

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»
(ВГУ имени П.М. Машерова)

УДК 517.936 + 517.956+ 517.977
№ госрегистрации 20111878
Инв. №

УТВЕРЖДАЮ
Проректор университета
по научной работе
д-р биол. наук, профессор
_____ И.М. Прищепа
« __ » _____ 2015 г.

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

НЕЛИНЕЙНЫЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ И ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ

Государственная программа научных исследований на 2011-2015 годы
«Междисциплинарные научные исследования, новые зарождающиеся технологии как основа
устойчивого инновационного развития» (ГПФИ «Конвергенция»).

Подпрограмма «Разработка и исследование математических методов и их применение для
решения актуальных проблем естествознания, техники, экономики и социальных наук».
(«Математические методы»)

(заключительный)

Начальник
научно-исследовательского сектора,
кандидат геолого-минералогических наук,
доцент

_____ А.И. Красовская

Научный руководитель НИР,
доктор физико-математических наук,
профессор

_____ А.Л. Гладков

Витебск 2015

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель темы,
д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой
математической кибернетики ВГУ

_____ А.Л. Гладков
(введение, разделы 1,7,8)

Исполнители темы

кандидат физ.-мат. наук, доцент
кафедры геометрии и математического
анализа ВГУ имени П.М. Машерова

_____ О.В. Храмцов
(разделы 3,4,9,10,11)

преподаватель кафедры геометрии и
математического анализа
ВГУ имени П.М. Машерова

_____ Т.В. Кавитова
(разделы 2,6)

преподаватель кафедры прикладной
математики и механики
ВГУ имени П.М. Машерова

_____ С.В. Сергеенко
(раздел 5)

преподаватель кафедры прикладной
математики и механики
ВГУ имени П.М. Машерова»

_____ А.И. Никитин
(разделы 7,12)

Нормоконтролер

_____ Т.В. Харкевич

РЕФЕРАТ

Отчет 66 с., 1 ч., 73 источника

НЕЛИНЕЙНЫЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ И ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ, СУЩЕСТВОВАНИЕ, ЕДИНСТВЕННОСТЬ, ЦЕЛЫЕ РЕШЕНИЯ, ГЛОБАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ, ЛИНЕЙНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ СИСТЕМЫ ПФАФФА

Объектом исследования являются нелинейные обыкновенные дифференциальные, эллиптические и параболические уравнения, линейные стационарные системы Пфаффа.

Целью работы является изучение однозначной локальной и глобальной разрешимости начально-краевых задач и задачи Коши для нелинейных параболических и псевдопараболических уравнений, а также свойства управляемости для линейных стационарных систем Пфаффа и линейных стационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для полулинейного уравнения теплопроводности с абсорбцией изучается начально-краевая задача с нелинейными нелокальными граничными условиями. Доказываются принцип сравнения решений, локальная разрешимость задачи, находятся условия, гарантирующие единственность решения и ее отсутствие. Изучен вопрос разрушения решения за конечное время.

Для нелинейного псевдопараболического уравнения рассмотрены начально-краевая задача в ограниченной области и задача Коши. Доказана разрешимость этих задач. При выполнении определенных условий на начальные данные задачи Коши изучено асимптотическое поведение решений.

Найдены условия существования положительных целых решений системы двух полулинейных эллиптических уравнений.

Изучены автомодельные решения уравнения Кардара-Паризи-Жанга. Найдена асимптотика этих решений на бесконечности, демонстрирующая точность ранее полученных результатов.

Для системы полулинейных параболических уравнений с переменными коэффициентами изучена начально-краевая задача с нелинейными нелокальными условиями Дирихле. Установлен принцип сравнения решений, доказана локальная разрешимость задачи, найдены условия, гарантирующие единственность решения и ее отсутствие.

Для системы полулинейных параболических уравнений с переменными коэффициентами изучена начально-краевая задача с нелинейными нелокальными условиями Неймана. Установлен принцип сравнения решений и доказана локальная разрешимость задачи.

Для вполне интегрируемых линейных стационарных систем Пфаффа найден ряд условий наличия свойств относительной управляемости, а также континуум и максимальной управляемостей.

Для линейных стационарных систем Пфаффа в инволюции изучен вопрос управляемости, континуум и максимальной управляемостей.

Изучена управляемость линейных стационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений при наличии управления и интеграла от управления, а также при наличии комбинированного управления.

Результаты внедрены в учебный процесс и могут быть использованы в высших учебных заведениях при написании курсовых, дипломных работ, магистерских и кандидатских диссертаций.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	6
1. Полулинейное уравнение теплопроводности с абсорбцией и нелокальным граничным условием	7
1.1 Существование локального решения. Единственность решений	7
1.2 Разрушение решений	9
2 Существование решения задачи Коши для псевдопараболического уравнения	12
3 Управляемость вполне интегрируемых линейных стационарных систем Пфаффа	18
4 Управляемость линейных стационарных систем Пфаффа в инволюции	25
5 Условия существования положительных целых решений системы полулинейных эллиптических уравнений	34
6 Поведение максимального решения задачи Коши для некоторого нелинейного псевдопараболического уравнения при $ x \rightarrow \infty$	37
7 Система параболических уравнений типа «реакции-диффузии» с нелинейными нелокальными граничными условиями	40
8 Автомодельные решения уравнения Кардара-Паризи-Жанга	43
9 Управляемость линейных стационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений при наличии управления и интеграла от управления	46
10 Относительная управляемость линейных стационарных вполне интегрируемых систем Пфаффа	48
11 Управляемость линейных стационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений при наличии комбинированного управления	53
12 Локальное существование решений начально-краевой задачи для системы полулинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями	58
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	60
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	61

ВВЕДЕНИЕ

Нелинейные эволюционные уравнения лежат в основе математических моделей самых разнообразных явлений и процессов в механике, физике, технологии, биофизике, биологии, экологии и многих других областях знаний. Например, квазилинейное уравнение теплопроводности при определенных условиях описывает процессы электронной и ионной теплопроводности в плазме, адиабатическую фильтрацию газов и жидкостей в пористых средах, диффузию нейтронов и альфа-частиц. Оно возникает при математическом моделировании процессов химической кинетики, различного рода биохимических реакций, процессов роста миграции популяций и т.п.

Особое место в теории нелинейных эволюционных уравнений занимает круг исследований, связанный с существованием глобальных решений. Представляет большой интерес изучение как краевых задач в ограниченных областях, так и задачи Коши. При возникновении решений, являющихся глобально по времени неразрешимыми говорят о «режимах с обострением». Долгое время такие решения рассматривали в теории как некие экзотические примеры, пригодные разве что для установления степени оптимальности условий глобальной разрешимости как естественного "физического" требования. Хотя, отметим, что первые успешные попытки установить условия неограниченности решений нелинейных параболических задач были предприняты более 40 лет назад. Тот факт, что такие "сингулярные" по времени решения имеют физический смысл, был известен еще раньше – это задачи теплового взрыва, процессы кумуляции ударных волн и др.

Новый импульс развитию теории «режимов с обострением» придали возможности приложений в различных областях, например самофокусировка световых пучков в нелинейных средах, нестационарные структуры в магнитной гидродинамике (Т-слой), безударное сжатие в задачах газовой динамики. Большой вклад в исследование решений такого типа внесла группа математиков из Института прикладной математики им. М.В.Келдыша. Много интересных работ, посвященных этой тематике, появилось в последнее время.

Большой интерес у исследователей вызывают также вопросы управляемости для систем обыкновенных дифференциальных уравнений и систем Пфаффа.