ОРДЕНА ЛЕНИНА АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукописи

Р.П.МЕДВЕДЕВА

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С УСЛОВИЯМИ ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТИ

(Диссертация написана на русском языке)

01.004 - Алгебра и теория чисел

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Киев - 1972

Работа выполнена в Витебском государственном педагогическом институте имени С.М.Кирова.

Научный руководитель:
академик АН БССР, доктор физико - математических наук, профессор С.А. ЧУНИХИН.

Официальные оппоненты:

член-корреспондент АН УССР, доктор физико-математических наук, профессор С.Н.ЧЕРНИКОВ, кандидат физико-математических наук Д.И.ЗАЙЦЕВ.

Ведущее предприятие: Гомельский государственный университет.

Автореферат разослан "____" ____________________ 197__ г.

Защита диссертации состоится "____" ________________ 197__ г. на заседании Ученого Совета Института математики АН УССР.

Адрес: г.Киев,4, ул.Репина,3, Институт математики АН УССР.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ СОВЕТА А.Ю.ЛУЧКА

§ I. Одно из основных направлений в общей теории групп состоит в исследовании групп с ограничениями для подгрупп. Налагая на некоторое множество подгрупп группы те или иные условия (условия перестановочности, дополняемости, минимальности и др.) можно выделить самые разнообразные классы групп. В обзорных статьях С.Н.Черникова (I97I г.), С.А.Чунихина и Л.А.Шеметкова (I97I г.) приведены многие глубокие результаты, полученные в этом направлении за последнее время.

В теории конечных групп важное место занимает характеризация групп, для которых определяющим ограничением служит условие перестановочности. При этом выделяются две задачи:

I. Исследовать свойства группы в зависимости от наличия и свойств инвариантных или перестановочных подгрупп.

2. Отыскать в данном классе групп системы инвариантных или перестановочных подгрупп.

Решение второй задачи приводит к факторизационным теоремам, различным критериям разрешимости, нильпотентности и др.

К указанным задачам примыкает и настоящее исследование. Диссертация состоит из двух частей. Первая часть носит вводный характер; в ней дается краткий обзор полученных результатов, приводится перечень обозначений и сводка используемых теорем других авторов. Вторая часть состоит из трех глав основного текста и списка цитированной литературы, содержащего 48 названий.

Приведем краткий обзор полученных результатов. Под группой везде понимается конечная группа.

§ 2. В основу исследований первой главы положена следующая введенная нами классификация конечных групп.

Конечную группу G отнесем к классу $\Delta(k, n)$, если она удовлетворяет следующим требованиям: пусть C_i -композиционный ряд группы G, $\{C_i\}$ - совокупность композиционных рядов группы G, t_i - число членов ряда C_i, неинвариантных в G; тогда

$$\max_i t_i = n, \qquad \max_{i,j} (t_i - t_j) = k$$

Класс $\Delta(0,0)$ составляют группы, любая достижимая подгруппа которых инвариантна в группе. Этот класс групп был известен раньше, как класс групп с транзитивностью инвариантности. Его изучали Бест и Таусская, Цакер, Гашюц, М.Н.Абрамовский и М.И.Каргаполов. Другие классы, соответствующие нашей классификации, никем не изучались.

Основным результатом первой главы является описание разрешимых групп целого семейства классов вида $\Delta(0, n)$, где n - произвольное натуральное число. В зависимости от того, $n > 1$ или $n = 1$, получены следующие теоремы.

Теорема 1.9. Разрешимая группа G тогда и только тогда принадлежит классу $\Delta(0, n)$, $n > 1$, если выполняется одно из следующих условий:

1. Подгруппа Фиттинга $F(G)$ является минимальной инвариантной подгруппой группы G, имеет порядок p^{n+1} и $G/F(G)$ принадлежит классу $\Delta(0,0)$,

2. Подгруппа Фиттинга $\mathfrak{F}(G)$ является минимальной инвариантной подгруппой группы G, имеет порядок p^n, $p \neq 2$, а $G/\mathfrak{F}(G)$ изоморфна одной из следующих групп: A_4, S_4, $SL(2,3)$, $GL(2,3)$.

Теоремы I.5 – I.6. Пусть G – разрешимая группа, $G/\mathcal{L}$ – максимальная сверхразрешимая фактор-группа группы G.

1) Если порядок группы $\mathcal{L}$ нечетный, то группа G тогда и только тогда будет принадлежать классу $\Delta(0,1)$, если $\mathcal{L}$ является единственной минимальной инвариантной подгруппой группы G, имеет порядок p^2 и совпадает с силовской подгруппой группы G, относящейся к наибольшему простому делителю порядка группы.

2) Если порядок группы $\mathcal{L}$ четный, то группа G тогда и только тогда принадлежит классу $\Delta(0,1)$, если она изоморфна одной из следующих групп: A_4, S_4, $SL(2,3)$, $GL(2,3)$.

Наиболее близким к классу $\Delta(0,0)$ является, наряду с классом $\Delta(0,1)$, класс $\Delta(1,1)$. Разрешимые группы этого класса изучены в § 3. Приведем основные результаты.

Непримарная разрешимая группа G из класса $\Delta(1,1)$ обладает следующими свойствами (теорема I.15): если p – наименьший простой делитель порядка ее коммутанта, то или коммутант совпадает с p-силовской подгруппой группы G и содержит все неинвариантные достижимые подгруппы группы G, или порядок и индекс коммутанта имеют наибольшим общим делителем число p^λ, $\lambda > 0$, $p \neq 2$, и любая подгруппа коммутанта инварианта в G.

Все силовские подгруппы разрешимой группы G из класса $\Delta(1,1)$, за исключением, быть может, силовской подгруппы

G_p, относящейся к наименьшему простому делителю порядка коммутанта группы, абелевы; G_p или абелева, или принадлежит классу $\Delta(1,1)$. В последнем случае G является полупрямым произведением G_p и абелевой группы A, причем прямым множителем может быть как G_p, так и A (теорема I.17).

Принадлежность к классу $\Delta(K,n)$ не является наследственной для подгрупп. В каждом классе $\Delta(K,n)$ мы выделяем подкласс $\sigma(K,n)$, отнеся туда те группы, любая подгруппа которых принадлежит классу вида $\Delta(K_1,n_1)$, $n_1 \leq n$.

Гашюц показал, что любая разрешимая группа из класса $\Delta(0,0)$ входит в подкласс $\sigma(0,0)$. Мы доказали аналогичные теоремы для классов $\Delta(0,1)$ и $\Delta(1,1)$. Таким образом, верно общее утверждение:

Теорема I.13. При $n \neq 1$ любая разрешимая группа из класса $\Delta(K,n)$ принадлежит подклассу $\sigma(K,n)$.

В завершающем первую главу параграфе дается следующее обобщение класса $\Delta(0,0)$:

Пусть π - некоторое множество простых чисел, M - максимальная инвариантная π - подгруппа группы G. Группа G принадлежит классу $\Delta_\pi(0,0)$, если любая достижимая подгруппа группы M инвариантна в G. Подкласс $\sigma_\pi(0,0)$ составляют те группы из класса $\Delta_\pi(0,0)$, любая подгруппа которых принадлежит классу $\Delta_\pi(0,0)$.

Показано, что на группы класса $\Delta_\pi(0,0)$ можно обобщить ряд известных теорем о свойствах групп с транзитивностью инвариантности. Отметим еще следующие результаты, гарантирующие принадлежность группы G к классу $\Delta_\pi(0,0)$ или подклассу $\sigma_\pi(0,0)$.

Теорема I.21. Если G - π разрешимая группа из класса $\Delta(0,0)$, то $G \in \sigma\pi(0,0)$.

Теорема I.24. Пусть Q - такая инвариантная подгруппа группы G, что любой композиционный ряд группы G, проходящий через Q, является главным рядом группы G. Если G/Q π - разрешима и меры π - разрешимости групп Q и G/Q взаимно просты, то $G \in \Delta_\pi(0,0)$ (мерой π - разрешимости группы называется произведение всех тех индексов главного ряда группы, которые являются степенями простых чисел из π, и число 1, если таких индексов нет).

Показано, что к классу $\Delta_\pi(0,0)$ принадлежат все группы, у которых силовские подгруппы, соответствующие простым числам из π, циклические (теорема I.19).

§ 3. Во второй главе дается характеризация класса групп с заданной системой перестановочных подгрупп. Определим следующим образом θ - коммутативную группу.

Пусть $\theta = \{\pi_1, \pi_2 \dots\}$ - некоторая система попарно непересекающихся подмножеств множества всех простых чисел. Группу G назовем θ - коммутативной, если любая ее π_i - холловская подгруппа перестановочна с любой ее π_j - холловской подгруппой при $i \neq j$.

Обозначим множество разрешимых θ - коммутативных групп через $\mathcal{K}^\theta$.

Разбиение θ индуцирует разбиение $\theta(n)$ всех простых делителей натурального числа n на непересекающиеся подмножества. Число непустых подмножеств в этом разбиении обозначим $|\theta(n)|$. Для любого θ класс разрешимых групп с $|\theta(|G|)| \leq 2$ входит в $\mathcal{K}^\theta$. Обозначим его $\mathcal{K}_2^\theta$.

Класс групп $\mathfrak{M}$ называется конечным многообразием, если он замкнут относительно перехода к подгруппам, фактор-группам и конечным прямым произведениям. Мы говорим, что конечное многообразие $\mathfrak{M}$ порождено классом $\mathfrak{X}$, если $\mathfrak{M}$ является пересечением всех конечных многообразий, содержащих $\mathfrak{X}$.

Сформулируем теперь основной результат второй главы.

Теорема 2.6. $\mathcal{K}^{\theta}$ является конечным многообразием, порожденным классом $\mathcal{F}_i^{\theta}$.

Этой теоремой выясняется конструкция класса $\mathcal{K}^{\theta}$. Строение же групп этого класса выясняется следующими теоремами.

Теорема 2.7. Разрешимая группа G тогда и только тогда θ - коммутативна, если для любого главного фактора H группы G выполняется: $|\theta(G/C_G(H))||H|)| \leq 2$

Теорема 2.8. Пусть $G \in \mathcal{K}^{\theta}$, $\pi_i, \pi_j \in \theta$. В G существует такая инвариантная $\pi_i \cup \pi_j$ - подгруппа N, что G/N имеет π_i, π_j разложимую $\pi_i \cup \pi_j$- холловскую подгруппу ($\pi_i \cup \pi_j$- группа называется π_i, π_j- разложимой, если она имеет инвариантные π_i- и π_j- холловские подгруппы).

Теорема 2.9. Пусть Z -гиперцентр разрешимой группы G. Если $G/Z \in \mathcal{K}^{\theta}$, то и $G \in \mathcal{K}^{\theta}$.

Заметим, что частный случай θ - коммутативности при $\pi_i = p_i$ изучен Хуппертом. Полученные им результаты вытекают из наших более общих выводов.

Нильпотентная группа θ - коммутативна при любом разбиении θ. В § 3 второй главы из многообразия $\mathcal{K}^{\theta}$ выделен более широкий, чем класс нильпотентных групп, класс разрешимых θ - сверхкоммутативных групп.

Группа называется θ - сверхкоммутативной, если любая инвариантная подгруппа π_i - холловской подгруппы группы перестановочна с любой ее π_j - холловской подгруппой, $i \neq j$. Изучены свойства разрешимых θ - сверхкоммутативных групп и получено необходимое и достаточное условие принадлежности их к классу $\Delta(0,0)$:

Теорема 2.13. Разрешимая θ - сверхкоммутативная группа тогда и только тогда принадлежит к классу $\Delta(0,0)$, если все ее π_i - холловские подгруппы принадлежат классу $\Delta(0,0)$.

§ 4. В третьей, заключительной главе решаются обратные задачи исследования групп с условиями перестановочности: мы даем здесь критерии разрешимости или p - разрешимости конечных групп или их инвариантных подгрупп.

Хорошо известна следующая теорема Ф.Холла:

Группа разрешима, если индекс каждой ее максимальной подгруппы является либо простым числом, либо квадратом простого числа.

Как показал А.В.Романовский, эта теорема Холла остается справедливой, если накладывать ограничения на индексы только тех максимальных подгрупп, которые надстроены над силовской подгруппой, относящейся к наибольшему простому делителю порядка группы.

Результат Романовского усилил И.Я.Поляков, доказав, что группа G разрешима, если индекс каждой ее ненильпотентной максимальной подгруппы либо делится на p, либо есть простое число или квадрат простого числа (p - наибольший простой делитель порядка G).

Оказалось, что в этой теореме ненильпотентность можно заменить более сильным условием не n - дисперсивности (теорема 3.4). Здесь не n - дисперсивной называется группа, каждый гомоморфный образ которой содержит инвариантную подгруппу, относящуюся к наименьшему простому делителю его порядка.

Все отмеченные выше результаты можно вывести как следствия из следующей теоремы 3.2:

Пусть p - наибольший простой делитель порядка группы G. Если индекс в G любой не p - нильпотентной максимальной подгруппы группы G либо делится на p, либо есть простое число или квадрат простого числа, то группа G p - разрешима.

Справедлив и более общий результат:

Теорема 3.I. Пусть $K \triangleleft G$, p-наибольший простой делитель порядка K. Если $|G:M|$ либо делится на p, либо есть простое число или квадрат простого числа для любой максимальной подгруппы M группы G, не содержащей K и не имеющей с K p - нильпотентного пересечения, то подгруппа K p-разрешима.

Теорема 3.6. Пусть $p > 2$ - простой делитель порядка группы G. Пусть любая максимальная подгруппа M группы G, надстроенная над p - силовской подгруппой P из G, либо инвариантна, либо p - нильпотентна. Тогда $G/\bigcap\limits_{y \in G} P^y$ p - нильпотентна. В частности, G p - разрешима.

Аналогичные условия дают также критерий p - разрешимости инвариантной подгруппы группы (теорема 3.5). Приведем еще следующий результат о существовании инвариантной подгруппы группы.

Теорема 3.8. Пусть $K \triangleleft G$ и M - некоторая максимальная подгруппа группы G. Если пересечение $M \cap K$ p - разложимо, то G имеет инвариантную подгруппу одного из следующих видов: I. P - силовская подгруппа из $M \cap K$; 2. P - дополнение в $M \cap K$ или K.

ЛИТЕРАТУРА

1. МЕДВЕДЕВА Р.П. Обобщение конечных групп со свойством транзитивности для нормальных делителей. СМЖ, № 6,(5), 1068-1073, 1965

2. МЕДВЕДЕВА Р.П. О конечных группах с транзитивностью инвариантности, Конечные группы. Минск, 1966, 72-74.

3. МЕДВЕДЕВА Р.П. Конечные разрешимые группы с заданным числом неинвариантных подгрупп в композиционных рядах. Изв.АН БССР, сер. физ.мат.наук, № 3, 1969, 58-62.

4. МЕДВЕДЕВА Р.П. Разрешимость некоторых инвариантных подгрупп конечной группы. ДАН БССР, т.14, № 3, 1970, 204-205.

5. МЕДВЕДЕВА Р.П. Разрешимые θ - коммутативные группы. ДАН БССР, т.14, № 10, 1970, 877-878.