрешима в* S.

Теорема единственности для этого случая формулируется точно так же, как Теорема 2.2.

В подразделе 2.1.3 рассматривается случай $(m+1)/2 < n < m$. Обозначим

$$c_*^- = \left(\frac{bn(m-n)}{am(2m-n)}\right)^{1/(m-n)}.$$

Очевидно, $c^- > c_*^-$ при $n < m$. Через $\mathcal{K}_2$ обозначим класс неотрицательных функций $v(x,t)$ удовлетворяющих в полосе S_T неравенствам

$$v(x,t) \le M_4(\alpha_3 + |x|)^{1/(m-n)}, \quad M_4 < c_*^-, \quad x \le 0, \tag{13}$$

$$v(x,t) \le M_5(\alpha_4 + |x|)^{1/(n-1)}, \quad x \ge 0. \tag{14}$$

Постоянные T, M_4, M_5, α_3, α_4 в (13), (14) могут зависеть от функции $v(x,t)$.

Теорема 2.4 [4-А]. *Пусть для $u_0(x)$ при $x \le 0$ выполнено неравенство (12), а при $x \ge 0$ справедливо (9) с $h = 1/[2(n-1)]$. Тогда задача (5), (6) разрешима в некоторой полосе S_T. Если дополнительно для $u_0(x)$ выполняется неравенство (13), то минимальное обобщенное решение задачи (5), (6) $u(x,t) \in \mathcal{K}_2$.*

Теорема 2.5 [4-А]. *Обобщенное решение задачи Коши (5), (6) единственно в произвольной полосе S_T в классе функций K_2.*

Неизвестно, является ли константа c_*^- оптимальной по отношению к единственности. В работе [1] показана неединственность обобщенного решения задачи Коши (5), (6) с $c = 0$ в классе функций, удовлетворяющих (13) с $M_4 = c^-$ и (14). В работах [3] и [4] для задачи Коши (5), (6) с $b = 0$ и $1 < p < m$ оптимальность результата единственности также не установлена.

Подраздел 2.1.4 посвящен случаю $n = m$. Введем в рассмотрение класс $\mathcal{K}_3$ определенных в S_T неотрицательных функций $v(x,t)$, удовлетворяющих (14) и неравенству

$$v(x,t) \le \delta(x)\exp(-bx/[am]), \quad x \le 0, \tag{15}$$

где $\delta(x) \ge 0$ и $\lim_{x\to-\infty}\delta(x) = 0$. Постоянные T, M_5, α_4 и функция $\delta(x)$ могут зависеть от функции $v(x,t)$.

Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что функции

$$\varphi_{st}(x) = [M_6\exp(-bx/[am]) + \alpha_5]^{1/m}$$

являются стационарными классическими суперрешениями уравнения (5).

Теорема 2.6 [4-А]. *Пусть $u_0(x)$ удовлетворяет при $x \ge 0$ неравенству (9), а при $x \le 0$ — неравенству*

[3]Kamin, S. A nonlinear diffusion-absorption equation with unbounded initial data / S. Kamin, L.A. Peletier, J.L. Vazquez // Nonlinear Diffusion Equations and their Equilibrium States. – 1992. – V. 3. – P. 243–263.

[4]McLeod, J.B. Solutions of a nonlinear ODE appearing in the theory of diffusion with absorption / J.B. McLeod, L.A. Peletier, J.L. Vazquez // Diff. Int. Equat. – 1991. – V.4. – P. 1–14.

$$u_0(x) \le \varphi_{st}(x).$$

Тогда при $h < 1/[2(n-1)]$ *задача (5), (6) имеет обобщенное решение в* S, *а при* $h = 1/[2(n-1)]$ *— в некоторой полосе* S_T.

Теорема 2.7 [4-A]. *Обобщенное решение задачи Коши (5), (6) единственно в произвольной полосе* S_T *в классе функций* $\mathcal{K}_3$.

В работе [1] для уравнения (5) с $c = 0$ приводится пример, демонстрирующий невозможность замены в (15) $\delta(x)$ на положительную постоянную без ущерба для единственности решения задачи Коши.

Наконец, *в подразделе 2.1.5* изучается случай $n > m$. Определим класс $\mathcal{K}_4$ неотрицательных функций $v(x,t)$, для которых в полуполосе $S_T^+ = S_T \cap \{x \ge 0\}$ выполнено неравенство (14), где постоянные T, M_5 и α_4 могут зависеть от функции $v(x,t)$.

Теорема 2.8 [4-A]. *Пусть при* $x \ge 0$ $u_0(x)$ *удовлетворяет неравенству (9). Тогда, если* $h < 1/[2(n-1)]$, *то задача (5), (6) имеет обобщенное решение* $u(x,t)$ *в* S. *При* $h = 1/[2(n-1)]$ *задача (5), (6) разрешима в некоторой полосе* S_T *и* $u(x,t) \in \mathcal{K}_4$.

Теорема 2.9 [4-A]. *Обобщенное решение задачи Коши (5), (6) единственно в произвольной полосе* S_T *в классе функций* $\mathcal{K}_4$.

В разделе 2.2 без каких-либо предположений о росте начальной функции и обобщенного решения на бесконечности устанавливается однозначная разрешимость задачи Коши для нелинейного параболического уравнения более общего вида, чем (5)

$$u_t = a(u^m)_{xx} + \sum_{i=1}^{k} c_i u^{\gamma_i} + \sum_{j=1}^{l} b_j u^{\beta_j - 1} u_x - c u^p, \tag{16}$$

с начальным условием (6), где $p > m > 1$, k и l — натуральные числа, c_i и b_j ($i = 1, \ldots, k$; $j = 1, \ldots, l$) — некоторые постоянные, $0 \le \gamma_i < p$ для тех i, для которых $c_i > 0$, $0 \le \beta_j < p$ ($j = 1, \ldots, l$), $u_0(x)$ — неотрицательная непрерывная функция, которая может произвольным образом расти на бесконечности. Определение обобщенного решения уравнения (16) и задачи Коши (16), (6) аналогично Определениям 1 и 2.

Теорема 2.10 [2-A]. *Пусть* $u_0(x)$ *— произвольная неотрицательная непрерывная функция. Тогда для любого* $T > 0$ *в* S_T *определено обобщенное решение задачи (16), (6).*

Теорема 2.11 [2-А]. *Обобщенное решение задачи Коши (16), (6) единственно в произвольной полосе* S_T.

В разделе 2.3 устанавливаются ограничения на рост начальной функции, при выполнении которых обобщенное решение задачи Коши обращается в нуль в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ за конечное время $t_0(x)$, зависящее от x. Показана определенная точность этих ограничений.

При $n < (m+p)/2$ в области $S = \mathbb{R}^N \times (0, +\infty)$ рассматривается задача Коши для следующего многомерного аналога уравнения (5)

$$u_t = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \left(u^m\right)_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i \left(u^n\right)_{x_i} - cu^p \tag{17}$$

с начальными данными

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{18}$$

где $m > 1 > p > 0$, $n \geq 1$, a_{ij}, b_i $(i, j = 1, \ldots, N)$, c — действительные числа, $a_{ij} = a_{ji}$, $\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\xi_i\xi_j > 0$ при $\sum_{i=1}^{N} \xi_i^2 > 0$ $(\xi_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, N)$, $c > 0$. При $n > (m+p)/2$ рассматривается задача Коши (5), (6).

Случай $n = (m+p)/2$ в терминах теории управления исследован в [5], поэтому в диссертации он не рассматривается. Для уравнения (5) с $b = 0$ условия, при выполнении которых обобщенное решение задачи Коши (5), (6) обращается в нуль в каждой точке пространства за конечное время, найдены в [6].

В *подразделе 2.3.1* изучается случай $n < (m+p)/2$. Известно, что положительно-определенная квадратичная форма $\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\xi_i\xi_j$ приводится к виду $\sum_{i=1}^{N} \eta_i^2$ посредством некоторого линейного преобразования

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{N} c_{ij}\eta_j, \qquad i = 1, \ldots, N,$$

где $c_{ij} = c_{ji}$ $(i, j = 1, \ldots, N)$. Положим для $x \in \mathbb{R}^N$

$$r = \left[\sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{N} c_{ij} x_j\right)^2\right]^{1/2}.$$

[5] Храмцов, О.В. Относительная стабилизация одного нелинейного вырождающегося параболического уравнения / О.В. Храмцов // Дифференц. уравнения. – 2001. – Т. 37, №12. – С. 1650–1654.

[6] Гладков, А.Л. О поведении решений некоторых квазилинейных параболических уравнений со степенными нелинейностями / А.Л. Гладков // Мат. сб. – 2000, Т. 191, №3. – С. 25–42.

Отметим, что $r > 0$ при $x \neq 0$. Обозначим

$$c_N = \left(\frac{c(m-p)^2}{2m(2p+N(m-p))}\right)^{1/(m-p)}.$$

Теорема 2.12 [5-А]. *Пусть* $n < (m+p)/2$, *и* $u_0(x)$ *удовлетворяет неравенству*

$$u_0(x) \leq Ar^{2/(m-p)} + o(r^{2/(m-p)}),$$

где $0 \leq A < c_N$. *Тогда минимальное обобщенное решение задачи Коши (17), (18) обращается в нуль в каждой точке* $x \in \mathbb{R}^N$ *за конечное время* $t_0(x)$.

Подраздел 2.3.2 посвящен случаю $(m+p)/2 < n < m$. Пусть $\varphi_i(\xi)$ $(i = 1, 2)$ — неотрицательные функции, удовлетворяющие при $\xi \geq 0$ дифференциальным неравенствам

$$\mathcal{T}_i\varphi_i \equiv \varphi_i' + a(\varphi_i^m)'' + b_i(\varphi_i^n)' - c\varphi_i^p \leq 0 \tag{19}$$

с постоянными $b_1 = b$ и $b_2 = -b$, и условиям

$$\varphi_i(0) = M_7, \quad \varphi_i'(0) = 0. \tag{20}$$

Для каждой функции φ_i неравенство (19) может не выполняться в конечном числе точек $\xi_{j_i}^{(i)}$ $(j_i = 1, \ldots, k_i;\ i = 1, 2)$, в которых производная $(\varphi_i^m)'$ непрерывна. Заметим, что задачи Коши для уравнений $\mathcal{T}_i(\varphi_i) = 0$ с начальными условиями (20) имеют единственные решения, асимптотическое поведение которых описывается формулами

$$\varphi_1(\xi) = c^+\xi^{1/(n-p)} + o(\xi^{1/(n-p)}), \quad \varphi_2(\xi) = c^-\xi^{1/(m-n)} + o(\xi^{1/(m-n)}),$$

где

$$c^+ = \left(\frac{c(n-p)}{bn}\right)^{1/(n-p)}, \tag{21}$$

а постоянная c^- определена в (11).

Теорема 2.13 [5-А]. *Пусть* $(m+p)/2 < n < m$, *и* $u_0(x)$ *удовлетворяет неравенству*

$$u_0(x) \le \varphi_{\overline{x}}(x) = \begin{cases} \varphi_1(x-\overline{x}) & \text{при} \quad x \ge \overline{x} \\ \varphi_2(\overline{x}-x) & \text{при} \quad x < \overline{x} \end{cases}$$

для некоторого $\overline{x} \in \mathbb{R}$ *и некоторых функций* φ_1 *и* φ_2, *удовлетворяющих соотношениям (19), (20). Тогда минимальное обобщенное решение задачи Коши (5), (6) обращается в нуль в каждой точке* $x \in \mathbb{R}$ *за конечное время* $t_0(x)$.

В подразделе 2.3.3 рассматривается случай $n = m$.

Теорема 2.14 [5-A]. *Пусть* $n = m$, *и начальные данные удовлетворяют неравенствам*

$$u_0(x) \le M_8 \exp\left(\frac{b|x|}{am}\right) \qquad \text{при } x \le 0,$$

$$u_0(x) \le A^+ x^{1/(n-p)} + o(x^{1/(n-p)}) \qquad \text{при } x \ge 0, \tag{22}$$

где $0 \le A^+ < c^+$, *постоянная* c^+ *определена в (21),* M_8 *— произвольная положительная постоянная. Тогда минимальное обобщенное решение задачи Коши (5), (6) обращается в нуль в каждой точке* $x \in \mathbb{R}$ *за конечное время* $t_0(x)$.

В подразделе 2.3.4 (случай $n > m$) показано, что некоторые обобщенные решения задачи Коши (5), (6) с произвольно растущей при $x \to -\infty$ начальной функцией обращаются в нуль в каждой точке $\mathbb{R}$ за конечное время.

Теорема 2.15 [5-A]. *Пусть* $n > m$, *и* $u_0(x)$ *удовлетворяет неравенству (22) с* $0 \le A^+ < c^+$. *Тогда минимальное обобщенное решение задачи Коши (5), (6) обращается в нуль в каждой точке* $x \in \mathbb{R}$ *за конечное время* $t_0(x)$.

В третьей главе в $S = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ рассматривается задача Коши для уравнения

$$u_t = (\varphi(u))_{xx} - g(u) \tag{23}$$

с начальным условием (6). Функции $\varphi(u)$ и $g(u)$, определенные при $u \ge 0$, удовлетворяют следующим условиям:

1°) $g(0) = 0$, $g(u) > 0$ $\forall u > 0$, $g \in C[0, +\infty)$;

2°) $\varphi(0)=0,\ \varphi(u)>0,\ \varphi'(u)>0,\ (\varphi'\circ\varphi^{-1})'(u)\geq 0\ \ \forall u>0$, $\varphi\in C^2(0,+\infty)\cup C[0,+\infty)$, $g\circ\varphi^{-1}$ — выпуклая функция;

3°) выполнены соотношения

$$\int_0 \frac{d\xi}{g(\xi)} < +\infty,$$

$$\int_0 \left(\int_0^\xi g\circ\varphi^{-1}(\tau)\,d\tau\right)^{-1/2} d\xi < +\infty,$$

$$\int^{+\infty} \left(\int_0^\xi g\circ\varphi^{-1}(\tau)\,d\tau\right)^{-1/2} d\xi = +\infty,$$

где φ^{-1} — обратная для φ функция. Кроме того, предположим, что для любого $0<\delta<1$ существует постоянная $K(\delta)$ такая, что неравенство

$$\varphi'\circ\varphi^{-1}(\delta\xi)\geq K(\delta)\varphi'\circ\varphi^{-1}(\xi)$$

справедливо для всех $\xi>0$.

Этим условиям удовлетворяют, например, пары функций $\varphi(u)=u^m$ и $g(u)=u^p$ $(0<p<1<m)$, $\varphi(u)=u^m$ и $g(u)=\ln^p(u^k+1)$ $(0<p<1<m$, $0<k<m$, $0<pk<1)$, $\varphi(u)=\exp u$ и $g(u)=u^k$ $(0<k<1)$, $\varphi(u)=u$ и $g(u)=u+u^p$ $(0<p<1)$.

Целью *раздела 3.1* является исследование условий, при которых минимальное обобщенное решение задачи Коши (23), (6) для каждого x из некоторого промежутка обращается в нуль за конечное время $t_0(x)$.

В подразделе 3.1.1 исследуются стационарные решения $u_{st}(x)$ уравнения (23), т.е. решения, удовлетворяющие уравнению

$$(\varphi(u_{st}(x)))''=g(u_{st}(x)). \tag{24}$$

Теорема 3.1 [6-А]. *Для любых $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ $(x_1\leq x_2)$ существует определенное для всех $x\in\mathbb{R}$ нетривиальное решение $u_{st}(x;x_1,x_2)$ уравнения (24) такое, что*

$$u_{st}(x;x_1,x_2)=0 \quad \textit{при} \quad x\in[x_1,x_2],$$

$$u_{st}(x;x_1,x_2)>0 \quad \textit{при} \quad x\notin[x_1,x_2],$$

причем

$$(\varphi(u_{st}(x;x_1,x_2)))'|_{x=x_1} = (\varphi(u_{st}(x;x_1,x_2)))'|_{x=x_2} = 0.$$

В подразделе 3.1.2 формулируется и доказывается основной результат третьей главы.

Теорема 3.2 [6-А]. *Пусть существуют такие числа* $M > 0$ *и* $0 < \varepsilon < 1$, *что для всех* $x \in \mathbb{R}$ *выполнено неравенство*

$$u_0(x) \leq \varphi^{-1}(M + (1-\varepsilon)\varphi(u_{st}(x;x_1,x_2)))$$

с некоторой функцией $u_{st}(x;x_1,x_2)$, *удовлетворяющей условиям Теоремы 3.1. Тогда существует конечное значение* t_0 *такое, что минимальное обобщенное решение задачи Коши (23), (6)* $u(x,t) = 0$ *при* $(x,t) \in [x_1,x_2] \times [t_0,+\infty)$.

В подразделе 3.1.3 рассмотрены некоторые примеры. В частности, показано, что для определенных уравнений вида (23) с помощью Теоремы 3.2 можно получить условия на рост начальной функции на бесконечности, гарантирующие обращение в нуль решения в каждой точке $x \in \mathbb{R}$.

Целью *четвертой главы* является доказательство однозначной разрешимости задачи Коши для полулинейного параболического уравнения высокого порядка

$$u_t + Au \equiv u_t + \sum_{i=1}^{m}(-1)^i a_i D^{2i}u + \sum_{j=1}^{m} b_j D^{2j-1}u + cu + d(x,t)|u|^\alpha u = f(x,t) \quad (25)$$

в области $S = \mathbb{R} \times (0,+\infty)$ с начальными данными

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \quad (26)$$

где $m \geq 1$, $D = \partial/\partial x$, $S = \mathbb{R} \times (0,\infty)$, a_i, b_i $(i = 1,...,m)$, c и α – постоянные, $a_m > 0$, $\alpha > 0$, $d(x,t) \in L^\infty_{loc}(\bar{S})$, $d(x,t) \geq 0$, $f(x,t) \in L^2_{loc}(\bar{S})$, $u_0(x) \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$. На поведение u_0 при $|x| \to \infty$ не накладывается никаких ограничений. Обозначим $\Omega(j) = (-j,j)$, $Q(j) = \Omega(j) \times (0,T)$, $S_T = \mathbb{R} \times (0,T)$, $j > 0$, $T > 0$. Предполагается, что $d(x,t)$ – функция, положительная в S_T вне некоторого множества $Q(r_0)$ и такая, что

$$\iint_{Q(r)\setminus Q(r_0)} |d(x,t)|^{-2/\alpha}\,dxdt \le Cr^s, \quad r > r_0,$$

где r_0, C и s — произвольные положительные постоянные, которые могут зависеть только от T. Отсюда следует, что коэффициент $d(x,t)$ может убывать произвольным степенным образом при $|x| \to \infty$.

Пусть $W_p^l(\Omega)$ — соболевское пространство функций, локально суммируемых на множестве Ω со степенью p вместе со своими обобщенными производными до порядка l включительно. Как обычно, через $H^l(\Omega)$ обозначается пространство $W_2^l(\Omega)$.

Положим $Q_T = \Omega \times (0,T)$, где Ω — произвольный ограниченный интервал, $T > 0$. Пусть $L_d^\beta(Q_T)$ — весовое лебегово пространство, норма функции в котором определяется равенством

$$||v||_{\beta,d} = \left(\iint_{Q_T} d(x,t)|v|^\beta dxdt\right)^{1/\beta}.$$

Через $W(\Omega,T)$ обозначим пространство функций $v(x,t)$, обладающих следующими свойствами

$$\begin{gathered} v \in L^2(0,T;H^m(\Omega)) \cap L_d^{\alpha+2}(Q_T), \\ v_t \in L^2(0,T;H^{-m}(\Omega)) \oplus L^{(\alpha+2)/(\alpha+1)}(Q_T). \end{gathered} \tag{27}$$

Согласно теореме вложения Соболева (см. [7]) пространство $H^m(\Omega)$ компактно вкладывается в $L^2(\Omega)$. Заметим также, что оператор $\mathcal{A}$, определенный в (25), ограничен:

$$L^2(0,T;H^m(\Omega)) \cap L_d^{\alpha+2}(Q_T) \to L^2(0,T;H^{-m}(\Omega)) \oplus L^{(\alpha+2)/(\alpha+1)}(Q_T).$$

Известно (см. [8]), что из (27) следует $v \in C([0,T];L^2(\Omega))$. Следовательно, функции из $W(\Omega,T)$ естественным образом принимают свои начальные значения.

Определение 3. *Функция $u(x,t)$ называется обобщенным решением задачи Коши (25), (26) в S, если для любого $T > 0$ и произвольного ограниченного интервала $\Omega \subset \mathbb{R}$ $u(x,t) \in W(\Omega,T)$, справедливо интегральное тождество*

[7]Бесов, О.В. Интегральные представления функций и теоремы вложения / О.В. Бесов, В.П. Ильин, С.М. Никольский. – М.: Наука, 1996. – 480 с.

[8]Лионс, Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1972. – 587 с.

$$\iint_{Q_T}\left[u_t\varphi+\sum_{i=1}^{m}a_iD^iuD^i\varphi+\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}b_jD^juD^{j-1}\varphi+\right.$$

$$\left.+cu\varphi+d|u|^{\alpha}u\varphi-f\varphi\right]dxdt=0$$

для всех $\varphi(x,t)\in L^2(0,T;\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega))\cap L^{\alpha+2}(Q_T)$, *и выполнено условие* (26).

Существование и единственность глобального обобщенного решения задачи (25), (26) устанавливается без каких-либо ограничений на рост начальных данных и обобщенного решения на бесконечности.

Теорема 4.1 [3-А]. *В* S *существует единственное обобщенное решение задачи Коши (25), (26).*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

В работе проведено исследование неограниченных решений квазилинейных параболических уравнений. Получены следующие основные результаты:

1. Для уравнения диффузии-конвекции-абсорбции описаны классы существования и единственности обобщенных решений задачи Коши ([1-А, 4-А, 8-А]).

2. Найдены ограничения на рост начальной функции, при выполнении которых обобщенное решение задачи Коши для уравнения диффузии-конвекции-абсорбции и для широкого класса уравнений диффузии-абсорбции обращается в нуль в каждой точке некоторой области пространства за конечное время ([5-А, 6-А, 7-А, 11-А, 12-А, 14-А]).

3. Для некоторых нелинейных параболических уравнений как второго, так и высокого порядков установлена однозначная разрешимость задачи Коши без каких-либо предположений о росте начальной функции и обобщенного решения на бесконечности ([2-А, 3-А, 9-А, 10-А, 13-А]).

Рекомендации по практическому использованию результатов

Диссертация относится к области фундаментальных исследований и носит в основном теоретический характер. Полученные результаты могут найти применение в теории фильтрации, магнитной гидродинамике, теории теплопроводности, миграции популяций и в многих других областях естествознания.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в научных журналах

1-А Прохожий, С.А. О поведении на бесконечности решений некоторых нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений / С.А. Прохожий // Вестник ВГУ. – 1999. – №4(14). – С.83–90.

2-А Прохожий, С.А. Об однозначной разрешимости задачи Коши для уравнения фильтрации с конвекцией и сильным поглощением / С.А. Прохожий // Вестник ВГУ. – 2002. – №1(23). – С. 88–94.

3-А Gladkov, A.L. Cauchy problem for higher-order parabolic equations with arbitrary growing at infinity initial data / A.L. Gladkov, M. Guedda, S.A. Prohozhii // Nonlinear analysis and applications: to V. Lakshmikantham on his 80th birthday. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2003. – Vol. 1. – P. 563–576.

4-А Прохожий, С.А. Об однозначной разрешимости задачи Коши для уравнения диффузии с конвекцией и поглощением / С.А. Прохожий // Вестник ВГУ. – 2004. – №2(32). – С. 84–91.

5-А Gladkov, A.L. Vanishing of solutions of diffusion equation with convection and absorption / A.L. Gladkov, S.A. Prokhozhy // Electronic Journal of Differential Equations – 2005. – V. 2005, №113. – P.1–14.

6-А Прохожий, С.А. Об обращении в нуль решений квазилинейных параболических уравнений / С.А. Прохожий // Дифф. уравнения. – 2006. – Т.42, №10. – С. 1389–1396.

Статьи в сборниках материалов научных конференций

7-А Прохожий, С.А. О занулении решений задачи Коши для некоторых нелинейных параболических уравнений / С.А. Прохожий // Итоги НИР –

2002. VII (52) научная конференция студентов, магистрантов и аспирантов: Витебск, 22–23 октября 2002 г. Сб. ст. / Витебский гос. ун-т; редкол.: Г.И. Михасев [и др.]. – Витебск, 2002. – С. 230–231.

Тезисы докладов

8-А Прохожий, С.А. О поведении на бесконечности стационарных решений некоторого нелинейного вырождающегося параболического уравнения / С.А. Прохожий // VIII Белорусская Международная математическая конференция: Тез. докл. междунар. конф., Минск, 19–24 июня 2000 г.: в 3ч. / Институт Математики НАН РБ; редкол.: Н.А. Изобов [и др.]. – Минск, 2000. – Ч. 1. – С. 186.

9-А Прохожий, С.А. О разрешимости задачи Коши с произвольно растущей на бесконечности начальной функцией для квазинейных параболических уравнений с конвективным переносом и сильным поглощением / С.А. Прохожий // Еругинские чтения VII: Тез. докл. междунар. мат. конференции, Гродно, 28–30 мая 2001 г. / Гродненский гос. ун-т; редкол.: И.П. Мартынов [и др.]. – Гродно, 2001. – С. 50–51.

10-А Прохожий, С.А. Об однозначной разрешимости задачи Коши для нелинейного уравнения фильтрации с сильным поглощением и переменным коэффициентом / С.А. Прохожий // Еругинские чтения – VIII: Тез. докл. междунар. мат. конференции, Брест, 20–23 мая 2002 г. / Брестский гос. ун-т; редкол.: И.В. Гайшун [и др.]. – Брест, 2002. – С. 148–149.

11-А Прохожий, С.А. Об обращении в нуль решений задачи Коши для нелинейного параболического уравнения / С.А. Прохожий // Еругинские чтения – IX: Тез. докл. междунар. мат. конф., Витебск, 20–22 мая 2003 г. / Витебский гос. ун-т; редкол.: И.В. Гайшун [и др.]. – Витебск, 2003. – С. 158–159.

12-А Прохожий, С.А. Об обращении в нуль решений квазилинейных параболических уравнений / С.А. Прохожий // IX Белорусская Международная математическая конференция: Тез. докл. междунар. конф., Гродно, 3–6 ноября 2004 г.: в 3ч. / Гродненский гос. ун-т; редкол.: Н.А. Изобов [и др.]. – Гродно, 2004. – Ч. 1. – С. 204–206.

13-А Прохожий, С.А. Задача Коши для нелинейного параболического уравнения со степенными нелинейностями / С.А. Прохожий // Еругинские

чтения – X: Тез. докл. междунар. мат. конф., Могилев, 24–26 мая 2005 г. / Могилевский гос. ун-т; редкол.: В.В. Амелькин [и др.]. – Могилев, 2005. – С. 170–171.

14-А Прохожий, С.А. Задача Коши для квазилинейных параболических уравнений / С.А. Прохожий // Еругинские чтения – XI: Тез. докл. междунар. мат. конф., Гомель, 24–26 мая 2006 г. / Гомельский гос. ун-т; редкол.: И.В. Гайшун [и др.]. – Гомель, 2006. – С. 109–110.

РЕЗЮМЕ

Прохожий Сергей Александрович

О растущих на бесконечности решениях нелинейных параболических уравнений

Ключевые слова: квазилинейное параболическое уравнение, полулинейное параболическое уравнение высокого порядка, задача Коши, обобщенное решение, существование и единственность, обращение в нуль решений.

Объектом исследования являются неограниченные обобщенные решения задачи Коши для квазилинейных параболических уравнений. Предмет исследования — условия существования, единственности и обращения в нуль этих решений.

Основной целью диссертации является получение условий существования и единственности, а также обращения в нуль обобщенных решений задачи Коши для различных квазилинейных параболических уравнений. Для исследований использовались методы параболической регуляризации, получения априорных оценок, монотонности дифференциальных операторов, построения суб-, супер- и точных решений, исследования обыкновенных дифференциальных уравнений, принципы максимума и Хольмгрена, а также ряд других методов.

Для уравнения диффузии-конвекции-абсорбции описаны классы существования и единственности обобщенных решений задачи Коши. Найдены ограничения на рост начальной функции, при выполнении которых обобщенное решение задачи Коши для уравнения диффузии-конвекции-абсорбции и для широкого класса уравнений диффузии-абсорбции обращается в нуль в каждой точке некоторой области пространства за конечное время. Для некоторых параболических уравнений как второго, так и высокого порядков установлена однозначная разрешимость задачи Коши без каких-либо предположений о росте начальной функции и обобщенного решения на бесконечности.

Все результаты диссертации являются новыми. Диссертация относится к области фундаментальных исследований и носит в основном теоретический характер. Полученные результаты могут найти применение в теории фильтрации, магнитной гидродинамике, теории теплопроводности, миграции популяций и в многих других областях естествознания.

РЭЗЮМЭ

Прахожы Сяргей Аляксандравіч

Аб растучых на бясконцасці рашэннях нелінейных парабалічных раўнанняў

Ключавыя словы: квазілінейнае парабалічнае раўнанне, паўлінейнае парабалічнае раўнанне высокага парадку, задача Кашы, абагульненае рашэнне, існаванне і адзінасць, зануленне рашэнняў.

Аб'ектам даследвання з'яўляюцца неабмежаваныя абагульненыя рашэнні задачы Кашы для квазілінейных парабалічных раўнанняў. Прадмет даследвання — умовы існавання, адзінасці і занулення гэтых рашэнняў.

Асноўнай мэтай дысертацыі з'яўляецца атрыманне ўмоў існавання і адзінасці, а таксама занулення абагульненых рашэнняў задачы Кашы для розных квазілінейных парабалічных раўнанняў. Для даследванняў выкарыстоўваліся метады парабалічнай рэгулярызацыі, атрымання апрыёрных ацэнак, манатоннасці дыфферэнцыяльных аператараў, пабудавання суб-, супер- і дакладных рашэнняў, даследвання звычайных дыферэнцыяльных раўнанняў, прынцыпы максімума і Хальмгрэна, а таксама шэраг іншых метадаў.

Для раўнання дыфузіі-канвекцыі-абсорбцыі апісаны класы існавання і адзінасці абагульненых рашэнняў задачы Кашы. Знойдзены абмежаванні на рост пачатковай функцыі, пры выкананні якіх абагульненае рашэнне задачы Кашы для раўнання дыфузіі-канвекцыі-абсорбцыі і для шырокага класа раўнанняў дыфузіі-абсорбцыі зануляецца ў кожным пункце некаторай вобласці прасторы за канечны час. Для некаторых парабалічных раўнанняў як другога, так і высокага парадкаў устаноўлена адназначная вырашальнасць задачы Кашы без якіх-небудзь абмежаванняў на рост пачатковай функцыі і абагульненага рашэння на бясконцасці.

Усе вынікі дысертацыі з'яўляюцца новымі. Дысертацыя адносіцца да вобласці фундаментальных даследванняў і носіць у асноўным тэарэтычны характар. Атрыманныя вынікі могуць знайсці скарыстанне ў тэорыі фільтрацыі, магнітнай гідрадынаміцы, тэорыі цеплаправоднасці, міграцыі папуляцый і ў шматлікіх іншых галінах прыродазнаўства.

SUMMARY

Prokhozhy Sergey Alexandrovich

Growing at infinity solutions of nonlinear parabolic equations

Keywords: quasilinear parabolic equation, semilinear higher-order parabolic equation, Cauchy problem, generalized solution, existence and uniqueness, vanishing of solutions.

The object of investigation is unbounded generalized solutions of the Cauchy problem for quasilinear parabolic equations. The subject of investigation is conditions of existence, uniqueness and vanishing of these solutions.

Main purpose of the thesis is to obtain conditions of existence, uniqueness and vanishing of generalized solutions of the Cauchy problem for some quasilinear parabolic equations. The following methods were applied: the method of parabolic regularization, obtaining of apriori estimates, monotonicity of differential operators, construction of sub-, super- and exact solutions, ordinary differential equations investigation, maximum principle, Holmgren principle, and some others.

For diffusion-convection-absorption equation the classes of existence and uniqueness of generalized solutions of the Cauchy problem are described. Growth conditions on the initial data when generalized solution of the Cauchy problem for the diffusion-convection-absorption equation and for wide class of diffusion-absorption equations vanishes at the every point of some space domain in a finite time are found. For some two- and higher-order parabolic equations the unique solvability of solutions of the Cauchy problem is established without assumptions on the behaviour of initial data and solution at infinity.

All results in this thesis are new. The thesis has a theoretical direction mainly. The results may be applied in the filtration theory, magnetic hydrodynamics, theory of heat-conduction and population migration, and some others.