

АКАДЕМИЯ НАУК БЕЛОРУССКОЙ ССР
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукописи

КОМАНДИНА Лариса Владимировна

УДК 519.852.38

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ
С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ ОБЩЕГО ВИДА

01.01.09 – математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Минск – 1986

Работа выполнена в Белорусском ордена Трудового Красного
Знамени государственном университете имени В.И.Ленина

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Р. ГАБАСОВ.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук
В.Т.ДЕМЕНТЬЕВ

кандидат физико-математических наук
В.М.РАКЕЦКИЙ

Ведущее учреждение: Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова, ~~физико-математический факультет~~
~~научно-исследовательский физико-математический институт~~
научно-исследовательский физико-математический центр

Защита состоится " 14 " октября 1966 года в 15 часов
на заседании специализированного совета К 006.19.01 в Институте
математики АН БССР по адресу: 220604, г.Минск, ул.Сурганова, 11,
Институт математики АН БССР.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института
математики АН БССР.

Автореферат разослан " 17 " января 1966 года.

Ученый секретарь специализированного
совета, кандидат физико-математических
наук

Н.Н.Метельский

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

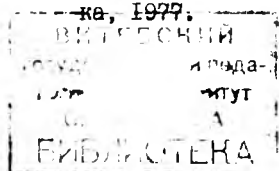
А к т у а л ь н о с т ь т е м ы. В математическом программировании в течение всего периода его существования большое внимание уделяется созданию методов решения как общих, так и специальных задач линейного программирования. Среди специальных задач особое место занимают задачи, являющиеся обобщениями классической транспортной задачи. Интерес к ним не ослабевает в силу многочисленных практических приложений, наличия эффективных алгоритмов решения классической транспортной задачи и в связи с необходимостью решать задачи линейного программирования большого размера.

Классические результаты для транспортных задач изложены в работах Л.В.Канторовича, Дж.Данцига, Л.Форда и Д.Фалкерсона, Д.Б.Юдина, Е.Г.Гольштейна, И.В.Романовского, В.А.Булавского и других. Большинство современных работ^{ж, жж} посвящено различным вопросам численной реализации симплекс-метода и его модификаций, созданию более эффективных (по быстродействию, по объему памяти ЭВМ) программ для решения транспортных задач. Исследуются и методы несимплексного типа.

Диссертационная работа посвящена проблеме построения конечных методов решения задач линейного программирования, в которых наряду с транспортными ограничениями присутствуют линейные ограничения общего вида. Разработанные методы являются релаксационными, они максимально учитывают специфику матрицы

^ж) Романовский И.В. Алгоритмы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1977.

^{жж}) Булавский В.А., Звягина Р.А., Яковлева М.А. Численные методы линейного программирования (специальные задачи). М.: Наука, 1977.



Математическая модель транспортной задачи с дополнительными ограничениями в матричной постановке имеет вид

$$\sum_{(i,j) \in U} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min,$$

$$\sum_{j \in J} x_{ij} = a_i, i \in I; \quad \sum_{i \in I} x_{ij} = b_j, j \in J; \quad (2)$$

$$\sum_{(i,j) \in U} \lambda_{ij}^p x_{ij} = \alpha_p, p = \overline{1, \ell}, \quad d_{*ij} \leq x_{ij} \leq d_{ij}^*, (i,j) \in U,$$

где $I = \{1, 2, \dots, n\}$, $J = \{1, 2, \dots, m\}$, $U = I \times J$ - множество клеток транспортной таблицы, c_{ij} - стоимость перевозки единицы продукта из пункта i в пункт j ; a_i - объем производства в пункте $i \in I$, b_j - объем потребления в пункте $j \in J$; λ_{ij}^p , α_p , d_{*ij} , d_{ij}^* имеют тот же смысл, что и в (1).

Задачи (1) и (2) можно рассматривать как общие задачи линейного программирования. Однако, при этом теряется специфика системы основных ограничений. Поэтому в диссертационной работе алгоритмы строятся с максимальным учетом сетевой и табличной структуры транспортной части ограничений.

В §1 приводится постановка задачи (1) и (2) (в п.1 - сетевая модель, в п.2 - матричная модель), даются определения опоры, доказываются критерии опорности.

Определение 1. Максимальная частичная сеть $S_{on} = \{I, U_{on}\}$, $U_{on} \subset U$, называется опорой сети $S = \{I, U\}$, если система уравнений

$$\sum_{j \in I_i^+(U_{on})} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(U_{on})} x_{ji} = 0, i \in I,$$

$$\sum_{(i,j) \in U_{on}} \lambda_{ij}^p x_{ij} = 0, p = \overline{1, \ell},$$

где $I_i^+(u_{on}) = \{j \in I : (i, j) \in u_{on}\}$, $I_i^-(u_{on}) = \{j \in I : (j, i) \in u_{on}\}$, имеет только тривиальное решение.

Опорному множеству дуг u_{on} поставим в соответствие матрицу $D(u_{on}) = (R_p(L_q), p = \overline{1, \ell}, q = \overline{1, \ell})$, где число $R_p(L_q)$, называемое детерминантом цикла L_q относительно p -го ограничения, подсчитывается по формуле

$$R_p(L_q) = \sum_{(i,j) \in u_{on}} \lambda_{ij}^p \operatorname{sign}(i,j)^{L_q}, \quad (3)$$

$$\operatorname{sign}(i,j)^{L_q} = \begin{cases} 1, & \text{если } (i,j) \in L_q^+, \\ -1, & \text{если } (i,j) \in L_q^-, \\ 0, & \text{если } (i,j) \notin L_q. \end{cases}$$

Здесь через L_q^+ и L_q^- обозначены множества прямых и обратных дуг цикла L_q .

Теорема I (критерий опорности). Связная частичная сеть $S_{on} = \{I, u_{on}\}$ является опорой сети S тогда и только тогда, когда $\det D(u_{on}) \neq 0$.

Аналогичные понятия вводятся и для задачи (2).

Определение 2. Опорой транспортной таблицы T называется максимальное (по количеству элементов) множество клеток $u_{on} \subset U$, для которого имеет только тривиальное решение система

$$\sum_{j \in J_i(u_{on})} x_{ij} = 0, \quad i \in I(u_{on});$$

$$\sum_{i \in I_j(u_{on})} x_{ij} = 0, \quad j \in J(u_{on});$$

$$\sum_{(i,j) \in u_{on}} \lambda_{ij}^p x_{ij} = 0, \quad p = \overline{1, \ell};$$

где $I(u_{on}) = \{i \in I : \exists (i,j) \in u_{on}\}$, $J(u_{on}) = \{j \in J : \exists (i,j) \in u_{on}\}$,

$I_j(u_{on}) = \{i \in I : (i,j) \in u_{on}\}$, $J_i(u_{on}) = \{j \in J : (i,j) \in u_{on}\}$.

В опорном множестве клеток u_{on} выделим независимые

циклы $L_q : (i_1^q, j_1^q), (i_1^q, j_2^q), (i_2^q, j_2^q), \dots, (i_{\kappa}^q, j_{\kappa}^q), (i_{\kappa}^q, j_1^q), q = \overline{1, t}$.
 Для каждого из них по формуле (3), где

$$\text{sign}(i, j)^{L_q} = \begin{cases} I, & \text{если } (i, j) = (i_{\kappa}^q, j_1^q), \kappa = \overline{1, \beta_q}, \\ -I, & \text{если } (i, j) = (i_{\kappa}^q, j_{\kappa+1}^q), \kappa = \overline{1, \beta_q}, j_{\beta_q+1}^q = j_1^q, \\ 0, & \text{если } (i, j) \notin L_q, \end{cases}$$

подсчитаем детерминант $R_p(L_q)$. Составим матрицу $\mathcal{D}(U_{on}) = (R_p(L_q), p = \overline{1, \ell}, q = \overline{1, t})$. Доказана

Теорема 2 (критерий опорности). Связное множество клеток $U_{on}, U_{on} \subset U$, является опорой таблицы T тогда и только тогда, когда 1) $|I(U_{on})| = n$, $|J(U_{on})| = m$, 2) $\det \mathcal{D}(U_{on}) \neq 0$.

В § 2 получены необходимые и достаточные условия оптимальности и субоптимальности потока x (задача (1)) и плана x (задача (2)).

Определение 3. Пара $\{x, S_{on}\}$ из потока x и опоры S_{on} сети S называется опорным потоком. Опорный поток назовем невырожденным, если опорные дуговые потоки удовлетворяют неравенствам $d_{ij}^* < x_{ij} < d_{ij}^*, (i, j) \in U_{on}$.

По опоре S_{on} найдем потенциалы $r_p, p = \overline{1, \ell}; u_i, i \in I$, как решения систем

$$\sum_{p=1}^{\ell} R_p(L_q) r_p = \sum_{(i,j) \in L_q} c_{ij} \text{sign}(i,j)^{L_q}, q = \overline{1, t};$$

$$\begin{cases} u_i - u_j = - \sum_{p=1}^{\ell} \lambda_{ij}^p r_p + c_{ij}, & (i,j) \in U_{on}, \\ u_i = 0, \end{cases}$$

где подмножество U_{ion} множества U_{on} таково, что $S_* = \{I, U_{ion}\}$ - дерево сети S . Тогда $U_{zon} = U_{on} \setminus U_{ion}$, $|U_{zon}| = \ell$ и состоит из первых (собственных) дуг циклов опоры.

По известным потенциалам вычислим оценки неопорных дуг

сети S :

$$\Delta_{ij} = u_i - u_j + \sum_{p=1}^{\ell} \lambda_{ij}^p r_p - c_{ij}, \quad (i, j) \in U_n = U \setminus U_{on}.$$

О помощью этих оценок получена формула приращения стоимости потока

$$\sum_{(i,j) \in U} c_{ij} \Delta x_{ij} = - \sum_{(i,j) \in U_n} \Delta_{ij} \Delta x_{ij},$$

исходя из которой доказана

Теорема 3 (критерий оптимальности). Соотношения

$$\Delta_{ij} = 0 \text{ при } d_{*ij} < x_{ij} < d_{ij}^* ; \quad \Delta_{ij} \geq 0 \text{ при } x_{ij} = d_{ij}^* ;$$

$$\Delta_{ij} \leq 0 \text{ при } x_{ij} = d_{*ij} ; \quad (i, j) \in U_n,$$

достаточны, а в случае невырожденности и необходимы, для оптимальности опорного потока $\{x, S_{on}\}$.

Определение 4. Поток x^ε называется ε -оптимальным (субоптимальным), если

$$\sum_{(i,j) \in U} c_{ij} x_{ij}^\varepsilon - \sum_{(i,j) \in U} c_{ij} x_{ij}^o \leq \varepsilon,$$

где x^o — оптимальный поток задачи (I).

Теорема 4 (критерий субоптимальности). Если на опорном потоке $\{x, S_{on}\}$ выполняется неравенство

$$\beta = \sum_{\substack{(i,j) \in U_n, \\ \Delta_{ij} > 0}} \Delta_{ij} (d_{ij}^* - x_{ij}) + \sum_{\substack{(i,j) \in U_n, \\ \Delta_{ij} < 0}} \Delta_{ij} (d_{*ij} - x_{ij}) \leq \varepsilon,$$

то x — ε -оптимальный поток. Если x^ε — ε -оптимальный поток, то найдется такая опора S_{on} , что для опорного потока $\{x^\varepsilon, S_{on}\}$ выполняется неравенство $\beta \leq \varepsilon$.

Аналогичные результаты в § 2 получены для задачи (2).

Параграф 3 посвящен построению итерации прямого опорного метода решения задач (I) и (2).

В заключение главы I (§4) рассматривается вопрос о построении начального опорного потока (плана) с использованием неполной информации об оптимальном потоке (плане).

Глава II посвящена построению двойственного опорного метода решения задач (1) и (2).

Задача, двойственная к задаче (1), имеет вид

$$\sum_{i \in I} \alpha_i u_i + \sum_{p=1}^l \alpha_p r_p + \sum_{(i,j) \in U} (d_{*ij} v_{ij} - d_{ij}^* w_{ij}) \rightarrow \max, \quad (4)$$

$$u_i - u_j + \sum_{p=1}^l \lambda_{ij}^p r_p + v_{ij} - w_{ij} = c_{ij}, \quad v_{ij} \geq 0, \quad w_{ij} \geq 0, \quad (i,j) \in U.$$

Определение 5. Двойственным планом задачи (1) называется совокупность чисел $(u, r, v, w) = (u_i, i \in I; r_p, p = \overline{1, l}; v_{ij}, w_{ij}, (i,j) \in U)$, удовлетворяющая всем ограничениям задачи (4). Каждому двойственному плану задачи (1) ставится в соответствие копоток $\delta = (\delta_{ij}, (i,j) \in U)$ с компонентами $\delta_{ij} = u_i - u_j + \sum_{p=1}^l \lambda_{ij}^p r_p - c_{ij}$.

Один и тот же копоток может порождаться различными двойственными планами, на которых двойственная целевая функция принимает различные значения. Чтобы избежать этого, введем условия согласования:

$$\begin{aligned} v_{ij} &= -\delta_{ij}, \quad w_{ij} = 0 && \text{при } \delta_{ij} \leq 0, \\ v_{ij} &= 0, \quad w_{ij} = \delta_{ij} && \text{при } \delta_{ij} > 0, \quad (i,j) \in U, \end{aligned}$$

при выполнении которых двойственная целевая функция принимает наибольшее значение на данном копотоке.

Понятие опоры S_{on} остается прежним.

Определение 6. Пара $\{\delta, S_{on}\}$ из копотока δ и опоры S_{on} сети S называется опорным копотоком. Если $\delta_{ij} \neq 0, (i,j) \in U_n$, то опорный копоток называется невырожденным.

Определение 7. Совокупность чисел $\alpha = (\alpha_{ij}, (i,j) \in U)$

называется псевдопоток, если она удовлетворяет основным ограничениям задачи (1):

$$\sum_{j \in I_i^+(U)} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(U)} x_{ji} = a_i, \quad i \in I,$$

$$\sum_{(i,j) \in U} \lambda_{ij}^p x_{ij} = \alpha_p, \quad p = \overline{1, P}.$$

Псевдопоток x назовем опорным, соответствующим опорному потоку $\{\delta, S_{on}\}$, если для неопорных компонент выполняются условия:

$$x_{ij} = d_{ij}^* \text{ при } \delta_{ij} > 0, \quad x_{ij} = d_{*ij} \text{ при } \delta_{ij} \leq 0, \quad (i,j) \in U_n.$$

Выводится формула для нахождения x_{ij} , $(i,j) \in U_{2on}$. Остальные значения x_{ij} , $(i,j) \in U_{1on}$, вычисляются из условий баланса в узлах сети.

В § 1 рассматривается также задача, двойственная к задаче (2):

$$\sum_{i \in I} a_i u_i + \sum_{j \in J} b_j v_j + \sum_{p=1}^P \alpha_p r_p + \sum_{(i,j) \in U} (d_{*ij} v_{ij} - d_{ij}^* w_{ij}) \rightarrow \max,$$

$$u_i + v_j + \sum_{p=1}^P \lambda_{ij}^p r_p + v_{ij} - w_{ij} = c_{ij}, \quad v_{ij} \geq 0, \quad w_{ij} \geq 0, \quad (i,j) \in U.$$

Вводятся определения двойственного плана (перевозок) задачи (2), коплана δ , опорного коплана $\{\delta, U_{on}\}$, невырожденного опорного коплана, псевдоплана x . Указан способ вычисления компонент x_{ij} псевдоплана x в соответствие с опорным копланом $\{\delta, U_{on}\}$.

В § 2 получена формула приращения двойственной целевой функции в задаче (4), доказаны критерий оптимальности и достаточное условие субоптимальности:

Теорема 5. Соотношения

$$x_{ij} = d_{*ij} \text{ при } \delta_{ij} < 0, \quad x_{ij} = d_{ij}^* \text{ при } \delta_{ij} > 0;$$

$$d_{*ij} \leq x_{ij} \leq d_{ij}^* \text{ при } \delta_{ij} = 0, (i,j) \in U_{on}.$$

достаточны, а в случае невырожденности и необходимы, для оптимальности опорного копотока $\{\delta, S_{on}\}$ (опорного коплану $\{\delta, U_{on}\}$). Псевдопоток (псевдоплан) x , построенный по $\{\delta, S_{on}\}$ ($\{\delta, U_{on}\}$), является оптимальным потоком (планом) исходной задачи (I) (задачи (2)).

Теорема 6. Если для псевдопотока (псевдоплана) x , соответствующего опорному копотоку $\{\delta, S_{on}\}$ (опорному коплану $\{\delta, U_{on}\}$), справедливы соотношения $d_{*ij} \leq x_{ij} \leq d_{ij}^*$, $(i,j) \in U_{on}$, и неравенство

$$\beta = \sum_{\substack{(i,j) \in U_{on}, \\ \delta_{ij} > 0}} \delta_{ij} (d_{ij}^* - x_{ij}) + \sum_{\substack{(i,j) \in U_{on}, \\ \delta_{ij} < 0}} \delta_{ij} (d_{*ij} - x_{ij}) \leq \varepsilon,$$

то x — ε -оптимальный поток (план) задачи (I) (задачи (2)).

Двойственный алгоритм построения субоптимального (оптимального) псевдопотока задачи (I) (псевдоплана задачи (2)) описан в § 3. При этом использовано экстремальное правило замены опоры. Доказывается конечность метода для невырожденных задач.

В главе III разработан адаптивный метод решения задачи (I) (§1) и задачи (2) (§2). В основе адаптивного метода лежит принцип уменьшения оценки субоптимальности β . Метод позволяет сократить количество замен опоры, что значительно уменьшает работу по вычислению потенциалов и подходящего направления ℓ . Доказывается конечность метода для невырожденных задач.

В § 3 гл. III рассматривается транспортная задача с основными ограничениями в интервальной форме

$$\sum_{(i,j) \in U} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \quad d_{*ij} \leq x_{ij} \leq d_{ij}^*, (i,j) \in U;$$

$$a_{*i} \leq \sum_{j \in I_i^+(U)} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(U)} x_{ji} \leq a_i^*, i \in I, \quad (5)$$

которая возникает, когда известны пределы a_{*i} и a_i^* допустимых колебаний интенсивностей узлов $i \in I$.

Определение 8. Опорой сети в задаче (5) назовем совокупность $\{I_{on}, U_{on}\}$ узлов $I_{on} \subset I$ и дуг $U_{on} \subset U$, для которой система

$$\sum_{j \in I_i^+(U_{on})} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(U_{on})} x_{ji} = 0, \quad i \in I_{on},$$

имеет только тривиальное решение $x_{ij} = 0, (i,j) \in U_{on}$, но имеет нетривиальное решение система

$$\sum_{j \in I_i^+(U^*)} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(U^*)} x_{ji} = 0, \quad i \in I^*,$$

для любой из совокупностей $\{I^*, U^*\}$ вида

- а) $I^* = I_{on}; U^* = U_{on} \cup (i_*, j_*),$ где $(i_*, j_*) \notin U_{on};$
- б) $U^* = U_{on}; I^* = I_{on} \setminus i_*,$ где $i_* \in I_{on}.$

Теорема 7. Совокупность $\{I_{on}, U_{on}\}$ является опорой в задаче (5) тогда и только тогда, когда в частичной сети $S_{on} = \{I, U_{on}\}$ каждая компонента связности $S_{on}^k = \{I^k, U_{on}^k\}, k = \overline{1, N},$ 1) не содержит циклов, 2) содержит ровно один неопорный узел $i_k.$

В дальнейшем под S_{on} с указанными свойствами и понимается опора сети в задаче (5). Опорный поток $\{x, S_{on}\}$ называется невырожденным, если выполняются неравенства

$$a_{*i} < \sum_{j \in I_i^+(U)} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(U)} x_{ji} < a_i, i \in I_n = I \setminus I_{on}; \quad d_{*ij} < x_{ij} < d_{ij}^*, (i,j) \in U_{on}.$$

В параграфе 3 приводятся критерии оптимальности и субоптимальности. В частности, доказана

Теорема 8. Соотношения

$$\Delta_{ij} \geq 0 \text{ для } x_{ij} = d_{ij}^*, \quad \Delta_{ij} \leq 0 \text{ для } x_{ij} = d_{*ij};$$

$$\Delta_{ij} = 0 \text{ для } d_{*ij} < x_{ij} < d_{ij}^*, (i,j) \in U_n = U \setminus U_{on};$$

$$u_i \geq 0 \text{ для } \omega_{*i} = 0; \quad u_i \leq 0 \text{ для } \omega_i^* = 0; \quad u_i = 0 \text{ для } \omega_{*i} \omega_i^* \neq 0, i \in I_{on},$$

достаточны, а в случае невырожденности и необходимы, для оптимальности опорного потока $\{x, S_{on}\}$.

Здесь ω_{*i} , ω_i^* - нижняя и верхняя невязки в узле i :

$$\omega_{*i} = a_{*i} - \left(\sum_{j \in I_i^+(U)} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(U)} x_{ji} \right), \quad \omega_i^* = a_i^* - \left(\sum_{j \in I_i^+(U)} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(U)} x_{ji} \right).$$

Далее в §3 строится адаптивный алгоритм поиска оптимального (ε -оптимального) потока задачи (5), конечный для невырожденных задач.

В §4 рассматривается транспортная задача с дополнительными ограничениями в интервальной форме

$$\sum_{(i,j) \in U} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \quad d_{*ij} \leq x_{ij} \leq d_{ij}^*, (i,j) \in U,$$

$$\sum_{j \in I_i^+(U)} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(U)} x_{ji} = \alpha_i, i \in I, \quad \alpha_{*p} \leq \sum_{(i,j) \in U} \lambda_{ij}^p x_{ij} \leq \alpha_p^*, p = \overline{1, \ell}.$$

Для этой задачи введены понятия опоры, опорного потока, невырожденного опорного потока, сформулированы критерии опорности, оптимальности и субоптимальности, построен алгоритм получения оптимального (ε -оптимального) потока; приведены формулы пересчета обратной матрицы $[\Delta(u_{on})]^{-1}$ для всех случаев замены опоры.

В каждом параграфе главы III построенный алгоритм иллюстрируется числовым примером.

На защиту выносятся следующие результаты.

Для транспортной задачи с дополнительными линейными ог-

раничениями общего вида

- введена опора и доказан критерий опорности;
- сформулированы и доказаны критерии оптимальности и субоптимальности;
- построены прямой опорный, двойственный опорный и адаптивный алгоритмы;
- доказаны теоремы о конечности построенных алгоритмов в случае невырожденных опорных потоков (планов).

Для интервальной транспортной задачи

- введена опора и доказан критерий опорности;
- сформулированы и доказаны критерии оптимальности и субоптимальности;
- построен адаптивный алгоритм и доказана его конечность в невырожденном случае.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Командина Л.В. Нагруженная транспортная задача. - В кн.: Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы линейного программирования. Ч.2.: - Мн., изд-во БГУ, 1978, с.216-222.
2. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Командина Л.В. Условная оптимизация потока. - В кн.: Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы линейного программирования. Ч.3.: - Мн., изд-во БГУ, 1980, с.158-169.
3. Габасов Р., Костюкова О.И., Командина Л.В. Методы решения больших и специальных задач линейного программирования. - В кн.: IV Всесоюзное совещание по управлению многосвязными системами.: Тез. докл., М., 1978, с. 125-126.
4. Командина Л.В. Алгоритм решения транспортной задачи с огра-

- ничением на совокупность перевозок. - Вестник Белорус. ун-та. Сер. I, физ., мат. и мех.: Мн., 1979, №3, с. 47-49.
5. Командина Л.В. Адаптивный метод решения транспортной задачи с дополнительными ограничениями. - Мн., 1979, 29 с. Рукопись представлена Рекол. ж. Вестник Белорус. ун-та. Сер. I, физ., мат. и мех. Деп. в ВИНТИ 6 июня 1979, № 2021-79.
6. Командина Л.В. Адаптивный метод решения транспортной задачи с дополнительными ограничениями. - В кн.: Методы и программы решения оптимизационных задач на графах и сетях.: Тез. докл. I-го Всесоюзного совещания, Новосибирск, 1980, с. 134-136.
7. Командина Л.В. Прямой и двойственный опорные методы решения транспортной задачи с дополнительными ограничениями. - Мн., 1978, 48с. Рукопись представлена Рекол. ж. Вестник Белорус. ун-та. Сер. I, физ., мат. и мех. Деп. в ВИНТИ 14 декабря 1978, № 3794-78.

Подписано к печати 06.01.86 . АТ 17012
Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 0,93. Уч.-изд. л. 0,85.
Тираж 100 экз. Заказ 2 . Бесплатно.
Ротапринт Института математики АН БССР.
220604, Минск-72, ул. Сурганова, 11.