

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ**

На правах рукописи

**М И Х А С Е В**  
Геннадий Иванович

**ВОЛНОВЫЕ ПАКЕТЫ В ТОНКИХ ОБОЛОЧКАХ**

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

**А В Т О Р Е Ф Е Р А Т**  
диссертации на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГ – 1998**

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность.** Тонкостенные оболочечные конструкции, сочетающие в себе легкость и прочность, нашли широкое применение в авиационной и ракетно-космической технике, в судостроении и различных областях промышленности. Одной из важнейших задач на стадии проектирования таких конструкций является динамический расчет.

Необходимым элементом исследования динамики оболочек является определение собственных частот и форм малых колебаний, причем наибольший интерес для приложений представляют частоты из нижнего спектра. Использование в инженерной практике полимерных материалов делает обязательным учет вязкоупругих свойств при исследовании низкочастотных колебаний оболочек.

В случае параметрически возбуждаемых колебаний работоспособность оболочки зависит от соотношения параметров задачи, при которых она динамически устойчива. Поэтому для оболочек, испытывающих периодические (силовые, температурные и др.) воздействия, во многих случаях определяющим является расчет на параметрическую устойчивость.

Развитие современной техники приводит к необходимости изучения нестационарных динамических процессов в тонкостенных конструкциях. Такие процессы возникают при взрывах, ударах, кратковременных сосредоточенных воздействиях, некоторых технологических операциях и в ряде других случаев.

В диссертации рассматриваются три вида колебаний – собственные, параметрические и неустановившиеся (нестационарные волновые процессы), характерные предполагаемой локализацией волн вблизи фиксированных или подвижных линий и точек на поверхности оболочки. В дальнейшем такие формы движения называются волновыми пакетами (ВП).

Наибольшее внимание в диссертации уделяется исследованию нестационарных волновых форм движения тонких упругих оболочек в виде бегущих ВП. Неустановившиеся, переходные волновые процессы относятся к наименее изученным в теории динамики тонких оболочек. Хотя за последние два десятилетия появился ряд монографий и обзоров, полностью или частично посвященных исследованию нестационарных волн (Н.А. Алумяз, А.С. Вольмир, Э.И. Григолюк, А.Г. Горш-

ков, Л.Ю. Коссович, Е.Н. Мнев, К.К. Нигул, А.К. Перцев, Д.Г. Платонов, Л.И. Слепян и др.), в этой области динамики тонкостенных конструкций создание теории еще далеко от своего завершения. Объясняется это отчасти тем, что нестационарные задачи стали актуальными лишь сравнительно недавно. Другая причина состоит в их математической сложности. Для решения таких задач обычно применяются приближенные методы расчета: численные, вариационные, асимптотические, реже – если параметры оболочки постоянны – какой-либо из методов интегральных преобразований.

При исследовании неустановившихся процессов возможны два подхода. Первый состоит в том, что решается неоднородная система дифференциальных уравнений, у которых правые части – импульсные или ступенчатообразные функции времени. Второй подход заключается в задании ненулевых начальных перемещений и (или) скоростей. В диссертации реализуется вторая модель, при этом в качестве начальных условий рассматриваются ВП – быстро осциллирующие функции, экспоненциально убывающие вдаль от некоторых фиксированных линий или точек на поверхности оболочки. Характер переходных волновых процессов, обусловленных заданием начальных ВП, во многом зависит от целого ряда факторов: наличия косых краев, переменных кривизн, разностенности, разномодульности, неоднородности нагружения и др. Поэтому актуальной задачей еще на стадии проектирования оболочки является определение, с учетом выше перечисленных факторов, таких динамических характеристик как групповая скорость, частота бегущих вибраций и степень их локализации, амплитуда волн, а также выявление наиболее слабых и опасных областей, где возможны локализация весьма нежелательных изгибных форм колебаний и концентрация напряжений.

**Целью работы** является:

1) определение приближенных асимптотических формул для наименьших частот и соответствующих локализованных форм свободных колебаний вязкоупругих оболочек нулевой кривизны с переменными параметрами;

2) модификация известных методов для исследования локальных параметрических колебаний цилиндрических оболочек;

3) разработка новых асимптотических методов и алгоритмов исследования нестационарных локализованных волновых процессов в тонких оболочках;

4) исследование динамических характеристик нестационарных ВП с учетом ряда возмущающих факторов: непостоянства геометриче-

ских и физических параметров оболочки, а также неоднородности статического и динамического нагружения.

**Научная новизна.** Получены новые простые приближенные формулы для собственных частот из нижнего спектра свободных колебаний вязкоупругих оболочек нулевой кривизны с переменными параметрами.

Для решения задач параметрических колебаний упругих цилиндрических оболочек с переменными параметрами разработаны новые модификации асимптотических методов, ранее используемых для исследования свободных локальных колебаний.

Разработан асимптотический метод построения решений начальных и начально-краевых задач при сложных границах для сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений в частных производных в виде "бегущих ВП". С использованием данного метода впервые:

- построено решение полубезмоментных уравнений движения некруговой цилиндрической оболочки с косо-срезанными краями в виде бегущих в окружном направлении ВП изгибно-плоскостных волн;
- обнаружены эффект отражения пакетов изгибно-плоскостных волн от некоторых образующих в цилиндрической оболочке с переменными параметрами, фокусировка бегущих ВП, сопровождающаяся сильным ростом амплитуд, а также локализация нестационарных волновых процессов вблизи "наиболее слабых" образующих;
- получены асимптотические решения уравнений движения бесконечных оболочек вращения, а также бесконечных цилиндрических оболочек с переменными параметрами в виде суперпозиции бегущих в осевом направлении пакетов изгибных, продольных и крутильных волн;
- построено формальное асимптотическое решение уравнений движения оболочек произвольного профиля с переменными толщиной и коэффициентами упругости в виде бегущих двумерных ВП;
- исследовано влияние переменных геометрических и физических параметров оболочки, а также неоднородного статического и динамического давлений на динамические характеристики бегущих ВП.

**Достоверность полученных результатов.** Достоверность полученных в работе результатов подтверждается:

- 1) сравнениями в некоторых частных случаях с известным точным решением или приближенными результатами, найденными другими хорошо апробированными асимптотическими методами;

2) близостью последовательных приближений, найденных с помощью асимптотических методов.

**Теоретическая и практическая значимость.** Предложенные приближенные методы исследования переходных волновых процессов в тонких оболочках отличаются эффективностью и простотой, ибо сводятся к необходимости интегрирования хорошо изученных системы Гамильтона, уравнения Риккати и амплитудного уравнения. В ряде случаев найдены явные приближенные формулы для частот, групповых скоростей, амплитуд, получены условия отражения бегущих ВП, условия локализации колебаний, которые могут быть использованы на стадии проектирования оболочки, при решении задачи виброзащиты конструкции. Результаты исследования о влиянии медленно изменяющегося во времени внешнего или внутреннего давлений на характер неустановившихся локализованных вибраций в цилиндрической оболочке могут быть полезны при проектировании тонкостенных подводных объектов. Полученные асимптотические решения могут быть использованы в качестве исходного приближения для асимптотического и численного решений нелинейных задач динамики тонких оболочек.

Частично полученные в диссертации результаты используются в учебном процессе в Витебском государственном университете, а также в Белорусской государственной политехнической академии при чтении спецкурсов, подготовке курсовых и дипломных работ и кандидатских диссертаций.

**Связь работы с научными программами, темами.** Научная тематика диссертации является составной частью бюджетных тем математического факультета Витебского гос. университета “Качественные вопросы теории дифференциальных систем с распределенными параметрами” (Рег. № 01.09.10017666). Частично диссертационная работа выполнена в рамках темы ГБ Т 13-133 Фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь.

**Апробация.** Результаты диссертации регулярно обсуждались на семинарах кафедры теоретической и прикладной механики Санкт - Петербургского государственного университета, а также кафедры теоретической механики Белорусской государственной политехнической академии (Минск).

Основные результаты диссертации докладывались на Международной конференции “Асимптотические методы в механике” (Санкт - Петербург, 1994), на Белорусском конгрессе по теоретической и прикладной механике (Минск, 1995), на семинаре в Институте механики

Магдебургского университета (Магдебург, 1995), на XIX Международном конгрессе по теоретической и прикладной механике (Киото, 1996, стендовый доклад), на международном семинаре "Дни дифракций-97" (Санкт - Петербург, 1997), на семинаре Санкт-Петербургского отделения математического института им. В.А. Стеклова (1998).

**Структура и объем.** Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы, включающего 154 наименования, и приложения. Работа содержит 238 страниц, 39 рисунков и 2 таблицы.

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1 – 30].

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** отмечается актуальность проблемы, указывается цель исследования, дается краткая историческая справка, а также приведен краткий обзор содержания работы.

**В первой главе** рассматриваются линейные задачи о свободных низкочастотных колебаниях вязкоупругих некруговых конических и цилиндрических оболочек с косыми краями. В случае упругих оболочек данные задачи достаточно хорошо изучены (П.Е. Товстик, С.Б. Филиппов). Их особенностью является возможность сильной локализации собственных форм вблизи некоторых образующих  $\varphi = \varphi_0$ , называемых наиболее слабыми. Данная глава частично носит вводный характер, ибо посвящена изложению метода П.Е. Товстика построения локализованных собственных форм применительно к вязкоупругой модели.

В параграфе 1.1 выводятся полубезмоментные интегродифференциальные уравнения, описывающие изгибно-плоскостные колебания тонких вязкоупругих оболочек. В основу уравнений положены гипотезы Кирхгофа-Лява и уравнения состояния типа Балабуха-Новожилова, полученные В.И. Матяшом для вязкоупругих оболочек. Новые уравнения получаются из известных уравнений пологих оболочек (А.Л. Гольденвейзер, В.В. Новожилов) формальной заменой

нормального прогиба  $W$  на его образ  $J(W) = W - \int_0^t K(t-t') W(t') dt'$ ,

где  $K(t)$  – функция скорости релаксации материала. Рассматриваются четыре варианта граничных условий: свободный край, шарнирное опирание, слабое и жесткое закрепления.

В п. 1.2 решение выведенных интегро-дифференциальных уравнений находится в виде

$$W = w_{\Sigma}(s, \xi, \epsilon) \exp\left\{i\left[\omega t + \epsilon^{-1/2} p \xi + \frac{1}{2} b \xi^2\right]\right\}, \quad \xi = \epsilon^{1/2}(\varphi - \varphi_0), \quad \text{Im } b > 0, \quad (1)$$

$$w_{\Sigma} = \sum_{j=0}^{+\infty} \epsilon^{j/2} w_j(s, \xi), \quad \omega = \omega_0 + \epsilon \omega_1 + \epsilon^2 \omega_2 + \dots,$$

где  $s, \varphi$  – продольная и окружная координаты,  $\epsilon^8 = h^2/[12R^2(1 - \nu^2)] \ll 1$ ,  $\nu, h, R$  – коэффициент Пуассона, толщина и характерный размер оболочки,  $\omega$  – безразмерная комплексная частота колебаний, такая что  $\text{Im } \omega > 0$ . Функции (1) определяют собственную форму низкочастотных колебаний в виде квазистационарного ВП с центром на слабой образующей  $\varphi = \varphi_0$ , у которого амплитуды – экспоненциально убывающие функции. При  $K \equiv 0$  получаем  $\text{Im } \omega = 0$  и форма (1) переходит в стационарный ВП, построенный П.Е. Товстиком. Содержащиеся в (1) неизвестные параметры и функции, а также слабая образующая находятся из последовательности краевых задач, возникающих после подстановки анзаца (1) в разрешающие уравнения и соответствующие граничные условия. Для частоты  $\omega$  получаем:

$$\omega = \omega_{\epsilon} C_{\omega,0} \left\{ 1 + \epsilon(m + \frac{1}{2}) \lambda_1 \omega_{\epsilon}^{-2} C_{\omega,1} \right\} + O(\epsilon^2), \quad (2)$$

где  $\omega_{\epsilon}$  – наименьшая частота колебаний упругой оболочки ( $K \equiv 0$ ) с числом  $n$  полуволн вдоль образующей и постоянными геометрическими параметрами, вычисленными на образующей  $\varphi = \varphi_0$ ,  $\lambda_1$  – величина, учитывающая геометрическую неоднородность оболочки (овальность поперечного сечения, наличие косых краев), а  $C_{\omega,0}, C_{\omega,1}$  – комплексные коэффициенты, учитывающие вязкость и зависящие от вида ядра  $K(t)$ . В работе построены графики величин  $\text{Re } C_{\omega,0}, \text{Im } C_{\omega,0}, \text{Re } C_{\omega,1}, \text{Im } C_{\omega,1}$  как функций частоты  $\omega_{\epsilon}$  для экспоненциального ядра и ядра с особенностью типа Ржаницына. Из графиков следуют выводы: 1) влияние ползучести более всего сказывается на нижнем спектре колебаний; 2) вязкоупругая оболочка более чувствительна к наличию слабой образующей, чем упругая.

**Во второй главе** рассматриваются линейные задачи о параметрических колебаниях тонких упругих цилиндрических оболочек. В случае круговой оболочки и нагрузок, не зависящих от окружной координаты, параметрические колебания сопровождаются образованием

волн, покрывающих всю поверхность оболочки. Такие задачи рассматривались в работах В.В. Болотина, А. Вийярагхавана и Р.М. Ивэн-Ивановского, Х. Грюндмана, А. Корнекки, А. Н. Маркова, О.Д. Ониашвили, Дж. С. Яо и др. С использованием одного из вариационных методов исходные уравнения обычно сводятся к уравнениям Матье или Матье-Хилла.

В диссертации рассматривается менее изученный случай, характерный локализацией форм параметрических колебаний вблизи наиболее слабой образующей  $\varphi = \varphi_0$ . Наличие последней может быть вызвано эксцентриситетом поперечного сечения или (и) неоднородностью статической составляющей нагрузки. Рассматриваются две задачи.

Первая (п. 2.1) связана с исследованием термопараметрического резонанса некругового цилиндра в нестационарном температурном поле. В качестве исходных используются уравнения полубезмоментной теории тонких оболочек (выведенные Г.А. Кильчинской), учитывающие линейную зависимость модуля Юнга от температуры. Рассматривается случай слабого параметрического резонанса, когда амплитуда периодической составляющей модуля Юнга мала по сравнению со статической составляющей, а частота возбуждения близка к удвоенной частоте собственных колебаний. С использованием метода многих масштабов относительно окружной и временной координат формы параметрических колебаний строятся в виде функций, экспоненциально убывающих вдаль от слабой образующей.

Во второй задаче (п. 2.2) исследуются параметрические колебания некруговой цилиндрической оболочки под действием статической и периодической осевых сил, неравномерно распределенных по контуру края. Рассмотрим эту задачу подробнее. Закон распределения осевых сил примем в виде

$$T_1^* = \mu^2 E h F(\varphi, t), \quad F(\varphi, t) = F_0(\varphi) + \mu F_1(\varphi) \cos \Omega t,$$

где  $\mu^4 = h^2 / [12 R^2 (1 - \nu^2)]$  – малый параметр,  $\Omega = \Omega^* t_c$  – безразмерная частота периодической составляющей нагрузки,  $t_c = \sqrt{\rho R^2 / E}$  – характерное время,  $E$  – модуль Юнга,  $\rho$  – плотность материала,  $\varphi$  – окружная координата. В предположении о малости показателей изменчивости и динамичности функции  $F(\varphi, t)$  в качестве исходных рассмотрим уравнения В.В. Болотина, описывающие движение оболочки вблизи динамического безмоментного напряженного деформированного состояния (НДС):



$$\mu^4 \Delta^2 W - \mu^2 k(\varphi) \partial^2 \Phi / \partial s^2 + \mu^2 F(\varphi, t) \partial^2 W / \partial s^2 + \partial^2 W / \partial t^2 = 0, \quad (3)$$

$$\mu^2 \Delta^2 \Phi - k(\varphi) \partial^2 W / \partial s^2 = 0.$$

Здесь  $W$ ,  $\Phi$  – безразмерные нормальный прогиб и функция напряжений,  $\Delta$  – оператор Лапласа в криволинейной ортогональной системе координат  $\varphi$ ,  $s$  ( $s$  – осевая координата),  $k(\varphi)$  – переменная кривизна оболочки.

Пусть края  $s_1 = 0$ ,  $s_2 = l$  оболочки шарнирно оперты:

$$W = \partial^2 W / \partial s^2 = \Phi = \partial^2 \Phi / \partial s^2 = 0. \quad (4)$$

После разделения переменных

$$W = w_n(\varphi, t) \sin(\mu^{-1} q_n s), \quad \Phi = \Phi_n(\varphi, t) \sin(\mu^{-1} q_n s), \quad (5)$$

где  $q_n = \mu n \pi l^{-1}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , система (3) сводится к дифференциальным уравнениям относительно  $w_n(\varphi, t)$ ,  $\Phi_n(\varphi, t)$  (далее индекс  $n$  у  $w_n$ ,  $\Phi_n$ ,  $q_n$  опускается). Предполагая локальный характер параметрических колебаний (по крайней мере на некотором начальном отрезке времени), решение полученных уравнений находится в виде квазистационарного ВП с центром на наиболее слабой образующей  $\varphi = \varphi_0$ :

$$w(\varphi, t, \mu) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^{j/2} w_j(\xi; t_0, t_1) \exp\{i[\mu^{-1/2} p \xi + 1/2 b \xi^2]\}. \quad (6)$$

Здесь  $\xi = \mu^{-1/2}(\varphi - \varphi_0)$ ,  $t_0 = t$ ,  $t_1 = \mu t$ ,  $\text{Im } b > 0$ ,  $w_j$  – полиномы по  $\xi$ , а  $t_1$  – “медленное” время. Функция  $\Phi$  ищется в том же виде. Анзац (6) отличается от разложения (1) зависимостью амплитуд от “медленного” времени.

Неизвестные  $w_j$  определяются из последовательности дифференциальных уравнений. Из нулевого приближения находим

$$w_0 = w_{0,c}(\xi, t_1) \cos \omega_0 t_0 + w_{0,s}(\xi, t_1) \sin \omega_0 t_0, \quad (7)$$

$$\omega_0 = H(p, q, \varphi_0) = \sqrt{(p^2 + q^2)^2 + \frac{k^2(\varphi_0)q^4}{(p^2 + q^2)^2} + F_0(\varphi_0)q^2}. \quad (8)$$

В первом приближении имеем неоднородное дифференциальное уравнение для функции  $w_1$ , правая часть которого, при условии (8), порождает вековые члены относительно  $t_0$ . Условия их отсутствия эквивалентны необходимым условиям минимума функции (8), как функ-

ции переменных  $p, \varphi_0$  при фиксированном  $q$ . При этом рассматриваются два случая: а)  $q < 1$ , б)  $q > 1$ . В дальнейшем  $p, \varphi_0$  — величины, доставляющие минимум функции (8), равный  $\omega_0$ . Отсюда, в частности, следует, что если  $k=1$ , а  $F_0(\varphi)$  — функция, то слабая образующая  $\varphi = \varphi_0$  находится из условий  $F_0'(\varphi_0) = 0$ ,  $F_0''(\varphi_0) < 0$ .

Пусть  $\Omega = 2\omega_0 + \mu\sigma$ , где  $\sigma \sim 1$  при  $\mu \rightarrow 0$ . Из условия отсутствия вковых членов в решении неоднородного уравнения, возникающего во втором приближении, находим параметр  $b$  ( $\text{Im} b > 0$ ), как решение квадратного уравнения

$$b^2 H_{pp} + 2b H_{p\varphi} + H_{\varphi\varphi} = 0, \quad (9)$$

а также вектор

$$\mathbf{X} = \mathfrak{H}_m(\varphi\xi) \mathbf{Y}_m^*(t_1). \quad (10)$$

Здесь

$$\mathbf{X} = (w_{0,s}, w_{0,c})^T, \quad \varphi = (H_{\varphi\varphi}/H_{pp} - H_{p\varphi}^2/H_{pp}^2)^{1/4}, \quad \mathbf{Y}_m^* = (S_m^*(t_1), C_m^*(t_1))^T,$$

$\mathfrak{H}_m(x)$  — полином Эрмита степени  $m$ , индексы  $p, \varphi$  означают дифференцирование по соответствующим переменным, а вектор  $\mathbf{Y}_m^*$  находится из однородной системы дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{Y}}_m^* - \mathbf{A}_m(t_1) \mathbf{Y}_m^* = 0 \quad (11)$$

с периодической матрицей

$$\mathbf{A}_m(t_1) = \begin{pmatrix} -a_1 \sin \sigma t_1 & a_1 \cos \sigma t_1 - a_{2,m} \\ a_1 \cos \sigma t_1 + a_{2,m} & a_1 \sin \sigma t_1 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

$$a_1 = \frac{1}{4} q^2 \omega_0^{-1} F_1, \quad a_{2,m} = -\frac{1}{4} i (1 + 2m) \omega_0^{-1} (b H_{pp} + H_{p\varphi}).$$

В случае  $F_1 = 0$   $m$ -я форма параметрических колебаний (6), (7), (10) переходит в  $m$ -ю форму собственных колебаний вблизи образующей  $\varphi = \varphi_0$  с частотой  $\omega = \omega_0 + \mu \omega_1^{(m)} + O(\mu^2)$ , где  $\omega_1^{(m)} = a_{2,m}$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$

При  $q \approx 1$  форма параметрических колебаний имеет вид, отличный от (6). Случай перестройки асимптотического решения для  $q \approx 1$  рассмотрен в п. 2.3.

Следует отметить, что все задачи о параметрической неустойчивости, рассмотренные в Гл. 2, сводятся к исследованию системы уравнений (11). На рис. 1 изображены области

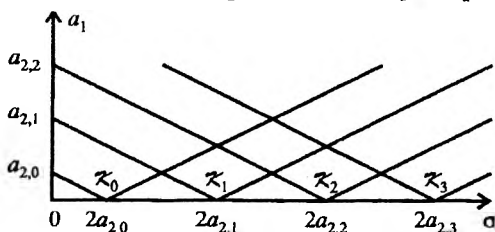


Рис. 1

неустойчивости  $\chi_m$  системы (11), удовлетворяющие неравенству  $-2(a_1 - a_{2,m}) \leq \sigma \leq 2(a_1 + a_{2,m})$ . При этом во всех задачах параметр  $a_1$  пропорционален интенсивности периодической составляющей нагрузки (или температуры),  $\sigma$  есть расстройка возмущающей частоты  $\Omega$  по отношению к частоте собственных колебаний  $\omega_0$  нулевого приближения, а  $a_{2,m} = \omega_1^{(m)}$  — поправка к частоте  $\omega_0$ , учитывающая наличие слабой образующей.

Таким образом, в случае неустойчивости системы (11)  $m$ -ая форма параметрических колебаний (6), (7), (10) представляет собой квазистационарный ВП с центром на наиболее слабой образующей, у которого амплитуды — неограниченно растущие функции медленного времени  $t_1$ .

**В третьей главе** исследуются нестационарные волны, бегущие в окружном направлении в цилиндрической оболочке конечной длины. Такого типа задачи, как правило, связаны с исследованием динамической реакции цилиндрической оболочки на импульсные или кратковременные динамические нагрузки, неравномерно распределенные в направлении дуги. Неустановившиеся колебания, распространяющиеся в окружном направлении, возникают также при взаимодействии оболочки с нестационарными волнами гидродинамического давления, при решении задач нестационарной дифракции волн на оболочке. Реже исследуются переходные процессы, обусловленные заданием начальных радиальных перемещений и скоростей, произвольно распределенных по дуге окружности. С современным состоянием вопроса по нестационарным задачам данного типа можно познакомиться по монографиям А.С. Вольмира, А.Н. Гузя и В.Д. Кубенко, Э.И. Григолюка и А.Г. Горшкова, Е.Н. Мневa, А.К. Псрцева и Э.Г. Платонова, У.К. Нигула, Рейсмана и др.

В общем случае, когда параметры оболочки переменны, перечисленные задачи являются достаточно сложными. В диссертации рассматриваются некруговые цилиндрические оболочки средней длины, у которых края – не обязательно плоские кривые. Оболочка может находиться под действием неоднородных и медленно изменяющихся динамических сил. Предлагается метод, позволяющий строить формальное асимптотическое решение уравнений движения в виде суперпозиции бегущих в окружном направлении пакетов изгибно-плоскостных волн.

Рассмотрим систему уравнений пологих оболочек в безразмерном виде

$$\varepsilon^4 \Delta^2 W + k(\varphi) \partial^2 \Phi / \partial s^2 + \varepsilon^2 \partial^2 W / \partial t^2 = 0, \quad \varepsilon^4 \Delta^2 \Phi - k(\varphi) \partial^2 W / \partial s^2 = 0. \quad (13)$$

Здесь  $\varepsilon$  – малый параметр, введенный в первой главе,  $t$  – безразмерное время, равное частному реального времени  $t^*$  и характерного времени  $t_c = \sqrt{\varepsilon^{-6} R^2 \rho E^{-1}}$ . Остальные обозначения остаются прежними.

На краях  $s = s_1(\varphi), s = s_2(\varphi)$  рассматривается одна из трех групп (или их сочетание) граничных условий – группа шарнирного опирания (шесть вариантов), группа жесткой заделки (шесть вариантов) и группа свободного края (два варианта). Для исследования основного динамического НДС оболочки на каждом краю следует удовлетворить главным условиям, не содержащим интегралов краевого эффекта. Вопрос о выделении таких условий обсуждался в монографиях А.Л. Гольденвейзера, В.В. Лидского, П.Е. Товстика, а также К. Ф. Черных и др. Здесь для определенности рассмотрим группу шарнирного опирания. С точностью до величин порядка  $\varepsilon^2$  эти условия имеют вид:

$$W = \Phi = 0 \quad \text{при} \quad s = s_i(\varphi). \quad (14)$$

Пусть при  $t = 0$  функция  $W$  удовлетворяет начальным условиям

$$W|_{t=0} = W_0(s, \varphi, \varepsilon) \exp[i\varepsilon^{-1} S_0(\varphi)], \quad \dot{W}|_{t=0} = i\varepsilon^{-1} V_0(s, \varphi, \varepsilon) \exp[i\varepsilon^{-1} S_0(\varphi)], \quad (15)$$

$$S_0(\varphi) = a_0 \varphi + \frac{1}{2} b_0 \varphi^2, \quad a_0 \neq 0, \quad \text{Im} b_0 > 0, \quad (16)$$

где  $W_0, V_0$  – комплексные, достаточное число раз дифференцируемые по  $\varphi$  и  $s$  функции, такие что  $\partial W_0 / \partial s, \partial V_0 / \partial s \sim 1$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . В силу последнего неравенства (16) вещественные и мнимые части функций (15) задают на поверхности оболочки пару ВП с центрами на образующей  $\varphi = 0$ . Задачи о параметрической неустойчивости цилиндрических

оболочек, рассмотренные в Гл.2, объясняют природу начальных ВП (15).

Обозначим через  $z^{(1)}(s), z^{(2)}(s), \dots$  бесконечную ортонормированную систему собственных функций, а через  $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots$  соответствующую им систему собственных чисел краевой задачи

$$d^4 z/ds^4 - \lambda z = 0, \quad z = 0, \quad d^2 z/ds^2 = 0 \quad \text{при } s = s_i. \quad (17)$$

В п. 3.1 рассматривается случай, когда края оболочки лежат в плоскостях, перпендикулярных образующей (здесь  $s_1 = 0, s_2 = l$ ). Пусть амплитуды  $W_0, V_0$  начального ВП удовлетворяют краевым условиям (17). Функции  $z^{(n)}(s)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) образуют полную систему. Тогда для любого  $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$  функции  $W_0, V_0$  допускают разложение по системе собственных функций  $z^{(n)}(s)$  в равномерно сходящиеся на отрезке  $0 \leq s \leq l$  ряды. В этом случае решение задачи (13)–(15) можно искать в виде

$$W(s, \varphi, t, \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} U^{(n)}(\varphi, t, \varepsilon) z^{(n)}(s). \quad (18)$$

$$U^{(n)} = u^{(n)}(\varphi, t, \varepsilon) \exp[i\varepsilon^{-1} S^{(n)}(\varphi, t)], \quad \text{Im} S^{(n)}(\varphi, t) > 0. \quad (19)$$

Функция  $\Phi$  ищется в том же виде. Неравенство в (19) гарантирует убывание амплитуды волн при удалении от некоторой образующей на поверхности оболочки. Решения типа (19) строились во многих задачах математической физики (В.М. Бабич, В.С. Булдырев и И.А. Молотков, А.П. Киселев, В.Ф. Лазуткин, В.П. Маслов, А.А. Соколов и И.М. Тернов, Швингер др.).

Подстановка (18), (19) в (13) приводит к канонической системе уравнений относительно  $S^{(n)}, u^{(n)}$  при фиксированном  $n = 1, 2, \dots$

$$S_t^{(n)} = \pm H^{(n)}(S_\varphi^{(n)}, \varphi), \quad u_t^{(n)} + \hat{\Pi}^\pm u^{(n)} = 0, \quad (20)$$

где

$$H^{(n)}(p, \varphi) = [p^4 + g^{(n)}(\varphi)p^{-4}]^{1/2} \quad (21)$$

– функция Гамильтона,  $g^{(n)} = \lambda^{(n)} k^2(\varphi)$ , а оператор  $\hat{\Pi}^\pm$  выражается через производные гамильтониана  $\pm H^{(n)}$  по  $p$  и  $\varphi$ .

Система (20) с соответствующими начальными условиями (которые получаются подстановкой соотношений (18), (19) в (15)) не допускает решения в явном виде. В работе используется метод В.П. Маслова, согласно которому приближенное решение канонической системы (20) строится лишь в некоторой малой окрестности множества  $\tilde{\Gamma}^{(n)} = \{(\varphi, t) \in R^2: \text{Im}S^{(n)}(\varphi, t) = 0\}$ , причем всюду вне  $\tilde{\Gamma}^{(n)}$  должно выполняться неравенство  $\text{Im}S^{(n)} > 0$ . Основные положения этого метода изложены в Приложении к диссертации.

Решение (18), (19) представляет собой суперпозицию  $n^{\pm}$ -ых ВП. Знаки  $\pm$  указывают на наличие двух ветвей решения (см. (20)), соответствующих пакетам, бегущим в противоположных направлениях. Однако разложение (18), (19) является непригодным в случае, когда края оболочки не лежат в плоскостях, перпендикулярных образующей.

В п. 3.2 предлагается новая конструкция бегущих ВП при  $s_1 = s_1(\varphi)$ ,  $s_2 = s_2(\varphi)$ . Теперь  $z^{(n)}(s, \varphi)$  и  $\lambda^{(n)}(s, \varphi)$  параметрически зависят от  $\varphi$ .

Принимая во внимание линейность исходных уравнений, решение начально-краевой задачи (13)-(15) будем искать в виде:

$$W(s, \varphi, t, \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} w^{(n)}(s, \varphi, t, \varepsilon), \quad \Phi(s, \varphi, t, \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(s, \varphi, t, \varepsilon), \quad (22)$$

где  $w^{(n)}, f^{(n)}$  – искомые функции, локализованные в момент времени  $0 \leq t \leq t' < +\infty$  в окрестности некоторой образующей  $\varphi = q^{(n)}(t)$ . Здесь  $q^{(n)}(t)$  – дважды дифференцируемые функции, такие что  $q^{(n)}(0) = 0$ . Пару функций  $w^{(n)}, f^{(n)}$  будем называть  $n$ -ым ВП с центром на линии  $\varphi = q^{(n)}(t)$ . Зафиксируем число  $n$  и исследуем динамику  $n$ -го ВП (в дальнейшем верхний индекс ( $n$ ) у всех функций опускается). Для этого перейдем в (13) к новой локальной системе координат по формуле  $\varphi = q(t) + \varepsilon^{1/2} \xi$ .

Формальное асимптотическое решение ищем в виде

$$w = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} w_j(s, \xi, t) \exp \left\{ i \varepsilon^{-1} \left[ \int_0^t \omega(\tau) d\tau + \varepsilon^{1/2} p(t) \xi + \frac{1}{2} \varepsilon b(t) \xi^2 \right] \right\}. \quad (23)$$

Функция  $f$  ищется в том же виде (23) с заменой  $w_j$  на  $f_j$ . Здесь  $\text{Im}b(t) > 0$  для любого  $0 \leq t \leq t' < +\infty$ ,  $\omega, p, b$  – дважды дифференцируе-

мые по  $t$  функции,  $w_j, f_j$  – полиномы по  $\xi$  с достаточно число раз дифференцируемыми по  $s$  и  $t$  комплексными коэффициентами.

Разложение (23) существенно отличается от решений (1) и (6), построенных в первых двух главах. Теперь (23) определяет нестационарный  $n$ -ый ВП с центром на линии  $\varphi = q(t)$ . Подстановка (23) в уравнения (13) и граничные условия приводит к последовательности красивых задач на “подвижной образующей”  $\varphi = q(t)$  относительно  $w_j$  ( $j = 0, 1, 2, \dots$ ).

Рассматривая краевую задачу в нулевом приближении, находим

$$w_0 = P_0(\xi, t) z[s, q(t)], \quad \omega(t) = \dot{q}(t)p(t) \mp H[p(t), q(t)]. \quad (24)$$

Здесь  $P_0(\xi, t)$  – неизвестный полином аргумента  $\xi$ , а гамильтониан  $H(p, q)$  имеет вид (21), где, однако,  $\lambda^{(n)} = \lambda(q)$ . В случае шарнирного опирания  $z^{(n)} = z[s, q(t)] = \sin \pi n l^{-1}[q(t)]\{s - s_1[q(t)]\}$ ,  $l(\varphi) = s_2(\varphi) - s_1(\varphi)$ .

В первом приближении имеем неоднородную краевую задачу относительно  $w_1$ . Условие существования решения этой задачи приводит к задаче Коши для системы Гамильтона:

$$\dot{q} = H_p, \quad \dot{p} = -H_q, \quad p(0) = a_0, \quad q(0) = 0. \quad (25)$$

Тогда  $w_1 = P_1(\xi, t) z[s, q(t)] + \xi P_0 \partial z / \partial q$ , где функция  $z$  и ее производная вычисляются на решении задачи (25), а  $P_1$  – некоторый полином по  $\xi$ .

Рассматривая неоднородную краевую задачу второго приближения, приходим к начальной задаче для уравнения Риккати

$$\dot{b} + H_{pp} b^2 + 2H_{pq} b + H_{qq} = 0, \quad b(0) = b_0 \quad (26)$$

и уравнению относительно  $P_0(\xi, t)$ :

$$h_0 \frac{\partial^2 P_0}{\partial \xi^2} + h_1 \xi \frac{\partial P_0}{\partial \xi} + h_2 \frac{\partial P_0}{\partial t} + h_3 P_0 = 0. \quad (27)$$

Здесь  $h_i(t)$  – некоторые известные функции времени. Решение амплитудного уравнения (27) может быть выражено через полиномы Эрмита

$$P_0(\xi, t; c_m) = \sum_{m=0}^M c_m \chi_m(t) \mathfrak{H}_m[\wp(t)\xi], \quad (28)$$

где  $\chi_m, \wp$  – функции времени, а  $c_m$  – постоянные интегрирования.

Формально процесс определения полиномов  $w_j, f_j$  может быть неограниченно продолжен. При этом для вычисления в (23) поправки

$\varepsilon^{j/2} w_j$  при  $j \geq 1$  требуется рассмотрение соответствующей неоднородной краевой задачи в  $(j + 2)$ -м приближении. Однако при  $j \geq 4$  процедура построения функций  $w_j$  теряет смысл из-за погрешностей исходных уравнений (13) и главных граничных условий (14). Разложение (23), в котором удерживается лишь один член ряда, будем называть асимптотически главным приближением разложения функции  $w$ .

Система (25) и уравнение (26) выписаны для случая, когда в (24) берется знак минус. В этом случае формула (23) определяет  $n^+$ -ый ВП. Для построения  $n^-$ -го ВП необходимо во всех формулах и уравнениях знаки, стоящие перед гамильтонианом и его производными, сменить на противоположные. Окончательно решение задачи (13)–(15) находится как суперпозиция  $n^\pm$ -ых ВП.

Для проверки точности асимптотического метода в диссертации делается сравнение решения (23) в предельном случае  $\lambda \rightarrow 0$  (переход к бесконечно длинной оболочке) с классическим решением Буссинеска для поперечных колебаний балки с начальными условиями (15). А в частном случае некруговой оболочки с прямыми краями  $s_1 = 0, s_2 = l$  решение (23) совпало с аналогичным решением, найденным в п. 3.1 с использованием метода В.П. Маслова.

В работе проведен подробный анализ свойств решения в зависимости от соотношения входящих в задачу параметров и геометрии оболочки. Рассмотрим здесь случай, когда центр начального ВП (15) находится на наиболее слабой образующей  $\varphi = 0$ , для которой  $g'(0) = 0, g''(0) > 0$ .

Пусть для некоторого фиксированного  $n$   $a_0 = g^{1/8}(0)$ , а параметр  $b_0$  находится из квадратного уравнения (9). Тогда система Гамильтона и уравнение Риккати имеют простые решения  $p = a_0, q = 0, b = b_0$ . В этом случае решение (23) вырождается в квазистационарный ВП с постоянным центром на образующей  $\varphi = 0$ ; данный ВП с точностью до амплитуд совпадает с собственной формой (1) низкочастотных колебаний упругой оболочки вблизи слабой образующей.

Если  $a_0 \neq g^{1/8}(0)$ , то (23) определяет бегущий (нестационарный)  $n$ -ый ВП. Анализ системы Гамильтона показывает, что при  $H_0^4 \leq 4 \sup_{0 < \varphi < \varphi_2} g(\varphi)$ , где  $H_0 = H(a_0, 0)$ ,  $n$ -ый ВП, бегущий в сторону возрастания функции  $g(\varphi)$ , в некоторый момент времени  $t_r$  отражается от образующей  $\varphi = q_r$ . Последняя находится из уравнения  $H_0^4 = 4g(q_r)$ . В



частности, в диссертации доказывается, что если при этом функция  $g(\varphi)$  является четной на множестве  $-\varphi_1 < \varphi < \varphi_1$ ,  $g'(0) = 0$ , а также  $g'(\varphi) < 0$  при  $-\varphi_1 < \varphi < 0$  и  $g'(\varphi) > 0$  при  $0 < \varphi < \varphi_1$ , то величины  $p(t)$ ,  $q(t)$ , частота колебаний  $\omega(t)$  и групповая скорость  $v_g(t) = H_p[p(t), q(t)]$  для  $n$ -го ВП являются периодическими функциями. Это означает, что  $n$ -ый ВП совершает колебательные движения около положения  $\varphi = 0$ , многократно отражаясь от образующих  $\varphi = \pm q_r$ . Таким образом, наличие слабой образующей может приводить к сильной локализации нестационарных волновых процессов.

В качестве примера рассмотрим круговую шарнирно опертую цилиндрическую оболочку, один из краев которой (прямой край) совпадает с ее параллелью, а другой образован пересечением оболочки с плоскостью, наклоненной к оси оболочки под углом  $\pi/2 - \beta$ . Здесь  $k = 1$ ,  $s_1 = 0$ ,  $s_2(\varphi) = l_0 + (\cos \varphi - 1) \operatorname{tg} \beta$ ,  $\lambda(\varphi) = \pi^4 n^4 / s_2^4(\varphi)$ ,  $z(s, \varphi) = \sin[\pi l s / s_2(\varphi)]$ .

Пусть центр начального ВП находится на образующей  $\varphi = 0$  длиной  $l_0$ . Если  $0 < \beta < \operatorname{arctg}(l_0/2)$ , то эта образующая является наибольшей, а значит, и наиболее слабой (П.Е. Товстик). При  $\beta < 0$  образующая  $\varphi = 0$  является наименьшей, а противоположная линия  $\varphi = \pi$  — наиболее слабой. Если  $\beta = 0$ , то оба края — прямые.

На рис. 2 приведены графики функций  $q^\pm(t)$  при  $l_0 = 2$ ,  $a_0 = 1,5$ ,  $n = 1$  и различных значениях угла  $\beta = -30^\circ, 0^\circ, 6^\circ, 30^\circ, 44^\circ$  (кривые -1, 0, 1, 2, 3 соответственно). Видно, что при  $\beta = 30^\circ, 44^\circ$  имеют место эффекты отражения  $n^\pm$ -ых ВП от некоторых образующих.

На рис. 3. представлены графики функций  $\operatorname{Im} b^\pm(t)$ ,  $w_{\max}^\pm(t)$  при тех же  $a_0$ ,  $l_0$  и  $\beta = 6^\circ, 30^\circ, 44^\circ$  (кривые 1, 2, 3) в предположении, что  $b_0 = i$ ,

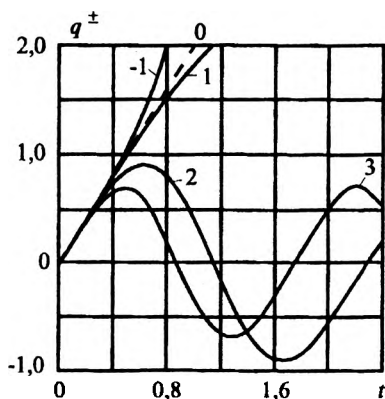


Рис. 2

$h/R = 10^{-3}$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $W_0 = z(s, 0)$ ,  $V_0 = 0$ . Здесь  $\text{Im} b^\pm(t)$  характеризует ширину  $n^\pm$ -го ВП, а  $w_{\max}^\pm(t)$  – максимальная амплитуда волн в его пределах. Кривые показывают, что при малых углах среза ( $\beta = 6^\circ$ ) пакеты с течением времени быстро “расползаются” по поверхности оболочки. Увеличение угла среза приводит к качественному изменению динамики оболочки. В случае отражения пакетов наблюдаются фокусировки ВП, сопровождающиеся увеличением амплитуды волн. При этом, чем больше  $\beta$ , тем сильнее фокусировка и больше амплитуда волн в момент фокусировки.

В п. 3.3 исследуется влияние постоянной и динамической нагрузки на распространение пакетов изгибно-плоскостных волн в цилиндрической оболочке с переменными параметрами. Предполагается, что оболочка нагружается силами, которые вызывают безмоментное динамическое НДС, характеризующееся тангенциальными усилиями (безразмерными)  $T_1(\varphi, t)$ ,  $T_2(\varphi, t)$ ,  $T_{12}(\varphi, t)$ . В качестве исходной используется система уравнений, отличающаяся от системы (13) наличием в первом из уравнений дополнительного слагаемого  $\varepsilon^2 \Delta_T W$ . Последнее учитывает безмоментное НДС оболочки. С использованием алгоритма, разработанного в п. 3.2, строится решение типа (23) в виде бегущих в окружном направлении ВП. Если  $T_1, T_2, T_{12}$  являются величинами одного порядка, то определяющим в решении (23) является кольцевое усилие  $T_2$ . Функция Гамильтона в данном случае имеет вид

$$H^{(n)}(p, \varphi) = [p^4 + g^{(n)}(\varphi)p^{-4} - T_2(q, t)p^2]^{1/2}. \quad (29)$$

Если  $T_2 > 0$  (сжимающее усилие), то предполагается, что  $T_2 < T_b$ , где  $T_b$  – бифуркационное значение, при котором оболочка теряет устойчивость.

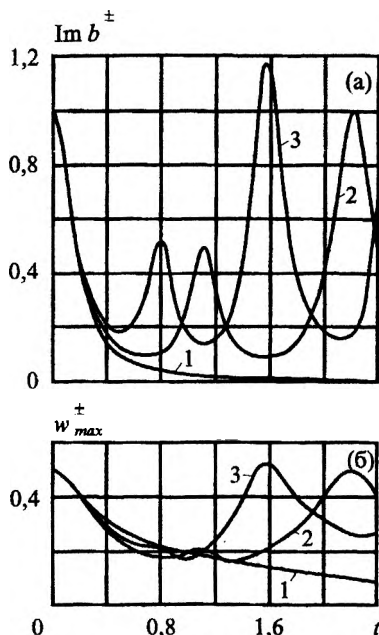


Рис. 3

В работе исследовано влияние  $T_2$  на динамические характеристики бегущих ВП. В частности, если  $T_2(\varphi)$  не зависит от времени и имеется слабая образующая  $\varphi = 0$ , для которой  $T_2(0) = 0, T_2''(0) < 0$ , то характер нестационарных волновых процессов такой же, как и в примере с косо-срезанным цилиндром – при определенном соотношении параметров возможны эффекты отражения бегущих ВП от некоторых образующих, а также фокусировка ВП, сопровождающаяся ростом амплитуд.

Для примера рассмотрена круговая косо-срезанная оболочка, находящаяся под действием однородного медленно изменяющегося во времени по линейному закону внешнего или внутреннего давлений. Здесь  $T_2 = c_t t$ , где положительный коэффициент  $c_t$  соответствует внешнему давлению, а отрицательный – внутреннему. В качестве начального ВП (15) рассмотрена одна из собственных форм (1) низкочастотных колебаний цилиндра вблизи наиболее длинной образующей  $\varphi = 0$ . Численное интегрирование системы Гамильтона показало, что растущее по абсолютной величине давление (как внутреннее, так и внешнее) расщепляет собственную форму колебаний на пару ВП, бегущих в противоположных направлениях. При медленно растущем внутреннем давлении наблюдаются многократные отражения ВП от некоторых образующих; при этом, как показывает интегрирование уравнений (26) и (27), указанные отражения сопровождаются фокусировкой и незначительным ростом амплитуд. Если давление является внешним и растет достаточно медленно, то также возможны отражения ВП, однако при  $T_2 \rightarrow T_b$  дальнейшее поведение оболочки отличается быстрым и неограниченным возрастанием частот, групповых скоростей и амплитуд ВП. Последнее обстоятельство противоречит введенному в диссертации предположению о малом показателе динамичности решения (23). Это означает, что при  $T_2 \rightarrow T_b$  погрешность решения (23) возрастает.

**В четвертой главе** исследуются нестационарные волны, бегущие в осевом направлении в длинных оболочках вращения. Задачи подобного типа возникают при исследовании реакции оболочек вращения на торцевые импульсные, либо сосредоточенные радиальные нагрузки. Общие вопросы нестационарной динамики длинных оболочек и методы их исследования рассмотрены в монографиях и обзорных статьях Н.А. Алумяз, Э.И. Григолюка и И.Т. Селезова, Н.А. Кильчевского, Л.Ю. Коссовича, У.К. Нигула, У.-Н. Рао и других авторов. Особое место при исследовании подобных задач занимают асимптотические

методы (Н.А. Алумяэ, Ю.Д. Каплунов, Л.Ю. Коссович и др.), основанные на фундаментальном понятии показателей изменяемости и динамичности (А.Л. Гольденвейзер).

В диссертации исследуются волновые формы движения тонких упругих оболочек вращения, а также цилиндрических оболочек с переменными в осевом направлении параметрами, обусловленные заданием начальных перемещений и скоростей, локализованных в окрестности некоторой параллели. Оболочки являются достаточно длинными (далее считаем бесконечными), так что влиянием краев можно пренебречь. С использованием метода расчленения динамического НДС на составляющие (А.Л. Гольденвейзер), а также асимптотического метода, развитого в третьей главе, решения уравнений движения строятся в виде суперпозиций бегущих пакетов изгибных, продольных и крутильных волн.

В п. 4.1 рассматривается бесконечная оболочка вращения толщиной  $h$ . Пусть  $x = Rs$  – длина дуги образующей ( $-\infty < x < +\infty$ ), а  $\varphi$  – угол, отсчитываемый в окружном направлении. Здесь  $R = r^*(0)$  – характерный размер оболочки, где  $r^*(s) = Rr(s)$  – расстояние до оси вращения. Главные радиусы кривизны  $R_1, R_2$  удовлетворяют соотношениям

$$R_1 = -R/k_1 = -R\sqrt{1-r'^2}/r'', \quad R_2 = R/k_2 = Rr/\sqrt{1-r'^2}.$$

Будем исследовать осесимметричные и неосесимметричные формы движения с числом  $m_0$  волн по параллели. В качестве исходных возьмем линейные уравнения, в основу которых положены гипотезы Кирхгофа-Лява:

$$(\mathbf{L} + \partial^2/\partial t^2)\mathbf{U}^T = 0. \quad (30)$$

Здесь  $\mathbf{U} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $u_1^* = R \cos(m_0\varphi)u_1(s, t)$ ,  $u_2^* = R \sin(m_0\varphi)u_2(s, t)$ ,  $u_3^* = R \cos(m_0\varphi)u_3(s, t)$  – тангенциальные и нормальное перемещения точек срединной поверхности,  $t^* = t t_c$  – реальное время,  $t_c = \sqrt{(1-v^2)\rho R^2 E^{-1}}$  – характерное время,  $\mathbf{L}$  –  $(3 \times 3)$ -матрица, элементами которой служат известные дифференциальные операторы линейной теории тонких оболочек (Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е. “Свободные колебания тонких упругих оболочек”-М.: 1979), зависящие от параметра  $m_0$ . Система уравнений (30) является сингулярно возмущенной, ибо третье уравнение содержит малый параметр  $\mu^4 = h^2/(12R^2)$  при старшей производной функции  $u_3$  относительно  $s$ .

В качестве начальных условий для функций  $u_j$  берутся условия типа (15), (16) с заменой параметра  $\epsilon$  на  $\mu$ .

Наличие малого параметра в уравнениях (32) позволяет с использованием метода, развитого А.Л. Гольденвейзером, провести классификацию решений системы (30). Введем индексы интенсивности  $\nu_i$  и показатель динамичности  $\alpha_i$  для функций  $u_i$ :  $u_i \sim \mu^{\nu_i}$ ,  $\partial u_i / \partial t \sim \mu^{-\alpha_i} u_i$  ( $i=1,2,3$ ). Из принятых начальных условий для  $u_i$  следует, что  $\partial u_i / \partial s \sim \mu^{-1} u_i$  по крайней мере на некотором начальном промежутке времени.

Рассмотрим три случая: (а)  $m_0 = 0$ ; (б)  $m_0 \sim 1$ ; (в)  $m_0 = \mu^{-1} m$ ,  $m \sim 1$ .

В осесимметричном случае ( $m_0 = 0$ ) система (30) расщепляется на уравнение, описывающее *крутильные волны*

$$-\frac{1-\nu}{2} \frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s} (r u_2) - (1-\nu) k_1 k_2 u_2 + \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = 0, \quad (31)$$

и систему двух уравнений относительно продольного и нормального перемещений  $u_1, u_3$

$$(\mathbf{L}^\circ + \partial^2 / \partial t^2) \mathbf{V}^T = 0, \quad (32)$$

где  $\mathbf{V} = (u_1, u_3)$  – двухкомпонентный вектор, а  $\mathbf{L}^\circ$  – квадратная матрица. В свою очередь уравнения (32) могут быть заменены двумя более простыми системами, описывающими распространение осесимметричных *продольных и изгибных волн*.

Для *продольных волн* находим  $\nu_1 = 0$ ,  $\alpha_1 = \nu_3 = 1$ . Тогда  $u_1 = u_s$ ,  $u_3 = \mu w_s$ , где  $u_s, w_s = O(1)$  при  $\mu \rightarrow 0$  и система (32) примет вид

$$(\mathbf{L}^\circ + \partial^2 / \partial t^2) (\mathbf{E}_{\mu} \mathbf{V}_s^T) = 0. \quad (33)$$

Здесь  $\mathbf{V}_s = (u_s, w_s)$ ,  $\mathbf{E}_{\mu} = \text{diag}(1, \mu)$ , а  $\text{diag}(x, y)$  означает диагональную матрицу с элементами  $x, y$  по диагонали.

Для *изгибных волн*  $\nu_1 = 1$ ,  $\nu_3 = 0$ ,  $\alpha_1 = 0$ . Тогда  $u_1 = \mu u_n$ ,  $u_3 = w_n$ , где  $u_n, w_n = O(1)$ , а система уравнений (32) может быть заменена системой

$$(\mathbf{L}^\circ + \mu^2 \partial^2 / \partial t_1^2) (\mathbf{E}_{\mu 1} \mathbf{V}_n^T) = 0, \quad (34)$$

где  $\mathbf{V}_n = (u_n, w_n)$ ,  $\mathbf{E}_{\mu 1} = \text{diag}(\mu, 1)$ ,  $t_1 = \mu t$  – “медленное время”.

Аналогичным образом в работе проведена классификация интегралов системы (30) для неосесимметричного движения. В частности, в случае (в) получаем:

для тангенциальных волн

$$u_1 = u_\tau, \quad u_2 = v_\tau, \quad u_3 = \mu w_\tau,$$

$$\left( L_{-1} + \partial^2 / \partial t^2 \right) \left( E_{11\mu} U_\tau^T \right) = 0, \quad (35)$$

где  $u_\tau, v_\tau, w_\tau = O(1)$ ,  $E_{11\mu} = \text{diag}(1, 1, \mu)$ ,  $U_\tau = (u_\tau, v_\tau, w_\tau)$ , а через  $L_{-1}$  обозначена матрица  $L$ , в которой  $m_0 = \mu^{-1} m$ ;

для изгибных волн

$$u_1 = \mu u_n, \quad u_2 = \mu v_n, \quad u_3 = w_n,$$

$$\left( L_{-1} + \mu^2 \partial^2 / \partial t_1^2 \right) \left( E_{\mu\mu 1} U_n^T \right) = 0, \quad (36)$$

где  $u_n, v_n, w_n = O(1)$ ,  $E_{\mu\mu 1} = \text{diag}(\mu, \mu, 1)$ ,  $U_n = (u_n, v_n, w_n)$ .

Рассмотрим систему уравнений (34), описывающую осесимметричные изгибные волны. Ее решение может быть построено в виде бегущего ВП с центром на параллели  $s = q_n(t_1)$ :

$$V_n = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{k/2} V_{n,k} \exp \left\{ i \mu^{-1} S_n(\xi_n, t_1, \mu) \right\}, \quad (37)$$

$$S_n = \int_0^{\xi_n} \omega_n(\tilde{t}) d\tilde{t} + \mu^{1/2} p_n(t_1) \xi_n + \frac{1}{2} \mu b_n(t_1) \xi_n^2, \quad V_{n,k} = (u_{n,k}, w_{n,k}),$$

где  $u_{n,k}(\xi_n, t_1)$ ,  $w_{n,k}(\xi_n, t_1)$  — полиномы аргумента  $\xi_n = \mu^{-1/2} [s - q_n(t_1)]$ , а  $\text{Im} b_n(t_1) > 0$ . Все неизвестные в (37) функции находятся согласно алгоритму, описанному в третьей главе диссертации. В данном случае функция Гамильтона, соответствующая осесимметричным изгибным волнам, имеет вид

$$H_n(p, q) = \sqrt{(1 - v^2) k_2^2(q) + p^4}. \quad (38)$$

Асимптотически главное приближение решения системы (33), описывающей продольные волны, может быть выписано в явном виде

$$V_s = \left[ \frac{1}{\sqrt{r(t)}} \sum_{i=0}^{M_s} d_{s,i} \xi_s^i Y_s + O(\mu^{1/2}) I_2 \right] \times \exp \left\{ i \left[ \mu^{-1/2} a_0 \xi_s + \frac{1}{2} b_0 \xi_s^2 \right] \right\}. \quad (39)$$

Здесь  $\xi_s = \mu^{-1/2} (s - t)$ ,  $I_2 = (1, 1)$ ,  $Y_s = (1, y_{s,2})$ ,  $y_{s,2} = -i a_0^{-1} [k_1(t) + v k_2(t)]$ , а  $d_{s,i}$  — произвольные постоянные.

Для того чтобы получить асимптотически главное приближение решения уравнения (31) для крутильных волн, необходимо в (39) век-

тора  $V_s$ ,  $Y_s$ ,  $I_2$  и скалярные величины  $\xi_s$ ,  $d_{s,j}$  заменить на  $u_2$ , 1, 1 и  $\xi_\phi$ ,  $d_{\phi,i}$  соответственно, а аргумент  $t$  снабдить коэффициентом  $\sqrt{(1-\nu)/2}$ .

Таким образом, решение системы уравнений (30) в осесимметричном случае может быть записано в виде суперпозиции бегущих ВП продольных, крутильных и изгибных волн:

$$u_1 = u_s^+(\xi_s^+, t) + u_s^-(\xi_s^-, t) + \mu [u_n^+(\xi_n^+, \mu t) + u_n^-(\xi_n^-, \mu t)],$$

$$u_2 = u_2^+(\xi_\phi^+, t) + u_2^-(\xi_\phi^-, t), \quad (40)$$

$$u_3 = w_n^+(\xi_n^+, \mu t) + w_n^-(\xi_n^-, \mu t) + \mu [w_s^+(\xi_s^+, t) + w_s^-(\xi_s^-, t)].$$

Здесь знаки + и - указывают на принадлежность к ВП, бегущим в положительном и отрицательном направлениях изменения координаты  $s$ . Составляющие  $u_s^\pm$ ,  $u_2^\pm$ ,  $w_n^\pm$  являются главными, а  $\mu u_n^\pm$  и  $\mu w_s^\pm$  - второстепенными, "порождаемыми" функциями  $w_n^\pm$  и  $u_s^\pm$  соответственно. При расчете деформации оболочки по формулам (40) второстепенные слагаемые, пропорциональные малому параметру  $\mu$ , в расчет могут не приниматься, так как их порядки превосходят порядки отброшенных в (37), (39) членов. Однако при вычислении скоростей нормальных прогибов  $\partial u_3 / \partial t$  необходимо иметь в виду, что  $\partial w_n^\pm / \partial t$  и  $\mu \partial w_s^\pm / \partial t$  есть величины одного порядка  $O(1)$  при  $\mu \rightarrow 0$ .

В диссертации выполнен анализ влияния геометрии оболочки на характер бегущих ВП. Из формулы (39) видно, что для продольных и крутильных волн волновые числа  $p_s = p_\phi = a_0$ , параметры  $b_s = b_\phi = b_0$ , характеризующие "ширину" ВП, а также групповые скорости остаются неизменными; влияние геометрии на тангенциальные волны проявляется лишь в изменении амплитуды волн.

Изгибные волны являются более чувствительными к непостоянству геометрических характеристик оболочки. Анализ системы Гамильтона с гамильтонианом (38) показывает, что параметр  $p_n(t_1)$  растет, если пакет бежит в сторону возрастания функции  $k_2(s)$ , и наоборот, убывает при движении ВП в обратном направлении. В частности, возможен случай, когда параметр  $p_n$  обращается в ноль в некоторый момент времени  $t_1 = t_n^*$ . Последнее обстоятельство приводит к тому, что нарушаются оценки  $u_n, w_n = O(1)$ , необходимые для конструкции

ВП изгибных волн (37). В таком случае решение (40) следует рассматривать на некотором конечном отрезке времени  $0 \leq t_1 \leq t_n' < t_n^*$ , где  $p_n(t_1) \sim 1$ . Для анализа влияния геометрии оболочки на “ширину” и амплитуды бегущих пакетов изгибных волн рассмотрена длинная коническая оболочка вращения. Численное интегрирование уравнений (25)–(27) с гамильтонианом (38) показало, что ВП изгибных волн (в отличие от тангенциальных) с течением времени “расползаются”, при этом наименьшую скорость расползания имеют те пакеты, которые бегут к вершине конуса.

Аналогичным образом в работе построены формальные асимптотические решения системы уравнений (30) для случаев неосесимметричного движения. При этом в случае (б) решение отличается от разложений (40) лишь тем, что компонента  $u_2$  содержит дополнительные слагаемые порядка  $\mu^2$ , порождаемые функциями  $w_n^\pm$ .

В случае (в) решение системы (30) построено в виде суперпозиции решений систем (35), (36) с весовыми матрицами  $E_{11\mu}$  и  $E_{\mu 1}$  соответственно. В скалярной форме решение имеет вид:

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum^\pm \left\{ u_\tau^{(\pm 1)} \left[ \xi_\tau^{(\pm 1)}, t \right] + u_\tau^{(\pm 2)} \left[ \xi_\tau^{(\pm 2)}, t \right] + \mu u_n^\pm \left( \xi_n^\pm, \mu t \right) \right\}, \\ u_2 &= \sum^\pm \left\{ v_\tau^{(\pm 1)} \left[ \xi_\tau^{(\pm 1)}, t \right] + v_\tau^{(\pm 2)} \left[ \xi_\tau^{(\pm 2)}, t \right] + \mu v_n^\pm \left( \xi_n^\pm, \mu t \right) \right\}, \\ u_3 &= \sum^\pm \left\{ w_n^\pm \left( \xi_n^\pm, \mu t \right) + \mu w_\tau^{(\pm 1)} \left[ \xi_\tau^{(\pm 1)}, t \right] + \mu w_\tau^{(\pm 2)} \left[ \xi_\tau^{(\pm 2)}, t \right] \right\}. \end{aligned} \quad (41)$$

Здесь символ  $\Sigma^\pm$  означает суммирование стоящего за ним выражения с индексами плюс и минус. Если отбросить в (41) слагаемые порядка  $O(\mu)$ , то решение представляет собой наложение двух пакетов изгибных волн с центрами на параллелях  $s = q_n^\pm(\mu t)$ , а также четырех пакетов продольных и четырех пакетов крутильных волн с центрами  $s = q_\tau^{(\pm l)}(t)$  ( $l = 1, 2$ ). При этом (+1)-ый и (-1)-ый пакеты продольных волн (функции  $u_\tau^{(+1)}$  и  $u_\tau^{(-1)}$ ) двигаются “в связках” с порождаемыми ими (+1)-ым и (-1)-ым соответственно пакетами крутильных волн ( $v_\tau^{(+1)}$  и  $v_\tau^{(-1)}$ ), а (+2)-ой и (-2)-ой пакеты крутильных волн ( $v_\tau^{(+2)}$  и  $v_\tau^{(-2)}$ ) порождают соответственно два пакета продольных волн ( $u_\tau^{(+2)}$  и  $u_\tau^{(-2)}$ ).

Исследование свойств решения (41) показало, что неосесимметричные ВП с большим числом волн по параллели более чувствительны к геометрии оболочки, чем осесимметричные. Так, например, группо-



вые скорости и волновые параметры  $p_s^{(\pm)}(t)$  пакетов продольных и крутильных волн возрастают (убывают) при движении последних в сторону возрастания (убывания) функции  $r(s)$ .

В п. 4.2 исследуются осесимметричные и неосесимметричные ВП тангенциальных и изгибных волн в бесконечной цилиндрической оболочке, у которой толщина  $h(s)$ , модуль Юнга  $E(s)$ , коэффициент Пуассона  $\nu(s)$  и плотность материала  $\rho(s)$  являются функциями продольной координаты  $s$ . Подробно рассматривается случай осесимметричного движения оболочки. Решение строится в виде суперпозиции (40) пакетов изгибных, продольных и крутильных волн. Отметим его некоторые свойства.

Пусть толщина  $h(s)$  является переменной, а остальные параметры оболочки постоянны. Из анализа системы Гамильтона для изгибных волн следует, что групповая скорость ВП и изменяемость волн растут, если ВП бежит в сторону убывания толщины оболочки, и наоборот, уменьшаются при движении ВП в обратном направлении. Результаты численного интегрирования уравнения Риккати (26) и амплитудного уравнения (27) при  $h(s) = 1 + \text{th}(\alpha s)$ , где  $\alpha \geq 0$ , указывают на то, что увеличение толщины оболочки способствует быстрому расползанию ВП изгибных волн, а ее убывание может приводить к фокусировке. Расчеты при больших значениях времени  $t$ , свидетельствуют о неограниченном росте амплитуд в пакетах изгибных волн, бегущих в сторону убывания  $h(s)$ .

Пусть теперь  $h, E, \nu, \rho$  – функции координаты  $s$ . Для ВП продольных волн снова (см. (39)) получаем решение в явном виде

$$\mathbf{V}_s = \left\{ \frac{1}{4\sqrt{\gamma[q_s(t)]g[q_s(t)]}} \sum_{k=0}^{M_s} \mu^{-k/2} d_{s,k} f^{-k}[q_s(t)] \cdot [s - q_s(t)]^k \mathbf{Y}_s + O(\mu^{1/2}) \mathbf{I}_2 \right\} \times \exp \left\{ \frac{i}{\mu} p_s(t) [s - q_s(t)] + \frac{i}{2\mu} b_s(t) [s - q_s(t)]^2 \right\}. \quad (42)$$

Здесь

$$f(s) = \sqrt{g(s)/\gamma(s)}, \quad \gamma = \rho h, \quad g = Eh(1 - \nu^2)^{-1}, \quad p_s^\pm(t) = a_0 / f[q_s^\pm(t)],$$

$$b_s^\pm(t) = \frac{b_0 + a_0 \{f'(0) - f'[q_s^\pm(t)]\}}{f^2[q_s^\pm(t)]}, \quad (43)$$

а функция  $q_s(t)$  находится неявно из соотношения  $t = \pm \int_0^{q_s^\pm} \frac{dq}{f(q)}$ .

Из (42), (43) видно, что волновой параметр  $p_s$ , а также групповая скорость  $\dot{q}_s$ , не зависят от  $h(s)$ , а определяются свойствами функции  $f(s)$ . Интересным представляется вывод, вытекающий из формулы (43): ширина ВП продольных осесимметричных волн прямопропорциональна функции  $f^2(s)$ . В частности, ВП, бегущий в сторону убывания  $f(s)$ , "сжимается".

В п. 4.3 исследуется влияние переменного вдоль оси и динамического (в общем случае) внутреннего давления на характер неустановившихся (локализованных) волновых процессов в бесконечной цилиндрической оболочке. Предполагается, что показатели изменчивости и динамичности переменного давления  $Q(s, t)$  невелики, так что вызываемое давлением НДС оболочки является безмоментным. Рассматривается случай неосесимметричного движения с числом волн по параллели  $m \sim 1$ . Решение уравнений Флюгге строится в виде (40), как наложение пакетов изгибных, продольных и крутильных волн, бегущих в осевом направлении.

В случае однородного динамического давления  $Q(t)$  все функции, фигурирующие в разложении (40), найдены в явном виде. Построенное решение указывает на то, что при любом законе нагружения внутренним давлением, вызывающим безмоментное НДС, все динамические характеристики (волновые числа, групповые скорости, "ширина" ВП, амплитуды) пакетов тангенциальных волн остаются постоянными, в то время как пакеты изгибных волн расплываются.

Подробно рассмотрен случай статического и неоднородного в осевом направлении давления  $Q(s)$ . Такое давление может испытывать подводный трубопровод, лежащий на разной глубине и транспортирующий под большим давлением газ или жидкость. Анализ решения показал, что движение ВП изгибных волн в сторону уменьшения внутреннего давления сопровождается ростом групповой скорости, волнового параметра  $p_n(t_1)$  и быстрым расползанием. Отмечен также возможный эффект фокусировки ВП изгибных волн, двигающихся в сторону роста давления.

**В пятой главе** метод конструкции бегущих ВП обобщается на двумерный случай. Рассматривается тонкая упругая оболочка произвольного профиля, имеющая переменные толщину  $h(\alpha_k)$ , модуль Юн-

га  $E(\alpha_k)$ , коэффициент Пуассона  $\nu(\alpha_k)$  и плотность материала  $\rho(\alpha_k)$ , где  $\alpha_1, \alpha_2$  – криволинейные координаты на срединной поверхности оболочки. Используются полубезмоментные уравнения типа (13) относительно нормального прогиба  $W$  и функции напряжений  $\Phi$  с переменными коэффициентами, учитывающими разностенность и разномодульность оболочки.

Решение строится в виде бегущего двумерного ВП с центром в точке  $(q_1(t), q_2(t))$ :

$$W = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^{j/2} w_j(\xi_1, \xi_2, t) \exp[i\mu^{-1} S(\xi_1, \xi_2, t, \mu)], \quad (44)$$

$$S(\xi_1, \xi_2, t, \mu) = \int_0^t \omega(\tau) d\tau + \mu^{1/2} \mathbf{p}(t) \Xi + \frac{1}{2} \mu \Xi^T \mathbf{B}(t) \Xi,$$

$$\mathbf{p} = (p_1(t), p_2(t)), \quad \Xi = (\xi_1, \xi_2)^T.$$

Здесь  $\xi_k = \mu^{-1/2} [\alpha_k - q_k(t)]$ ,  $\mu^4 = h_0^2 / (12R^2)$  – малый параметр,  $h_0$  – характерная толщина оболочки,  $\mathbf{B}(t)$  – симметричная комплексная матрица с положительно определенной мнимой частью  $\text{Im} \mathbf{B}(t)$  для любого  $t \geq 0$ ,  $w_j$  – полиномы аргументов  $\xi_1, \xi_2$ .

Метод определения всех неизвестных в (42) функций подобен алгоритму, описанному в третьей главе. Заметим лишь, что теперь

$$\omega = \dot{q}_1 p_1 + \dot{q}_2 p_2 + H(p_1, p_2, q_1, q_2),$$

функции  $p_k(t), q_k(t)$  находятся из системы четырех уравнений, аналогичной системе (25), матрица  $\mathbf{B}(t)$  является решением матричного уравнения

$$\dot{\mathbf{B}} + \mathbf{B} H_{pp} \mathbf{B} + H_{qp} \mathbf{B} + \mathbf{B} H_{qp}^T + H_{qq} = 0,$$

где через  $H_{pp}, H_{qp}, H_{qq}$  обозначены матрицы, элементы которых получаются дифференцированием гамильтониана  $H$  по  $p_i, q_j$ , а полином  $w_0 = P_0(\xi_1, \xi_2, t)$  определяется из амплитудного уравнения

$$-\frac{i}{2} \text{tr} \left( H_{pp} \frac{\partial^2 P_0}{\partial \Xi^2} \right) + \Xi \left( H_{qp} \frac{\partial P_0}{\partial \Xi} \right) + (\mathbf{B} \Xi) \left( H_{pp} \frac{\partial P_0}{\partial \Xi} \right) + \frac{\partial P_0}{\partial t} + G P_0 = 0.$$

В последнем уравнении  $\text{tr}$  означает след матрицы,  $\partial/\partial \Xi = (\partial/\partial \xi_1, \partial/\partial \xi_2)^T$  – векторный оператор,  $\partial^2/\partial \Xi^2$  – матричный дифференциальный оператор размерности  $2 \times 2$ , а  $G(t)$  – известная функция времени.

В конце главы отмечается, что данным методом могут быть построены решения уравнений движения в перемещениях для оболочек произвольного очертания в виде суперпозиции бегущих *двумерных* пакетов изгибных, продольных и крутильных волн подобно тому, как это было сделано в Гл. 4.

**В заключении** сформулированы основные результаты, выносимые на защиту:

1. Приближенные формулы для нижних частот колебаний вязкоупругих оболочек нулевой кривизны с переменными параметрами;
2. Разработка асимптотических методов для исследования локальных параметрических колебаний тонких упругих цилиндрических оболочек при слабом параметрическом возбуждении, вывод амплитудного уравнения, а также определение главной области динамической неустойчивости с учетом наличия слабой образующей;
3. Разработка асимптотических методов и алгоритмов решения начально-краевых задач со сложными границами, а также начальных задач для сингулярно возмущенных нестационарных систем дифференциальных уравнений в частных производных в виде “бегущих ВП”;
4. Решение системы полубезмоментных уравнений для тонких упругих некруговых цилиндрических оболочек с косыми краями в виде бегущих в окружном направлении пакетов изгибно-плоскостных волн;
5. Определение зависимостей динамических характеристик нестационарных ВП, бегущих в цилиндрической оболочке в окружном направлении, от геометрии оболочки (кривизны, наличия косых краев) и характера динамического нагружения, а также выявление новых механических эффектов (отражение ВП от некоторых образующих, фокусировка, рост амплитуд);
6. Решения систем уравнений движения тонких упругих бесконечных оболочек вращения, а также цилиндрических оболочек с переменными параметрами в виде суперпозиции бегущих в осевом направлении пакетов изгибных, продольных и крутильных волн;
7. Формулы для частот, волнового числа, амплитуд, “ширины” бегущих ВП;

8. Исследование влияния переменных кривизн, толщины, коэффициентов упругости, характера неоднородного динамического внутреннего давления на нестационарные пакеты изгибных и тангенциальных волн;

9. Решение системы полубезмоментных уравнений движения для тонких упругих оболочек произвольного профиля с переменными толщиной и физическими характеристиками в виде нестационарных двумерных ВП.

### **Основные результаты диссертации опубликованы в работах:**

1. Михасев Г.И. Некоторые задачи устойчивости оболочек, близких к цилиндрическим // Вестник Ленингр. ун-та. – Сер. матем., механ., астрон. – 1987. – № 1. – С. 67–72.

2. Михасев Г.И. Устойчивость тонкого эллипсоида вращения переменной толщины при однородном внешнем давлении // Прикладные задачи динамики и устойчивости механических систем. Прикл. мех. Вып. 8. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1990. – С. 214–217.

3. Михасев Г.И., Товстик П.Е. Устойчивость конических оболочек под действием внешнего давления // Изв. АН СССР. Механика тверд. тела. – 1990. – № 4. – С. 99–104.

4. Михасев Г.И. О свободных низкочастотных колебаниях вязкоупругих цилиндрических оболочек // Прикл. механика. – 1992. – Т. 28, № 9. – С. 50–55.

5. Михасев Г.И. Об одном решении системы интегро-дифференциальных уравнений, описывающей свободные колебания вязкоупругой цилиндрической оболочки // Весці АН Беларусі. – Сер. фіз.-мат. навук. 1992. – № 2. – С. 22–26.

6. Михасев Г.И. Локализованные семейства изгибных волн в цилиндрических оболочках с переменными физическими и геометрическими характеристиками // Тез. докл. Международн. матем. конф., посвященной 200-летию со дня рожд. Н.И. Лобачевского. Минск. – 1992. – С. 91.

7. Михасев Г.И. Об одной задаче Коши для системы дифференциальных уравнений, описывающей распространение изгибных волн в тонкой цилиндрической оболочке // Тез. докл. VI конф. математиков Беларуси. Часть 3. Гродно. – 1992. – С. 117.

8. Михасев Г.И. О распространении изгибных волн в цилиндрической оболочке // Вестн. С. Петерб. ун-та. – Сер. матем., механ., астрон. – 1993. – № 8. – С. 99–103.

9. Михасев Г.И. О комплексном ВКБ-методе в задачах о распространении упругих волн в неоднородных цилиндрических оболочках // Тез. I международн. конф. "Колебан. и волны в экологии, технолог. процессах и диагностике". Минск. – 1993. – С. 91.

10. Mikhasev G.I. The complex WKB solution of an initial boundary value problem for equations of cylindrical shell motion // International Conference Asymptotics in Mechanics. Book of abstracts. St. Petersburg. – 1994. – P. 73.

11. Михасев Г.И. О комплексном ВКБ-решении задачи Коши для уравнений движения тонкой цилиндрической оболочки // Докл. АН Беларуси. – 1994. – Т. 38, № 4. – С. 24–27.

12. Михасев Г.И. О распространении изгибных волн в некруговой цилиндрической оболочке // Изв. РАН. Механика тверд. тела. – 1994. – № 3. – С. 164–172.

13. Михасев Г.И. О распространении осесимметричных изгибных волн в бесконечной цилиндрической оболочке // Весці АН Беларусі. – Сер. фіз.-мат. навук. – 1994. – № 1. – С. 39–45.

14. Михасев Г.И. Изгибные волны в бесконечной цилиндрической оболочке с переменными толщиной и физическими характеристиками материала // Динамика и устойчивость механических систем. Прикл. мех. Вып. 9. – С.-Петербург.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 1995. – С. 179–191.

15. Михасев Г.И. О волновых формах движения бесконечной цилиндрической оболочки с переменными параметрами // Изв. РАН. Механика тверд. тела. – 1995. – № 6. – С. 129–137.

16. Михасев Г.И. О возможных волновых формах движения бесконечной оболочки вращения // Белорусск. конгресс по теор. и прикл. механ. "Механика-95". Минск. Тезисы докл. – Гомель, 1995. – С.166–167.

17. Михасев Г.И. К исследованию изгибных волн в бесконечной оболочке вращения // Прикл. механика. – 1996. – Т. 32, № 7. – С. 60–64.

18. Botogova M.G. and Mikhasev G.I. Free vibrations of non-uniformly heated viscoelastic cylindrical shell // Technische Mechanik. – 1996. – Band 16, Heft 3. – S. 251–256.

19. Михасев Г.И. Локализованные семейства изгибных волн в некруговой цилиндрической оболочке с косыми краями // Прикл. мат. и мех. – 1996. – Т. 60, № 4. – С. 635–643.

20. Михасев Г.И. Локализованные волновые формы движения бесконечной оболочки вращения // Прикл. мат. и мех. – 1996. – Т. 60, № 5. – С. 834–842.

21. Botogova M.G. and Mikhasev G.I. Free vibrations of a cylindrical shell taking into account the non-uniform temperature field // The XIX-th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics: Book of Abstracts. Kyoto. – 1996. – P. 342.

22. Михасев Г.И. Локальные колебания и динамическая неустойчивость оболочек нулевой кривизны при параметрическом возбуждении // Международная математическая конференция “Еругинские чтения – IV”. Тезисы докладов. Витебск. – 1997. – С. 103–104.

23. Ботогова М.Г., Михасев Г.И. Свободные низкочастотные колебания вязкоупругой цилиндрической оболочки с учетом воздействия температурного поля // Весці АН Беларусі. – Сер. фіз.- тэхн. навук. – 1997. – № 2. – С. 117–123.

24. Mikhasev G.I. and Kuntsevich S.P. Thermoparametric vibrations of noncircular cylindrical shell in nonstationary temperature field // Technische Mechanik. – 1997. – Band 17, Heft 2. – S. 113–120.

25. Mikhasev G.I. Free and parametric vibrations of cylindrical shells under static and periodic axial loads // Technische Mechanik. – 1997. – Band 17, Heft 3. – S. 209–216.

26. Mikhasev G.I. Travelling wave packets in thin elastic shells // International seminar “Day on Diffraction’97”. Book of abstracts. S. Petersburg. – 1997. – P. 32–33.

27. Михасев Г.И. К исследованию локальных колебаний и динамической неустойчивости цилиндрических оболочек // Веснік Віцебск. ун-та. – 1997. – № 1(3). – С. 61 – 66.

28. Авдошка И.В., Михасев Г.И. Волновые пакеты в тонкой цилиндрической оболочке с учетом воздействия внешних сил // Веснік Віцебск. ун-та. – 1997. – № 3(5). – 50–54.

29. Михасев Г.И. Асимптотические решения системы уравнений пологих оболочек в виде двумерных волновых пакетов // Изв. вузов. Математика. – 1998. – № 2. – С. 47–53.

30. Mikhasev G.I. Travelling wave packets in an infinite thin cylindrical shell under internal pressure // J. Sound and Vibr. – 1998. – Vol. 209, No. 4. – P. 543–559.